4. Interpolarea funcțiilor

Fie $f : [a,b] \to R$ şi fie $x_0, x_1, ..., x_n$, $(n+1)$ puncte distincte din intervalul $[a,b]$, numite *noduri*.
Problema interpolării funcției f în nodurile x_i, $i = \overline{0,n}$, constă în determinarea unei funcții $g : [a,b] \to R$, dintr–o clasă de funcții cunoscută, cu proprietatea $g(x_i)=f(x_i)$, $i = \overline{0,n}$.

Pusă sub această formă generală problema poate să nu aibă soluție sau să aibă o infinitate de soluții.

Cea mai utilizată clasă de funcții de interpolare este clasa polinoamelor, datorită uşurinței cu care se integrează şi se derivează.

Interpolarea funcțiilor prezintă o importanță deosebită pentru cazul când funcția nu este definită printr–o relație analitică, ci printr–un tablou de valori, ce reprezintă, de exemplu, rezultatele unei experiențe. Chiar şi atunci când funcția este dată printr–o relație analitică, dar această relație este *complicată* se poate alege interpolarea în locul calculului direct.

§4.1. Polinomul de interpolare al lui Lagrange

Teorema 1. *Fie* $f: [a,b] \to R$ *şi* $x_0, x_1, ..., x_n$, $(n+1)$ *noduri din intervalul* $[a,b]$. *Atunci există un polinom unic* P_n, *de gradul* n, *care interpolează funcția* f *în nodurile* x_i, $i = \overline{0,n}$ ($f(x_i)=P_n(x_i)$, $i = \overline{0,n}$). *Acest polinom se numeşte polinomul de interpolare al lui Lagrange.*

Demonstrație.
Căutăm un polinom P_n sub forma următoare:

$$P_n(x)=L_0(x) \cdot f(x_0)+ L_1(x) \cdot f(x_1)+...+ L_n(x) \cdot f(x_n),$$

unde L_i sunt polinoame de gradul n ce urmează să fie determinate. Deoarece dorim ca $P_n(x_i)=f(x_i)$, vom pune condițiile:

$$L_i(x_j)=\delta_{ij}=\begin{cases}1 & \text{dacã} \quad j=i\\ 0 & \text{dacã} \quad j\neq i\end{cases}.$$

Deoarece $L_i(x_j)=0$ pentru $i\neq j$, rezultă că L_i admite rădăcinile

$$x_0, x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1},\dots, x_n.$$

Aşadar,

$$L_i(x)=a_i(x-x_0)\dots(x-x_{i-1})(x-x_{i+1})\dots(x-x_n).$$

Cum $L_i(x_i)=1$, rezultă

$$a_i=\frac{1}{(x_i-x_0)\dots(x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i+1})\dots(x_i-x_n)}.$$

În concluzie avem

$$P_n(x)=\sum_{i=0}^{n}L_i(x)f(x_i) \tag{1}$$

unde

$$L_i(x)=\prod_{\substack{j=0\\ j\neq i}}^{n}\frac{(x-x_j)}{(x_i-x_j)}. \tag{2}$$

Evident polinomul (1) are gradul n şi are proprietatea $P_n(x_i)=f(x_i)$, $i=\overline{0,n}$.
Fie Q_n un alt polinom de gradul n cu proprietatea $Q_n(x_i)=f(x_i)$, $i=\overline{0,n}$ şi fie $R=P_n-Q_n$. Deoarece $\text{grad}R\leq n$ şi $R(x_i)=0$, $i=\overline{0,n}$ rezultă că R este polinom identic nul, deci că $P_n=Q_n$. ❑

Exemplu. Fie nodurile $x_0=-1$, $x_1=1$, şi $x_2=2$ şi $f(x_0)=2$, $f(x_1)=f(x_2)=1$. Atunci

$$P_2(x)=\frac{(x-1)(x-2)}{(-1-1)(-1-2)}2+\frac{(x+1)(x-2)}{(1+1)(1-2)}1+\frac{(x+1)(x-1)}{(2+1)(-2-1)}1.$$

Efectuând calculele obținem $P_2(x)=\frac{1}{6}\left(x^2-3x+8\right)$.

În continuare vom nota eroarea în fiecare punct cu

$$E(f;x)=f(x)-P_n(x) \tag{3}$$

Evident $E(f;x_i)=0$, $i=\overline{0,n}$. Introducem de asemenea notația:

$$U_{n+1}(x)=\prod_{i=0}^{n}(x-x_i) \tag{4}$$

Teorema 2. *Dacă $f\in C^{(n+1)}[a,b]$, atunci pentru orice $x\in[a,b]$, există $\xi_x\in(a,b)$ astfel încât*

$$E(f;x)=\frac{f^{(n+1)}(\xi_x)}{(n+1)!}U_{n+1}(x) \tag{5}$$

Demonstrație.
Considerăm funcția auxiliară

$$g(t) = f(t) - P_n(t) - \frac{E(f;x)}{U_{n+1}(x)} U_{n+1}(t), \quad t \in [a,b], \quad x \neq x_i$$

Observăm că g se anulează în $(n+2)$ puncte distincte $x_0, x_1, ..., x_n, x$. Din teorema lui Rolle rezultă că există $\xi_x \in (a,b)$ astfel încât $g^{(n+1)}(\xi_x)=0$.
Cum

$$g^{(n+1)}(t) = f^{(n+1)}(t) - \frac{E(f;x)}{U_{n+1}(x)}(n+1)!$$

rezultă

$$E(f;x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi_x)}{(n+1)!} U_{n+1}(x) .$$

❑

Corolar. *Dacă există* $M>0$ *astfel încât* $|f^{(n+1)}(x)| \leq M$ *pentru orice* $x \in [a,b]$, *atunci:*

$$|E(f;x)| \leq \frac{M}{(n+1)!} |U_{n+1}(x)| \ , \quad x \in [a,b] \quad .$$

Exemplu. Fie funcția $f(x)=\ln x$ şi nodurile 0.4; 0.5; 0.7; 0.8. Evaluăm eroarea în punctul $x=0.6$.

$$U_4(0.6)=(0.2)(0.1)(-0.1)(-0.2)=0.0004 .$$

$$\left|f^{IV}(x)\right| = \left|-\frac{6}{x^4}\right| \leq \frac{6}{(0,4)^4} \cong 234.4 \ , \quad x \in [0.4;\ 0.8] \quad .$$

Rezultă

$$|E(f;0.6)| \leq \frac{1}{24} 234.4 \cdot 0.0004 \cong 0.0039 \quad ,$$

acest număr fiind doar un majorant al erorii.
Dacă folosim următoarele valori în noduri

X	0.4	0.5	0.7	0.8
$f(x)$	–0.916291	–0.693147	–0.356675	–0.223144

şi calculăm polinomul lui Lagrange obținem: $P_3(0.6)=-0.509975$.
Pe de altă parte $\ln(0.6)=-0.510826$. Rezultă că $E(f;\ 0.6)=-0.000851$, ceea ce confirmă afirmația de mai sus.

Observația 1. *Dacă* $f=Q$ *este un polinom de grad cel mult* n, *atunci* $E(f;x)=0$, *oricare* $x \in [a,b]$.
Afirmația rezultă din Teorema 2 deoarece, în acest caz $f^{(n+1)}(x)=0$.

Observația 2. $E(f+g;x)=E(f;x)+E(g;x)$

Într–adevăr, dacă P_n^f este polinomul de interpolare pentru f şi P_n^g este polinomul de interpolare pentru g, atunci $P_n^f + P_n^g$ este polinomul de interpolare pentru $f+g$ şi deci

$$E(f+g;x) = f(x) + g(x) - P_n^f(x) - P_n^g(x) = E(f;x) + E(g;x).$$

În continuare vom presupune că nodurile sunt echidistante, deci că $x_i=x_0+i\cdot h$, $i=\overline{0,n}$, unde

$$h = \frac{x_n - x_0}{n} \quad . \tag{6}$$

Considerăm de asemenea schimbarea de variabilă

$$x=x_0+th \tag{7}$$

Înlocuind (6) şi (7) în (2) obținem:

$$\widetilde{L}_i(t) = L_i(x_0+th) = \prod_{\substack{j=0 \\ j\neq i}}^{n} \frac{(t-j)}{(i-j)}$$

Folosind notația:

$$\pi_{n+1}(t) = t(t-1)(t-2)...(t-n) = \prod_{j=0}^{n}(t-j) \tag{8}$$

obținem:

$$\widetilde{L}_i(t) = \frac{(-1)^{n-i}}{i!(n-i)!}\frac{\pi_{n+1}(t)}{t-i} = \frac{(-1)^{n-i}}{n!}C_n^i\frac{\pi_{n+1}(t)}{t-i}$$

Obținem astfel expresia polinomului lui Lagrange pentru noduri echidistante

$$\widetilde{P}_n(t) = \frac{\pi_{n+1}(t)}{n!}\sum_{i=0}^{n}(-1)^{n-i}C_n^i\frac{f(x_i)}{t-i} \quad . \tag{9}$$

Eroarea devine:

$$\widetilde{E}(t) = \frac{\pi_{n+1}(t)}{(n+1)!}h^{n+1}f^{(n+1)}(\xi_t) \quad . \tag{10}$$

În continuare considerăm un şir de diviziuni $\{\Delta_n\}$ ale intervalului $[a,b]$ cu

$$\lim_{n\to\infty}\|\Delta_n\| = 0, \quad \Delta_n : a = x_0^{(n)} < x_1^{(n)} < ... < x_n^{(n)} = b \ .$$

Notăm cu P_n – polinomul lui Lagrange care interpolează funcția f în nodurile $x_i^{(n)}$, $i=\overline{0,n}$. Dacă n este mare, P_n coincide cu f într–un număr mare de noduri, deci ne aşteptăm ca eroarea

$$E_n(f;x)=f(x)-P_n(x)$$

să fie mică, eventual ca $\lim\limits_{n\to\infty} E_n(f;x) = 0$.

Ajungem astfel la următoarea întrebare:
În ce condiţii şirul de polinoame $\{P_n\}$ *converge punctual (eventual uniform) la funcţia* f *pe intervalul* $[a,b]$?

În anul 1912, S. N. Bernstein a arătat că pentru funcţia $f(x)=|x|$, $x\in[-1,1]$, dacă alegem nodurile echidistante $x_i^{(n)}=-1+\frac{2i}{n}$, $i=\overline{0,n}$, atunci $\lim\limits_{n\to\infty} P_n(x)\neq f(x)$ dacă $x\notin\{-1,0,1\}$.

S–ar putea crede că acest lucru se datorează faptului că funcţia modul nu este derivabilă în origine. Următorul exemplu dat de C. Runge în 1901 arată că există funcţii indefinit derivabile pentru care $\{P_n\}$ nu converge la f.

Fie $f(x)=\dfrac{1}{1+x^2}$, $x\in[-5,5]$.

Evident $f\in C^\infty[-5,5]$. Fie nodurile echidistante

$$x_i=-5+\frac{10}{n}i\ ,\quad i=\overline{0,n}\,.$$

Se poate arăta că $\lim\limits_{n\to\infty} P_n(x)=f(x)$ dacă $|x|\le c$ şi $\lim\limits_{n\to\infty} P_n(x)\neq f(x)$ dacă $|x|>c$, unde $c\cong 3.6334$ este o rădăcină a ecuaţiei:

$$(5+x)\ln(5+x)+(5-x)\ln(5-x)-5\ln 26-2\,\mathrm{arctg}\,5=0.$$

În anul 1914, S. N. Bernstein a arătat că pentru orice sistem de noduri $\{x_i^{(n)}\}$, $i=\overline{0,n}$ din intervalul $[a,b]$, dat dinainte, există o funcţie continuă $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ astfel încât şirul polinoamelor lui Lagrange $\{P_n\}$ care interpolează funcţia f în aceste noduri nu converge uniform la f pe $[a,b]$.

Există totuşi şi situaţii când convergenţa are loc. Se poate demonstra următoarea teoremă:

Teorema 3. *Dacă* $f\in C^\infty(\mathbb{R})$ *şi se dezvoltă în serie Taylor pe* $\mathbb{R}$*, atunci pentru orice sistem de noduri distincte şi echidistante* $\{x_i^{(n)}\}$, $i=\overline{0,n}$ *din* $[a,b]$ *, şirul polinoamelor* $\{P_n\}$ *care interpolează funcţia* f *în aceste noduri converge uniform la* f *pe* $[a,b]$.

Se pune întrebarea dacă interpolarea cu polinoame Lagrange este utilă în practică, din moment ce aşa cum am văzut, în general şirul polinoamelor de interpolare $\{P_n\}$ nu converge la f.

Răspunsul este că interpolarea Lagrange este utilă. Se constată în practică faptul că pentru un punct $\alpha\in[a,b]$, eroarea $|f(\alpha)-P_n(\alpha)|$ scade până la un punct, pe măsură ce n creşte, şi deci, pentru n relativ mic, $P_n(\alpha)$ aproximează acceptabil valoarea $f(\alpha)$. Pentru valori mari ale lui n, interpolarea Lagrange nu este recomandată.

Din cele prezentate până acum, rezultă că şirul polinoamelor de interpolare asociate unei funcţii continue nu converge uniform, în mod necesar, la această funcţie. Se pune întrebarea dacă o funcţie continuă poate fi aproximată uniform cu polinoame. Răspunsul a fost dat de K. Weierstrass în anul 1885.

Teorema 4. *Fie* $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ *continuă. Atunci, pentru orice* $\varepsilon > 0$, *există un polinom* Q_ε *astfel încât*

$$\|f - Q_\varepsilon\| = \sup\{|f(x) - Q_\varepsilon(x)|; x \in [a,b]\} < \varepsilon \ .$$

Evident, dacă luăm $\varepsilon = \dfrac{1}{n}$, rezultă că există un şir de polinoame $\{Q_n\}$ care converge uniform pe $[a,b]$ la funcţia f. Din teorema lui Weierstrass rezultă că polinoamele algebrice pe $[a,b]$ sunt, în raport cu funcţiile continue pe $[a,b]$, în aceeaşi relaţie ca numerele raţionale $\mathbb{Q}$ faţă de numerele reale $\mathbb{R}$.

Teorema lui Weierstrass este extrem de importantă în analiza matematică, în general, şi în analiza numerică, în special. Dintre numeroasele demonstraţii date acestei teoreme, cea mai cunoscută este demonstraţia dată de S. N. Bernstein, în anul 1912. Bernstein a arătat cum se poate construi şirul de polinoame care aproximează funcţia f şi anume:

$$B_n(x) = \sum_{k=0}^{n} C_n^k (1-x)^{n-k} x^k f\left(\frac{k}{n}\right) \ , \quad x \in [0,1] \ .$$

Acest şir de polinoame, care se numesc *polinoame Bernstein*, au proprietatea $B_n \xrightarrow{u} f$ pe $[0,1]$. Trecerea de la $[0,1]$ la $[a,b]$ se face cu uşurinţă printr–o schimbare de variabilă. Evident, polinoamele Bernstein nu sunt polinoame de interpolare. Din păcate, convergenţa şirului $\{B_n\}$ către f este destul de înceată, şi din această cauză, în practică, polinoamele Bernstein nu se folosesc la aproximarea directă a funcţiilor. Teorema lui Weierstrass este importantă prin implicaţiile sale teoretice, dar şi practice, aşa cum vom vedea, de exemplu, la integrarea numerică.

§4.2. Interpolarea iterativă. Metoda Aitken

În acest paragraf vom nota polinomul lui Lagrange care interpolează funcţia f în nodurile x_i, $i = \overline{0,n}$ cu $P_n(x;x_0,x_1,...,x_n)$. Evident,

$$P_0(x;x_0) = f(x_0).$$

Teorema 1*. Are loc următoare relaţie de recurenţă:*

$$P_n(x;x_0,x_1,...,x_n) = \frac{1}{x_n - x_{n-1}} \begin{vmatrix} P_{n-1}(x;x_0,x_1,...,x_{n-2},x_{n-1}) & x_{n-1} - x \\ P_{n-1}(x;x_0,x_1,...,x_{n-2},x_n) & x_n - x \end{vmatrix} \ .$$

Demonstraţie.
Fie

$$Q(x)=\frac{1}{x_n-x_{n-1}}\begin{vmatrix} P_{n-1}(x;x_0,x_1,...,x_{n-2},x_{n-1}) & x_{n-1}-x \\ P_{n-1}(x;x_0,x_1,...,x_{n-2},x_n) & x_n-x \end{vmatrix}.$$

Observăm că pentru orice $i=\overline{0,n-2}$ avem

$$Q(x_i)=\frac{1}{x_n-x_{n-1}}\begin{vmatrix} f(x_i) & x_{n-1}-x \\ f(x_i) & x_n-x \end{vmatrix}=f(x_i).$$

În continuare, avem:

$$Q(x_{n-1})=\frac{1}{x_n-x_{n-1}}\begin{vmatrix} f(x_{n-1}) & 0 \\ P_{n-1}(x_{n-1};x_0,...,x_{n-2},x_n) & x_n-x_{n-1} \end{vmatrix}=f(x_{n-1}),$$

$$Q(x_n)=\frac{1}{x_n-x_{n-1}}\begin{vmatrix} P_{n-1}(x_n;x_0,...,x_{n-2},x_{n-1}) & x_{n-1}-x_n \\ f(x_n) & 0 \end{vmatrix}=f(x_n).$$

Aşadar, Q este un polinom de gradul n care interpolează funcția f în nodurile x_i, $i=\overline{0,n}$. Din unicitatea polinomului de interpolare al lui Lagrange, rezultă că $Q=P_n$.

Metoda Aitken este bine ilustrată de următorul tabel:

x_0	$x_0-\alpha$	$f(x_0)$					
x_1	$x_1-\alpha$	$f(x_1)$	$P_1(\alpha;x_0,x_1)$				
x_2	$x_2-\alpha$	$f(x_2)$	$P_1(\alpha;x_0,x_2)$	$P_2(\alpha;x_0,x_1,x_2)$			
x_3	$x_3-\alpha$	$f(x_3)$	$P_1(\alpha;x_0,x_3)$	$P_2(\alpha;x_0,x_1,x_3)$	$P_3(\alpha;x_0,x_1,x_2,x_3)$		
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	
x_n	$x_n-\alpha$	$f(x_n)$	$P_1(\alpha;x_0,x_n)$	$P_2(\alpha;x_0,x_1,x_n)$	$P_3(\alpha;x_0,x_1,x_2,x_n)$	$\ldots$	$P_n(\alpha;x_0,x_1,...,x_n)$

Algoritmul de interpolare iterativă (metoda Aitken)

Pentru $i := 1, n$ execută

$y_i := f(x_i)$, $d_i := x_i - \alpha$;

sfârşit pentru i ;

Pentru $i := 2, n$ execută

Pentru $j := i, n$ execută

$$y_j := \frac{y_{i-1}d_j - y_j d_{i-1}}{x_j - x_{i-1}}$$

sfârşit pentru i

sfârşit pentru j .

§4.3. Polinoame Cebîşev

Polinoamele Cebîşev sunt definite pe intervalul $[-1,1]$ prin relația:

$$T_n(x) = \cos(n\cdot\arccos(x)) \quad . \tag{1}$$

Deoarece

$$T_{n+1}(x)+T_{n-1}(x)=\cos[(n+1)\arccos x]+ \cos[(n-1)\arccos x]=2x\cos(n\cdot\arccos x),$$

rezultă următoarea relație de recurență:

$$T_{n+1}(x)=2xT_n(x)-T_{n-1}(x), \quad n \ge 1 \tag{2}$$

Cum

$$T_0(x)=1 \quad \text{şi} \quad T_1(x)=x,$$

din (2) rezultă

$$T_2(x)=2x^2-1,\ T_3(x)=4x^3-3x,\ T_4(x)=8x^4-8x^2+1,\ T_5(x)=16x^5-20x^3+5x \ \text{ etc.}$$

Observăm că $T_n(x)=2^{n-1}x^n+...$

Dacă $T_n(x)=0$, atunci

$$n\cdot\arccos(x)=(2k+1)\frac{\pi}{2},$$

de unde rezultă

$$x_k=\cos(2k+1)\frac{\pi}{2n} \quad , \quad k=\overline{0,n\text{-}1} \quad . \tag{3}$$

Aşadar, polinomul T_n are n rădăcini reale distincte, date de formula (3). Pe de altă parte, avem

$$T_n'(x)=n\cdot\frac{\sin(n\cdot\arccos(x))}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Dacă $T_n'(x)=0$, atunci $n\cdot\arccos(x)=k\pi$, şi deci

$$y_k=\cos\left(\frac{k\pi}{n}\right), k=\overline{1,n-1} \tag{4}$$

sunt zerourile derivatei T_n'. Se observă că rădăcinile derivatei T_n' separă rădăcinile polinomului T_n. Într–adevăr,

$$(2k+1)\cdot\frac{\pi}{2n}<(k+1)\cdot\frac{\pi}{n}<(2k+3)\cdot\frac{\pi}{2n},$$

de unde rezultă

$$x_k=\cos(2k+1)\frac{\pi}{2n}>y_{k+1}=\cos(k+1)\frac{\pi}{n}>x_{k+1}=\cos(2k+3)\frac{\pi}{2n} \quad .$$

Constatăm de asemenea că

$$T_n(y_k)=\cos\left[n\cdot\arccos\left(\cos\left(\frac{k\pi}{n}\right)\right)\right]=\cos\left(k\pi\right)=(-1)^k.$$

Cum $|T_n(x)|\le 1$, $x\in[-1,1]$, rezultă că y_k, $k=\overline{1,n-1}$, sunt puncte de extrem local pentru T_n. Pe de altă parte, avem $T_n(-1)=(-1)^n$ şi $T_n(1)=1$.

Aşadar, T_n are $(n+1)$ puncte de extrem local şi îşi schimbă semnul de n ori pe intervalul $[-1,1]$.

Prezentăm în continuare tabelul de variaţie pentru polinoamele T_3 şi T_4.

x	-1		$-\frac{\sqrt{3}}{2}$		$-\frac{1}{2}$		0		$\frac{1}{2}$		$\frac{\sqrt{3}}{2}$		1
T_3'			$+$		0		$-$		0		$+$		
T_3	-1	$\nearrow$	0	$\nearrow$	1	$\searrow$	0	$\searrow$	-1	$\nearrow$	0	$\nearrow$	1

x	-1		$-\frac{1}{\sqrt{2}}$		0		$\frac{1}{\sqrt{2}}$		1
T_4'		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
T_4	1	$\searrow$	-1	$\nearrow$	1	$\searrow$	-1	$\nearrow$	1

Următorul rezultat datorat lui Cebâşev pune în evidenţă o proprietate remarcabilă a zerourilor polinoamelor Cebîşev.

Teorema 1. *Fie* $x_k=(2k+1)\dfrac{\pi}{2n}, k=\overline{0,n}$, *zerourile polinomului Cebîşev* T_{n+1}. *Atunci, oricare ar fi* $(n+1)$ *puncte distincte,* z_i, $i=\overline{0,n}$ *din intervalul* $[-1,1]$, *avem*

$$\sup_{x\in[-1,1]}\left|(x-x_0)(x-x_1)...(x-x_n)\right|\le \sup_{x\in[-1,1]}\left|(x-z_0)(x-z_1)...(x-z_n)\right| .$$

Demonstraţie. Deoarece

$$T_{n+1}(x)=2^n(x-x_0)...(x-x_n)\ ,$$

rezultă că trebuie sa arătăm că

$$\sup_{x\in[-1,1]}\frac{1}{2^n}\left|T_{n+1}(x)\right|\le \sup_{x\in[-1,1]}\left|(x-z_0)(x-z_1)...(x-z_n)\right|,\ (\forall)z_i\in[-1,1] .$$

Presupunem prin absurd că există $\bar{z}_0,\bar{z}_1,...,\bar{z}_n\in[-1,1]$ astfel încât

$$\sup_{x\in[-1,1]}\left|q_{n+1}(x)\right|<\sup_{x\in[-1,1]}\frac{1}{2^n}\left|T_{n+1}(x)\right|=\frac{1}{2^n} \qquad (5)$$

unde

$$q_{n+1}(x)=(x-\bar{z}_0)(x-\bar{z}_1)...(x-\bar{z}_n)\ . \qquad (6)$$

Fie

$$r_n(x)=\frac{1}{2^n}T_{n+1}(x)-q_{n+1}(x),\ x\in[-1,1]\ .$$

Evident, r_n este un polinom de grad cel mult n. Observăm ca r_n are acelaşi semn cu T_{n+1} în cele $(n+2)$ puncte de extrem ale polinomului T_{n+1}. Într–adevăr, fie y_k un asemenea punct. Presupunem că $T_{n+1}(y_k)=1$. Dacă $r_n(y_k)\leq 0$, atunci

$$q_{n+1}(y_k)=\frac{1}{2^n}-r_n(y_k)\geq\frac{1}{2^n},$$

ceea ce contrazice relaţia (5). Dacă $T_{n+1}(y_k)=-1$ şi presupunem că $r_n(y_k)>0$, atunci

$$-q_{n+1}(y_k)=r_n(y_k)+\frac{1}{2^n}>\frac{1}{2^n},$$

ceea ce contrazice relaţia (5). Aşadar, r_n îşi schimbă semnul de $(n+2)$ ori, deci r_n are $(n+1)$ rădăcini. Acest lucru nu este posibil decât dacă $r_n(x)=0$, $(\forall)x\in[-1,1]$. Rezultă atunci că $\frac{1}{2^n}T_{n+1}=q_{n+1}$, ceea ce contrazice relaţia (5). ❑

Revenim acum la evaluarea erorii în interpolarea Lagrange.

Fie $(n+1)$ noduri x_i în $[-1,1]$ şi $f\in C^{(n+1)}[-1,1]$. Dacă P_n este polinomul lui Lagrange care interpolează funcţia f în nodurile x_i, $i=\overline{0,n}$, atunci

$$\left|f(x)-P_n(x)\right|=\frac{f^{(n+1)}(\xi_x)}{(n+1)!}\cdot(x-x_0)...(x-x_n) \tag{7}$$

(vezi Capitolul 4, §1, Teorema 2).
Din (7) rezultă că

$$\left\|f-P_n\right\|_\infty=\sup_{-1\leq x\leq 1}\left|f(x)-P_n(x)\right|\leq\frac{\left\|f^{(n+1)}\right\|_\infty}{(n+1)!}\sup_{-1\leq x\leq 1}\left|(x-x_0)...(x-x_n)\right|.$$

Aşadar, eroarea $\left\|f-P_n\right\|_\infty$ va fi minimă dacă

$$\sup_{-1\leq x\leq 1}\left|(x-x_0)...(x-x_n)\right|$$

va fi minimă. Pe de altă parte, din Teorema 1 rezultă că acest lucru se întâmplă dacă alegem nodurile

$$x_i=\cos(2i+1)\frac{\pi}{2(n+1)}\ ,\quad i=\overline{0,n}$$

(adică x_i sunt zerourile polinomului Cebîşev T_{n+1}). Din cele de mai sus rezultă că are loc următoarea teoremă:

Teorema 2. *Fie P_n^* polinomul lui Lagrange care interpolează funcţia f în nodurile*

$$x_i=\cos(2i+1)\frac{\pi}{2(n+1)}\ ,\quad i=\overline{0,n}.$$

Atunci $\left\| f - P_n^* \right\|_\infty \le \dfrac{1}{2^n (n+1)!} \left\| f^{(n+1)} \right\|_\infty$. *Pentru acele funcții care au proprietatea că* $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{2^n (n+1)!} \left\| f^{(n+1)} \right\|_\infty = 0$ *va rezulta că șirul* $P_n^* \xrightarrow{u} f$.

§4.4. Funcții spline cubice

Fie

$$\Delta:\ a=x_0<x_1<\ldots<x_{i-1}<x_i<\ldots<x_n=b$$

o diviziune oarecare a intervalului $[a,b]$.
Se numește *funcție spline cubică* o funcție

$$s : [a,b] \to \mathrm{R}$$

cu următoarele proprietăți:

(i) Restricția lui s la fiecare subinterval $[x_{i-1}, x_i]$ este un polinom de grad cel mult trei;

(ii) s, s', s'' sunt continue pe $[a,b]$.

În continuare ne punem problema interpolării unei funcții $f : [a,b] \to \mathrm{R}$ cu ajutorul unei funcții spline cubice. Cu alte cuvinte, ne punem problema să găsim o funcție spline cubică s, astfel încât

$$s(x_i) = f(x_i)\ ,\quad i=\overline{0,n}.$$

Deoarece restricția lui s la subintervalele $[x_{i-1},x_i]$ este un polinom de grad cel mult trei, rezultă că

$$s(x)=a_i+b_ix+c_ix^2+d_ix^3$$

pentru orice $x\in[x_{i-1}, x_i]$. Determinarea funcției s presupune deci determinarea a $4n$ coeficienți (a_i, b_i, c_i, d_i).

Să evaluăm acum de câte condiții dispunem. Faptul că

$$s(x_i) = f(x_i),\ i=\overline{0,n}$$

ne asigură $(n+1)$ condiții. Pe de altă parte, din continuitatea lui s și a derivatelor s' și s'', rezultă:

$$s^{(k)}(x_i-0)= s^{(k)}(x_i+0)\ ,\ i=\overline{1,n-1}\ ,\ k=\overline{0,2}\quad ,$$

care ne asigură $3(n-1)$ condiții. În total, dispunem deci de $(4n-2)$ condiții, cu două mai puțin decât numărul coeficienților ce urmează a fi determinați.

Dacă se cunosc derivatele $f'(a)$ și $f'(b)$, atunci adăugăm condițiile

$$s'(a) = f'(a) \quad \text{și} \quad s'(b) = f'(b).$$

Dacă nu se cunosc aceste derivate, atunci se aproximează

$$f'(a)\cong y_0' \quad \text{și} \quad f'(b)= y_0'$$

și se pun condițiile $s'(a) = y_0'$ și $s'(b) = y_n'$. Dacă nu avem nici o informație despre $f'(a)$ și $f'(b)$ se pot pune condițiile:

$$s''(a) = s''(b) = 0 .$$

În acest caz se obține aşa numita *funcție spline cubică naturală.*

Înainte de a prezenta teorema fundamentală privind existența funcțiilor spline cubice, reamintim următorul rezultat de algebră liniară.

Propoziția 1. *Orice matrice pătratică strict diagonal dominantă este nesingulară.*

Demonstrație. Fie $A \in M_n(R)$ cu proprietatea:

$$|a_{ii}| > \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} |a_{ij}| \quad . \qquad (1)$$

Dacă vom arăta că sistemul $Ax=0$ admite numai soluția banală, va rezulta că $\det A \neq 0$.

Presupunem prin absurd că există $\alpha \neq 0$ astfel încât $A\alpha = 0$.

Fie

$$\alpha_j = \|\alpha\|_\infty = \max\{ |\alpha_1|, |\alpha_2|, ..., |\alpha_n| \} \quad .$$

Cum α este soluție pentru sistemul $Ax = 0$ rezultă

$$a_{j1}\alpha_1 + ... + a_{jj}\alpha_j + ... + a_{jn}\alpha_n = 0 \quad \text{sau}$$

$$a_{jj} + \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^{n} a_{jk} \frac{\alpha_k}{\alpha_j} = 0 \quad . \quad (2)$$

În continuare avem

$$|a_{jj}| \leq \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^{n} |a_{jk}| \frac{|\alpha_k|}{|\alpha_j|} \leq \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^{n} |a_{jk}| ,$$

ceea ce contrazice (1). ❑

Teorema 1. *Pentru orice* $(n+3)$ *numere date* y'_0, y_0, y_1, ..., y_n, y'_n, *există o funcție spline cubică* s, *unică cu proprietățile:*

$$s(x_i) = y_i , \; 0 \leq i \leq n , \quad s'(x_0) = y'_0 , \; s'(x_n) = y'_n \; .$$

Demonstrație.

Vom nota cu $M_i = s''(x_i)$, $i = \overline{0,n}$. Deoarece s'' este liniară pe intervalul $[x_i, x_{i+1}]$, rezultă că s'' este de forma $s''(x) = \alpha x + \beta$. Din condițiile $M_i = s''(x_i)$ şi $M_{i+1} = s''(x_{i+1})$ rezultă

$$a = \frac{M_{i+1} - M_i}{h_i} \quad \text{şi} \quad \beta = \frac{M_i x_{i+1} - M_{i+1} x_i}{h_i} ,$$

unde $h_i = x_{i+1} - x_i$. Aşadar pe intervalul $[x_i, x_{i+1}]$, avem:

$$s''(x) = \frac{(x_{i+1} - x)M_i + (x - x_i)M_{i+1}}{h_i} , \quad i = \overline{0, n\text{-}1} \quad . \; (3)$$

Integrând de două ori obținem

$$s(x)=\frac{(x_{i+1}-x)^3M_i+(x-x_i)^3M_{i+1}}{6h_i}+C(x_{i+1}-x)+ \\ +D(x-x_i),\ \ i=\overline{0,n\text{-}1} \tag{4}$$

unde C şi D sunt constante arbitrare.

Punând condiţiile de interpolare $s(x_i)=y_i$, $0\le i\le n$, rezultă

$$C=\frac{y_i}{h_i}-\frac{h_iM_i}{6}\quad \text{şi}\quad D=\frac{y_{i+1}}{h_i}-\frac{h_iM_{i+1}}{6}\ . \tag{5}$$

Înlocuind (5) în (4) obţinem pentru $x\in[x_i, x_{i+1}]$ şi $i=\overline{0,n-1}$:

$$s(x)=\frac{(x_{i+1}-x)^3M_i+(x-x_i)^3M_{i+1}}{6h_i}+ \\ +\frac{(x_{i+1}-x)y_i+(x-x_i)y_{i+1}}{h_i}- \\ -\frac{(x_{i+1}-x)M_i+(x-x_i)M_{i+1}}{6}h_i,\ \ i=\overline{0,n\text{-}1}\ . \tag{6}$$

Să observăm că funcţia s definită în (6) este continuă pe $[a,b]$. Într–adevăr

$$\lim_{\substack{x\to x_i\\ x<x_i}} s(x)=\lim_{\substack{x\to x_i\\ x<x_i}}\left[\frac{(x_i-x)^3M_{i-1}+(x-x_{i-1})^3M_i}{6h_{i-1}}+\frac{(x_i-x)y_{i-1}+(x-x_{i-1})y_i}{h_{i-1}}-\right. \\ \left.-h_{i-1}\frac{(x_i-x)M_{i-1}+(x-x_{i-1})M_i}{6}\right]=\frac{h_{i-1}^3M_i}{6h_{i-1}}+y_i-\frac{h_{i-1}^2M_i}{6}=y_i$$

şi analog $\lim\limits_{\substack{x\to x_i\\ x>x_i}} s(x)=y_i$.

În continuare vom pune condiţia ca derivata s' să fie continuă pe $[a,b]$. Din (6) rezultă:

$$s'(x)=\frac{-(x_{i+1}-x)^2M_i+(x-x_i)^2M_{i+1}}{2h_i}+\frac{y_{i+1}-y_i}{h_i} \\ -\frac{(M_{i+1}-M_i)h_i}{6}, \tag{7}$$

pentru $x\in(x_i, x_{i+1})$, $i=\overline{0,n-1}$.

Punem condiţia ca $\lim\limits_{\substack{x\to x_i\\ x<x_i}} s'(x)=\lim\limits_{\substack{x\to x_i\\ x>x_i}} s'(x)$ şi obţinem

$$\frac{h_{i-1}^2M_i}{2h_{i-1}}+\frac{y_i-y_{i-1}}{h_{i-1}}-\frac{(M_i-M_{i-1})h_{i-1}}{6}=-\frac{h_i^2M_i}{2h_i}+\frac{y_{i+1}-y_i}{h_i}-\frac{(M_{i+1}-M_i)h_i}{6}$$

şi mai departe

$$\frac{h_{i-1}}{6}M_{i-1}+\frac{h_i+h_{i-1}}{3}M_i+\frac{h_i}{6}M_{i+1}=\frac{y_{i+1}-y_i}{h_i}-\frac{y_i-y_{i-1}}{h_{i-1}} \tag{8}$$

pentru orice $i=\overline{1,n-1}$.

La cele $(n-1)$ ecuaţii date de (8) adăugăm două ecuaţii care corespund condiţiilor: $s'(x_0)=y_0'$ şi $s'(x_n)=y_0'$.

Ţinând seama de (7) aceste ecuaţii sunt:

$$\frac{h_0}{3}M_0+\frac{h_0}{6}M_1=\frac{y_1-y_0}{h_0}-y_0' \tag{9}$$

$$\frac{h_{n-1}}{6}M_{n-1}+\frac{h_{n-1}}{3}M_n=y_n'-\frac{y_n-y_{n-1}}{h_{n-1}} \quad . \tag{10}$$

Din (8), (9) şi (10) rezultă următorul sistem $AM=b$, unde

$$A=\begin{pmatrix}
\frac{h_0}{3} & \frac{h_0}{6} & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0\\
\frac{h_0}{6} & \frac{h_0+h_1}{3} & \frac{h_1}{6} & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0\\
0 & \frac{h_1}{6} & \frac{h_1+h_2}{3} & \frac{h_2}{6} & \cdots & 0 & 0 & 0\\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots\\
0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & \frac{h_{n-2}}{6} & \frac{h_{n-2}+h_{n-1}}{3} & \frac{h_{n-1}}{6}\\
0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \frac{h_{n-1}}{6} & \frac{h_{n-1}}{3}
\end{pmatrix}$$

$$M=\begin{pmatrix} M_0\\ M_1\\ \vdots\\ M_n\end{pmatrix},\ \text{iar}\quad b=\begin{pmatrix}
\frac{y_1-y_0}{h_0}-y_0'\\
\frac{y_2-y_1}{h_1}-\frac{y_1-y_0}{h_0}\\
\vdots\\
\frac{y_n-y_{n-1}}{h_{n-1}}-\frac{y_{n-1}-y_{n-2}}{h_{n-2}}\\
y_n'-\frac{y_n-y_{n-1}}{h_{n-1}}
\end{pmatrix}.$$

Observăm că matricea A este simetrică, tridiagonală şi strict diagonal dominantă. Un asemenea sistem are soluţie unică, care se obţine uşor cu algoritmul Gauss. Înlocuind în (6) această soluţie, găsim funcţia spline cubică pe care o căutam. Evident această funcţie este unică, deoarece soluţia $(M_0, M_1,...,M_n)$ este unică. ❑

Exemplu: Să se determine valorile funcţiei f în punctul $\frac{5\pi}{24}$ folosind interpolarea spline cubică, ştiind că:

x_i	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$y_i = f(x_i)$	0	0.5	0.70711	0.86603	1

şi că valorile lui f' în punctele x_0 şi x_4 sunt: $y'_0 = 1$, $y'_4 = 0$.
R. Aplicăm teorema 1 şi vom găsi funcţia spline cubică s ce interpolează funcţia f, dacă determinăm coeficienţii M_i, $i = \overline{0, 3}$.
Coeficienţii M_i se determină prin rezolvarea sistemului liniar $AM = b$, unde

$$A := \begin{bmatrix} \frac{h_0}{3} & \frac{h_0}{6} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{h_0}{6} & \frac{h_0+h_1}{3} & \frac{h_1}{6} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{h_1}{6} & \frac{h_1+h_2}{3} & \frac{h_2}{6} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{h_2}{6} & \frac{h_2+h_3}{3} & \frac{h_3}{6} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{h_3}{6} & \frac{h_3}{3} \end{bmatrix} \qquad b := \begin{bmatrix} \frac{y_1-y_0}{h_0} - y'_0 \\ \frac{y_2-y_1}{h_1} - \frac{y_1-y_0}{h_0} \\ \frac{y_3-y_2}{h_2} - \frac{y_2-y_1}{h_1} \\ \frac{y_4-y_3}{h_3} - \frac{y_3-y_2}{h_2} \\ y'_4 - \frac{y_4-y_3}{h_3} \end{bmatrix}, \quad M = \begin{pmatrix} M_0 \\ M_1 \\ M_2 \\ M_3 \\ M_4 \end{pmatrix}$$

şi $h_i = x_{i+1} - x_i$, $i = \overline{0, 3}$. Obţinem că: $M = \begin{pmatrix} -5.15454\cdot 10^{-3} \\ -0.50616 \\ -0.70767 \\ -0.88161 \\ -1.02524 \end{pmatrix}$.

Punctul $\frac{5\pi}{24} \in [x_1, x_2]$. Scriem funcţia de interpolare s pe acest interval:

$$s(x) = \frac{(x_2 - x)^3 M_1 + (x - x_1)^3 M_2}{6h_1} + \frac{(x_2 - x)y_1 + (x - x_1)y_2}{h_1} -$$
$$- \frac{(x_2 - x)M_1 + (x - x_1)M_2}{6} h_1$$

Calculăm valoarea funcției s în punctul dat: $s\left(\frac{5\pi}{4}\right) = 0.60875$.

Deci, valoarea aproximativă a lui f în punctul $\frac{5\pi}{24}$ este 0.60875.

Funcțiile spline cubice au următoarea proprietate de optimizare.

Teorema 2. *Fie G mulțimea funcțiilor* $g : [a,b] \to \mathbb{R}$, *de clasă* C^2 *cu proprietățile:*

(i) $g(x_i)=y_i$, $0 \le i \le n$

(ii) $g'(x_0)= y_0'$

(iii) $g'(x_n)= y_n'$

Atunci : $\inf\limits_{g\in G} \int_a^b [g''(x)]^2 dx = \int_a^b [s''(x)]^2 dx$.

Demonstrație.

Dacă notăm cu $k(x) = s(x) - g(x)$, unde $g \in G$, atunci

$$\int_a^b [g''(x)]^2 dx = \int_a^b [s''(x)]^2 dx - 2\int_a^b s''(x)k''(x)dx + \int_a^b [k''(x)]^2 dx .$$

Mai departe avem

$$\int_a^b s''(x)k''(x)dx = \sum_{i=0}^{n-1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} s''(x)k''(x)dx =$$
$$= \sum_{i=0}^{n-1} \left(s''(x)k'(x)\Big|_{x_i}^{x_{i+1}} - \int_{x_i}^{x_{i+1}} s'''(x)k'(x)dx \right) .$$

Deoarece $s'''(x)=\alpha_i$ este o constantă pe $[x_i,x_{i+1}]$ și $k(x_i) = k(x_{i+1}) = 0$, $i = \overline{0,n-1}$, rezultă

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} s'''(x)k'(x)dx = 0$$

și mai departe

$$\int_a^b s''(x)k''(x)dx = \sum_{i=0}^{n-1}\left[s''(x_{i+1})k'(x_{i+1}) - s''(x_i)k'(x_i)\right] =$$

$$= s''(b)k'(b) - s''(a)k'(a) = 0 \quad .$$

deoarece $k'(a) = k'(b) = 0$. Aşadar

$$\int_a^b [g''(x)]^2 dx = \int_a^b [s''(x)]^2 dx + \int_a^b [k''(x)]^2 dx .$$

Rezultă $\int_a^b [s''(x)]^2 dx \le \int_a^b [g''(x)]^2 dx$ pentru orice $g \in G$.

Egalitatea are loc dacă $\int_a^b [k''(x)]^2 dx = 0$, deci dacă $k''(x)=0$, $(\forall)\ x \in [a,b]$. Aşadar functia k este liniară pe $[a,b]$.

Din condiţiile de interpolare $k(x_i)=0$ pentru $i = \overline{0,n}$, rezultă $k(x)=0$, $(\forall) x \in [a,b]$ şi deci că

$$\int_a^b [s''(x)]^2 dx = \inf_{g \in G} \int_a^b [g''(x)]^2 dx . \qquad \square$$

Se poate demonstra de asemenea următoarea teoremă.

Teorema 3. *Fie $f \in C^4[a,b]$ şi $M_4 = \sup\{|f^{IV}(x)| ;\ x \in [a,b]\}$ şi fie $x_i^{(n)} = a + ih$, $i = \overline{0,n}$, noduri echidistante, unde $h = \dfrac{b-a}{n}$. Dacă s_n este funcţia spline cubică cu proprietăţile:*

$$s_n(x_i^{(n)}) = f(x_i^{(n)}), \quad i = \overline{0,n}\ ; \quad s_n'(a) = f'(a) \quad \text{şi} \quad s_n'(b) = f'(b) ,$$

atunci pentru orice $x \in [a,b]$ avem:

$$|f(x) - s_n(x)| \le \frac{5}{384} M_4 h^4, \quad |f'(x) - s_n'(x)| \le \frac{1}{24} M_4 h^3, \quad |f''(x) - s_n''(x)| \le \frac{3}{8} M_4 h^2 .$$

Aşadar, din Teorema 3 rezultă că şirul funcţiilor spline cubice $\{s_n\}$ care interpolează funcţia f în nodurile echidistante $\{x_i^{(n)}\}$ converge uniform pe intervalul $[a,b]$ către funcţia f. Mai mult: $s_n' \xrightarrow{u} f'$ şi $s_n'' \xrightarrow{u} f''$ pe intervalul $[a,b]$.

În continuare vom defini funcţiile *B–spline cubice* şi vom arăta că orice funcţie spline cubică care interpolează funcţia f în nodurile x_0, x_1, ..., x_n se reprezintă ca o combinaţie liniară unică de funcţii B–spline cubice. Fie

$$\Delta:\ a = x_0 < x_1 < \ldots < x_{i-1} < x_i < \ldots < x_n = b$$

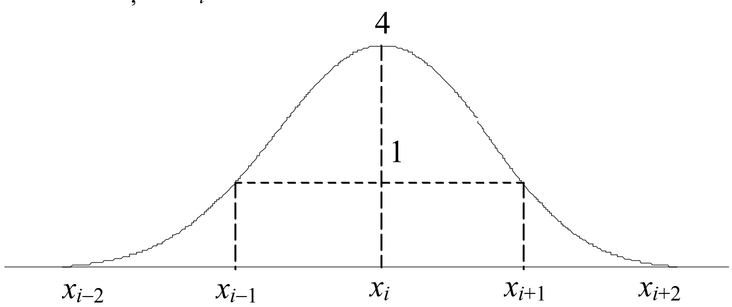
o diviziune a intervalului $[a,b]$ cu noduri echidistante ($x_i = x_0+ih$, unde $h=\frac{b-a}{n}$). Asociem acestei diviziuni, diviziunea $\tilde{\Delta}$ care are în plus şase noduri auxiliare, de asemenea echidistante.

$$\tilde{\Delta}:\ x_{-3} < x_{-2} < x_{-1} < x_0 < x_1 < \ldots < x_n < x_{n+1} < x_{n+2} < x_{n+3}.$$

Definim pentru orice $i=\overline{-1,n+1}$, funcţia B–spline cubică B_i astfel:

$$B_i(x)=\frac{1}{h^3}\begin{cases}(x-x_{i-2})^3 & x\in(x_{i-2},x_{i-1}]\\ h^3+3h^2(x-x_{i-1})+3h(x-x_{i-1})^2-3(x-x_{i-1})^3 & x\in(x_{i-1},x_i]\\ h^3+3h^2(x_{i+1}-x)+3h(x_{i+1}-x)^2-3(x_{i+1}-x)^3 & x\in(x_i,x_{i+1}]\\ (x_{i+2}-x)^3 & x\in(x_{i+1},x_{i+2}]\\ 0 & x\notin[x_{i-2},x_{i+2}]\end{cases}$$

Graficul funcţiei B_i arată astfel:



Din definiţia funcţiilor B_i rezultă că

$$B_i(y_j)=\begin{cases}4 & \text{dacã } j=i\\ 1 & \text{dacã } j=i\text{-}1 \text{ sau } j=i+1\\ 0 & \text{dacã } j\notin\{i\text{-}1;i;i+1\}\end{cases}$$

Se verifică uşor că $B_i'(x_{i-1})=\frac{3}{h}$, $B_i'(x_{i+1})=-\frac{3}{h}$ şi $B_i'(x_j)=0$ dacă $j\notin\{x_{i-1};x_{i+1}\}$. Se observă de asemenea că $B_i\in C^2(\mathrm{R})$, deci este o funcţie spline cubică.

Propoziţia 2. *Funcţiile* $B_{-1}, B_0, \ldots, B_{n+1}$ *sunt liniar independente pe* R.

Demonstraţie. Fie combinaţia liniară

$$\lambda_{-1}B_{-1}(x)+\lambda_0B_0(x)+\lambda_1B_1(x)+\ldots+\lambda_{n+1}B_{n+1}(x)=0,\quad x\in\mathrm{R}.$$

Dacă dăm lui x succesiv valorile $x_{-1}, x_0, \ldots, x_{n+1}$ obţinem sistemul:

$$\begin{cases} 4\lambda_{-1} + \lambda_0 = 0 \\ \lambda_{-1} + 4\lambda_0 + \lambda_1 = 0 \\ \cdots \\ \lambda_{n-1} + 4\lambda_n + \lambda_{n+1} = 0 \\ \lambda_n + 4\lambda_{n+1} = 0 \end{cases}$$

Deoarece matricea sistemului este strict diagonal dominantă, deci nesingulară, rezultă că sistemul admite numai soluția banală

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \ldots = \lambda_{n+1} = 0 \text{ . } \square$$

În continuare notăm cu $\mathrm{B}_3(\Delta)$ spațiul liniar generat de funcțiile B_i, $i = \overline{-1, n+1}$.

Teorema 4. *Există o funcție unică* $B \in \mathrm{B}_3(\Delta)$ *care interpolează funcția* f *în nodurile* x_i, $i = \overline{0,n}$.

Demonstrație. Fie

$$B(x)= a_{-1}B_{-1}(x)+ a_0B_0(x)+ a_1B_1(x)+\ldots+ a_{n+1}B_{n+1}(x), \quad x\in \mathrm{R}. \tag{11}$$

Punând condiția ca B să interpoleze funcția f în nodurile $x_0, x_1 ,\ldots, x_n$ rezultă

$$B'(x_0) = a_{-1}B'_{-1}(x_0) + a_0B'_0(x_0) + \ldots + a_{n+1}B'_{n+1}(x_0) = f'(x_0)$$

$$B(x_i) = a_{-1}B_{-1}(x_i) + a_0B_0(x_i) + \ldots + a_{n+1}B_{n+1}(x_i) = f(x_i) \quad i=\overline{0,n}$$

$$B'(x_n) = a_{-1}B'_{-1}(x_n) + a_0B'_0(x_n) + \ldots + a_{n+1}B'_{n+1}(x_n) = f'(x_n)$$

Se obține sistemul:

$$\begin{cases} -\frac{3}{h}a_{-1} + \frac{3}{h}a_1 = f'(x_0) \\ a_{-1} + 4a_0 + a_1 = f(x_0) \\ a_0 + 4a_1 + a_2 = f(x_1) \\ \cdots \\ a_{n-1} + 4a_n + a_{n+1} = f(x_n) \\ -\frac{3}{h}a_{n-1} + \frac{3}{h}a_{n+1} = f'(x_n) \end{cases} \tag{12}$$

Sistemul (12) are $(n+3)$ ecuații liniare şi $(n+3)$ necunoscute

$$a_{-1}, a_0, \ldots, a_{n+1}.$$

Eliminând necunoscuta a_{-1} din primele două ecuații şi necunoscuta a_{n+1} din ultimele două ecuații, obținem sistemul echivalent:

$$\begin{cases} 4a_0 + 2a_1 = f(x_0) + \dfrac{h}{3} f'(x_0) \\ a_0 + 4a_1 + a_2 = f(x_0) \\ \cdots \\ a_{n-2} + 4a_{n-1} + a_n = f(x_{n-1}) \\ 2a_{n-1} + 4a_n = f(x_n) + \dfrac{h}{3} f'(x_n) \end{cases} \qquad (13)$$

Matricea coeficienților sistemului (13) este strict diagonal dominantă, deci sistemul (13) are soluție unică. Aşadar, sistemul (12) are soluție unică.

Înlocuind această soluție în (11) obținem funcția B căutată, care evident este unică. ❑

Teorema 5. *Fie* $s : [a,b] \to \mathbb{R}$ *o funcție spline cubică care interpolează funcția f în nodurile* $x_0, x_1, \ldots, x_n$ *. Atunci există* $a_{-1}, a_0, a_1, \ldots, a_{n+1} \in \mathbb{R}$*, unic determinate, astfel încât*

$$s(x) = a_{-1}B_{-1}(x) + a_0B_0(x) + \ldots + a_{n+1}B_{n+1}(x), \quad (\forall)\ x \in [a,b].$$

Demonstrație.

Din Teorema 4 rezultă că există $B \in \mathrm{B}_3(\Delta)$ astfel încât B interpolează funcția f în nodurile $x_0, x_1, \ldots, x_n$. Funcția B este de clasă C^2 pe $\mathbb{R}$ şi este polinomială de gradul trei pe porțiuni. Rezultă că restricția lui B la intervalul $[a,b]$ este o funcție spline cubică, care interpolează f în nodurile $x_0, x_1, \ldots, x_n$. Cum asemenea funcție este unică (conform Teoremei 1) rezultă

$$s(x) = B(x) = a_{-1}B_{-1}(x) + a_0B_0(x) + \ldots + a_{-n+1}B_{n+1}(x), \quad (\forall)\ x \in [a,b].$$

Unicitatea coeficienților

$$a_{-1}, a_0, a_1, \ldots, a_{n+1}$$

este asigurată de Teorema 4. ❑

Pachetul de programe MATLAB conține funcția *spline* care permite interpolarea unei funcții f în punctele $x_1, x_2, \ldots, x_n$, $(\forall) n \in \mathbb{N}^*$, finit, printr–o funcție spline cubică, dacă se cunosc valorile $y_1, y_2, \ldots, y_n$ ale funcției în nodurile $x_1 < x_2 < \ldots < x_n$. Secvența de apelare este:

yi=spline(*x,y,xi*).

Exemplu. Să se determine valorile funcției *f* în punctele $\frac{\pi}{12}, \frac{\pi}{8}, \frac{\pi}{5}$, folosind interpolarea spline cubică, ştiind că:

x_I	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$y_i=f(x_i)$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1

utilizând MATLAB.

În *mediul* MATLAB se scriu comenzile:

```
%	interpolarea cu functii spline cubice folosind pachetul de programe
Matlab
function [x,y,xi,yi]=cub
% Nodurile
x=[0,pi/6,pi/4,pi/3,pi/2];
% Valorile functiei in noduri
y=[0,1/2,1/2^(1/2),3^(1/2)/2,1];
% Valorile in care se interpoleaza functia
xi=[pi/12,pi/8,pi/5];
% Apelarea functiei Matlab spline care face interpolarea
yi=spline(x,y,xi);
```

Funcția considerată este $f(x)=\sin x$ şi putem compara valorile de interpolare cu cele "exacte":

zi=sin(*xi*);

Pentru reprezentarea grafică a funcției interpolate se poate folosi următoarea secvența MATLAB.

```
% Reprezentarea grafica a functiei interpolate
plot(x,y,xi,yi,'*',xi,zi,'o');
axis([0,pi/2,0,1.2]); % se stabilesc intervalele de reprezentare pe
    axe
title('Interpolarea cu spline cubice');
xlabel('Unghiul');
ylabel('Valorile functiei'); grid
```

Exerciții

Folosind polinomul de interpolare a lui Lagrange să se determine valoarea aproximativă a funcțiilor date de tabelele următoare în punctele a menționate în fiecare caz.

1.

x	-3	-2	0	1	3
$y=f(x)$	91	23	1	-1	73

$a=-1$.

R.

$$P_4(a)=\sum_{i=1}^{5} y_i \prod_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{5} \frac{a-x_j}{x_i-x_j} = y_1 \frac{a-x_2}{x_1-x_2}\cdot\frac{a-x_3}{x_1-x_3}\cdot\frac{a-x_4}{x_1-x_4}\cdot\frac{a-x_5}{x_1-x_5}+$$

$$+y_2\frac{a-x_1}{x_2-x_1}\cdot\frac{a-x_3}{x_2-x_3}\cdot\frac{a-x_4}{x_2-x_4}\cdot\frac{a-x_5}{x_2-x_5}+y_3\frac{a-x_1}{x_3-x_1}\cdot\frac{a-x_2}{x_3-x_2}\cdot\frac{a-x_4}{x_3-x_4}\cdot\frac{a-x_5}{x_3-x_5}+$$

$$+y_4\frac{a-x_1}{x_4-x_1}\cdot\frac{a-x_2}{x_4-x_2}\cdot\frac{a-x_3}{x_4-x_3}\cdot\frac{a-x_5}{x_4-x_5}+y_5\frac{a-x_1}{x_5-x_1}\cdot\frac{a-x_2}{x_5-x_2}\cdot\frac{a-x_3}{x_5-x_3}\cdot\frac{a-x_4}{x_5-x_4}=$$

$$=91\frac{-1+2}{-3+2}\cdot\frac{-1}{-3}\cdot\frac{-1-1}{-3-1}\cdot\frac{-1-3}{-3-3}+23\frac{-1+3}{-2+3}\cdot\frac{-1}{-2}\cdot\frac{-1-1}{-2-1}\cdot\frac{-1-3}{-2-3}+$$

$$+\frac{-1+3}{3}\cdot\frac{-1+2}{2}\cdot\frac{-1-1}{-1}\cdot\frac{-1-3}{-3}-\frac{-1+3}{1+3}\cdot\frac{-1+2}{1+2}\cdot\frac{-1}{1}\cdot\frac{-1-3}{1-3}+$$

$$+73\frac{-1+3}{3+3}\cdot\frac{-1+2}{3+2}\cdot\frac{-1}{3}\cdot\frac{-1-1}{3-1}=5 \ .$$

2.

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{2\pi}{5}$	$\frac{\pi}{2}$
$y=f(x)$	0	0.5	1.70711	0.86603	0.95106	1

$a=\frac{3\pi}{8}$.

R. $P_5\left(\frac{3\pi}{8}\right)=0.92388$.

Folosind metoda Aitken să se găsească valoarea aproximativă a funcțiilor date de tabelele următoare în punctele menționate în fiecare caz în parte.

3.

x	–2	–1	0	1	3
$y=f(x)$	–12	–5	–4	–3	23

$a=0.5$.

R. Urmărind calculele ca în Teorema 1 §4.2 obținem tabelul următor în care ultima celulă dă valoarea aproximativă a funcției în punctul dat.

–2	–2.5	–12				
–1	–1.5	–5	5.5			
0	–0.5	–4	–2	–5.75		
1	0.5	–3	–4.5	–2	—3.875	
3	2.5	23	5.5	5.5	–3.875	–3.875

4.

x	0	30	45	60	90
$y=f(x)$	0	0.5	0.70710	0.86602	1

a=36 .

R.

0	–36	0				
30	–6	0.5	0.6			
45	9	0.70710	0.56568	0.58627		
60	24	0.86602	0.51961	0.58392	0.58768	
90	54	1	0.4	0.58	0.58752	0.58780

5. Să se determine valorile funcţiei f în punctul 0.5 folosind interpolarea spline cubică, ştiind că:

x_i	0	0.25	0.75	1
$y_i = f(x_i)$	1	0.96923	0.75484	0.60653

şi că valorile lui f' în punctele x_0 şi x_3 sunt: $y'_0 = 0$, $y'_3 = -0.60653$.

R. Vom găsi funcţia spline cubică s ce interpolează funcţia f, dacă determinăm coeficienţii M_i, $i = \overline{0, 2}$. Coeficienţii M_i se determină prin rezolvarea sistemului de ecuaţii liniare $AM = b$, unde

$$A := \begin{bmatrix} \frac{h_0}{3} & \frac{h_0}{6} & 0 & 0 \\ \frac{h_0}{6} & \frac{h_0+h_1}{3} & \frac{h_1}{6} & 0 \\ 0 & \frac{h_1}{6} & \frac{h_1+h_2}{3} & \frac{h_2}{6} \\ 0 & 0 & \frac{h_2}{6} & \frac{h_2}{3} \end{bmatrix} \qquad b := \begin{bmatrix} \frac{y_1-y_0}{h_0} - y'_0 \\ \frac{y_2-y_1}{h_1} - \frac{y_1-y_0}{h_0} \\ \frac{y_3-y_2}{h_2} - \frac{y_2-y_1}{h_1} \\ y'_3 - \frac{y_3-y_2}{h_2} \end{bmatrix}$$

iar $h_i = x_{i+1} - x_i$, $i = \overline{0, 2}$

iar $M = \begin{pmatrix} M_0 \\ M_1 \\ M_2 \\ M_3 \end{pmatrix}$. Obținem că: $M = \begin{pmatrix} -1.00712 \\ -0.93936 \\ -0.347 \\ 0.01396 \end{pmatrix}$

Punctul $0.5 \in [x_1, x_2]$. Scriem funcția de interpolare s pe acest interval:

$$s(x) = \frac{(x_2 - x)^3 M_1 + (x - x_1)^3 M_2}{6h_1} + \frac{(x_2 - x)y_1 + (x - x_1)y_2}{h_1} -$$
$$- \frac{(x_2 - x)M_1 + (x - x_1)M_2}{6} h_1$$

Calculăm valoarea funcției s în punctul dat: $s(0.5) = 0.882$.
Deci, valoarea aproximativă a lui f în punctul 0.5 este 0.882.

6. Să se determine valorile funcției f în punctul 3 folosind interpolarea spline cubică, știind că:

x_i	1	2	4	5
$y_i = f(x_i)$	0.5403	0.70121	0.80805	0.83382

și că valorile lui f' în punctele x_0 și x_3 sunt: $y'_0 = 0.28049$, $y'_3 = 0.02152$.

R. Obținem că: $M = \begin{pmatrix} -0.33459 \\ -0.0483 \\ -0.01028 \\ -7.60083 \cdot 10^{-3} \end{pmatrix}$. Valoarea funcției f în punctul 3 este aproximată de $s(3) = 0.76928$.