

Elemente de mecanica punctului material și a solidului rigid

Octavian

3 noiembrie 2002

Cuprins

1	Mecanică geometrică	7
1.1	Modelul matematic al spațiului fizic	8
1.1.1	Punctele spațiului fizic	8
1.1.2	Direcțiile spațiului fizic	9
1.2	Spațiul vectorilor legați	10
1.3	Geometria spațiului fizic	11
1.4	Repere carteziane	13
2	Mecanica punctului material	17
2.1	Cinematica	17
2.1.1	Traectoria. Viteza. Accelerația	18
2.1.2	Geometria traectoriei	19
2.1.3	Triedrul lui Frenet. Formulele Frenet-Serret	26
2.1.4	Raza de curbură și torsiunea ca funcții de timp	30
2.1.5	Forma traectoriei în apropierea lui M	31
2.1.6	Viteza și accelerația în triedrul lui Frenet	34
2.1.7	Mișcarea circulară	35
2.1.8	Mișcarea plană în coordonate polare (metoda transformării Prűfer)	37
2.1.9	Mișcarea relativă a punctului material	38
2.1.10	O formulă matriceală în legătură cu vectorul $\bar{\omega}$	46
2.1.11	O interpretare geometrică a vectorului $\bar{\omega}$	48
2.1.12	Măsură și integrală în SF	50
2.1.13	Suprafețe în SF . Plan tangent la o suprafață. Curbe pe suprafețe. Triedrul lui Darboux. Formulele Darboux-Ribaucour. Geodezice	57
2.1.14	Formula Gauss-Ostrogradski. Prima formulă a lui Green. Integrale de tip potențial. Ecuația lui Poisson	71

2.1.15	O formulă asimptotică pentru $f_1(M)$	88
2.1.16	Viteza areolară a punctului material	90
2.1.17	Comentarii	92
2.2	Statica și dinamica	95
2.2.1	Principiile dinamicii	97
2.2.2	Ecuțiile diferențiale ale lui Newton	101
2.2.3	Repere inerțiale. Principiul relativității în meca- nică clasică	104
2.2.4	Impulsul punctului material. Teorema impulsului . . .	107
2.2.5	Momentul forței. Momentul cinetic (orbital) al punc- tului material. Teorema momentului cinetic	108
2.2.6	Lucrul mecanic. Puterea	111
2.2.7	Energia cinetică a punctului material. Teorema en- ergiei cinetice	114
2.2.8	Legi de conservare (I)	115
2.2.9	Legi de conservare (II)	117
2.2.10	Legi de conservare (III)	125
2.2.11	Forțe conservative. Energie potențială. Conservarea energiei mecanice	127
2.2.12	Suprafețele echipotențiale și liniile de forță ale unui câmp conservativ	130
2.2.13	Câmpul gravitațional. Potențialul gravitațional. Mod- elul punctiform al corpurilor cerești	130
2.2.14	Mișcarea în câmp central	135
2.2.15	Legile lui J. Kepler. Problema lui Newton	140
2.2.16	Problema celor două corpuri	144
2.2.17	Ecuția lui J. Kepler	148
2.2.18	Limitele teoriei newtoniene a gravitației	150
2.2.19	Teorema virialului	154
2.2.20	Punct material liber. Punct material supus unor legă- turi. Condiții de echilibru. Forțe de frecare	156
2.2.21	Ecuțiile intrinseci ale lui L. Euler. Ecuțiile mișcării în triedrul lui Darboux. Legătura cu teorema energiei cinetice	167
2.2.22	Principiul echivalenței. Forțe inerțiale	169
2.2.23	Mișcarea în câmp gravitațional terestru, în vid. Bătăia și săgeata traiectoriei. Parabola de siguranță	171

2.2.24	Mișcarea pe un plan înclinat în câmp gravitațional terestru, în aer. Viteza limită a punctului material M . . .	174
2.2.25	Soluții convergente ale unei ecuații diferențiale ordinare de ordinul I. Convergența unor funcții p —absolut integrabile	178
2.2.26	Problema balisticii exterioare	183
2.2.27	Ecuația diferențială a mișcării pe o curbă fixă ideală. Lucrul mecanic al forțelor de legătură	191
2.2.28	Ecuația diferențială a pendulului gravitațional simplu (matematic). Formula perioadei mișcării. Legile pendulului simplu	192
2.2.29	Problema lui Wittenbauer și ecuația diferențială a oscilatorului armonic	198
2.2.30	Ecuația diferențială a pendulului gravitațional sferic . .	200
2.2.31	Stabilitatea echilibrului punctului material M	203
3	Mecanica solidului rigid	206
3.1	Vectori și tensori	208
3.1.1	Vectori alunecători. Principiul suprimării forțelor . . .	208
3.1.2	Momentul unui vector față de o axă. Momentul cinetic față de o axă al punctului material. Teorema momentului cinetic	211
3.1.3	Torsorul unui sistem de vectori. Sisteme de vectori echivalente. Invarianti	213
3.1.4	Teorema lui P. Varignon. Cuplu de forțe. Reducerea sistemelor de vectori	216
3.1.5	Axa centrală a unui sistem de vectori. Reducerea canonică a unui sistem de vectori și cazuri de degenerescență ale ei. Centrul unui sistem de vectori paraleli. Centrul de greutate al unui corp material. Centrul de masă al unui sistem mecanic	223
3.1.6	Tensorul de inerție al unui sistem mecanic. Momente de inerție. Formula lui Leibniz. Formula lui Lagrange. Formula Huygens-Steiner. Teorema Steiner-Lurie. Formula Euler-Cauchy pentru calculul momentului de inerție față de o axă	231
3.1.7	Elipsoidul de inerție al unui sistem mecanic. Axe principale de inerție	241

3.2	Cinematica	245
3.2.1	Formula lui L. Euler. Translația și rotația solidului rigid. Teorema lui Rivals	245
3.2.2	Interpretarea cinematică a mișcării solidului rigid. Invariantii mișcării. Teorema lui Chasles. Mișcarea pseudoelicoidală a solidului rigid. Teorema lui I. Mozzi . . .	249
3.2.3	Interpretarea geometrică a mișcării solidului rigid. Axoide. Contactul simplu a două corpuri solide rigide . .	250
3.2.4	Mișcarea relativă a două corpuri solide rigide supuse unui contact simplu. Teorema Aronhold-Kennedy . . .	254
3.2.5	Principiul independenței mișcărilor. Compunerea translațiilor și rotațiilor	257
3.2.6	Mișcarea plană (plan-paralelă). Centrul instantaneu de rotație (centrul vitezelor). Centroide. Mișcarea epicicloidală. Centrul geometric al accelerațiilor. Cercurile lui Bresse. Centrul (polul) accelerațiilor. Teorema celor trei centre instantanee de rotație. Teorema asemănării (Burmester-Mehmke)	258
3.3	Statica și dinamica	276
3.3.1	Dinamica sistemului mecanic. Teorema impulsului. Teoremele centrului de masă. Teoremele lui V. Vâlcovici și S. Koenig. Teorema momentului cinetic. Teorema energiei cinetice. Reprezentarea momentului cinetic și a energiei cinetice cu ajutorul tensorului de inerție. Formula momentului cinetic față de o axă. Sisteme conservative	276
3.3.2	Teorema momentului cinetic față de o axă. O demonstrație a formulei Huygens-Steiner cu ajutorul teoremei lui V. Vâlcovici (1929). Raza de girație	288
3.3.3	Solidul rigid cu o axă fixă. Ecuația diferențială a mișcării. Echilibrarea solidului. Axe permanente și axe spontane de rotație (libere). Principiul inerției pentru corpul solid rigid. Pendulul fizic. Teoremele lui C. Huygens. Formula pendulului reversibil	291
3.3.4	Variația accelerației gravitaționale la suprafața Pământului (devierea firului cu plumb). Devierea spre est în cădere liberă (efectul Coriolis). Legea lui Baer. Pendulul lui L. Foucault	300

3.3.5	Solidul rigid cu punct fix. Unghiurile lui Euler. Parametrii Cayley-Klein. Matrice Pauli. Sistemul diferențial al lui L. Euler. Mișcarea Euler-Poinsot. Conul polodic și conul herpolodic. Precesia regulată. Conul de precesie. Interpretarea geometrică a mișcării (L. Poinsot). Polodia și herpolodia. Ciclul lui Euler. Sistemul diferențial al lui G. Darboux. Cazul Lagrange-Poisson. Giroscopul	308
-------	--	-----

Capitolul 1

Mecanică geometrică

”La început a fost mecanica. (Max von Laue, *Mecanica*, cf. [43], p. 25)”

Mecanica clasică (newtoniană) are un caracter *limitat*, scos în evidență, printre altele, de trei din caracteristicile sale fundamentale:

1. Nu se face distincție între *masă* și *materie*. Astfel, un *punct material* reprezintă un punct din spațiul fizic căruia i se atașează un număr pozitiv, numit *masă* (cf. [76], p. 3, 8).

2. Mecanica este *deterministă* (cunoscând poziția și viteza unui punct material la un anumit moment, considerat *inițial*, se pot determina poziția și viteza punctului material la *orice* moment) (cf. [34], p. 213, [32], p. 19). Mecanicile avansate (care țin seama de structura *microscopică* a materiei) pierd, în general, această calitate. Astfel, este binecunoscut faptul că în mecanica *cuantică* particulele atomice nu au *simultan* poziția și viteza bine stabilite (cf. [32], p. 22). Asemenea teorii¹ utilizează relații privind valorile *medii* ori *probabilități* ale mărimilor specifice (cf. [56], p. 285, [34], p. 680).

3. Masa este *independentă* de viteză (cf. [54], p. 10) și, în general, de timp.

¹Acad. O. Onicescu le atribuie titlul generic de *mecanici aleatoare* (Langevin, Doob, Kolmogorov, De Broglie, Schrödinger). Fără a disemina excesiv, trebuie spus că în fizică (electrodinamică, mecanică ondulatorie), procedul *medierii* este fundamental: medierea statistică a electronilor în teoria lui Lorentz asupra electrodinamicii microscopice, formula intensității de polarizare în cazul unui dielectric gazos, secțiunea eficace diferențială a difuziei luminii pe electronul sferic liber, ș. a. m. d. (cf. [55], p. 138, 152, 172). O abordare detaliată a unor asemenea chestiuni poate fi citită în [81].

Există, de asemeni, o serie de fenomene fizice (de exemplu, cele legate de electromagnetism) care nu pot fi explicate prin intermediul *mişcărilor* mecanice (cf. [32], p. 15).

1.1 Modelul matematic al spațiului fizic

”Spațiul nu reprezintă o însușire a vreunor lucruri în sine, nici pe acestea în raporturile lor reciproce, adică nici o determinare a lor care ar fi inerentă obiectelor însele și care ar subzista, chiar dacă am face abstracție de toate condițiile subiective ale existenței. (Immanuel Kant, *Expunerea transcendențială a conceptului de spațiu*, cf. [37], p. 77)”

Pentru a defini spațiul fizic, notat SF , vom da un model al *punctelor* și *direcțiilor* sale.

Acesta va ține seama de faptul că, în mecanica clasică, spațiul este *infini*t (fără început sau sfârșit), *omogen* (simetria la translații) și *izotrop* (simetria la rotații) (cf. [76], p. 7, [54], p. 8, [32], p. 53, 56). În particular, doi observatori trebuie să evalueze *lungimea* unui obiect în mod identic, mărimea obținută coincidând la amândoi, independent de mișcarea instrumentelor de măsură ori a obiectului (cf. [32], p. 47).

1.1.1 Punctele spațiului fizic

Să considerăm mulțimea $\mathbb{R}^3 = \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ numită și *spațiu aritmetic*. Elementele sale, notate A, B, C, \dots se numesc *punctele* spațiului fizic².

Folosim *scrierea* $A = (x_A, y_A, z_A)$.

Pe \mathbb{R}^3 introducem o structură de *spațiu metric*. Mai precis, dacă $P = (x_P, y_P, z_P)$ și $Q = (x_Q, y_Q, z_Q)$, atunci *distanța euclidiană* dintre punctele spațiului fizic este

$$d(P, Q) = \sqrt{\sum (x_Q - x_P)^2}$$

(cf. [57], p. 111).

Spațiul metric complet $E_3 = (\mathbb{R}^3, d)$ dă modelul punctelor spațiului fizic.

²Subliniem *lipsa* operațiilor în spațiul aritmetic.

1.1.2 Direcțiile spațiului fizic

Pe $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$ introducem următoarea relație de echivalență: $(A, B)\rho(C, D)$ dacă, *prin definiție*, avem

$$\begin{cases} x_B - x_A = x_D - x_C \\ y_B - y_A = y_D - y_C \\ z_B - z_A = z_D - z_C. \end{cases}$$

Elementul (A, B) se notează cu \overrightarrow{AB} și poartă denumirea de *segment orientat*. A este *originea* segmentului orientat, iar B *extremitatea* sa. Două segmente orientate aparținând aceleiași clase de echivalență se numesc *echipolente* (cf. [57], p. 113).

Elementele mulțimii $VL = \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 / \rho$ sunt numite *vectori liberi* sau *direcții* ale spațiului fizic. Ele se notează cu \overline{AB} , \overline{CD} , \overline{x} , \overline{y} , ...

Pe mulțimea VL introducem o structură de *spațiu liniar real*. Aceasta este dată de operațiile:

1) " + " : $VL \times VL \rightarrow VL$ definită prin formula

$$\overline{AB} + \overline{BC} = \overline{AC} \text{ (regula lui Chasles);}$$

2) " · " : $\mathbb{R} \times VL \rightarrow VL$ definită prin formula

$$\lambda \cdot \overline{AB} = \overline{AC},$$

unde

$$\begin{cases} x_C - x_A = \lambda \cdot (x_B - x_A) \\ y_C - y_A = \lambda \cdot (y_B - y_A) \\ z_C - z_A = \lambda \cdot (z_B - z_A). \end{cases}$$

Operațiile $+$, \cdot sunt *bine definite*, adică nu depind de alegerea reprezentanților claselor de echivalență. Vectorii \overline{x} , \overline{y} , unde $\overline{y} = \lambda \cdot \overline{x}$, poartă denumirea de *vectori coliniari*.

Spațiul $T\mathbb{R}^3 = (VL, +, \cdot)$ se numește *spațiul vectorilor liberi* sau *spațiul tangent* la \mathbb{R}^3 .

Să considerăm punctele $O = (0, 0, 0)$, $I = (1, 0, 0)$, $J = (0, 1, 0)$ și $K = (0, 0, 1)$ din E_3 . Vectorii $\vec{i} \stackrel{\text{not}}{=} \overline{OI}$, $\vec{j} \stackrel{\text{not}}{=} \overline{OJ}$, $\vec{k} \stackrel{\text{not}}{=} \overline{OK}$ formează o bază a lui $T\mathbb{R}^3$. Aceasta se numește *baza canonică* a spațiului vectorilor liberi. Ea dă *orientarea* spațiului (cf. [44], p. 488).

În particular, putem scrie

$$\overline{AB} = (x_B - x_A) \cdot \vec{i} + (y_B - y_A) \cdot \vec{j} + (z_B - z_A) \cdot \vec{k}. \quad (1.1)$$

Spațiul $T\mathbb{R}^3$ este organizat ca *spațiu liniar euclidian*. Astfel, formula produsului său scalar este

$$\Phi(\overline{AB}, \overline{AC}) = \sum (x_B - x_A) \cdot (x_C - x_A) \stackrel{\text{not}}{=} \overline{AB} \cdot \overline{AC}.$$

Cu ajutorul produsului scalar definim *unghiul* $\varphi \in [0, \pi]$ făcut de vectorii \vec{x}, \vec{y} . Formula sa este

$$\cos \varphi = \frac{\vec{x} \cdot \vec{y}}{\sqrt{x^2} \cdot \sqrt{y^2}} \stackrel{\text{not}}{=} \cos(\vec{x}, \vec{y}).$$

Mărimea $|\vec{x}| = \sqrt{x^2}$ se numește *lungimea* (modulul, norma) vectorului \vec{x} .

Spațiul $T\mathbb{R}^3$ este dotat cu o topologie de tip *produs*. Aceasta este introdusă cu ajutorul filtrelor de vecinătăți (cf. [38], p. 56, [64], p. 14, [39], p. 113). Mai precis, fie $\vec{a}_0 \in T\mathbb{R}^3$. Atunci, există și sunt unici scalarii reali x_0, y_0, z_0 astfel încât $\vec{a}_0 = x_0\vec{i} + y_0\vec{j} + z_0\vec{k}$. Mulțimea $B(\vec{a}_0, \varepsilon) = \{x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k} \mid |x - x_0|, |y - y_0|, |z - z_0| < \varepsilon\}$ este o vecinătate a vectorului \vec{a}_0 . Sistemul fundamental de vecinătăți al lui \vec{a}_0 este $\mathcal{V} = \{B(\vec{a}_0, \varepsilon) \mid \varepsilon > 0\}$ (cf. [39], problema II.1.64, p. 144-145).

Observăm că *lungimea vectorilor liberi definește o normă pe $T\mathbb{R}^3$* . Aceasta generează, la rândul ei, o topologie a lui $T\mathbb{R}^3$ care, dat fiind faptul că $\dim_{\mathbb{R}} T\mathbb{R}^3 < +\infty$, va coincide cu topologia de mai sus (cf. [53], p. 196).

Se arată ușor că operațiile cu vectori din $T\mathbb{R}^3$ sunt continue în raport cu topologiile produs (cf. [39], p. 181) ale lui $T\mathbb{R}^3 \times T\mathbb{R}^3$, respectiv $\mathbb{R} \times T\mathbb{R}^3$. Astfel, $T\mathbb{R}^3$ este un *spațiu liniar topologic*.

Spațiul liniar euclidian și topologic $T\mathbb{R}^3$ modelează direcțiile spațiului fizic.

În final, observăm că cele două modele, cel al punctelor și cel al direcțiilor, sunt interrelaționate, în sensul că

$$d(P, Q) = \sqrt{PQ^2}.$$

1.2 Spațiul vectorilor legați

Fie A un punct din E_3 . Atunci, introducem mulțimea $VL_A = \{\overrightarrow{AB} \mid B \in E_3\}$.

Elementele mulțimii VL_A se mai numesc și *vectori legați* în punctul A .

Aplicația bijectivă $f_A : VL_A \rightarrow VL$ dată de formula $f_A(\overrightarrow{AB}) = \overline{AB}$, unde $B \in E_3$, permite inducerea structurii liniare euclidiene și topologice a lui $T\mathbb{R}^3$ pe VL_A (cf. [57], p. 114). În particular,

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \overline{AB} \cdot \overline{AC},$$

unde $B, C \in E_3$.

Utilizăm notația $T_A\mathbb{R}^3 = (VL_A, +, \cdot)$ (cf. [57], p. 115).

Trebuie precizat chiar de acum că diferitele *mărimi fizice* vectoriale (forța, viteza, etc.) cu care operează mecanica teoretică sunt exprimate analitic prin *tipuri* diferite de vectori: liberi, legați, *alunecători* (sau *glisanți* – ce vor fi definiți ulterior). De exemplu, forța aplicată unui punct material se reprezintă printr-un vector legat. În schimb, vectorul *viteză unghiulară* al unui corp solid rigid aflat în mișcare de rotație în jurul unei axe fixe este dat printr-un vector alunecător (cf. [34], p. 166). O altă mărime vectorială, *momentul* unui cuplu de forțe ce acționează asupra unui solid rigid, poate fi considerată vector liber (cf. [32], p. 149).

Menționăm că în lucrarea de față folosim doar baze ortonormate. De aceea, asupra caracterizărilor de tip *tensorial* ale mărimilor vectoriale nu se va insista. Pentru detalii, vezi [76], p. 952-981 sau [66], p. 236-253.

1.3 Geometria spațiului fizic

Modelul matematic al SF fiind deja prezentat, ne vom referi în continuare la o serie de elemente ale geometriei acestuia. Astfel, *geometria spațiului fizic este de tip euclidian (punctual)* (cf. [44], p. 530).

O mulțime de puncte din E_3 , notată D , constituie o *dreaptă* dacă există $A \in E_3$ și vectorul $\vec{\tau}$ cu proprietatea că

$$D = \{M \in E_3 : \overline{AM} = \lambda \cdot \vec{\tau}, \lambda \in \mathbb{R}\}$$

(cf. [44], p. 503).

În mod echivalent,

$$D = \{M \in E_3 : \overrightarrow{AM} = \lambda \cdot \vec{\tau}, \lambda \in \mathbb{R}\},$$

unde $\vec{\tau} \in T_A\mathbb{R}^3$.

O mulțime de puncte din E_3 , notată P , constituie un *plan* dacă există $A \in E_3$ și vectorii necoliniari $\vec{\tau}, \vec{\nu}$ cu proprietatea că

$$P = \{M \in E_3 : \overline{AM} = \alpha \cdot \vec{\tau} + \beta \cdot \vec{\nu}, \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}$$

(cf. [44], p. 503).

În mod echivalent,

$$P = \{M \in E_3 : \overrightarrow{AM} = \alpha \cdot \vec{\tau} + \beta \cdot \vec{\nu}, \alpha, \beta \in \mathbb{R}\},$$

unde $\vec{\tau}, \vec{\nu} \in T_A \mathbb{R}^3$.

Spațiile liniare $Sp(\{\vec{\tau}\})$, $Sp(\{\vec{\tau}, \vec{\nu}\})$ (adică, *acoperirile liniare* ale sistemelor de vectori $\{\vec{\tau}\}$, respectiv $\{\vec{\tau}, \vec{\nu}\}$ dotate cu operațiile induse de $T\mathbb{R}^3$, cf. [67], p. 65, [75], p. 164) poartă denumirea de *spații directe* ale dreptei D , respectiv planului P (cf. [44], p. 500).

Două drepte (plane) sunt *paralele* dacă nu au puncte *comune* (intersecția lor este vidă) și spațiile lor directe coincid. O dreaptă este *paralelă* cu un plan dacă nu are puncte comune cu acesta și spațiul director al dreptei este un subspațiu al spațiului director al planului (cf. [49], p. 83).

Fiind date două drepte coplanare D_1, D_2 ai căror vectori directori sunt $\vec{\tau}, \vec{\nu}$ vom spune că, prin definiție, *unghiul* făcut de ele este $\angle(\vec{\tau}, \vec{\nu})$.

O familie de puncte $(M_p)_{p \in \overline{0, n}}$ este *afin dependentă* dacă există numerele reale $(\alpha_p)_{p \in \overline{0, n}}$ cu proprietatea că $\sum_{p=0}^n \alpha_p = 1$ și punctul $M \in E_3$ (numit *baricentru*) astfel încât

$$\overline{OM} = \sum_{p=0}^n \alpha_p \cdot \overline{OM}_p \quad (\forall) O \in M_3.$$

O familie de puncte din E_3 care nu este afin dependentă va fi considerată *afin independentă* (cf. [44], p. 500). Folosim notația $M \stackrel{not}{=} \sum_{p=0}^n \alpha_p \cdot M_p$.

O familie de puncte $(M_p)_{p \in \overline{0, n}}$ este afin dependentă dacă și numai dacă vectorii $\overline{M_0M_1}, \dots, \overline{M_0M_n}$ sunt liniar dependenți (cf. [44], p. 501). Astfel, punctele $A, B, C \in E_3$ sunt *coliniare* dacă și numai dacă familia lor este afin dependentă.

Aplicația $F : E_3 \rightarrow E_3$ se numește *afină* dacă pentru orice $A, B \in E_3$ și $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, unde $\alpha + \beta = 1$, are loc relația

$$F(\alpha A + \beta B) = \alpha \cdot F(A) + \beta \cdot F(B).$$

Introducem funcția $T : T\mathbb{R}^3 \rightarrow T\mathbb{R}^3$ prin formula $T(\overline{AB}) = \overline{F(A)F(B)}$, unde $A, B \in E_3$. Aceasta va fi, evident, liniară (cf. [44], p. 506).

Aplicația $F : E_3 \rightarrow E_3$ se numește *izometrică* dacă $d(A, B) = d(F(A), F(B))$, unde $A, B \in E_3$. Atunci, F este bijectivă, iar F^{-1} este izometrică (cf. [69], p. 128). O aplicație izometrică este, în mod obligatoriu, și afină. În acest caz, funcția T asociată ei devine o aplicație *ortogonală* (cf. [44], p. 533) sau un *operator izometric* în sensul utilizat în [67], p. 268.

Dându-se o aplicație izometrică F , va exista o bază ortonormată a spațiului $T\mathbb{R}^3$ în raport cu care *matricea de reprezentare* a operatorului T să se scrie sub forma

$$\begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha & 0 \\ \sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & \pm 1 \end{pmatrix},$$

unde $\alpha \in [0, 2\pi)$ (cf. [67], p. 95, 301)³.

Atunci când aplicația F admite un punct *fix* ($F(A) = A$, unde $A \in E_3$), iar matricea operatorului T este

$$\begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha & 0 \\ \sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

spunem că aplicația F desemnează o *rotație* a SF de *unghi* α în jurul punctului A (cf. [67], p. 301, [75], p. 50, 53, [56], p. 23). Conform [56], teorema 2, p. 25, orice rotație a SF în jurul punctului A este o rotație în jurul unei *axe* ce trece prin A . Așa cum se poate observa din structura matricei de reprezentare a operatorului T , vectorul director al acestei axe este acel vector din baza ortonormată căruia îi corespunde ultima coloană a matricei.

Rotațiile spațiului fizic joacă un rol fundamental în mecanica teoretică (cf., de exemplu, [56], p. 22-30).

1.4 Repere carteziane

Spațiul fizic SF este studiat cu ajutorul *reperelor carteziane*, adică al dubletelor $\mathcal{R} = (O, \overrightarrow{\mathcal{B}})$, unde $O \in E_3$ iar $\overrightarrow{\mathcal{B}}$ este o bază a lui $T_O\mathbb{R}^3$ (cf. [57],

³Matricea de reprezentare \mathcal{M} a operatorului T verifică relația formală

$$\left(T(\overline{e}_1) \quad T(\overline{e}_2) \quad T(\overline{e}_3) \right) = \left(\overline{e}_1 \quad \overline{e}_2 \quad \overline{e}_3 \right) \cdot \mathcal{M},$$

unde $\{\overline{e}_1, \overline{e}_2, \overline{e}_3\}$ este o bază a spațiului $T\mathbb{R}^3$.

p. 115).

În cele ce urmează vom da o reprezentare grafică acestor repere.

Așadar, fie $\mathcal{B} = \{\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3\}$ o bază a lui $T\mathbb{R}^3$. Considerăm că baza \mathcal{B} este *ortonormată*, adică $\bar{e}_i \cdot \bar{e}_j = \delta_{ij}$, unde δ este *simbolul lui Kronecker*. Baza $\bar{\mathcal{B}} = \{\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3\}$ a spațiului $T_O\mathbb{R}^3$ se introduce conform relațiilor $\bar{e}_i \in \bar{e}_i$, unde $1 \leq i \leq 3$. Când \mathcal{B} este baza canonică a lui $T\mathbb{R}^3$, \mathcal{R} se numește *reper canonic* al spațiului fizic.

Construim în E_3 trei drepte perpendiculare D^1, D^2, D^3 , concurente în punctul O (vezi Figura 1.1). Dreapta $D^i = \{B \in E_3 \mid \overrightarrow{OB} = \lambda \cdot \bar{e}_i, \lambda \in \mathbb{R}\}$ se notează cu Ox^i și se numește *axă de coordonate* a reperului \mathcal{R} , unde $1 \leq i \leq 3$. Planul $P^{ij} = \{B \in E_3 \mid \overrightarrow{OB} = \alpha \cdot \bar{e}_i + \beta \cdot \bar{e}_j, \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}$ se notează cu $Ox^i x^j$ și se numește *plan de coordonate* al reperului \mathcal{R} , unde $i \neq j$ și $1 \leq i, j \leq 3$. La rândul său, reperul \mathcal{R} se notează cu $Ox^1 x^2 x^3$ și se numește *sistem (triedru) de axe de coordonate*.

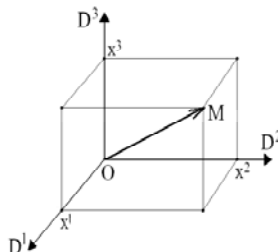


Figura 1.1

Fie $M \in E_3$. *Coordonatele* lui M în \mathcal{R} sunt scalarii reali x^u cu proprietatea că

$$\overrightarrow{OM} = \sum_{u=1}^3 x^u \cdot \bar{e}_u.$$

De asemenea, $\overrightarrow{OM} = \sum_{u=1}^3 x^u \cdot \bar{e}_u$.

Au loc relațiile următoare:

$$\bar{e}_u = \alpha_{u1} \cdot \bar{i} + \alpha_{u2} \cdot \bar{j} + \alpha_{u3} \cdot \bar{k}, \quad u = 1, 2, 3,$$

unde numerele $\alpha_{u1} = \cos(\bar{e}_u, \bar{i})$, $\alpha_{u2} = \cos(\bar{e}_u, \bar{j})$, $\alpha_{u3} = \cos(\bar{e}_u, \bar{k})$ se mai numesc și *cosinusii directori* ai vectorului \bar{e}_u în raport cu baza canonică a lui $T\mathbb{R}^3$ (cf. [66], p. 121, [44], p. 532). Evident, $\det(\alpha_{ij}) \neq 0$.

Atunci,

$$\begin{aligned}\overline{OM} &= \sum_{u=1}^3 x^u \cdot \bar{e}_u \\ &= (x^1 \alpha_{11} + x^2 \alpha_{21} + x^3 \alpha_{31}) \bar{i} + (x^1 \alpha_{12} + x^2 \alpha_{22} + x^3 \alpha_{32}) \bar{j} \\ &\quad + (x^1 \alpha_{13} + x^2 \alpha_{23} + x^3 \alpha_{33}) \bar{k}.\end{aligned}$$

În acest mod, punctul M este *raportat* la reperul \mathcal{R} . Într-adevăr, conform relației (1.1) avem

$$\begin{cases} x^1 \alpha_{11} + x^2 \alpha_{21} + x^3 \alpha_{31} = x_M - x_O \\ x^1 \alpha_{12} + x^2 \alpha_{22} + x^3 \alpha_{32} = y_M - y_O \\ x^1 \alpha_{13} + x^2 \alpha_{23} + x^3 \alpha_{33} = z_M - z_O. \end{cases} \quad (1.2)$$

Astfel, numerele x^u sunt unic determinate pe baza elementelor $x_M - x_O$, $y_M - y_O$, $z_M - z_O$, α_{uv} . Relațiile (1.2) sunt *relațiile de raportare* ale punctului M la reperul \mathcal{R} .

În acest reper, segmentul orientat \overrightarrow{OM} va fi reprezentat de segmentul de dreaptă OM dotat cu o săgeată care îl *indică* pe M . Deci, din punct de vedere *grafic*, prin *segment orientat* se înțelege un segment de dreaptă pe care s-a stabilit un *sens de parcurs*, ales aici de la O către M . Punctul O este *originea* (*punctul de aplicație*) al lui \overrightarrow{OM} , iar M este *extremitatea* sa. Dreapta OM se numește *dreapta-suport* a segmentului orientat \overrightarrow{OM} .

Fie acum $A \in E_3$, cu $A \neq O$. Atunci, vectorul \overrightarrow{AM} va fi reprezentat sub forma unui *segment orientat* în reperul \mathcal{R} . Mai mult, ducând paralele prin A la axele de coordonate Ox^i , obținem reprezentarea grafică a reperului $\mathcal{R} = (A, \overrightarrow{B})$.

Utilizarea segmentelor orientate în studiul SF poartă denumirea de *metoda grafică*. Un exemplu clar în această privință este dat de *regula paralelogramului*: dacă are loc relația $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OC}$, atunci punctele O , A , C și respectiv B sunt vârfurile unui *paralelogram*.

Numărul $x^u = \overline{OM} \cdot \bar{e}_u$ reprezintă *proiecția* vectorului \overrightarrow{OM} pe direcția \bar{e}_u . În general, prin *proiecția* vectorului \bar{a} pe direcția \bar{b} vom înțelege numărul $|\bar{a}| \cos(\bar{a}, \bar{b}) = \frac{\bar{a} \cdot \bar{b}}{|\bar{b}|} \stackrel{\text{not}}{=} a_b$.

Să considerăm vectorul $\bar{v} = \frac{\bar{b}}{|\bar{b}|}$, unde $\bar{b} \neq 0$. Acesta se numește *versorul* sau *vectorul-unitate* al direcției \bar{b} . Atunci, vectorul $\bar{p} = a_b \cdot \bar{v} = \frac{\bar{a} \cdot \bar{b}}{|\bar{b}|^2} \cdot \bar{b}$ se numește *vectorul-proiecție* pe direcția \bar{b} al vectorului \bar{a} .

Vectorul \bar{p} admite următoarea caracterizare specifică analizei în spații cu produs scalar (prehilbertiene). Fie V subspațiul linear generat de vectorul \bar{b} în $T\mathbb{R}^3$. Atunci, pe baza teoremei Schmidt (cf. [44], p. 364), există și este unic vectorul $\bar{p} \in V$ (numit *proiecția ortogonală* a vectorului \bar{a} pe V) astfel încât

$$|\bar{a} - \bar{p}| = \inf_{\bar{v} \in V} |\bar{a} - \bar{v}| = \text{dist}(\bar{a}, V).$$

În cazul de față, această proprietate poate fi justificată în mod direct.

Astfel, cum $V = \mathbb{R}\bar{b}$, ca să găsim numărul real λ_0 pentru care $\bar{p} = \lambda_0\bar{b}$, calculăm expresia de mai jos

$$E(\lambda) = |\bar{a} - \lambda\bar{b}|^2 = (\bar{a} - \lambda\bar{b})^2 = \bar{a}^2 + \lambda^2\bar{b}^2 - 2\lambda(\bar{a} \cdot \bar{b}), \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

Discriminantul trinomului de gradul al II-lea în λ este

$$\Delta_\lambda = 4[(\bar{a} \cdot \bar{b})^2 - \bar{a}^2 \cdot \bar{b}^2] = -4(\bar{a} \times \bar{b})^2 \leq 0,$$

conform *identității lui Lagrange* (cf. [34], p. 34).

Minimul expresiei $E(\lambda)$, care are loc pentru

$$\lambda_0 = \frac{\bar{a} \cdot \bar{b}}{|\bar{b}|^2}, \quad (1.3)$$

este

$$E(\lambda_0) = -\frac{\Delta_{\lambda_0}}{4\bar{b}^2} = \frac{1}{|\bar{b}|^2} \cdot |\bar{a} \times \bar{b}|^2. \quad (1.4)$$

Așadar, $\bar{p} = \frac{\bar{a} \cdot \bar{b}}{|\bar{b}|^2} \cdot \bar{b}$.

Aceste noțiuni se transpun cu ușurință în cazul vectorilor legați. De exemplu, dacă $\vec{a} \in T_A\mathbb{R}^3$, $\vec{a} \in \bar{a}$, unde $A \in E_3$, atunci vectorul-proiecție pe direcția \bar{b} al lui \vec{a} este $\vec{p} \in T_A\mathbb{R}^3$, $\vec{p} \in \bar{p}$ (cf. [34], p. 24). Din punct de vedere grafic, semnificația mărimii \vec{p} este imediată (vezi Figura 1.2).

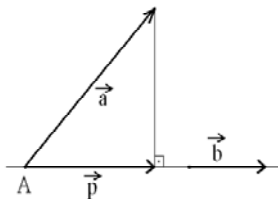


Figura 1.2

Capitolul 2

Mecanica punctului material

2.1 Cinematica

*Cinematica*¹, în cadrul căreia se introduc noțiunile de traiectorie, viteză și accelerație ale unui punct material, se ocupă cu studiul mișcărilor acestuia *din punct de vedere geometric*, fără a ține seama de masa lui și de forțele la care este supus (cf. [76], p. 5).

Se consideră un reper canonic \mathcal{R} al SF . Structura topologică a spațiului liniar $T\mathbb{R}^3$ permite introducerea noțiunii de *diferențiabilitate*.

Astfel, fie $\Omega = \prod_{a=1}^n I_a$, unde $I_a \subset \mathbb{R}$ sunt intervale netriviale înzestrate cu topologia \mathcal{T}_{I_a} indusă de topologia uzuală a lui \mathbb{R} (cf. [39], p. 112, 133). Mulțimea Ω , la rândul său, este înzestrată cu topologia produs $\prod_{a=1}^n \mathcal{T}_{I_a}$ (cf. [39], p. 181).

Dacă $\sigma : \Omega \rightarrow T\mathbb{R}^3$ este o aplicație scrisă sub forma

$$\sigma(q_1, \dots, q_n) = x(q_1, \dots, q_n)\bar{i} + y(q_1, \dots, q_n)\bar{j} + z(q_1, \dots, q_n)\bar{k},$$

unde $q_a \in I_a$, $1 \leq a \leq n$, vom putea spune că $\sigma \in C^m(\Omega, T\mathbb{R}^3)$ dacă și numai dacă $x, y, z \in C^m(\Omega, \mathbb{R})$. Atunci când cel puțin unul dintre intervalele I_a nu este deschis vom presupune că există mulțimea G , deschisă în topologia uzuală a lui \mathbb{R}^n , astfel încât $\bar{\Omega} \subset G$ și $\sigma \in C^m(G, T\mathbb{R}^3)$, respectiv $x, y,$

¹*kínēsis*, adică deplasare, mișcare, schimbare. Cf. [58], p. 149.

$z \in C^m(G, \mathbb{R})$. Aici, $n \in \mathbb{N}$, $m \in \mathbb{N} \cup \{+\infty\}$. Mai mult ($m < +\infty$),

$$\frac{\partial^m \sigma}{\partial q_1^{h_1} \partial q_2^{h_2} \dots \partial q_n^{h_n}} = \frac{\partial^m x}{\partial q_1^{h_1} \partial q_2^{h_2} \dots \partial q_n^{h_n}} \bar{i} + \frac{\partial^m y}{\partial q_1^{h_1} \partial q_2^{h_2} \dots \partial q_n^{h_n}} \bar{j} + \frac{\partial^m z}{\partial q_1^{h_1} \partial q_2^{h_2} \dots \partial q_n^{h_n}} \bar{k},$$

unde $0 \leq h_a \leq m$ și $\sum_{a=1}^n h_a = m$. În mod analog, putem vorbi de diferențiabilitate relativ la $T_A \mathbb{R}^3$, unde $A \in E_3$.

2.1.1 Traiectoria. Viteza. Accelerația

Fie $M(t) \in E_3$, unde $t \in \mathbb{R}$. Dubletul $(M(t), m)$, unde $m > 0$ este o constantă numită *masă*, poartă denumirea de *punct material* (cf. [56], p. 16). Componentele punctului material (ca element al spațiului aritmetic \mathbb{R}^3)

$$M = (x_M(t), y_M(t), z_M(t))$$

putând varia, punctul material trebuie privit ca fiind *perpetuu în mișcare (mobil)* (cf. [32], p. 18). Variabila considerată aici este *timpul* (cf. [34], p. 214, 220).

Modelul matematic al timpului ca variabilă reală ține seama de caracteristicile acestuia, admise de mecanica clasică: timpul este *infini* (fără început sau sfârșit), *ireversibil* (succesiunea evenimentelor nu poate fi modificată), *absolut* (independent de spațiu) și *omogen* (cf. [76], p. 8, [32], p. 42, 59, [54], p. 58). În particular, doi observatori evaluează timpul în mod identic, "durata" unui fenomen coincidând la amândoi (cf. [34], p. 179, [32], p. 191), independent de *mișcarea* instrumentelor de măsură (cf. [32], p. 47).

Scopul mecanicii punctului material este acela de a studia *comportamentul* acestuia (mișcare/repaus) față de diferite repere ale *SF*. Astfel, calculele specifice mecanicii teoretice nu au *sens* dacă nu se precizează reperul (numit, de obicei, *sistem de referință*) în raport cu care au fost efectuate (cf. [32], p. 17, [76], p. 2).

Despre vectorul

$$\overline{OM} = x(t)\bar{i} + y(t)\bar{j} + z(t)\bar{k} \stackrel{\text{not}}{=} \bar{r}(t)$$

se presupune, în general, că aparține lui $C^\infty(\mathbb{R}, T\mathbb{R}^3)$; în acest sens, mecanica newtoniană este *netedă* (cf. [32], p. 19). Deși derivatele de ordin $n \geq 3$ nu vor fi prezente în ecuațiile mecanicii teoretice, se pare că anumite mărimi

fizice care caracterizează fenomene ce implică variația extrem de rapidă în timp a modulului forțelor (ciocniri, cutremure, etc.) pot fi exprimate cu ajutorul acestora (cf. [76], p. 292). Gradul de *confort* al unui autovehicul este precizat folosind derivatele de ordinul $n = 3$ (*supraaccelerația*) (cf. [63], p. 144). Vectorul $\vec{r}(t)$ se numește *raza vectoare* a punctului material M .

Vectorul \vec{OM} este *vectorul de poziție* al punctului material M . Mulțimea

$$\Gamma = \{M(t) : t \in \mathbb{R}\}$$

(locul geometric al punctelor prin care trece mobilul) se numește *traiectoria* punctului material M . Asupra sa vom reveni în detaliu în subsecțiunea următoare.

Vectorul

$$\dot{\vec{r}}(t) = \dot{x}(t)\vec{i} + \dot{y}(t)\vec{j} + \dot{z}(t)\vec{k} \stackrel{\text{not}}{=} \vec{v}(t)$$

este *vectorul-viteză* al punctului material M . Aici, ” \cdot ” $\stackrel{\text{not}}{=} \frac{d}{dt}$. Prin *viteza* punctului material M înțelegem vectorul $\vec{MN} \in \vec{v}(t)$. Atunci când nu este pericol de confuzie, prin *viteză* vom înțelege și mărimea $v(t) \stackrel{\text{def}}{=} |\vec{v}(t)|$.

Vectorul

$$\ddot{\vec{r}}(t) = \ddot{x}(t)\vec{i} + \ddot{y}(t)\vec{j} + \ddot{z}(t)\vec{k} \stackrel{\text{not}}{=} \vec{a}(t)$$

este *vectorul-accelerație* al punctului material M . Prin *accelerația* punctului material M înțelegem vectorul $\vec{MP} \in \vec{a}(t)$. Atunci când nu este pericol de confuzie, prin *accelerație* vom înțelege și mărimea $a(t) \stackrel{\text{def}}{=} |\vec{a}(t)|$.

Încheiem această subsecțiune cu observația că noțiunile cinematice de mai sus se definesc în raport cu oricare dintre reperele din SF în mod analog. În plus, punctul material M poate fi *în repaus* față de un reper al SF ($\vec{r}(t) = \text{constant}$) și *în mișcare* față de altul ($v(t) > 0$). Este, de asemenea, subînțeles că orice două repere ale SF se mișcă neted (C^∞) unul față de celălalt.

2.1.2 Geometria traiectoriei

”Existența lumii bazată pe evidența experienței naturale nu mai poate fi pentru noi un fapt evident, ci doar un fenomen de valabilitate. (Edmund Husserl, *Drumul către ego-ul transcendențial*, cf. [33], p. 48)”

Vom analiza în cele ce urmează o serie de chestiuni privitoare la mulțimea Γ . În mod obișnuit, *traiectoria* punctului material este prezentată ca *hodogra-*

ful^2 razei vectoare a acestuia (cf. [32], p. 23, [2], p. 134-135). Aceasta pentru că, în principiu, traiectoria se stabilește ca urmare a *observației* (colectării de date "empirice", experimentale³, etc.). Un exemplu elocvent îl constituie mișcarea planetelor în jurul Soarelui, explicată de Kepler pornind de la tabelele de observații asupra planetei Marte aparținând lui Tycho Brahe (cf. [34], p. 212). O situație total diferită apare însă atunci când, de exemplu, punctul material este *obligat* să se miște pe o elipsă *dată* situată în planul vertical (cf. [34], p. 401-402). Într-o formulare echivalentă, *traiectoria punctului material M este locul geometric al pozițiilor succesive pe care le ocupă punctul material în mișcarea sa față de sistemul de referință* (cf. [76], p. 282). Din același motiv (observația), traiectoria trebuie să satisfacă anumite restricții impuse de *fenomenul fizic* al mișcării punctului material (cf. [76], p. 281).

Traietoria punctului material este, astfel, *continuuă* (punctul material nu poate trece de la o poziție la alta fără a parcurge pozițiile intermediare), *univocă* în raport cu timpul (punctul material nu poate ocupa simultan mai multe poziții în spațiu) și permite introducerea noțiunilor de *viteză* și *acelerație* (cf. [76], p. 281, [32], p. 19).

Totuși, traiectoria punctului material trebuie privită ca o entitate geometrică (mai degrabă decât ca o curbă parametrizată netedă, cf. [44], p. 572), independentă de parametrizarea aleasă. Mai precis, traiectoria $\Gamma \subset E_3$ este, în general, o curbă netedă orientată în sensul dat în [48], p. 13-23. A se vedea, de asemeni, prezentările făcute în [44], Cap. IV, § 5 și [45], Cap. V.

Să considerăm $\gamma : I \rightarrow E_3$ o aplicație introdusă prin formula

$$\overline{OM} = x(q)\bar{i} + y(q)\bar{j} + z(q)\bar{k} = \sigma(q),$$

unde $M = \gamma(q)$, $q \in I$. Aplicația γ definește un *drum neted* (*curbă parametrizată netedă*) (C^∞) în SF dacă $\sigma \in C^\infty(I, T\mathbb{R}^3)$.

Drumul neted $\gamma : I \rightarrow E_3$ este numit *regular* când $\sigma'(q) \neq 0$ în I , respectiv *biregular* când $\sigma'(q) \times \sigma''(q) \neq 0$ în I .

Două drumuri netede $\gamma : I \rightarrow E_3$, $\zeta : J \rightarrow E_3$ sunt *echivalente* dacă există difeomorfismul (C^∞) $\lambda : I \rightarrow J$ (numit *schimbare de variabilă*) astfel

²Fie $\bar{w}(t) \in T\mathbb{R}^3$, $t \in I$, unde I este un interval netrivial al lui \mathbb{R} , și $A \in E_3$. Locul geometric al extremității vectorului $\bar{w} \in T_A\mathbb{R}^3$, $\bar{w} \in \bar{w}(t)$, atunci când t variază este *hodograful* vectorului $\bar{w}(t)$.

³Pentru deosebirea dintre *empeiria* (cunoașterea cazurilor individuale, cf. [58], p. 269, 299) și *experimentum crucis* (experimente semnificative în concepția lui I. Newton, cf. [12], p. 203) a se vedea excelentul tratat [12].

încât $\gamma = \zeta \circ \lambda$. Când $\lambda'(u) > 0$, unde $u \in I$, drumurile γ, ζ devin *pozitiv echivalente* (cf. [48], p. 11, 22).

Mulțimea $\Gamma \subset E_3$ reprezintă o *curbă (netedă)* în SF dacă pentru orice $M \in \Gamma$ există drumul neted regulat $\gamma : I \rightarrow E_3$ (numit *parametrizare locală*) având următoarele proprietăți:

1) $\gamma(I)$ este o vecinătate a lui M deschisă în raport cu topologia indusă pe Γ de topologia metrică a lui E_3 ;

2) $\gamma : (I, \mathcal{T}_I) \rightarrow (\gamma(I), \mathcal{T}_{\gamma(I)})$ este homeomorfism (cf. [48], p. 13, [44], p. 584).

Despre curba netedă Γ spunem că este *orientabilă* în SF dacă există familia de parametrizări locale $(\gamma_a)_{a \in A}$, unde $\gamma_a : I_a \rightarrow E_3$, (numită *familie orientată*) astfel încât:

1) $\Gamma = \bigcup_{a \in A} \gamma_a(I_a)$;

2) dacă Γ_{ab} este o componentă conexă a mulțimii $\gamma_a(I_a) \cap \gamma_b(I_b)$, $a \neq b$, în raport cu topologia indusă de topologia metrică a lui E_3 , atunci drumurile

$$\gamma_a|_{I_{ab}} : I_{ab} \rightarrow E_3 \quad \gamma_b|_{I_{ba}} : I_{ba} \rightarrow E_3, \quad (2.1)$$

unde $I_{ab} = \gamma_a^{-1}(\Gamma_{ab})$, $I_{ba} = \gamma_b^{-1}(\Gamma_{ab})$, sunt pozitiv echivalente (cf. [57], p. 96, [44], p. 587, [48], p. 22).

O parametrizare locală $\gamma : I \rightarrow E_3$ a curbei orientabile Γ este *compatibilă* cu familia orientată $(\gamma_a)_{a \in A}$ dacă pentru orice $a \in A$ astfel încât $\gamma(I) \cap \gamma_a(I_a) \neq \emptyset$ și pentru orice componentă conexă Γ_a a mulțimii $\gamma(I) \cap \gamma_a(I_a)$, drumurile

$$\gamma|_{I^a} : I^a \rightarrow E_3 \quad \gamma_a|_{J^a} : J^a \rightarrow E_3,$$

unde $I^a = \gamma^{-1}(\Gamma_a)$, $J^a = \gamma_a^{-1}(\Gamma_a)$, sunt pozitiv echivalente (cf. [44], p. 587).

În legătură cu definițiile de mai sus, se cuvin făcute următoarele afirmații de natură topologică:

1) $(\mathcal{T}_\Gamma)_{\gamma_a(I_a)} = \mathcal{T}_{\gamma_a(I_a)}$;

2) mulțimile $\gamma_a^{-1}(\Gamma_{ab})$ sunt intervale în \mathbb{R} ;

3) mulțimile Γ_{ab} sunt deschise în spațiul $(\Gamma, \mathcal{T}_\Gamma)$.

Justificarea afirmației 1). Cum $\gamma_a(I_a) \in \mathcal{T}_\Gamma$, există mulțimea $G \subseteq E_3$ deschisă în raport cu topologia metrică a acestuia astfel încât $\gamma_a(I_a) = G \cap \Gamma$. Fie $M \in (\mathcal{T}_\Gamma)_{\gamma_a(I_a)}$. Atunci, există $H \subseteq E_3$ deschisă în raport cu topologia metrică a lui E_3 astfel încât $M = W \cap \gamma_a(I_a)$, unde $W = H \cap \Gamma$, deci $M = H \cap \gamma_a(I_a)$, adică $M \in \mathcal{T}_{\gamma_a(I_a)}$. Invers, dacă $M = H \cap \gamma_a(I_a)$, atunci $M \subseteq \gamma_a(I_a)$ și $M = (H \cap G) \cap \Gamma$, de unde $M \in \mathcal{T}_\Gamma$. În sfârșit, cum $M = M \cap \gamma_a(I_a)$, avem că $M \in (\mathcal{T}_\Gamma)_{\gamma_a(I_a)}$.

Justificarea afirmației 2). Dată fiind *suprarelativizarea*⁴ conexității (cf. [39], problema II.2.78, p. 174), mulțimea Γ_{ab} este conexă în spațiul $(\gamma_a(I_a), \mathcal{T}_{\gamma_a(I_a)})$. Atunci, cum aplicația $\gamma_a^{-1}: (\gamma_a(I_a), \mathcal{T}_{\gamma_a(I_a)}) \rightarrow (I_a, \mathcal{T}_{I_a})$ este continuă, mulțimea $\gamma_a^{-1}(\Gamma_{ab})$ va fi conexă în spațiul (I_a, \mathcal{T}_{I_a}) . Ținând încă o dată seama de suprarelativizarea conexității, deducem că $\gamma_a^{-1}(\Gamma_{ab})$ este o mulțime conexă și în spațiul \mathbb{R} dotat cu topologia uzuală \mathcal{T}_e , adică un interval (cf. [39], problema II.2.73, p. 172).

Justificarea afirmației 3). Să arătăm că spațiul $(\Gamma, \mathcal{T}_\Gamma)$ este local conex, adică fiecare punct $M \in \Gamma$ admite un sistem fundamental de vecinătăți format din mulțimi conexe (cf. [39], p. 152). Dacă $M \in \Gamma$, există parametrizarea locală $\gamma: I \rightarrow E_3$ astfel încât $M \in \gamma(I)$. Fie V o vecinătate a lui M în raport cu \mathcal{T}_Γ . Atunci, există $r > 0$ astfel încât $B(M, r) \cap \Gamma \subseteq V$, unde $B(M, r) = \{N \in E_3 : d(M, N) < r\}$. Evident, $W \stackrel{not}{=} \gamma(I) \cap B(M, r) = \gamma(I) \cap (B(M, r) \cap \Gamma) \in (\mathcal{T}_\Gamma)_{\gamma(I)}$ și $M \in W$. Aplicația $\gamma: I \rightarrow \gamma(I)$ fiind continuă, cum $W \in \mathcal{T}_{\gamma(I)}$, avem că $\gamma^{-1}(W) \in \mathcal{T}_I$. Însă, dat fiind că submulțimile lui \mathbb{R} deschise în raport cu topologia sa uzuală se scriu ca reuniuni cel mult numărabile de intervale deschise nevide, disjuncte două câte două (cf. [39], problema II.1.43, p. 133), deducem că

$$\gamma^{-1}(W) = I \cap \left(\bigcup_{e \in E} I_e \right) = \bigcup_{e \in E} (I_e \cap I),$$

unde I_e sunt intervale deschise în \mathbb{R} , nevide și $E \subseteq \mathbb{R}$. Există $e_M \in E$ astfel încât $M \in \gamma(I_{e_M} \cap I)$. Mulțimea $I_{e_M} \cap I \in \mathcal{T}_I$ este conexă în raport cu topologia uzuală a lui \mathbb{R} , deci, pe baza suprarelativizării conexității, și în raport cu \mathcal{T}_I . Atunci, $\gamma(I_{e_M} \cap I)$ este conexă în $(\gamma(I), \mathcal{T}_{\gamma(I)})$, deci și în $(\Gamma, \mathcal{T}_\Gamma)$. Am folosit din nou suprarelativizarea conexității și afirmația 1). Pe de altă parte, deoarece γ este homeomorfism, avem că $\gamma(I_{e_M} \cap I) = \gamma(i(I_{e_M} \cap I)) = i(\gamma(I_{e_M} \cap I))$ (cf. [39], p. 180), unde i desemnează *operatorul de interior* (cf. [39], problema II.1.7, p. 120). Adică, $\gamma(I_{e_M} \cap I) \in \mathcal{T}_{\gamma(I)}$ și, cum $\gamma(I) \in \mathcal{T}_\Gamma$, ajungem la $\gamma(I_{e_M} \cap I) \in \mathcal{T}_\Gamma$. Mulțimea $\gamma(I_{e_M} \cap I)$ face parte din sistemul fundamental de vecinătăți căutat.

⁴Adică, păstrarea conexității în spații mai "largi". Detalii privind transmiterea principalelor proprietăți topologice la subspații (*ereditate*), produse (*productivitate*) respectiv cârturi (*divizibilitate*) de spații topologice pot fi citite în [38], p. 133. Astfel, conexitatea nu este ereditară. De exemplu, mulțimea numerelor reale, dotată cu topologia uzuală este conexă pe când mulțimea numerelor raționale, cu topologia indusă de topologia uzuală, nu mai păstrează această proprietate (cf. [38], p. 54).

Spațiul $(\Gamma, \mathcal{T}_\Gamma)$ fiind local conex, deoarece $\gamma_a(I_a) \cap \gamma_b(I_b) \in \mathcal{T}_\Gamma$, avem că $\Gamma_{ab} \in \mathcal{T}_\Gamma$. Aceasta pentru că *un spațiu (X, \mathcal{T}) este local conex dacă și numai dacă componentele conexe ale mulțimilor deschise sunt mulțimi deschise* (cf. [39], p. 152).

Justificarea afirmațiilor 1), 2), 3) s-a încheiat.

Să considerăm curba netedă orientabilă conexă Γ și familiile orientate $(\gamma_a)_{a \in A}$, $(\zeta_b)_{b \in B}$, unde

$$\gamma_a : I_a \rightarrow E_3 \quad \zeta_b : J_b \rightarrow E_3.$$

Fie $a_0 \in A$, $b_0 \in B$ astfel încât $\gamma_{a_0}(I_{a_0}) \cap \zeta_{b_0}(J_{b_0}) \neq \emptyset$ și $\Gamma_{a_0 b_0}$ o componentă conexă a mulțimii $\gamma_{a_0}(I_{a_0}) \cap \zeta_{b_0}(J_{b_0})$. Au loc următoarele proprietăți:

1) drumurile $\gamma_{a_0}|_{I_{a_0 b_0}} : I_{a_0 b_0} \rightarrow E_3$ și $\zeta_{b_0}|_{J_{a_0 b_0}} : J_{a_0 b_0} \rightarrow E_3$, unde $I_{a_0 b_0} = \gamma_{a_0}^{-1}(\Gamma_{a_0 b_0})$, $J_{a_0 b_0} = \zeta_{b_0}^{-1}(\Gamma_{a_0 b_0})$, sunt echivalente;

2) (cf. [57], propoziția 2, p. 98) dacă drumurile de la 1) sunt pozitiv echivalente, atunci pentru orice $a \in A$, $b \in B$ astfel încât $\gamma_a(I_a) \cap \zeta_b(J_b) \neq \emptyset$ și pentru orice componentă conexă Γ_{ab} a mulțimii $\gamma_a(I_a) \cap \zeta_b(J_b)$, drumurile

$$\gamma_a|_{I_{ab}} : I_{ab} \rightarrow E_3 \quad \zeta_b|_{J_{ab}} : J_{ab} \rightarrow E_3 \quad (2.2)$$

sunt pozitiv echivalente.

Demonstrația părții 1). Se poate arăta ușor că, dacă $f : (X, \mathcal{T}) \rightarrow (Y, \mathcal{G})$ este continuă și $M \subseteq X$, atunci $f|_M : (M, \mathcal{T}_M) \rightarrow (f(M), \mathcal{G}_{f(M)})$ este continuă (cf. [39], problemele II.3.1, II.3.2, p. 187). Astfel, aplicația $\lambda = \zeta_{b_0}^{-1} \circ \gamma_{a_0} : I_{a_0 b_0} \rightarrow J_{a_0 b_0}$ este homeomorfism. Urmând [44], propoziția 4.25, p. 585, să considerăm $t_0 \in I_{a_0 b_0}$ și $u_0 = \lambda(t_0)$. Drumurile $\gamma_{a_0} : I_{a_0 b_0} \rightarrow E_3$, $\zeta_{b_0} : J_{a_0 b_0} \rightarrow E_3$ sunt date prin formulele

$$\begin{cases} \overline{OM} = x(q_1)\bar{i} + y(q_1)\bar{j} + z(q_1)\bar{k} = \sigma_{a_0}(q_1), & M = \gamma_{a_0}(q_1), & q_1 \in I_{a_0 b_0}, \\ \overline{OM} = x_1(q_2)\bar{i} + y_1(q_2)\bar{j} + z_1(q_2)\bar{k} = \sigma_{b_0}(q_2), & M = \zeta_{b_0}(q_2), & q_2 \in J_{a_0 b_0}. \end{cases} \quad (2.3)$$

Data fiind regularitatea lui ζ_{b_0} , avem că⁵ $\sigma'_{b_0}(u_0) \neq 0$. Să presupunem că $x'_1(u_0) \neq 0$. Atunci, conform teoremei de inversiune locală (cf. [64], p. 77), există intervalele deschise U, V în \mathbb{R} , unde $u_0 \in U$, $x_1(u_0) \in V$, astfel încât $x_1|_U : U \rightarrow V$ să fie difeomorfism (C^∞). Mulțimea $U \cap J_{a_0 b_0} \in \mathcal{T}_{J_{a_0 b_0}}$, de

⁵Conform celor menționate la pagina 17, în cazul unui drum neted $\zeta : J \rightarrow E_3$, dacă intervalul J nu este deschis va exista un drum neted $\zeta^* : J^* \rightarrow E_3$ astfel încât $J \subset J^*$, $J^* \in \mathcal{T}_e$ și $\zeta^*|_{J^*} = \zeta$.

unde $W \stackrel{\text{not}}{=} \lambda^{-1}(U \cap J_{a_0 b_0}) \in \mathcal{T}_{I_{a_0 b_0}}$. Fie acum $t \in W$. Avem că $M = \gamma_{a_0}(t) = \zeta_{b_0}(\lambda(t))$, de unde $\overline{OM} = \sigma_{a_0}(t) = \sigma_{b_0}(\lambda(t))$. Ajungem la $x(t) = x_1(\lambda(t))$ și $\lambda(t) = \varphi(x(t))$, unde $\varphi = (x_1|_U)^{-1}$, relație valabilă pe intervalul W . Deci, $\lambda \in C^\infty(W, J_{a_0 b_0})$.

Demonstrația părții 2). Construim mulțimile Γ_+ , Γ_- în felul următor. Fie $M \in \Gamma$ și $a \in A$, $b \in B$ astfel încât $M \in \Gamma_{ab}$. Dacă drumurile (2.2) sunt pozitiv echivalente, atunci $M \in \Gamma_+$. Altfel, $M \in \Gamma_-$. Conform ipotezei, $\Gamma_{a_0 b_0} \subseteq \Gamma_+$, deci $\Gamma_+ \neq \emptyset$. Presupunem prin absurd că $\Gamma_- \neq \emptyset$. Evident, dacă $M \in \Gamma_{ab}$ și $M \in \Gamma_-$, atunci $\Gamma_{ab} \subseteq \Gamma_-$. Deoarece Γ este local conexă și $\Gamma_+ = \Gamma \setminus \Gamma_-$, $\Gamma_- = \Gamma \setminus \Gamma_+$, deducem că mulțimile Γ_+ , Γ_- sunt simultan închise și deschise în $(\Gamma, \mathcal{T}_\Gamma)$. Am folosit faptul că $\Gamma_{ab} \in \mathcal{T}_\Gamma$, unde $a \in A$, $b \in B$. Ceea ce, conform [39], p. 151, este în contradicție cu conexitatea lui Γ . Demonstrația s-a încheiat.

Vom reaminti faptul că noțiunile de conexitate și local conexitate nu sunt echivalente (cf. [39], problema II.2.88, p. 177).

Fie \mathcal{A} mulțimea tuturor familiilor orientate ale curbei netede orientabile conexe Γ . Definim o *relație de echivalență* pe \mathcal{A} spunând că două familii orientate $(\gamma_a)_{a \in A}$, $(\zeta_b)_{b \in B}$ sunt *echivalente* dacă există $a_0 \in A$, $b_0 \in B$ astfel încât $\gamma_{a_0}(I_{a_0}) \cap \zeta_{b_0}(J_{b_0}) \neq \emptyset$ și $\Gamma_{a_0 b_0}$ o componentă conexă a mulțimii $\gamma_{a_0}(I_{a_0}) \cap \zeta_{b_0}(J_{b_0})$ cu proprietatea că drumurile

$$\gamma_{a_0}|_{I_{a_0 b_0}} : I_{a_0 b_0} \rightarrow E_3 \quad \zeta_{b_0}|_{J_{a_0 b_0}} : J_{a_0 b_0} \rightarrow E_3$$

sunt pozitiv echivalente (cf. [57], p. 98). Despre două familii orientate echivalente spunem că sunt *la fel orientate*.

Conform celor demonstrate anterior, mulțimea claselor de echivalență ale acestei relații de echivalență are doar două elemente. De aceea, o curbă netedă orientabilă conexă Γ este considerată *orientată* (cu *orientarea* dată de familia orientată) dacă se precizează o familie orientată a sa. Există doar două asemenea orientări (cf. [57], p. 99).

Exemplul tipic de curbă netedă orientată este dat de curba simplă. O curbă netedă Γ se numește *simplă* dacă există parametrizarea $\gamma : I \rightarrow E_3$ (numită *globală*) astfel încât $\gamma(I) = \Gamma$. Orientarea sa este dată de familia orientată $\{\gamma\}$ (cf. [48], p. 23, [44], p. 587).

Să considerăm curba netedă orientată Γ . Fie $(\gamma_a)_{a \in A}$, unde $\gamma_a : I_a \rightarrow E_3$, familia de parametrizări locale care dă orientarea curbei și $M_0 \in \Gamma$. Există $a \in A$ astfel încât $M_0 \in \gamma_a(I_a)$. Aplicația $\gamma_a : I_a \rightarrow E_3$ este introdusă prin

formula

$$\overline{OM} = x_a(q)\bar{i} + y_a(q)\bar{j} + z_a(q)\bar{k} = \sigma_a(q), \quad M = \gamma_a(q), \quad q \in I_a.$$

Dreapta $T_0 \stackrel{\text{not}}{=} \{N \in E_3 : \overline{M_0N} = \lambda\vec{w}, \lambda \in \mathbb{R}\}$, unde $\vec{w} \in T_{M_0}\mathbb{R}^3$, $\vec{w} \in \sigma'_a(q_0)$, $M_0 = \gamma_a(q_0)$, este tangenta la curba Γ în punctul M_0 . Fie $\vec{\tau}_{M_0}$ versorul vectorului \vec{w} . Acesta are săgeata îndreptată în sensul creșterii variabilei q (cf. [66], p. 261) și este independent de parametrizarea adoptată din familia orientată $(\gamma_a)_{a \in A}$. Într-adevăr, fie $b \in A$, $b \neq a$, astfel încât $M_0 \in \gamma_a(I_a) \cap \gamma_b(I_b)$. Notăm cu Γ_{ab} componenta conexă a mulțimii $\gamma_a(I_a) \cap \gamma_b(I_b)$ care îl conține pe M_0 (cf. [39], p. 151). Fie λ schimbarea de variabilă corespunzătoare drumurilor (2.2). Atunci, conform (2.3), $\sigma_a(q) = \sigma_b(\lambda(q))$, unde $q \in I_{ab}$. Prin derivare, $\sigma'_a(q) = \lambda'(q)\sigma'_b(\lambda(q))$ și obținem că $\vec{w}_a = \lambda'(q_0)\vec{w}_b$, unde $\vec{w}_a \in \sigma'_a(q_0)$, $\vec{w}_b \in \sigma'_b(\lambda(q_0))$, $\vec{w}_a, \vec{w}_b \in T_{M_0}\mathbb{R}^3$. Cum $\lambda'(q_0) > 0$, versorii vectorilor \vec{w}_a, \vec{w}_b coincid.

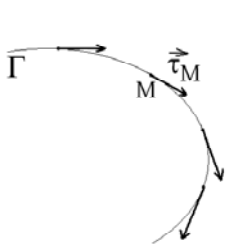


Figura 2.1

Practic, în cazul unei curbe netede orientate Γ , putem spune că orientarea face ca săgețile versorilor $\vec{\tau}_M$ să fie îndreptate în aceeași parte atunci când M parcurge curba (vezi Figura 2.1), deci că există un *sens de parcurs* (mişcare) pe curbă.

În acest moment putem preciza modul în care *traieectoria* punctului material este privită, în general, în mecanica teoretică, și anume ca o *curbă netedă orientată*. De cele mai multe ori, mișcarea punctului material este investigată pe porțiuni ale traiectoriei sale care sunt *curbe simple* având parametrizarea globală (numită *cinematică*) dată de formula $\sigma = \vec{r}(t)$. Variabila parametrizării cinematice este *timpul*. Puncte singulare apar, de exemplu, la mișcarea pe *cicloidă* (cf. [32], p. 38, [59], problema 1.5.5, p. 11, [76], p. 297, 312-313, [75], p. 98). Situații speciale se întâlnesc în cazul ciocnirilor, unde se impun diferite restricții privind netezimea parametrilor cinematici (cf. [34],

p. 614-622). "Neregularități" asemănătoare intervin și în alte capitole ale mecanicii teoretice (vezi, de exemplu, [35], p. 80-94). Ele trebuie analizate *separat* (cf. [32], p. 19).

2.1.3 Triedrul lui Frenet. Formulele Frenet-Serret

Construim în continuare un reper cartezian special legat de punctul material M , și anume *triedrul lui Frenet*. Să considerăm că traiectoria Γ este o curbă simplă a cărei parametrizare cinematică (globală) este biregulară. Relația $\sigma'_a(q) \times \sigma''_a(q) = (\lambda'(q))^3(\sigma'_b(\lambda(q)) \times \sigma''_b(\lambda(q)))$, $q \in I_{ab}$, unde σ_a , σ_b sunt formulele drumurilor (2.1) iar $\lambda : I_{ab} \rightarrow I_{ba}$ este schimbarea de variabilă, ne asigură că orice altă parametrizare (locală sau globală) rămâne biregulară, deci că biregularitatea parametrizării cinematice este o proprietate a traiectoriei Γ (geometrică).

Aplicăm *procedeul de ortonormare Gram-Schmidt* (cf. [44], p. 367-369, [67], p. 255) sistemului de vectori $\{\bar{v}, \bar{a}\}$:

1) vectorii $\bar{b}_1 = \bar{v}$, $\bar{b}_2 = \bar{a} - \pi_V(\bar{a})$ sunt ortogonali, unde V , $\pi_V(\bar{a})$ reprezintă subspațiul liniar generat de vectorul \bar{v} în $T\mathbb{R}^3$, respectiv proiecția ortogonală a vectorului \bar{a} pe V ;

2) versorii $\bar{\tau} = \frac{1}{|\bar{b}_1|}\bar{b}_1$, $\bar{\nu} = \frac{1}{|\bar{b}_2|}\bar{b}_2$ alcătuiesc sistemul ortonormat căutat. De asemenea, $Sp(\{\bar{v}, \bar{a}\}) = Sp(\{\bar{\tau}, \bar{\nu}\})$.

Conform (1.3), (1.4), $\pi_V(\bar{a}) = \frac{\bar{v} \cdot \bar{a}}{v^2} \cdot \bar{v}$ și $|\bar{b}_2| = \sqrt{E(\lambda_0)} = \frac{1}{v} \cdot |\bar{v} \times \bar{a}|$. Au loc formulele:

$$\bar{\tau} = \frac{1}{v(t)}\bar{v}(t) \quad \bar{\nu} = \frac{v(t)}{|\bar{v}(t) \times \bar{a}(t)|}[\bar{a}(t) - \frac{\bar{v}(t) \cdot \bar{a}(t)}{v^2(t)}\bar{v}(t)], \quad t \in I,$$

unde $-\infty \leq \alpha < \beta \leq +\infty$ și $I = (\alpha, \beta)$.

Introducem un al treilea vector $\bar{\beta} \stackrel{\text{not}}{=} \bar{\tau} \times \bar{\nu}$.

Atunci, reperul $\mathcal{R} = (M, \vec{\mathcal{B}})$, unde $\mathcal{B} = \{\bar{\tau}, \bar{\nu}, \bar{\beta}\}$, este *triedrul lui Frenet* al traiectoriei în punctul M . Se mai întâlnesc și denumirile de *triedrul axelor intrinseci* ale traiectoriei în punctul M ori *reperul natural* al traiectoriei în punctul M (cf. [76], p. 66).

Triedrul lui Frenet este invariant la parametrizările locale pozitiv echivalente. Mai precis, $\bar{\nu}$ este invariant la parametrizări locale echivalente ale aceleiași vecinătăți deschise conexe a punctului M , pe când $\bar{\tau}$, $\bar{\beta}$ devin $\pm\bar{\tau}$, $\pm\bar{\beta}$, semnul coincidând cu cel al derivatei λ' a schimbării de variabilă (cf. [48], p. 21). De aceea, el este atașat *curbelor orientate*.

Un fapt esențial se cuvine reamintit: orice drum neted regulat γ poate fi parametrizat *natural* (adică, $|\sigma'(q)| = 1$, unde $q \in I$) cu păstrarea pozitiv echivalenței (cf. [48], p. 12). Înlocuind parametrizarea cinematică a traiectoriei cu cea naturală, versorii din \mathcal{B} devin

$$\bar{\tau} = \frac{d\bar{r}}{ds} \quad \bar{\nu} = \frac{1}{\left|\frac{d^2\bar{r}}{ds^2}\right|} \cdot \frac{d^2\bar{r}}{ds^2} \quad \bar{\beta} = \bar{\tau} \times \bar{\nu},$$

unde s reprezintă variabila parametrizării naturale. Putem astfel introduce triedrul lui Frenet apelând doar la parametrizarea naturală a traiectoriei. Aceasta este o practică uzuală în lucrările de mecanică teoretică (cf. [76], p. 64-67, [63], p. 155-158, [14], p. 89-91, [2], p. 138-139, [54], p. 24, etc.).

Pentru a avea la îndemână o expunere a triedrului lui Frenet adecvată nevoilor specifice ale mecanicii teoretice, urmăm calculul făcut în [34], p. 79-82.

Punctul material M , ca în Figura 2.2, se deplasează din poziția M_0 către poziția M_1 . Sensul de parcurs pe traiectorie este, evident, cel al creșterii variabilei t .

Putem defini funcția (*coordonata curbilinie*) care calculează lungimea arcului de curbă M_0M :

$$s(t) = \int_{M_0M(t)} ds = \int_{t_0}^t \sqrt{\sum (x'(q))^2} dq \quad (2.4)$$

(cf. [53], Teorema 7.4.4, p. 337). Aceasta reprezintă variabila parametrizării naturale a traiectoriei Γ pozitiv echivalentă cu parametrizarea cinematică (cf. [48], p. 12).

Cum $\dot{s}(t) > 0$ pentru $t \geq t_0$, coordonata curbilinie s este inversabilă (local) și avem

$$\frac{dt}{ds} = \frac{1}{\frac{ds}{dt}} = \frac{1}{v(t)}.$$

Introducem vectorul

$$\begin{aligned} \bar{\tau} &= \frac{d\bar{r}}{ds} = \frac{d\bar{r}}{dt} \cdot \frac{dt}{ds} = \frac{1}{v(t)} \bar{v}(t) \\ &= \alpha(t)\bar{i} + \beta(t)\bar{j} + \gamma(t)\bar{k}. \end{aligned} \quad (2.5)$$

Se observă că $|\bar{\tau}| = 1$ (caracteristica parametrizării naturale) și $\bar{v}(t) = \dot{s}(t) \cdot \bar{\tau}$. Așadar, $\bar{\tau}$ este versorul vectorului-viteză, vectorul-viteză este direcția

tangentei la traiectorie (G. Roberval, 1635), iar viteza $\vec{v}(t)$ este îndreptată în sensul mișcării.

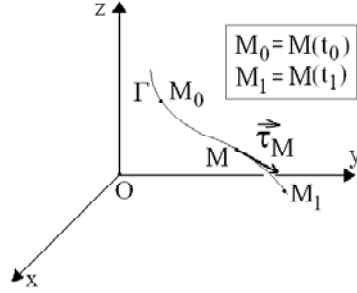


Figura 2.2

În continuare, cum $\vec{\tau}^2 = 1$, derivând în raport cu s obținem că

$$\vec{\tau} \cdot \frac{d\vec{\tau}}{ds} = 0 \quad (2.6)$$

și

$$\frac{d\vec{\tau}}{ds} = \frac{d\vec{\tau}}{dt} \cdot \frac{dt}{ds} = \frac{1}{v(t)} [\dot{\alpha}(t)\vec{i} + \dot{\beta}(t)\vec{j} + \dot{\gamma}(t)\vec{k}]. \quad (2.7)$$

Prin calcul direct ajungem la formula

$$\dot{\alpha} = \frac{d}{dt} \left(\frac{\dot{x}}{v} \right) = \frac{1}{v^3} [\ddot{x}(\dot{y}^2 + \dot{z}^2) - \dot{x}(\ddot{y}\dot{y} + \ddot{z}\dot{z})]$$

și analogele ei. Vectorial, plecând de la

$$\dot{\alpha} = \frac{1}{v^3} [\ddot{x}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) - \dot{x}(\dot{x}\ddot{x} + \dot{y}\ddot{y} + \dot{z}\ddot{z})],$$

vom putea scrie că

$$\dot{\vec{\tau}} = \frac{1}{v^3} [v^2 \cdot \dot{\vec{a}} - (\dot{\vec{a}} \cdot \vec{v})\vec{v}]. \quad (2.8)$$

Folosind (2.8), se arată imediat că $\dot{\vec{\tau}} \neq 0$ dacă și numai dacă $\vec{v} \times \dot{\vec{a}} \neq 0$ (condiția de biregularitate a parametrizării cinematice a traiectoriei). Deci, $\frac{d\vec{\tau}}{ds} \neq 0$ și, conform (2.6), $\frac{d\vec{\tau}}{ds} \perp \vec{\tau}$.

Introducem scalarul $R > 0$ și versorul $\vec{\nu}$ plecând de la relația

$$\frac{d\vec{\tau}}{ds} = \frac{1}{R} \cdot \vec{\nu}. \quad (2.9)$$

Versorul $\bar{\nu}$ definește direcția *normalei principale* la traiectorie în punctul M , iar mărimea R reprezintă *raza de curbură* a traiectoriei în punctul M . Planul determinat de M cu spațiul director generat în $T_M\mathbb{R}^3$ de vectorii $\bar{\tau}$, $\bar{\nu}$ este *planul osculator* al traiectoriei în punctul M .

Versorul $\bar{\beta}$, care definește direcția *binormalei* la traiectorie în punctul M , este introdus prin formula $\bar{\beta} = \bar{\tau} \times \bar{\nu}$.

Tripletul $(\bar{\tau}, \bar{\nu}, \bar{\beta})$, de *sens direct* ($\bar{\tau} \times \bar{\nu} = \bar{\beta}$, $\bar{\nu} \times \bar{\beta} = \bar{\tau}$, $\bar{\beta} \times \bar{\tau} = \bar{\nu}$)⁶, alcătuiește o bază a lui $T\mathbb{R}^3$, astfel că există și sunt unici scalarii reali A , B , C cu proprietatea că

$$\frac{d\bar{\beta}}{ds} = A\bar{\tau} + B\bar{\nu} + C\bar{\beta}. \quad (2.10)$$

Deoarece $\bar{\beta} \cdot \bar{\tau} = 0$, $\frac{d}{ds}(\bar{\beta} \cdot \bar{\tau}) \stackrel{(2.9)}{=} \frac{d\bar{\beta}}{ds} \cdot \bar{\tau} + \bar{\beta} \cdot (\frac{1}{R}\bar{\nu}) = \frac{d\bar{\beta}}{ds} \cdot \bar{\tau}$ și $\bar{\beta}^2 = 1$, $\frac{d}{ds}(\bar{\beta}^2) = 2 \cdot \bar{\beta} \cdot \frac{d\bar{\beta}}{ds}$, deducem că $A = C = 0$.

În cazul când $B \neq 0$, introducem scalarul real T plecând de la relația

$$\frac{d\bar{\beta}}{ds} = -T \cdot \bar{\nu}. \quad (2.11)$$

Mărimea T reprezintă *torsiunea* traiectoriei în punctul M . *Semnul* lui T este luat astfel încât T să fie pozitiv pentru o rotație⁷ *pozitivă* (în sens trigonometric) a reperului natural în jurul lui $\bar{\tau}$ (cf. [76], p. 65).

Folosind faptul că $\bar{\beta} \times \bar{\tau} = \bar{\nu}$, avem că

$$\begin{aligned} \frac{d\bar{\nu}}{ds} &= \frac{d\bar{\beta}}{ds} \times \bar{\tau} + \bar{\beta} \times \frac{d\bar{\tau}}{ds} = -T \cdot \bar{\nu} \times \bar{\tau} + \frac{1}{R} \cdot \bar{\beta} \times \bar{\nu} \\ &= -\frac{1}{R} \cdot \bar{\tau} + T \cdot \bar{\beta}. \end{aligned} \quad (2.12)$$

Relațiile (2.9), (2.11) și (2.12) se numesc *formulele Frenet-Serret* (cf. [44], p. 578).

Cazul $B = 0$ este cel al curbelor plane (cf. [48], p. 27). Planul osculator al unei curbe plane este chiar planul curbei (cf. [48], p. 18), în timp ce torsiunea "măsoară" abaterea curbei (strâmbe) de la planul osculator (cf. [48], p. 27).

⁶Faptul că baza $\mathcal{B} = \{\bar{\tau}, \bar{\nu}, \bar{\beta}\}$ are aceeași orientare ca baza canonică a spațiului $T\mathbb{R}^3$ este o consecință a următoarei observații. Fiind dați vectorii \bar{c}, \bar{d} , unde $\bar{c} \times \bar{d} \neq 0$, determinantul schimbării bazei, de la $\{\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}\}$ la $\{\bar{c}, \bar{d}, \bar{c} \times \bar{d}\}$, este $(\bar{c}, \bar{d}, \bar{c} \times \bar{d}) = |\bar{c} \times \bar{d}|^2 > 0$.

⁷A se vedea interpretarea torsiunii cu ajutorul unghiului făcut de vectorii $\bar{\beta}$ în două poziții din apropierea punctului M (cf. [48], p. 27).

Cercul de rază R al cărui centru are, în raport cu triedrul lui Frenet, vectorul de poziție $R \cdot \vec{v}$ poartă denumirea de *cerc de curbură (osculator)* al traiectoriei în punctul M . Centrul său este *centrul de curbură* al traiectoriei. Cercul de curbură are tangenta la traiectorie ca tangentă în punctul M (vezi Figura 2.3) (cf. [32], p. 24, [44], p. 566, 581). De aceea, în anumite probleme de mecanică teoretică, se poate aproxima traiectoria (plană) cu un "mic" arc al cercului de curbură, "infini" de aproape de M (cf., de exemplu, [32], problema 3.8, p. 70, [59], problemele 3.2.9, 3.2.11, p. 40-41).

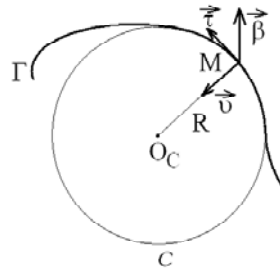


Figura 2.3

2.1.4 Raza de curbură și torsiunea ca funcții de timp

Au loc formulele

$$R = \frac{v^3}{|\vec{v} \times \vec{a}|} \quad T = \frac{(\vec{v}, \vec{a}, \dot{\vec{a}})}{|\vec{v} \times \vec{a}|^2}. \quad (2.13)$$

Într-adevăr, din (2.8), (2.9) deducem că

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{v^2} \left| \vec{a} - \frac{\vec{a} \cdot \vec{v}}{v^2} \vec{v} \right| = \frac{1}{v^3} |\vec{v} \times \vec{a}|.$$

Să justificăm cea de-a doua formulă. Cum $Sp(\{\vec{v}, \vec{a}\}) = Sp(\{\vec{\tau}, \vec{v}\})$, *unica* direcție perpendiculară pe planul osculator este dată de $\vec{v} \times \vec{a}$, deci

$$\vec{\beta} = \frac{\vec{v} \times \vec{a}}{|\vec{v} \times \vec{a}|} \quad (2.14)$$

(cf. [57], p. 148).

Atunci, avem că

$$\dot{\vec{\beta}} = \frac{|\vec{v} \times \vec{a}| (\vec{v} \times \dot{\vec{a}}) - (\vec{v} \times \vec{a}) \cdot \frac{d}{dt} (|\vec{v} \times \vec{a}|)}{|\vec{v} \times \vec{a}|^2}.$$

Cum $\frac{d}{dt}(|\bar{v} \times \bar{a}|) = \frac{d}{dt} \sqrt{(\bar{v} \times \bar{a})^2} = \frac{(\bar{v} \times \bar{a})(\dot{\bar{v}} \times \bar{a})}{|\bar{v} \times \bar{a}|}$, ținând seama de formula *dublu-ului produs vectorial*, putem scrie că

$$\begin{aligned} \dot{\beta} &= \frac{(\bar{v} \times \bar{a}) \times [(\bar{v} \times \bar{a}) \times (\bar{v} \times \bar{a})]}{|\bar{v} \times \bar{a}|^3} = \frac{(\bar{v} \times \bar{a}) \times [((\bar{v} \times \bar{a}) \cdot \bar{a})\bar{v}]}{|\bar{v} \times \bar{a}|^3} \\ &= \frac{(\bar{a}, \bar{v}, \bar{a})}{|\bar{v} \times \bar{a}|^3} [(\bar{v} \times \bar{a}) \times \bar{v}] = \frac{(\bar{v}, \bar{a}, \bar{a})}{|\bar{v} \times \bar{a}|^3} [(\bar{v} \cdot \bar{a})\bar{v} - v^2 \cdot \bar{a}] \\ &= -\frac{v^2 \cdot (\bar{v}, \bar{a}, \bar{a})}{|\bar{v} \times \bar{a}|^3} \left(\bar{a} - \frac{\bar{v} \cdot \bar{a}}{v^2} \bar{v} \right). \end{aligned}$$

Concluzia rezultă imediat aplicând (2.11).

2.1.5 Forma traiectoriei în apropierea lui M

Triedrul lui Frenet permite "vizualizarea" formei traiectoriei Γ în vecinătatea unei poziții oarecare a punctului material M , pe baza formulelor Frenet-Serret (cf. [57], p. 157-159, [44], p. 581-583).

Fie $t_2 \in (t_0, t_1)$ (vezi Figura 2.2) și coordonata curbilinie

$$s(t) = \int_{t_2}^t \sqrt{\sum (x'(q))^2} dq, \quad t \in [t_0, t_1]. \quad (2.15)$$

La fel ca anterior, s reprezintă variabila unei parametrizări naturale a traiectoriei Γ pozitiv echivalentă cu parametrizarea cinematică. Vom folosi triedrul lui Frenet al traiectoriei corespunzător poziției $M_2 = M(t_2)$.

Conform (2.14), ecuația planului osculator al traiectoriei Γ în M_2 se scrie

$$[\bar{r} - \bar{r}(t_2)] \cdot [\bar{v}(t_2) \times \bar{a}(t_2)] = 0.$$

Să evaluăm expresia de mai jos

$$E(t) = [\bar{r}(t) - \bar{r}(t_2)] \cdot [\bar{v}(t_2) \times \bar{a}(t_2)], \quad t \in [t_0, t_1].$$

Astfel, dezvoltând funcția $\bar{r}(t)$ în jurul lui $t = t_2$, avem că

$$\begin{aligned} E(t) &= [\bar{v}(t_2) \times \bar{a}(t_2)] \cdot [(t - t_2)\bar{v}(t_2) + \frac{1}{2}(t - t_2)^2\dot{\bar{a}}(t_2) \\ &\quad + \frac{1}{6}(t - t_2)^3 \ddot{\bar{a}}(t_2) + o((t - t_2)^3)] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{6}(\bar{v}(t_2), \bar{a}(t_2), \dot{\bar{a}}(t_2))(t - t_2)^3 + o((t - t_2)^3) \\
&= \frac{1}{6}(t - t_2)^3(C + \alpha(t - t_2)),
\end{aligned}$$

unde $C = T(t_2) \cdot |\bar{v}(t_2) \times \bar{a}(t_2)|^2$ și $\lim_{t \rightarrow t_2} \alpha(t - t_2) = 0$.

Când traiectoria Γ este *spațială* (strâmbă) în M_2 (adică, $T(t_2) \neq 0$), există $\varepsilon > 0$ suficient de mic astfel încât

$$\begin{cases} E(t) < 0, & t \in (t_2 - \varepsilon, t_2) \\ E(t) > 0, & t \in (t_2, t_2 + \varepsilon) \end{cases} \quad T(t_2) > 0,$$

respectiv

$$\begin{cases} E(t) > 0, & t \in (t_2 - \varepsilon, t_2) \\ E(t) < 0, & t \in (t_2, t_2 + \varepsilon) \end{cases} \quad T(t_2) < 0.$$

Însă, pe de altă parte, $E(t) = \left| \overline{M_2 M(t)} \right| \cdot |\bar{v}(t_2) \times \bar{a}(t_2)| \cdot \cos(\bar{\beta}(t_2), \overline{M_2 M(t)})$. *Variația semnului* expresiei $E(t)$ în $(t_2 - \varepsilon, t_2 + \varepsilon)$ arată că unghiul făcut de vectorii $\bar{\beta}(t_2)$, $\overline{M_2 M(t)}$ devine din ascuțit obtuz și reciproc. Ceea ce înseamnă că punctul material M *traversează* planul osculator al traiectoriei Γ în M_2 în sensul indicat de săgeata versorului $\bar{\beta}_{M_2}$ ($T(t_2) > 0$), respectiv în sens invers acestuia ($T(t_2) < 0$) (vezi Figura 2.4) (cf. [44], p. 564, [57], p. 159).

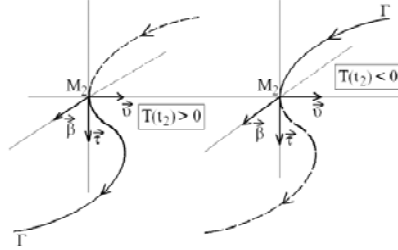


Figura 2.4

Să revenim la (2.15).

Există și sunt unice funcțiile $f, g, h \in C^\infty(J, \mathbb{R})$, unde $J = s([t_0, t_1])$, astfel încât

$$\bar{r}(s) = \bar{r}(0) + f(s)\bar{\tau}(0) + g(s)\bar{\nu}(0) + h(s)\bar{\beta}(0), \quad s \in J.$$

Evident, $f(0) = g(0) = h(0) = 0$. Prin derivări succesive, avem că: $\bar{\tau}(0) = \frac{d\bar{r}}{ds}\Big|_{s=0}$, de unde $f'(0) = 1$, $g'(0) = h'(0) = 0$; apoi, $\frac{d\bar{\tau}}{ds}\Big|_{s=0} = \frac{1}{R(0)}\bar{\nu}(0)$, de unde $f''(0) = h''(0) = 0$, $g''(0) = \frac{1}{R(0)}$; în final,

$$\begin{aligned} \frac{d^2\bar{\tau}}{ds^2}\Big|_{s=0} &= \left(\frac{1}{R(s)} \cdot \frac{d\bar{\nu}}{ds} - \frac{R'(s)}{R^2(s)} \cdot \bar{\nu}(s) \right)\Big|_{s=0} \\ &= -\frac{1}{R^2(0)} \cdot \bar{\tau}(0) - \frac{R'(0)}{R^2(0)} \cdot \bar{\nu}(0) + \frac{T(0)}{R(0)} \cdot \bar{\beta}(0), \end{aligned}$$

de unde $f'''(0) = -\frac{1}{R^2(0)}$, $g'''(0) = -\frac{R'(0)}{R^2(0)}$, $h'''(0) = \frac{T(0)}{R(0)}$.

Dezvoltând funcțiile f , g , h în jurul lui $s = 0$, obținem formulele

$$\begin{cases} f(s) = s - \frac{1}{6R^2(0)}s^3 + o(s^3) \\ g(s) = \frac{1}{2R(0)}s^2 - \frac{R'(0)}{6R^2(0)}s^3 + o(s^3) \\ h(s) = \frac{T(0)}{6R(0)}s^3 + o(s^3). \end{cases}$$

Admițând, în imediata vecinătate a lui $s = 0$, aproximațiile "grosiere":

$$f(s) = s \quad g(s) = c_1 s^2 \quad h(s) = c_2 s^3, \quad |s| \ll 1,$$

unde⁸ $c_1 = \frac{1}{2R(0)}$, $c_2 = \frac{T(0)}{6R(0)}$, putem proiecta traiectoria Γ pe planele triedrului lui Frenet:

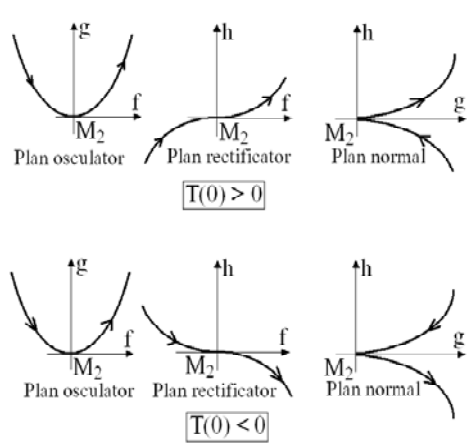


Figura 2.5

⁸Deoarece raza de curbură este practic constantă în vecinătatea punctului M_2 coeficientul

$$-\frac{R'(0)}{6R^2(0)} = -\frac{1}{6} \cdot \frac{d}{ds} \left(\frac{1}{R} \right)\Big|_{s=0}$$

din dezvoltarea lui g este nul.

2.1.6 Viteza și accelerația în triedrul lui Frenet

Am obținut deja, folosind (2.5), relația

$$\vec{v}(t) = \dot{s}(t) \cdot \vec{\tau}.$$

Prin derivarea sa, avem că

$$\begin{aligned} \vec{a}(t) &= \dot{\vec{v}} = \ddot{s}(t) \cdot \vec{\tau} + \dot{s}(t) \left(\frac{d\vec{\tau}}{ds} \cdot \frac{ds}{dt} \right) \\ &= \dot{v} \cdot \vec{\tau} + \frac{v^2}{R} \cdot \vec{\nu}. \end{aligned} \quad (2.16)$$

Atunci, *proiecțiile vitezei și accelerației punctului material M pe axele triedrului lui Frenet sunt*

$$\begin{aligned} v_\tau &= \dot{s} & v_\nu &= 0 & v_\beta &= 0 \\ a_\tau &= \dot{v} & a_\nu &= \frac{1}{R} v^2 & a_\beta &= 0. \end{aligned}$$

Relațiile de mai sus, ca, de altfel, și relația $Sp(\{\vec{v}, \vec{a}\}) = Sp(\{\vec{\tau}, \vec{\nu}\})$, arată că *accelerația $\vec{a}(t)$ a punctului material M se găsește întotdeauna în planul osculator al traiectoriei în punctul M .*

Rolul formulelor din această subsecțiune este, într-un anumit sens, opus celui al formulelor obținute în subsecțiunile anterioare. Dacă până acum, ținând seama de cunoașterea parametrizării cinematice $\sigma = \vec{r}(t)$, se calculau elemente privitoare la forma (geometria) traiectoriei, aici traiectoria este cunoscută (ceea ce permite construcția triedrului lui Frenet cu ajutorul coordonatei curbilinii s), căutându-se în schimb *poziționarea* elementelor cinematice \vec{v} , \vec{a} , chestiune specifică mecanicii teoretice.

Putem scrie că

$$\vec{a} = \vec{a}_\tau + \vec{a}_\nu,$$

unde $\vec{a}_\tau \in \dot{v} \cdot \vec{\tau}$ și $\vec{a}_\nu \in \frac{v^2}{R} \cdot \vec{\nu}$. Cu alte cuvinte, accelerația punctului material M se descompune într-o *componentă tangențială* \vec{a}_τ (tangenta la traiectorie în punctul M) și o *componentă normală* \vec{a}_ν (având direcția normalei principale la traiectorie în punctul M). Componenta tangențială se datorează *variației modului vitezei* punctului material M , iar componenta normală *variației direcției vitezei* punctului material M .

2.1.7 Mișcarea circulară

Punctul material M se deplasează pe cercul $\mathcal{C}(O, R_0)$ situat în planul de coordonate Oxy al sistemului de referință \mathcal{R} (vezi Figura 2.6), găsiindu-se la momentul inițial în poziția M_0 . O asemenea mișcare, numită *circulară*, este realizată într-un singur sens.

Introducem mărimea $\theta = \theta(t) \stackrel{\text{def}}{=} \angle(Ox, OM)$. Unghiul θ va crește în permanență (ceea ce dă orientarea cercului) și este măsurat în radiani. Aici, $M(0) = M_0$ și $\theta(0) = 0$. Atunci, $s = R_0 \cdot \theta$ și

$$\vec{r}(t) = R_0(\cos \theta \cdot \vec{i} + \sin \theta \cdot \vec{j}) = R_0 \cdot \vec{\rho}.$$

Cum $\cos \theta = \frac{1}{R_0}(\vec{r} \cdot \vec{i})$ și funcția "cos" este inversabilă pe intervalele $[k\pi, (k+1)\pi]$, unde $k \in \mathbb{Z}$, deducem că $\theta \in C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

Avem că

$$\begin{aligned} \vec{\tau} &= \frac{d\vec{r}}{ds} = \frac{d(R_0 \cdot \vec{\rho})}{d(R_0 \cdot \theta)} = \frac{d\vec{\rho}}{d\theta} = -\sin \theta \cdot \vec{i} + \cos \theta \cdot \vec{j} \\ &= \cos\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right) \cdot \vec{i} + \sin\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right) \cdot \vec{j}. \end{aligned}$$

Astfel, considerând în $T_M \mathbb{R}^3$ versorii $\vec{\rho} \in \bar{\rho}$, $\vec{\tau} \in \bar{\tau}$, observăm că versorul $\vec{\tau}$ se obține din $\vec{\rho}$ prin rotire cu $\frac{\pi}{2}$ în sens trigonometric (cf. [34], p. 153). Ceea ce arată că operația de derivare a unui vector legat mobil însă constant în modul are un echivalent (geometric) în mișcarea de rotație în jurul punctului său de aplicație (presupus fix) (cf. [32], p. 95-96).

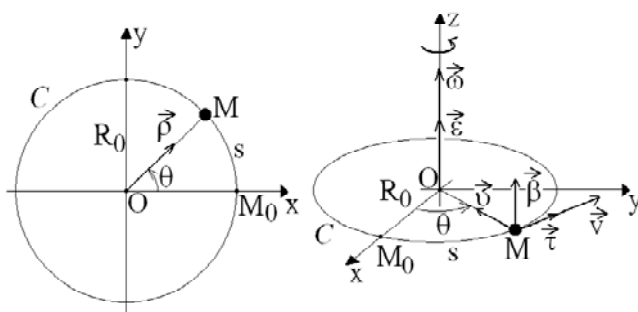


Figura 2.6

De asemeni, dacă $\varphi \stackrel{\text{def}}{=} \angle(Oy, OM)$ și considerăm versorul $\frac{d\vec{\rho}}{d\varphi} \stackrel{\text{not}}{=} \vec{\eta}$, atunci, în $T_M \mathbb{R}^3$, versorul $\vec{\eta}$, unde $\vec{\eta} \in \bar{\eta}$, se obține din $\vec{\rho}$ prin rotire cu

$\frac{\pi}{2}$ în sens invers trigonometric. În particular, regăsim un rezultat menționat anterior, și anume că *versorul legat obținut prin derivare are săgeata îndreptată în sensul creșterii variabilei de derivare.*

În continuare, cum

$$\begin{aligned} \frac{d\bar{\tau}}{ds} &= \frac{d\bar{\tau}}{d(R_0 \cdot \theta)} = \frac{1}{R_0} \cdot \frac{d\bar{\tau}}{d\theta} \\ &= \frac{1}{R_0} \cdot [\cos(\theta + \pi) \cdot \bar{i} + \sin(\theta + \pi) \cdot \bar{j}] \\ &= -\frac{1}{R_0} \cdot \bar{\rho}, \end{aligned}$$

deducem că raza de curbură (constantă) a cercului este R_0 și $\bar{\nu} = -\bar{\rho}$, unde $\bar{\nu} \in T_M R^3$.

Folosind formula vitezei, avem că

$$v = \dot{s} = \frac{ds}{d\theta} \cdot \dot{\theta} = R_0 \cdot \dot{\theta}. \quad (2.17)$$

Mărimea $\dot{\theta} \stackrel{not}{=} \omega$ poartă denumirea de *viteză unghiulară (instantanee sau momentană)*⁹ a punctului material M .

Vectorul-accelerație al punctului material M este dat de

$$\bar{a}(t) = \dot{v} \cdot \bar{\tau} + \frac{v^2}{R_0} \cdot \bar{\nu} = R_0 \dot{\omega} \cdot \bar{\tau} - R_0 \omega^2 \cdot \bar{\rho},$$

conform (2.17), astfel că *formulele proiecțiilor accelerației punctului material M pe axele triedrului lui Frenet sunt*

$$a_\tau = R_0 \cdot \dot{\omega} \quad a_\nu = R_0 \cdot \omega^2 \quad a_\beta = 0.$$

Mărimea $\dot{\omega} \stackrel{not}{=} \varepsilon$ se numește *accelerație unghiulară (instantanee, momentană)* a punctului material M . Mișcarea circulară va fi considerată *uniformă* când ε (ca funcție de t) este identic nulă și *uniform variată* când ε este o constantă nenulă (cf. [34], p. 154, [32], p. 33).

⁹Se poate arăta că, mai general, în mișcarea plană are loc formula $v = \pm R \dot{\theta}$, unde R este raza de curbură a traiectoriei iar θ unghiul făcut de viteza punctului material cu o dreaptă fixă din planul mișcării (cf. [32], problema 1.14, p. 39).

Să proiectăm vectorul-viteză al punctului material M pe axele de coordonate:

$$\begin{cases} v_i \stackrel{\text{not}}{=} v_x = -R_0 \dot{\theta} \sin \theta = -\omega \cdot y \\ v_j \stackrel{\text{not}}{=} v_y = R_0 \dot{\theta} \cos \theta = \omega \cdot x \\ v_k \stackrel{\text{not}}{=} v_z = 0. \end{cases}$$

Introducem vectorii $\vec{\omega}$, $\vec{\varepsilon} \in T_O\mathbb{R}^3$, numiți *vector-viteză unghiulară*, respectiv *vector-accelerație unghiulară* ai punctului material M , cu ajutorul relațiilor

$$\vec{\omega} = \omega \cdot \vec{k}, \quad \vec{\omega} \in \bar{\omega} \quad \vec{\varepsilon} = \varepsilon \cdot \vec{k}, \quad \vec{\varepsilon} \in \bar{\varepsilon}.$$

Atunci,

$$\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r},$$

formulă esențială în cadrul mecanicii teoretice. În plus, conform [32], p. 33, avem

$$\vec{a}_\tau = \vec{\varepsilon} \times \vec{r} \quad \vec{a}_\nu = \vec{\omega} \times \vec{v}.$$

2.1.8 Mișcarea plană în coordonate polare (metoda transformării Prúfer)

Ca și la subsecțiunea anterioară, să presupunem că punctul material M se mișcă în planul Oxy al reperului canonic \mathcal{R} . Coordonatele sale pot fi exprimate prin formulele (transformarea Prúfer)

$$x = r(t) \cdot \cos \theta(t) \quad y = r(t) \cdot \sin \theta(t) \quad z = 0,$$

unde $r, \theta \in C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ și $r(t) > 0$.

Introducem vectorii $\vec{\rho} = \cos \theta \cdot \vec{i} + \sin \theta \cdot \vec{j}$ și $\vec{\varepsilon} = -\sin \theta \cdot \vec{i} + \cos \theta \cdot \vec{j}$. La fel ca în cazul mișcării circulare, versorii $\vec{\rho}$, $\vec{\varepsilon} \in T_M\mathbb{R}^3$, unde $\vec{\varepsilon} \in \bar{\varepsilon}$, sunt ortogonali (vezi Figura 2.7).

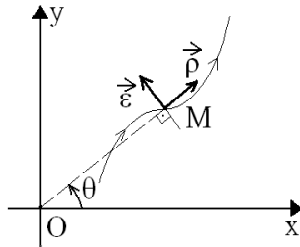


Figura 2.7

Au loc formulele

$$\begin{cases} \bar{v} = \dot{r} \cdot \bar{\rho} + r \dot{\theta} \cdot \bar{\varepsilon} \\ \bar{a} = (\ddot{r} - r \dot{\theta}^2) \cdot \bar{\rho} + (2 \dot{r} \dot{\theta} + r \ddot{\theta}) \cdot \bar{\varepsilon}. \end{cases} \quad (2.18)$$

Într-adevăr, avem că

$$\bar{v} = \frac{d}{dt}(r(t) \cdot \bar{\rho}(t)) = \dot{r} \cdot \bar{\rho} + r \cdot \dot{\bar{\rho}}$$

și

$$\dot{\bar{\rho}} = \dot{\theta} \cdot [\cos(\theta + \frac{\pi}{2}) \cdot \bar{i} + \sin(\theta + \frac{\pi}{2}) \cdot \bar{j}] = \dot{\theta} \cdot \bar{\varepsilon}.$$

Pentru cea de-a doua formulă (2.18), prin derivarea primeia în raport cu timpul t , ajungem la

$$\begin{aligned} \bar{a} &= \ddot{r} \cdot \bar{\rho} + \dot{r} \cdot \dot{\bar{\rho}} + \dot{r} \dot{\theta} \cdot \bar{\varepsilon} + r \ddot{\theta} \cdot \bar{\varepsilon} + r \dot{\theta} \cdot \dot{\bar{\varepsilon}} \\ &= \ddot{r} \cdot \bar{\rho} + (2 \dot{r} \dot{\theta} + r \ddot{\theta}) \cdot \bar{\varepsilon} + r \dot{\theta} \cdot \dot{\bar{\varepsilon}} \end{aligned}$$

și, cum

$$\dot{\bar{\varepsilon}} = \dot{\theta} \cdot [\cos(\theta + \pi) \cdot \bar{i} + \sin(\theta + \pi) \cdot \bar{j}] = -\dot{\theta} \cdot \bar{\rho},$$

demonstrația se încheie.

2.1.9 Mișcarea relativă a punctului material

Mișcarea punctului material are loc întotdeauna în raport cu sistemul de referință. În funcție de alegerea acestuia, traiectoria punctului material este "văzută" (observată) ca o curbă plană sau strâmbă (spațială), degenerată, etc. Mai mult chiar, o alegere nepotrivită a sistemului de referință se poate reflecta prin perturbarea caracteristicilor modelului matematic al spațiului și timpului (cf. [41], p. 12). Asupra acestor chestiuni vom reveni ulterior.

Pentru a studia mișcările *complexe* (compuse) ale punctului material, în afara sistemului de referință \mathcal{R} , se introduc unul sau mai multe repere carteziane, notate \mathcal{R}' , \mathcal{R}'' , etc. Subliniem faptul că reperele \mathcal{R} , \mathcal{R}' nu trebuie privite ca niște "schelete" (triedre) abstracte, ele fiind desemnate de obicei prin intermediul corpurilor sau sistemelor de corpuri întâlnite în viața de zi cu zi (*trei muchii adiacente* ale unei cărămizi paralelipipedice, ale unei camere,

ș.a.m.d.). Să zicem că o persoană se găsește lângă șofer într-un automobil care rulează pe șosea. Persoana discută cu șoferul și își subliniază ideile gesticulând cu mâna dreaptă. Un stop aflat pe șosea poate fi considerat drept sistemul de referință \mathcal{R} , în timp ce mașina este reperul (mobil) \mathcal{R}' . Când mâna dreaptă a persoanei stă nemișcată, putem spune că are *aceeași* mișcare ca și mașina. Mișcarea mâinii drepte a persoanei poate fi studiată mai ușor dacă sunt cunoscute mișcarea mașinii față de stop și mișcarea mâinii drepte față de persoane (șofer) sau obiecte (scaune, bordul mașinii) aflate în repaus față de mașină.

Mișcarea punctului material față de sistemul de referință \mathcal{R} (considerat *a priori* fix în mecanica teoretică) poartă denumirea de *mișcare absolută*. Mărimile cinematice ale mișcării absolute se numesc *absolute* (viteză absolută, accelerație absolută, etc.). La rândul său, mișcarea punctului material față de reperul cartezian \mathcal{R}' este *relativă*, mărimile sale cinematice fiind *relative*.

Cunoașterea modului cum se mișcă reperul (mobil) \mathcal{R}' față de sistemul de referință \mathcal{R} permite, prin interrelaționarea cu mișcarea relativă a punctului material, studiul mișcării absolute a punctului material M (cf. [32], p. 196).

La începutul acestui capitol, noțiunea de diferențiabilitate (în acord cu structura topologică a SF) a fost introdusă cu ajutorul diferențiabilității coordonatelor vectorului în sistemul de referință \mathcal{R} . Acum, fiind date $\mathcal{R} = (O, \vec{\mathcal{B}})$, unde $\mathcal{B} = \{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$, și $\mathcal{R}' = (A, \vec{\mathcal{C}})$, unde $\mathcal{C} = \{\vec{i}_1, \vec{j}_1, \vec{k}_1\}$, să considerăm aplicația $\bar{w} : I \rightarrow T\mathbb{R}^3$, de clasă C^∞ , pe care o introducem prin intermediul formulelor

$$\begin{aligned} \bar{w}(t) &= x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k} \\ &= x_1(t)\vec{i}_1 + y_1(t)\vec{j}_1 + z_1(t)\vec{k}_1. \end{aligned} \quad (2.19)$$

Spunem că mărimea vectorială

$$\dot{x}_1(t)\vec{i}_1 + \dot{y}_1(t)\vec{j}_1 + \dot{z}_1(t)\vec{k}_1 \stackrel{\text{not}}{=} \left(\frac{\partial \bar{w}}{\partial t} \right)_{\mathcal{R}'}$$

(cf. [63], p. 242) reprezintă derivata vectorului $\bar{w}(t)$ *relativă* la \mathcal{R}' . Evident, mărimea $\dot{\bar{w}}(t) = \dot{x}(t)\vec{i} + \dot{y}(t)\vec{j} + \dot{z}(t)\vec{k}$ se numește derivată *absolută* a vectorului $\bar{w}(t)$ (adică, derivata sa *relativă* la sistemul de referință).

Fie acum $\bar{\rho}$ versorul vectorului $\bar{w}(t)$. Cu ajutorul formulei dublului produs vectorial, derivând relația $\bar{w}(t) = w_\rho \cdot \bar{\rho}(t)$, avem că

$$\dot{\bar{w}} = \dot{w}_\rho \cdot \bar{\rho} + w_\rho \cdot \dot{\bar{\rho}} \quad (2.20)$$

$$\begin{aligned}
&= \dot{w}_\rho \cdot \bar{\rho} + w_\rho \cdot (\bar{\omega} \times \bar{\rho}) \\
&= \dot{w}_\rho \cdot \bar{\rho} + \bar{\omega} \times (w_\rho \cdot \bar{\rho}) \\
&= \dot{w}_\rho \cdot \bar{\rho} + \bar{\omega} \times \bar{w},
\end{aligned}$$

unde $\bar{\omega} = \bar{\rho} \times \dot{\bar{\rho}}$ (cf. [32], p. 96).

Folosim ca *analogie* calculul din (2.20). Astfel, mărimea $\dot{w}_\rho \cdot \bar{\rho}$ joacă ”rolul” derivatei relative, fiind o derivată a ”coordonatei” w_ρ , în timp ce mărimea $\bar{\omega} \times \bar{w}$ reprezintă legătura dintre derivata absolută și cea relativă, scrisă sub forma unui *produs vectorial*. O asemenea legătură va fi stabilită în continuare între \bar{w} , $(\frac{\partial \bar{w}}{\partial t})_{\mathcal{R}'}$.

Formula (2.20), deja întâlnită în cazul particular al vectorului-accelerație, arată că, în general, *derivata absolută a unui vector este oblică față de vector și se descompune într-o componentă longitudinală (coliniară cu vectorul), datorată variației modulului acestuia, și o componentă transversală (perpendiculară pe vector), datorată variației direcției $\bar{\rho}(t)$* (cf. [32], p. 96). Vectorul \bar{w} din (2.20) nu este unic, ci *doar* perpendicular pe $\bar{\rho}$. Într-adevăr, pentru orice $h \in \mathbb{R}$ putem scrie că $\dot{\bar{\rho}} = \bar{\omega}_h \times \bar{\rho}$, unde $\bar{\omega}_h = \bar{\rho} \times \dot{\bar{\rho}} + h \cdot \bar{\rho}$.

În schimb, există și este unic vectorul \bar{w} , de clasă C^∞ (ca funcție de t), cu proprietatea că

$$\begin{cases} \dot{\bar{i}}_1 = \bar{\omega} \times \bar{i}_1 \\ \dot{\bar{j}}_1 = \bar{\omega} \times \bar{j}_1 \\ \dot{\bar{k}}_1 = \bar{\omega} \times \bar{k}_1. \end{cases} \quad (2.21)$$

Să justificăm aserțiunea de mai sus. Conform (2.20), $\dot{\bar{i}}_1 \perp \bar{i}_1$, deci $\dot{\bar{i}}_1 \in Sp(\{\bar{j}_1, \bar{k}_1\})$ și există relația

$$\dot{\bar{i}}_1 = \omega_{12}(t) \cdot \bar{j}_1 + \omega_{13}(t) \cdot \bar{k}_1,$$

unde $\omega_{12}(t) = \dot{\bar{i}}_1 \cdot \bar{j}_1$, $\omega_{13}(t) = \dot{\bar{i}}_1 \cdot \bar{k}_1$ și $\omega_{12}, \omega_{13} \in C^\infty(I, \mathbb{R}^3)$.

În mod analog, ajungem la formulele

$$\begin{cases} \dot{\bar{i}}_1 = \omega_{12}(t) \cdot \bar{j}_1 + \omega_{13}(t) \cdot \bar{k}_1 \\ \dot{\bar{j}}_1 = \omega_{21}(t) \cdot \bar{i}_1 + \omega_{23}(t) \cdot \bar{k}_1 \\ \dot{\bar{k}}_1 = \omega_{31}(t) \cdot \bar{i}_1 + \omega_{32}(t) \cdot \bar{j}_1. \end{cases} \quad (2.22)$$

Derivând relația $\bar{i}_1 \cdot \bar{j}_1 = 0$ în raport cu timpul t , avem

$$\omega_{12} = \dot{\bar{i}}_1 \cdot \bar{j}_1 = -\dot{\bar{j}}_1 \cdot \bar{i}_1 = -\omega_{21}$$

și analoagele sale.

Putem scrie acum vectorul căutat, și anume

$$\begin{aligned} \bar{\omega} &= (\dot{\bar{j}}_1 \cdot \bar{k}_1) \bar{i}_1 + (\dot{\bar{k}}_1 \cdot \bar{i}_1) \bar{j}_1 + (\dot{\bar{i}}_1 \cdot \bar{j}_1) \bar{k}_1 \\ &= p(t) \cdot \bar{i}_1 + q(t) \cdot \bar{j}_1 + r(t) \cdot \bar{k}_1. \end{aligned} \quad (2.23)$$

Într-adevăr, dacă ținem seama de identitatea

$$\bar{\omega} = (\bar{\omega}, \bar{j}_1, \bar{k}_1) \cdot \bar{i}_1 + (\bar{i}_1, \bar{\omega}, \bar{k}_1) \cdot \bar{j}_1 + (\bar{i}_1, \bar{j}_1, \bar{\omega}) \cdot \bar{k}_1,$$

atunci, în acord cu (2.21), avem

$$\begin{cases} \dot{\bar{i}}_1 \cdot \bar{j}_1 = (\bar{i}_1, \bar{j}_1, \bar{\omega}) = r(t) \\ \dot{\bar{j}}_1 \cdot \bar{k}_1 = (\bar{\omega}, \bar{j}_1, \bar{k}_1) = p(t) \\ \dot{\bar{k}}_1 \cdot \bar{i}_1 = (\bar{i}_1, \bar{\omega}, \bar{k}_1) = q(t). \end{cases}$$

Relația (2.23) admite o formulare în spiritul celei a vectorului $\bar{\omega}$ întrebuintată în (2.20), și anume

$$\bar{\omega} = \frac{1}{2} \sum (\bar{i}_1 \times \dot{\bar{i}}).$$

De asemeni, putem scrie că

$$\bar{\omega} = \begin{vmatrix} \bar{i}_1 & \bar{j}_1 & \bar{k}_1 \\ \dot{\bar{j}}_1 & \dot{\bar{k}}_1 & \dot{\bar{i}}_1 \\ \dot{\bar{k}}_1 & \dot{\bar{i}}_1 & \dot{\bar{j}}_1 \end{vmatrix}$$

făcând convenția ca determinantul să fie dezvoltat după prima linie iar produsele din minorii de ordinul al doilea să fie produse scalare.

Să presupunem, în continuare, că ar mai exista un vector $\bar{\zeta}$ care să verifice (2.21). Aceasta ar implica, în urma scăderii membru cu membru a relațiilor omoloage,

$$\begin{cases} (\bar{\omega} - \bar{\zeta}) \times \bar{i}_1 = 0 \\ (\bar{\omega} - \bar{\zeta}) \times \bar{j}_1 = 0 \\ (\bar{\omega} - \bar{\zeta}) \times \bar{k}_1 = 0, \end{cases}$$

de unde deducem că $\overline{\omega} = \overline{\zeta}$ (singurul vector paralel cu o bază a lui $T\mathbb{R}^3$ fiind vectorul nul). Aserțiunea a fost probată.

Să revenim la vectorul $\overline{\omega}(t)$ dat de (2.19). Prin derivare în raport cu timpul t , avem formula

$$\begin{aligned}\dot{\overline{\omega}} &= [\dot{x}_1(t)\overline{i}_1 + \dot{y}_1(t)\overline{j}_1 + \dot{z}_1(t)\overline{k}_1] + [x_1(t)\dot{\overline{i}}_1 + y_1(t)\dot{\overline{j}}_1 \\ &\quad + z_1(t)\dot{\overline{k}}_1] \\ &= \left(\frac{\partial \overline{\omega}}{\partial t}\right)_{\mathcal{R}'} + \overline{\omega} \times \overline{\omega}.\end{aligned}\quad (2.24)$$

Se cuvine observat că $\dot{\overline{\omega}} = \left(\frac{\partial \overline{\omega}}{\partial t}\right)_{\mathcal{R}'}$. Este evident că derivata absolută a vectorului $\overline{\omega}(t)$ coincide cu derivata sa relativă dacă și numai dacă $\overline{\omega} \times \overline{\omega} = 0$ (cf. [76], p. 323).

Relațiile (2.21) sunt cunoscute sub numele de *formulele lui Poisson* (cf. [32], p. 96, [34], p. 169, [76], p. 323, [63], p. 175).

Pe baza (2.24), vom stabili, în continuare, legături între mărimile cinematice ale mișcărilor absolută și relativă.

Conform relației lui Chasles,

$$\overline{OM} = \overline{OA} + \overline{AM}.\quad (2.25)$$

Fie $x_A(t)$, $y_A(t)$, $z_A(t)$ și $x_1(t)$, $y_1(t)$, $z_1(t)$ coordonatele vectorului \overline{OA} în \mathcal{R} , respectiv vectorului \overline{AM} în \mathcal{R}' .

Prin derivarea (2.25) în raport cu timpul t , avem că

$$\begin{aligned}\overline{v}(t) &= \dot{x}_A(t)\overline{i} + \dot{y}_A(t)\overline{j} + \dot{z}_A(t)\overline{k} + \dot{\overline{AM}} \\ &= \overline{v}_A(t) + \dot{\overline{AM}} \\ &= \overline{v}_A(t) + \left(\frac{\partial \overline{AM}}{\partial t}\right)_{\mathcal{R}'} + \overline{\omega} \times \overline{AM}.\end{aligned}\quad (2.26)$$

Mărimea $\overline{v}_A(t)$ este vectorul-viteză al punctului A față de sistemul de referință \mathcal{R} . Mărimea $\left(\frac{\partial \overline{AM}}{\partial t}\right)_{\mathcal{R}'}$ reprezintă *vectorul-viteză relativă* al punctului material M față de reperul \mathcal{R}' , și aceasta deoarece \overline{AM} este raza vectorială a punctului material M în reperul \mathcal{R}' . Folosim notația $\left(\frac{\partial \overline{AM}}{\partial t}\right)_{\mathcal{R}'} \stackrel{not}{=} \overline{v}_{rel}(t)$. Așadar, $\overline{v}_{rel}(t) = \dot{x}_1(t)\overline{i}_1 + \dot{y}_1(t)\overline{j}_1 + \dot{z}_1(t)\overline{k}_1$.

Mărimile $\bar{v}_A(t) + \bar{\omega} \times \overline{AM}$ poartă denumirea de *vector-viteză de transport*. Observăm că, dacă punctul material M se găsește în repaus relativ, atunci $\bar{v}(t) = \bar{v}_A(t) + \bar{\omega} \times \overline{AM}$. Este cazul mâinii nemișcate a persoanei de lângă șofer. Putem spune că toate persoanele, obiectele în repaus față de mașină au vitezele absolute date de $\bar{v}(t) = \bar{v}_A(t) + \bar{\omega} \times \overline{AM}$. Denumirea de *viteză de transport (antrenare)* devine astfel sugestivă.

În concluzie,

$$\bar{v}(t) = \bar{v}_{transp} + \bar{v}_{rel},$$

ceea ce reprezintă *legea fundamentală de compunere a vitezelor* în mecanica teoretică (cf. [34], p. 180, [32], p. 192, [76], p. 324).

Vom deriva formula (2.24) în raport cu timpul t . Atunci,

$$\begin{aligned} \ddot{\bar{w}} &= \frac{d}{dt} \left(\left(\frac{\partial \bar{w}}{\partial t} \right)_{\mathcal{R}'} \right) + \dot{\bar{\omega}} \times \bar{w} + \bar{\omega} \times \dot{\bar{w}} \\ &= \left[\left(\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial \bar{w}}{\partial t} \right)_{\mathcal{R}'} \right) + \bar{\omega} \times \left(\frac{\partial \bar{w}}{\partial t} \right)_{\mathcal{R}'} \right] + \dot{\bar{\omega}} \times \bar{w} \\ &\quad + \left[\bar{\omega} \times \left(\frac{\partial \bar{w}}{\partial t} \right)_{\mathcal{R}'} + \bar{\omega} \times (\bar{\omega} \times \bar{w}) \right] \\ &= \left(\frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial t^2} \right)_{\mathcal{R}'} + 2 \left[\bar{\omega} \times \left(\frac{\partial \bar{w}}{\partial t} \right)_{\mathcal{R}'} \right] + \dot{\bar{\omega}} \times \bar{w} + \bar{\omega} \times (\bar{\omega} \times \bar{w}) \\ &= \left(\frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial t^2} \right)_{\mathcal{R}'} + 2 \left[\bar{\omega} \times \left(\frac{\partial \bar{w}}{\partial t} \right)_{\mathcal{R}'} \right] + \bar{\varepsilon} \times \bar{w} + \bar{\omega} \times (\bar{\omega} \times \bar{w}). \end{aligned} \quad (2.27)$$

Aplicând (2.27) relativ la (2.25), avem că

$$\begin{aligned} \bar{a}(t) &= \bar{a}_A(t) + \ddot{\overline{AM}} \\ &= \bar{a}_A(t) + \bar{a}_{rel}(t) + 2(\bar{\omega} \times \bar{v}_{rel}) + \bar{\varepsilon} \times \overline{AM} + \bar{\omega} \times (\bar{\omega} \times \overline{AM}) \\ &= [\bar{a}_A(t) + \bar{\varepsilon} \times \overline{AM} + \bar{\omega} \times (\bar{\omega} \times \overline{AM})] + \bar{a}_{rel}(t) + \bar{a}_{Cor}(t) \\ &= \bar{a}_{transp} + \bar{a}_{rel} + \bar{a}_{Cor}. \end{aligned}$$

Semnificațiile mărimilor \bar{a}_{transp} , \bar{a}_{rel} sunt analoage celor ale mărimilor \bar{v}_{transp} , \bar{v}_{rel} . Mărimea \bar{a}_{Cor} reprezintă *vectorul-accelerație Coriolis (complementară)*. Asupra sa vom reveni ulterior.

Am obținut astfel *legea fundamentală de compunere a accelerațiilor* în mecanica teoretică (G. Coriolis, 1831) (cf. [32], p. 193, [34], p. 187, [76], p. 325).

Un caz particular interesant are loc atunci când reperul \mathcal{R}' este chiar triedrul lui Frenet. Pe baza relațiilor (2.9), (2.11), (2.12), avem că

$$\begin{cases} \dot{\bar{\tau}} = \frac{d\bar{\tau}}{ds} \cdot \dot{s} = \frac{v}{R} \cdot \bar{\nu} = \bar{\omega} \times \bar{\tau} \\ \dot{\bar{\nu}} = -\frac{v}{R} \cdot \bar{\tau} + vT \cdot \bar{\beta} = \bar{\omega} \times \bar{\nu} \\ \dot{\bar{\beta}} = -Tv \cdot \bar{\nu} = \bar{\omega} \times \bar{\beta}, \end{cases}$$

unde $\bar{\omega} = vT \cdot \bar{\tau} + \frac{v}{R} \cdot \bar{\beta}$ (cf. [34], p. 174-175, [15], vol. I, p. 47, [59], problema 3.1.7, p. 35).

În finalul acestei subsecțiuni, să considerăm că, în afara reperului (mobil) \mathcal{R}' , mai există și un al doilea reper cartezian (mobil) $\mathcal{R}'' = (B, \overrightarrow{\mathcal{D}})$, unde $B \in E_3$ și $\mathcal{D} = \{\bar{i}_2, \bar{j}_2, \bar{k}_2\}$. Mărimea $\bar{\omega}$ din (2.21), care caracterizează *într-o anumită măsură* mișcarea reperului \mathcal{R}' față de \mathcal{R} , va fi notată cu $\bar{\omega}_{21}$ în cazul mișcării reperului \mathcal{R}'' față de \mathcal{R}' , cu $\bar{\omega}_{12}$ în cazul mișcării reperului \mathcal{R}' față de \mathcal{R}'' , cu $\bar{\omega}_{10}$ în cazul mișcării reperului \mathcal{R}' față de \mathcal{R} și respectiv cu $\bar{\omega}_{20}$ în cazul mișcării reperului \mathcal{R}'' față de \mathcal{R} .

Atunci, conform legii fundamentale de compunere a vitezelor,

$$\begin{aligned} \bar{v}_B(t) &= \bar{v}_A(t) + \left(\frac{\partial \overline{AB}}{\partial t} \right)_{\mathcal{R}'} + \bar{\omega}_{10} \times \overline{AB} \\ &= \bar{v}_A(t) + \bar{v}_{rel,B} + \bar{\omega}_{10} \times \overline{AB} \end{aligned} \quad (2.28)$$

și, respectiv

$$\begin{aligned} \bar{v}_A(t) &= \bar{v}_B(t) + \left(\frac{\partial \overline{BA}}{\partial t} \right)_{\mathcal{R}''} + \bar{\omega}_{20} \times \overline{BA} \\ &= \bar{v}_B(t) + \bar{v}_{rel,A} + \bar{\omega}_{20} \times \overline{BA}, \end{aligned} \quad (2.29)$$

mărimile $\bar{v}_{rel,B}$, $\bar{v}_{rel,A}$ reprezentând vectorul-viteză relativă al punctului B față de reperul \mathcal{R}' , respectiv vectorul-viteză relativă al punctului A față de reperul \mathcal{R}'' .

Prin sumarea membru cu membru a (2.28), (2.29), avem că

$$0 = \bar{v}_{rel,A} + \bar{v}_{rel,B} + (\bar{\omega}_{10} - \bar{\omega}_{20}) \times \overline{AB}, \quad (2.30)$$

relație la care vom apela ulterior (cf. [34], p. 188).

Au loc formulele

$$\bar{\omega}_{12} = \bar{\omega}_{10} - \bar{\omega}_{20} \quad \bar{\omega}_{21} = \bar{\omega}_{20} - \bar{\omega}_{10}. \quad (2.31)$$

Să justificăm, în continuare, această afirmație. Conform (2.21), (2.24), putem scrie

$$\begin{cases} \dot{\bar{i}}_1 = \bar{\omega}_{10} \times \bar{i}_1 \\ = \left(\frac{\partial \bar{i}_1}{\partial t} \right)_{\mathcal{R}''} + \bar{\omega}_{20} \times \bar{i}_1 \\ \dot{\bar{i}}_2 = \bar{\omega}_{20} \times \bar{i}_2 \\ = \left(\frac{\partial \bar{i}_2}{\partial t} \right)_{\mathcal{R}'} + \bar{\omega}_{10} \times \bar{i}_2, \end{cases}$$

de unde deducem că $\left(\frac{\partial \bar{i}_1}{\partial t} \right)_{\mathcal{R}''} = (\bar{\omega}_{10} - \bar{\omega}_{20}) \times \bar{i}_1$, $\left(\frac{\partial \bar{i}_2}{\partial t} \right)_{\mathcal{R}'} = (\bar{\omega}_{20} - \bar{\omega}_{10}) \times \bar{i}_2$.

În mod analog, ajungem la formulele

$$\begin{cases} \left(\frac{\partial \bar{i}_1}{\partial t} \right)_{\mathcal{R}''} = (\bar{\omega}_{10} - \bar{\omega}_{20}) \times \bar{i}_1 & \left(\frac{\partial \bar{i}_2}{\partial t} \right)_{\mathcal{R}'} = (\bar{\omega}_{20} - \bar{\omega}_{10}) \times \bar{i}_2 \\ \left(\frac{\partial \bar{j}_1}{\partial t} \right)_{\mathcal{R}''} = (\bar{\omega}_{10} - \bar{\omega}_{20}) \times \bar{j}_1 & \left(\frac{\partial \bar{j}_2}{\partial t} \right)_{\mathcal{R}'} = (\bar{\omega}_{20} - \bar{\omega}_{10}) \times \bar{j}_2 \\ \left(\frac{\partial \bar{k}_1}{\partial t} \right)_{\mathcal{R}''} = (\bar{\omega}_{10} - \bar{\omega}_{20}) \times \bar{k}_1 & \left(\frac{\partial \bar{k}_2}{\partial t} \right)_{\mathcal{R}'} = (\bar{\omega}_{20} - \bar{\omega}_{10}) \times \bar{k}_2. \end{cases}$$

Data fiind unicitatea vectorului $\bar{\omega}$ din (2.21), justețea afirmațiilor din (2.31) este probată.

În particular,

$$\bar{\omega}_{12} + \bar{\omega}_{21} = 0$$

(cf. [34], p. 187).

Introducem mărimile

$$\left(\frac{\partial \bar{\omega}_{12}}{\partial t} \right)_{\mathcal{R}''} \stackrel{\text{not}}{=} \bar{\varepsilon}_{12} \quad \left(\frac{\partial \bar{\omega}_{21}}{\partial t} \right)_{\mathcal{R}'} \stackrel{\text{not}}{=} \bar{\varepsilon}_{21} \quad \dot{\bar{\omega}}_{10} \stackrel{\text{not}}{=} \bar{\varepsilon}_{10} \quad \dot{\bar{\omega}}_{20} \stackrel{\text{not}}{=} \bar{\varepsilon}_{20}.$$

Conform (2.24), (2.31), putem scrie

$$\begin{aligned} \dot{\bar{\omega}}_{12} &= \bar{\varepsilon}_{12} + \bar{\omega}_{20} \times \bar{\omega}_{12} \\ &= \bar{\varepsilon}_{12} + (\bar{\omega}_{21} + \bar{\omega}_{10}) \times \bar{\omega}_{12} \\ &= \bar{\varepsilon}_{12} + \bar{\omega}_{10} \times \bar{\omega}_{12}, \end{aligned} \tag{2.32}$$

căci $\bar{\omega}_{21} \times \bar{\omega}_{12} = 0$, respectiv

$$\dot{\bar{\omega}}_{21} = \bar{\varepsilon}_{21} + \bar{\omega}_{10} \times \bar{\omega}_{21}. \tag{2.33}$$

Atunci, prin sumarea membru cu membru a relațiilor (2.32), (2.33), ajungem la $0 = \frac{d}{dt}(\bar{\omega}_{12} + \bar{\omega}_{21}) = \bar{\varepsilon}_{12} + \bar{\varepsilon}_{21} + \bar{\omega}_{10} \times (\bar{\omega}_{12} + \bar{\omega}_{21})$, de unde

$$\bar{\varepsilon}_{12} + \bar{\varepsilon}_{21} = 0.$$

În final, conform (2.31), (2.32), (2.33), putem scrie

$$\begin{cases} \bar{\varepsilon}_{10} = \bar{\varepsilon}_{20} + \bar{\varepsilon}_{12} + \bar{\omega}_{20} \times \bar{\omega}_{12} \\ \bar{\varepsilon}_{20} = \bar{\varepsilon}_{10} + \bar{\varepsilon}_{21} + \bar{\omega}_{10} \times \bar{\omega}_{21} \end{cases}$$

(cf. [15], vol. I, p. 100, [63], p. 266).

2.1.10 O formulă matriceală în legătură cu vectorul $\bar{\omega}$

Vom nota cu $(\omega_{\alpha\beta})_{\alpha,\beta}$, respectiv $(\omega_{\alpha\beta}^*)_{\alpha,\beta}$ mărimile corespunzătoare vectorilor $\bar{\omega}_{10}$, $\bar{\omega}_{20}$ în (2.22). Astfel,

$$\begin{cases} \dot{\bar{i}}_1 = \omega_{12} \cdot \bar{j}_1 + \omega_{13} \cdot \bar{k}_1 \\ \dot{\bar{j}}_1 = \omega_{21} \cdot \bar{i}_1 + \omega_{23} \cdot \bar{k}_1 \\ \dot{\bar{k}}_1 = \omega_{31} \cdot \bar{i}_1 + \omega_{32} \cdot \bar{j}_1 \end{cases} \quad \begin{cases} \dot{\bar{i}}_2 = \omega_{12}^* \cdot \bar{j}_2 + \omega_{13}^* \cdot \bar{k}_2 \\ \dot{\bar{j}}_2 = \omega_{21}^* \cdot \bar{i}_2 + \omega_{23}^* \cdot \bar{k}_2 \\ \dot{\bar{k}}_2 = \omega_{31}^* \cdot \bar{i}_2 + \omega_{32}^* \cdot \bar{j}_2 \end{cases}$$

Știm deja că $\omega_{\alpha\beta}(t) = -\omega_{\beta\alpha}(t)$, $\omega_{\alpha\beta}^*(t) = -\omega_{\beta\alpha}^*(t)$ și $\omega_{\alpha\beta}, \omega_{\alpha\beta}^* \in C^\infty(I, \mathbb{R})$.

Introducem cosinușii directori $(\alpha_{mn})_{m,n}$ ai bazei \mathcal{D} în raport cu baza \mathcal{C} prin formulele

$$\begin{cases} \bar{i}_2 = \alpha_{11}\bar{i}_1 + \alpha_{12}\bar{j}_1 + \alpha_{13}\bar{k}_1 \\ \bar{j}_2 = \alpha_{21}\bar{i}_1 + \alpha_{22}\bar{j}_1 + \alpha_{23}\bar{k}_1 \\ \bar{k}_2 = \alpha_{31}\bar{i}_1 + \alpha_{32}\bar{j}_1 + \alpha_{33}\bar{k}_1 \end{cases}$$

Evident, $\alpha_{mn} \in C^\infty(I, \mathbb{R})$. Folosim notația $(\alpha_{mn})_{m,n} \stackrel{\text{not}}{=} A(t)$.

Să considerăm matricele

$$\begin{pmatrix} 0 & \omega_{12} & \omega_{13} \\ \omega_{21} & 0 & \omega_{23} \\ \omega_{31} & \omega_{32} & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & \omega_{12}^* & \omega_{13}^* \\ \omega_{21}^* & 0 & \omega_{23}^* \\ \omega_{31}^* & \omega_{32}^* & 0 \end{pmatrix},$$

notate $[\omega]$, respectiv $[\omega^*]$ (cf. [15], vol. I, p. 2).

Atunci, are loc relația

$$[\omega^*] = (\dot{A} + A[\omega])A^t.$$

Pentru demonstrarea sa vom utiliza *formalismul* matriceal. Astfel, putem scrie

$$\begin{pmatrix} \bar{i}_2 \\ \bar{j}_2 \\ \bar{k}_2 \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} \bar{i}_1 \\ \bar{j}_1 \\ \bar{k}_1 \end{pmatrix} \quad (\bar{i}_2 \ \bar{j}_2 \ \bar{k}_2) = (\bar{i}_1 \ \bar{j}_1 \ \bar{k}_1) A^t, \quad (2.34)$$

respectiv

$$[\omega] = \begin{pmatrix} \dot{\bar{i}}_1 \\ \dot{\bar{j}}_1 \\ \dot{\bar{k}}_1 \end{pmatrix} (\bar{i}_1 \ \bar{j}_1 \ \bar{k}_1) \quad [\omega^*] = \begin{pmatrix} \dot{\bar{i}}_2 \\ \dot{\bar{j}}_2 \\ \dot{\bar{k}}_2 \end{pmatrix} (\bar{i}_2 \ \bar{j}_2 \ \bar{k}_2).$$

Evident, în această reprezentare a matricelor $[\omega]$, $[\omega^*]$ produsele elementelor sunt produse scalare.

Prin derivare în raport cu timpul t în (2.34), avem că

$$\begin{aligned} [\omega^*] &= \left[\dot{A} \begin{pmatrix} \bar{i}_1 \\ \bar{j}_1 \\ \bar{k}_1 \end{pmatrix} + A \begin{pmatrix} \dot{\bar{i}}_1 \\ \dot{\bar{j}}_1 \\ \dot{\bar{k}}_1 \end{pmatrix} \right] (\bar{i}_2 \ \bar{j}_2 \ \bar{k}_2) \\ &= \left[\dot{A} \begin{pmatrix} \bar{i}_1 \\ \bar{j}_1 \\ \bar{k}_1 \end{pmatrix} + A \begin{pmatrix} \dot{\bar{i}}_1 \\ \dot{\bar{j}}_1 \\ \dot{\bar{k}}_1 \end{pmatrix} \right] (\bar{i}_1 \ \bar{j}_1 \ \bar{k}_1) A^t \\ &= (\dot{A} I_3 + A[\omega]) A^t. \end{aligned}$$

În particular, dacă reperul \mathcal{R}'' este în repaus față de \mathcal{R}' (adică, mărimile $(\alpha_{mn})_{m,n}$ sunt *constante*), are loc relația

$$[\omega^*] = A[\omega]A^t. \quad (2.35)$$

Conform (2.35), putem spune că vectorul $\bar{\omega}$ admite o reprezentare *tensorială*, dată de matricea $[\omega]$, ca *tensor antisimetric de ordinul al II-lea* (cf. [34], p. 46, 169, [32], p. 97, [15], vol. I, p. 18).

2.1.11 O interpretare geometrică a vectorului $\bar{\omega}$

Să presupunem că operatorul liniar $T : T\mathbb{R}^3 \rightarrow T\mathbb{R}^3$ corespunde unei rotații a spațiului fizic $F : E_3 \rightarrow E_3$, de unghi α . Mai precis, vom considera că matricea de reprezentare a operatorului T în raport cu baza \mathcal{B} a sistemului de referință este

$$\begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha & 0 \\ \sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Notând cu x, y, z , respectiv x_1, y_1, z_1 coordonatele vectorilor \bar{u} , $T\bar{u} \stackrel{\text{not}}{=} \bar{u}_1$ în reperul canonic \mathcal{R} , au loc relațiile

$$\begin{cases} x_1 = x \cos \alpha - y \sin \alpha \\ y_1 = x \sin \alpha + y \cos \alpha \\ z_1 = z. \end{cases} \quad (2.36)$$

Atunci, conform [56], p. 26, dacă unghiul de rotație α este *foarte mic*, adică $\sin \alpha \simeq \alpha$, $\cos \alpha \simeq 1$, (2.36) devin

$$\begin{cases} x_1 = x - \alpha \cdot y \\ y_1 = y + \alpha \cdot x \\ z_1 = z. \end{cases} \quad (2.37)$$

Vectorial, sistemul de formule (2.37) poate fi pus sub forma

$$\bar{u}_1 = \bar{u} + \bar{\alpha} \times \bar{u},$$

unde $\bar{\alpha} \stackrel{\text{def}}{=} \alpha \cdot \bar{k}$. Sau, echivalent (cf. [41], p. 30, [54], p. 56)

$$\begin{aligned} \Delta \bar{u} &= \bar{u}_1 - \bar{u} \\ &= (\bar{\alpha} - 0) \times \bar{u} \\ &= \Delta \bar{\alpha} \times \bar{u}, \end{aligned}$$

ceea ce permite introducerea expresiei *infinitesimale (diferențiale)* generale

$$\delta \bar{u} = \delta \bar{\alpha} \times \bar{u} \quad (2.38)$$

(cf. [56], p. 31).

Utilizăm notațiile $\delta \bar{u}$, $\delta \bar{\alpha}$ în locul celor uzuale, respectiv $d\bar{u}$, $d\bar{\alpha}$ pentru a scoate în evidență faptul că aceste mărimi nu sunt, în general, integrabile.

În schimb, dacă funcțiile $\alpha = \alpha(t)$, $\bar{u} = \bar{u}(\alpha)$ sunt de clasă C^∞ (prezumție obișnuită în cadrul mecanicii teoretice), expresia diferențială (2.38) devine o expresie *exactă*, adică

$$d\bar{u} = d\bar{\alpha} \times \bar{u},$$

de unde

$$\frac{d\bar{u}}{dt} = \frac{d\bar{\alpha}}{dt} \times \bar{u} = \bar{\omega} \times \bar{u}.$$

Plecând de aici, putem spune că vectorul $\bar{\omega}$ dat de (2.23) este *vectorul-viteză unghiulară (instantanee sau momentană)* al mișcării reperului \mathcal{R}' față de sistemul de referință \mathcal{R} (cf. [32], p. 96, [63], p. 183, [76], p. 303-304, [14], p. 72). Se mai întâlnește și denumirea de *vector de rotație (instantanee)* (cf. [34], p. 169, [41], p. 30). La rândul său, vectorul $\bar{\varepsilon}$ devine *vectorul-accelerație unghiulară (instantanee)* al mișcării reperului \mathcal{R}' față de sistemul de referință \mathcal{R} .

Nu vom insista în acest moment cu *interpretarea* mișcării reperului \mathcal{R}' față de sistemul de referință \mathcal{R} . A devenit însă evident că aceasta este o mișcare complexă care include printre "ingredientele" sale o mișcare (instantanee) *semănând* rotației (cf. [76], p. 309-310, 318-319).

Totuși, o serie de precizări privitoare la mișcarea *instantanee* a reperului \mathcal{R}' față de sistemul de referință \mathcal{R} pot fi făcute. Astfel, mulțimea

$$\mathbb{U} = \left\{ \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha & 0 \\ \sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} : \alpha \in \mathbb{R} \right\},$$

dotată cu operația internă a înmulțirii matricelor, constituie un grup abelian. În particular, compunerea (obișnuită) a două aplicații ortogonale $T_i : T\mathbb{R}^3 \rightarrow T\mathbb{R}^3$, cu matricele de reprezentare în raport cu baza \mathcal{B} a sistemului de referință

$$\tilde{T}_i = \begin{pmatrix} \cos \alpha_i & -\sin \alpha_i & 0 \\ \sin \alpha_i & \cos \alpha_i & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad i = 1, 2,$$

constituie o aplicație ortogonală, având matricea de reprezentare

$$\begin{pmatrix} \cos(\alpha_1 + \alpha_2) & -\sin(\alpha_1 + \alpha_2) & 0 \\ \sin(\alpha_1 + \alpha_2) & \cos(\alpha_1 + \alpha_2) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(cf. [67], p. 141-142, [56], p. 23). De aceea, pe baza formulei

$$\Delta\alpha = \int_{\alpha(t_0)}^{\alpha(t_1)} d\alpha = \int_{t_0}^{t_1} \dot{\alpha} dt = \int_{t_0}^{t_1} \omega(t)dt,$$

putem considera o rotație a SF de unghi $\Delta\alpha$ ca fiind *compunerea* unei succesiuni de rotații *instantanee*, de unghi $d\alpha = \omega(t)dt$ (cf. [54], p. 127). Se întâlnesc aici noțiunile de *izometrie (deplasare, mișcare) finită* și *izometrie (deplasare, mișcare) elementară (infinit de mică, instantanee)* ale SF , desemnând izometrii (aplicații izometrice) ce au loc într-un interval *finit* de timp $\Delta t = t_1 - t_0$, respectiv într-un timp *infinitesimal* dt (cf. [63], p. 174, [41], p. 137-139, [56], p. 28, [54], p. 83, 110).

2.1.12 Măsură și integrală în SF

Noțiunea de *punct material* (corp punctiform), fundamentală în mecanica clasică, are o justificare (intuitivă) extrem de sugestivă. Aruncarea în gol a unei pietre de către cineva aflat pe marginea unei prăpastii, la munte, sau contemplarea pe timp de noapte a boltei cerești sunt situații în care corpurile materiale (piatra, stelele) se comportă *ca și cum* nu ar avea *dimensiuni* (cf. [54], p. 8). Astfel, Isaac Newton înțelegea prin ”corpus” punctul material, cu referire la corpurile cerești (cf. [76], p. 9). Se conturează ideea că există probleme specifice mecanicii teoretice în care, *într-o primă aproximație* (cf. [54], p. 8), corpurile materiale pot fi asimilate cu puncte geometrice dotate cu *masă*. Un corp material poate fi considerat punctiform într-o anumită problemă dar acest lucru nu mai este posibil într-o altă problemă. De exemplu, globul terestru poate fi asimilat unui punct material în mișcarea sa de revoluție în jurul Soarelui, dar nu și în rotația proprie diurnă (în jurul axei polilor) (cf. [32], p. 18, [41], p. 7).

În cele ce urmează vom introduce un *aparat matematic (integrala Lebesgue)* care ne permite să dovedim într-un mod satisfăcător de ce, de exemplu, în teoria newtoniană a gravitației planetele și Soarele sunt considerate puncte materiale (cf. [34], p. 352, [32], p. 163, [54], p. 33). Un alt comentariu se cuvine făcut aici. *Mecanica teoretică (clasică) privește mișcarea corpurilor rigide ”macroscopice”, mișcare produsă cu viteze obișnuite pentru om și mult inferioare vitezei luminii* (cf. [76], p. 5). Aceasta presupune, în particular, că nu se va ține seama de materia *incandescentă* (plasmă, lavă), considerând, de obicei, densitatea corpurilor ca fiind o aplicație netedă, radial simetrică (cf. [76], p. 391).

Justificarea noțiunii de punct material se bazează, în esență, pe utilizarea *integralelor de tip potențial* având forma

$$I(A) = \int_{\Omega} \frac{f(B)}{|AB|} d\lambda(B), \quad A \in E_3.$$

Plecând de la teoria atracției gravitaționale și electromagnetism (cf., de exemplu, [68], p. 339) a luat ființă *teoria potențialului*, disciplină matematică de sine stătătoare. Pentru o expunere riguroasă a se vedea [82], [7].

Introducem noțiunile și rezultatele acestei subsecțiuni urmând prezentările făcute în [80], [61], [68], [52]. O expunere elegantă a teoriilor integrării (Henstock-Kurzweil, Lebesgue) poate fi citită în monografia profesorului C.P. Niculescu, ”*Analiză matematică pe dreapta reală. O abordare contemporană*”, Editura Universitaria, Craiova, 2002.

Să considerăm $M \neq \emptyset$ o mulțime oarecare. Familia \mathcal{S} de părți ale lui M poartă denumirea de *semiclan* (*semi-inel*) dacă sunt satisfăcute următoarele condiții:

- 1) $\emptyset \in \mathcal{S}$;
- 2) $A \cap B \in \mathcal{S}$ pentru orice $A, B \in \mathcal{S}$;
- 3) dacă $A, B \in \mathcal{S}$ astfel încât $B \subseteq A$, atunci există o familie cel mult numărabilă de mulțimi $(C_n)_{n \geq 1} \subseteq \mathcal{S}$, disjuncte două câte două, care verifică egalitatea

$$A \setminus B = \bigcup_{n \geq 1} C_n$$

(cf. [80], p. 37).

În mod evident, o *algebră* de părți ale mulțimii M în sensul dat în [61], p. 71-72, [52], p. 70, va fi și semiclan.

O funcție σ -aditivă $\mu : \mathcal{S} \rightarrow [0, +\infty]$ pentru care $\mu(\emptyset) = 0$ se numește *măsură* pe mulțimea M . O măsură μ este considerată σ -*finită* dacă pentru orice $A \in \mathcal{S}$ există o familie $(A_n)_{n \geq 1}$ de elemente ale lui \mathcal{S} , unde $\mu(A_n) < +\infty$, astfel încât $A \subseteq \bigcup_{n \geq 1} A_n$ (cf. [80], p. 86, [61], p. 77, [52], p. 71).

O funcție $\mu^* : \mathcal{P}(M) \rightarrow [0, +\infty]$ se numește *măsură exterioară* pe mulțimea M dacă sunt îndeplinite condițiile următoare:

- 1) $\mu^*(\emptyset) = 0$;
- 2) μ^* este σ -*subaditivă*, adică $\mu^*(E) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu^*(E_n)$, unde $E \subseteq \bigcup_{n \geq 1} E_n$ și $E, E_n \in \mathcal{P}(M)$, $n \geq 1$ (cf. [80], p. 88, [61], p. 82, [52], p. 74).

Fiind dată măsura $\mu : \mathcal{S} \rightarrow [0, +\infty]$ pe mulțimea M , introducem aplicația $\mu^* : \mathcal{P}(M) \rightarrow [0, +\infty]$ în felul următor:

1) dacă există o *acoperire* cel mult numărabilă a părții E a mulțimii M cu elemente din \mathcal{S} , adică $E \subseteq \bigcup_{n \geq 1} A_n$, atunci

$$\mu^*(E) = \inf \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n) \right\},$$

unde *infimumul* este luat după toate acoperirile posibile (de acest tip);

2) în caz contrar, $\mu^*(E) = +\infty$.

Atunci, μ^* reprezintă o măsură exterioară pe mulțimea M și $\mu^*(A) = \mu(A)$, unde $A \in \mathcal{S}$ (cf. [80], p. 89-90, [61], p. 84-85). Măsura exterioară μ^* este considerată *generată* de măsura μ .

Fiind dată măsura exterioară $\mu^* : \mathcal{P}(M) \rightarrow [0, +\infty]$, o parte E a mulțimii M se numește μ^* -*măsurabilă* dacă, prin definiție, $\mu^*(F) = \mu^*(E \cap F) + \mu^*((M \setminus E) \cap F)$ pentru orice $F \in \mathcal{P}(M)$. Familia \mathcal{A} a tuturor părților μ^* -măsurabile ale mulțimii M alcătuiește o σ -*algebră* (*clan borelian*) (cf. [80], p. 35-36, 91-93, [61], p. 88).

În sfârșit, dacă $\mu : \mathcal{S} \rightarrow [0, +\infty]$ este o măsură pe mulțimea M iar $\mu^* : \mathcal{P}(M) \rightarrow [0, +\infty]$ este măsura exterioară generată de μ pe mulțimea M , atunci $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{A}$, funcția $\mu^*|_{\mathcal{A}}$ constituie o măsură pe mulțimea M și are loc proprietatea de mai jos

$$\mu^*|_{\mathcal{A}}(A) = \mu(A), \quad A \in \mathcal{S}$$

(cf. [80], p. 94-95, [61], p. 88, [52], p. 80). Măsura $\mu^*|_{\mathcal{A}}$ reprezintă *extinderea standard* (*Carathéodory*) a măsurii μ la o σ -algebră de părți ale mulțimii M .

Fiind date mărimile $-\infty \leq a_i < b_i \leq +\infty$, unde $1 \leq i \leq 3$, mulțimea

$$\begin{aligned} \Delta &= \{M \in E_3 : a_1 \leq x < b_1, a_2 \leq y < b_2, a_3 \leq z < b_3\} \\ &\stackrel{\text{not}}{=} [a_1, b_1; a_2, b_2; a_3, b_3), \end{aligned}$$

unde x, y, z sunt coordonatele punctului M în reperul canonic \mathcal{R} , poartă denumirea de *celulă* (*paralelipipedică*). Familia tuturor celulelor din E_3 alcătuiește un semiclan \mathcal{S} (cf. [80], p. 109-112).

Funcția $\lambda : \mathcal{S} \rightarrow [0, +\infty]$, introdusă în felul următor:

1) $\lambda(\Delta) = \prod_{i=1}^3 (b_i - a_i)$, când Δ este mărginită;

2) $\lambda(\Delta) = +\infty$, în caz contrar,
este o măsură σ -finită în E_3 (cf. [80], p. 108-109, 112).

Extinderea standard (Carathéodory) a măsurii λ definite anterior se numește *măsură (Lebesgue)* în SF . Părțile λ^* -măsurabile ale lui E_3 sunt mulțimi *măsurabile (Lebesgue)* (cf. [80], p. 115, [61], p. 98). Pentru simplificarea notației, convenim ca în cele ce urmează să desemnăm prin λ atât măsura definită pe semiclanul \mathcal{S} al celulelor cât și extinderea sa Carathéodory. Rezultatele menționate anterior fac opțiunea noastră totalmente *naturală*.

σ -algebra \mathcal{B} generată de familia părților deschise (în raport cu topologia metrică) ale lui E_3 (adică, intersecția tuturor σ -algebrelor de părți ale lui E_3 care includ familia mulțimilor deschise) poartă denumirea de *familia mulțimilor boreliene*, elementele sale fiind *mulțimi boreliene (Borel)* (cf. [61], p. 74-75, [80], p. 57-58, [52], p. 71). Mulțimile boreliene ale lui E_3 sunt măsurabile Lebesgue (cf. [80], p. 117-118, [61], p. 99). Se cuvine reamintit faptul că există mulțimi măsurabile Lebesgue care nu sunt mulțimi boreliene (cf. [61], p. 107-108).

În particular, mulțimile deschise și mulțimile închise sunt măsurabile în SF . De asemeni, mulțimile deschise în E_3 pot fi reprezentate ca reuniuni cel mult numărabile de celule, disjuncte două câte două, cu muchii *finite* (adică, $|b_i - a_i| < +\infty$, unde $1 \leq i \leq 3$) (cf. [80], p. 113, 116).

O funcție $f : E \rightarrow \mathbb{R}$ este *măsurabilă (Lebesgue)* atunci când, prin definiție, pentru orice număr real a mulțimile *Lebesgue* introduse mai jos

$$\begin{aligned} \{x \in E : f(x) > a\} & \quad \{x \in E : f(x) < a\} \\ \{x \in E : f(x) \geq a\} & \quad \{x \in E : f(x) \leq a\} \end{aligned}$$

sunt măsurabile Lebesgue. Se poate arăta că este *suficient* ca unul dintre cele patru *tipuri* de mulțimi Lebesgue date mai sus să fie format numai din mulțimi măsurabile, pentru ca funcția f să fie măsurabilă (cf. [80], p. 122-123, [52], p. 88).

Fiind dată funcția $f : E \rightarrow \mathbb{R}$ mărginită, unde $\lambda(E) < +\infty$, putem introduce *sumele Lebesgue-Darboux inferioară și superioară* în modul obișnuit

$$S(\tau, f) \stackrel{\text{not}}{=} \sum_{i=1}^p \sup_{x \in E_i} f(x) \cdot \lambda(E_i) \quad s(\tau, f) \stackrel{\text{not}}{=} \sum_{i=1}^p \inf_{x \in E_i} f(x) \cdot \lambda(E_i),$$

unde $\tau = \{E_i : 1 \leq i \leq p\}$ constituie o partiție a mulțimii E cu mulțimi măsurabile, disjuncte două câte două.

Atunci, funcția $f : E \rightarrow \mathbb{R}$ este *integrabilă Lebesgue* pe mulțimea E dacă

$$\inf_{\tau} S(\tau, f) = \sup_{\tau} s(\tau, f) \stackrel{\text{not}}{=} \int_E f(M) d\lambda(M).$$

În particular, orice funcție mărginită f măsurabilă pe mulțimea E va fi integrabilă Lebesgue pe mulțimea E (cf. [80], p. 151-153, [52], p. 97-98).

O mulțime $E \subseteq E_3$ se numește *jordaniană (mulțime Jordan)* dacă frontiera sa, notată $Fr(E)$, este măsurabilă Lebesgue și $\lambda(Fr(E)) = 0$ (cf. [68], p. 213).

În mod evident, $E = i(E) \cup (Fr(E) \cap E)$. Măsura Lebesgue fiind *completă* (adică, pentru orice $F \subseteq E$, unde $E \in \mathcal{A}$ și $\lambda(E) = 0$, avem $F \in \mathcal{A}$ și $\lambda(F) = 0$) (cf. [80], p. 95, 116), deducem că *orice mulțime Jordan E este măsurabilă Lebesgue*.

Un exemplu "natural" de mulțime jordaniană îl constituie mulțimile deschise în E_3 . Într-adevăr, dacă $G \subseteq E_3$ este o mulțime deschisă (în raport cu topologia metrică), atunci $G \subseteq \bigcup_{n \geq 1} \Delta_n$, unde $(\Delta_n)_{n \geq 1}$ reprezintă celulele cu muchii finite, disjuncte două câte două. Conform [64], problema 1.3, p. 31, $Fr(G) \subseteq \bigcup_{n \geq 1} Fr(\Delta_n)$ și, folosind σ -subaditivitatea măsurii Lebesgue, putem scrie că

$$0 \leq \lambda(Fr(G)) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \lambda(Fr(\Delta_n)) = 0.$$

Această proprietate a mulțimilor jordaniane de a fi reuniunea dintre o mulțime deschisă (interiorul lor), uneori vidă, și ceva "neglijabil" (de măsură Lebesgue nulă) dă naștere unor complicații spectaculoase în teoria ecuațiilor cu derivate parțiale (cf., de exemplu, [13], p. 171). În ceea ce privește "aproximarea", în general, a mulțimilor măsurabile cu mulțimi boreliene (așa cum mulțimile deschise *aproximează* mulțimile Jordan), reamintim că, fiind dată mulțimea măsurabilă E din E_3 , există o mulțime H , de tip \mathcal{F}_σ , și o mulțime K , de tip \mathcal{G}_δ , astfel încât $H \subseteq E \subseteq K$, $\lambda(H) = \lambda(K)$, $\lambda(K \setminus H) = 0$ (cf. [80], p. 119-120). Astfel, orice mulțime măsurabilă este reuniunea dintre o mulțime boreliană și ceva "neglijabil".

O funcție continuă și mărginită f , definită pe mulțimea jordaniană E , unde $\lambda(E) < +\infty$, este integrabilă Lebesgue (cf. [80], p. 125, [68], p. 215). Într-adevăr, pentru orice $a \in \mathbb{R}$ există mulțimea G_a deschisă în raport cu topologia metrică a lui E_3 astfel încât

$$\{x \in E : f(x) > a\} = f^{-1}((a, +\infty)) = G_a \cap E \in \mathcal{T}_E$$

(cf. [39], p. 179). Mulțimea E fiind măsurabilă Lebesgue, mulțimea $\{x \in E : f(x) > a\}$ va fi, la rândul ei, măsurabilă Lebesgue, ceea ce arată că funcția f este măsurabilă pe mulțimea E . Mărginirea funcției f va implica integrabilitatea sa.

Să considerăm o celulă cu muchii finite $[a_1, b_1; a_2, b_2; a_3, b_3]$ în E_3 . Evident, aceasta este o mulțime jordaniană și au loc egalitățile de mai jos (cf. [68], p. 213)

$$\begin{aligned}\lambda(\Delta) &= \lambda(\overline{\Delta}) = \int_{\overline{\Delta}} d\lambda(A) \\ &= \iiint_{\overline{\Delta}} dx dy dz,\end{aligned}$$

ultima integrală (triplă) desemnând *integrala Riemann tridimensională* în conformitate cu [68], p. 202, 216-217. Aici, $\overline{\Delta} = \{M \in E_3 : a_1 \leq x \leq b_1, a_2 \leq y \leq b_2, a_3 \leq z \leq b_3\}$.

Fiind dată o mulțime deschisă (în raport cu topologia metrică) și mărginită $G \subset E_3$, putem deduce cu ajutorul sumelor Lebesgue-Darboux (cf. [80], p. 151), respectiv sumelor Darboux asociate integralei Riemann (cf. [80], p. 154-155, [62], p. 315-317) că

$$\int_{\overline{G}} f(M) d\lambda(M) = \iiint_{\overline{\Delta}} f(x, y, z) dx dy dz,$$

unde $f : \overline{G} \rightarrow \mathbb{R}$ este o funcție continuă.

Definiția integralei Lebesgue poate fi extinsă în mod natural la funcțiile *finite aproape peste tot (a.p.t.)* (adică, luând valori finite în toate punctele domeniului de definiție cu excepția unei părți "neglijabile" a acestuia), ca și la mulțimile E măsurabile având măsura Lebesgue infinită (cf. [80], p. 180). Astfel, fiind dată funcția $f : E \rightarrow [0, +\infty]$ măsurabilă și finită a.p.t., mărimea

$$\sup_e \int_e f(M) d\lambda(M), \quad (2.39)$$

unde e reprezintă o parte măsurabilă a lui E astfel încât $\lambda(e) < +\infty$, va fi notată cu $\int_E f(M) d\lambda(M)$. Dacă $\int_E f(M) d\lambda(M) < +\infty$, atunci f este *integrabilă Lebesgue* pe mulțimea E .

Se cuvine observat faptul că această definiție a integrabilității Lebesgue se bazează *esențial* pe proprietatea măsurii Lebesgue de a fi σ -finită. Într-adevăr, spațiul (E_3, d) fiind *separabil* (cf. [39], p. 114, problema II.1.68, p.

145-146), orice parte măsurabilă a sa poate fi acoperită cu o familie cel mult numărabilă de bile deschise, având raza egală cu unitatea. Aceste bile, fiind mulțimi mărginite, au măsura Lebesgue finită. Justificarea observației s-a încheiat.

În general, dacă $f : E \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ este o funcție măsurabilă finită a.p.t., putem introduce mulțimile Lebesgue de mai jos

$$E_+ = \{M \in E : f(M) \geq 0\} \quad E_- = \{M \in E : f(M) < 0\}.$$

Să presupunem că cel puțin una dintre mărimile

$$\int_{E_+} |f(M)| d\lambda(M) \quad \int_{E_-} |f(M)| d\lambda(M)$$

este finită. Mărimea

$$\int_{E_+} |f(M)| d\lambda(M) - \int_{E_-} |f(M)| d\lambda(M)$$

se notează cu $\int_E f(M) d\lambda(M)$ și, dacă $\int_E f(M) d\lambda(M) \in \mathbb{R}$, funcția f este considerată ca *integrabilă Lebesgue* pe mulțimea E . Prin convenție, $\int_\emptyset f(M) d\lambda(M) = 0$ (cf. [80], p. 180, 182).

Fiind dată funcția $f : E \rightarrow \overline{\mathbb{R}}_+$ măsurabilă finită a.p.t., unde $E \subseteq E_3$ este o mulțime măsurabilă Lebesgue nu neapărat de măsură finită, are loc egalitatea

$$\int_E f(M) d\lambda(M) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{E_n} f(M) d\lambda(M), \quad (2.40)$$

unde $(E_n)_{n \geq 1}$ sunt părți măsurabile de măsură finită ale mulțimii E , $E_n \subseteq E_{n+1}$ și $E = \bigcup_{n \geq 1} E_n$ (cf. [80], p. 209, [68], p. 277). Această formulă va fi folosită în cele ce urmează pentru calculul integralei Lebesgue a funcțiilor radial simetrice.

Astfel, fie numerele reale $0 < r_1 \leq r_2 < +\infty$ alese arbitrar și mulțimea

$$\Omega_{r_1, r_2} = \{M \in E_3 : r_1 \leq d(M, O) \leq r_2\}.$$

Să considerăm funcția $f : E_3 \rightarrow \overline{\mathbb{R}}_+$ îndeplinind următoarele condiții:

1) $f(M)$ este constantă pe $\Omega_{r, r}$ pentru orice $r \geq 0$ (adică, f este *radial simetrică*);

2) $f(M)$ este continuă pe $\Omega_{r, R}$ pentru orice $0 < r \leq R$, unde R este arbitrar fixat.

3) $f(0)$ poate fi $\pm\infty$.

Introducem notația $f(M) \stackrel{not}{=} f(r)$, unde $d(O, M) = r$, pentru orice $M \in E_3$. Atunci,

$$\int_{\Omega_{r_1, r_2}} f(M) d\lambda(M) = 4\pi \int_{r_1}^{r_2} f(r) \cdot r^2 dr,$$

unde $0 < r_1 \leq r_2 \leq R$ (cf. [68], p. 280-281). De asemenea, utilizând (2.40), putem scrie că

$$\int_{B(O, R)} f(M) d\lambda(M) = \lim_{r \searrow 0} \int_{\Omega_{r, R}} f(M) d\lambda(M) = 4\pi \int_0^R f(r) \cdot r^2 dr. \quad (2.41)$$

Factorul r^2 are o importanță deosebită atunci când se calculează asemenea integrale prin trecerea la coordonate sferice (cf. [76], p. 392).

Procedeele descrise anterior, de integrare Lebesgue a funcțiilor măsurabile finite a.p.t. pe mulțimi măsurabile, poartă denumirea de *integrare* în SF .

În final, menționăm o proprietate a măsurii în SF profund semnificativă pentru mecanica teoretică. Astfel, *măsura Lebesgue λ în E_3 este invariantă față de aplicațiile izometrice*. Mai precis, fiind date mulțimea $E \subseteq E_3$ măsurabilă și aplicația izometrică $F : E_3 \rightarrow E_3$, mulțimea $F(E)$ va fi, la rândul său, măsurabilă Lebesgue și $\lambda(E) = \lambda(F(E))$ (cf. [80], p. 120, [52], p. 114).

2.1.13 Suprafețe în SF . Plan tangent la o suprafață. Curbe pe suprafețe. Triedrul lui Darboux. Formulele Darboux-Ribaucour. Geodezice

Introducerea mulțimilor jordaniene în subsecțiunea anterioară poate conduce, în mod nejustificat, la concluzia că integrarea în SF nu ar ține seama de frontiera corpurilor materiale. O atare concluzie este incorectă. Așa cum vom vedea ulterior, *formula Gauss-Ostrogradski (flux-divergență)* (cf. [34], p. 108) face legătura între integrarea în SF și integrarea pe suprafețe (frontiere). Integralele de suprafață joacă un rol fundamental în mecanica teoretică (vezi, ca să nu dăm decât un exemplu, expresiile *coeficienților* Coriolis și Boussinesq în mecanica fluidelor, cf. [3], p. 316, 318).

Pentru a trece în revistă, în cele ce urmează, o serie de chestiuni de geometrie diferențială a suprafețelor în SF , ne bazăm pe prezentările făcute în [48], p. 36 și următoarele, [44], p. 589-651 și [45], p. 178-192.

Fie $U \subseteq \mathbb{R}^2$ o mulțime deschisă și conexă. Să considerăm $\gamma : U \rightarrow E_3$ o aplicație introdusă prin formula

$$\overline{OM} = x(q^1, q^2)\bar{i} + y(q^1, q^2)\bar{j} + z(q^1, q^2)\bar{k} = \sigma(q^1, q^2), \quad (2.42)$$

unde $M = \gamma(q^1, q^2)$, $(q^1, q^2) \in U$. Aplicația γ definește o *suprafață parametrizată netedă* (C^∞) în SF dacă $\sigma \in C^\infty(U, T\mathbb{R}^3)$ și

$$\frac{\partial \sigma}{\partial q^1}(q^1, q^2) \times \frac{\partial \sigma}{\partial q^2}(q^1, q^2) \neq 0 \quad (q^1, q^2) \in U.$$

Două suprafețe parametrizate netede $\gamma : U \rightarrow E_3$, $\zeta : V \rightarrow E_3$ sunt *echivalente* dacă există difeomorfismul (C^∞) $\lambda : U \rightarrow V$ (numit *schimbare de variabile (parametri)*) astfel încât $\gamma = \zeta \circ \lambda$. Când $\det \left(\left(\frac{\partial \lambda_i}{\partial q^j} \right)_{i,j} \right) \Big|_{(q^1, q^2)} \stackrel{\text{not}}{=} \frac{D(\lambda_1, \lambda_2)}{D(q^1, q^2)}(q^1, q^2) > 0$, unde $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2)$ și $(q^1, q^2) \in U$, suprafețele parametrizate γ, ζ devin *pozitiv echivalente* (cf. [48], p. 36).

Mulțimea $S \subset E_3$ reprezintă o *suprafață (netedă)* în SF dacă pentru orice $M \in S$ există suprafața parametrizată netedă $\gamma : U \rightarrow E_3$ (numită *parametrizare locală*) având următoarele proprietăți:

- 1) $\gamma(U)$ este o vecinătate a lui M deschisă în raport cu topologia indusă pe S de topologia metrică a lui E_3 ;
- 2) $\gamma : (U, \mathcal{T}_U) \rightarrow (\gamma(U), \mathcal{T}_{\gamma(U)})$ este homeomorfism (cf. [48], p. 37, [44], p. 590, [45], p. 178).

O suprafață netedă S se numește *simplă* dacă există parametrizarea $\gamma : U \rightarrow E_3$ (numită *globală*) astfel încât $\gamma(U) = S$.

Despre suprafața netedă S spunem că este *orientabilă* în SF dacă există familia de parametrizări locale $(\gamma_a)_{a \in A}$, unde $\gamma_a : U_a \rightarrow E_3$ (numită *familie orientată*) astfel încât:

- 1) $S = \bigcup_{a \in A} \gamma_a(U_a)$;
- 2) dacă S_{ab} este o componentă conexă a mulțimii $\gamma_a(U_a) \cap \gamma_b(U_b)$, $a \neq b$, în raport cu topologia indusă de topologia metrică a lui E_3 , atunci suprafețele parametrizate

$$\gamma_a|_{U_{ab}} : U_{ab} \rightarrow E_3 \quad \gamma_b|_{U_{ba}} : U_{ba} \rightarrow E_3,$$

unde $U_{ab} = \gamma_a^{-1}(S_{ab})$, $U_{ba} = \gamma_b^{-1}(S_{ab})$, sunt pozitiv echivalente (cf. [57], p. 96).

O parametrizare locală $\gamma : U \rightarrow E_3$ a suprafeței orientabile S este *compatibilă* cu familia orientată $(\gamma_a)_{a \in A}$ dacă pentru orice $a \in A$ astfel încât $\gamma(U) \cap \gamma_a(U_a) \neq \emptyset$ și pentru orice componentă conexă S_a a mulțimii $\gamma(S) \cap \gamma_a(S_a)$, suprafețele parametrizate

$$\gamma|_{U^a} : U^a \rightarrow E_3 \quad \gamma_a|_{V^a} : V^a \rightarrow E_3,$$

unde $U^a = \gamma^{-1}(S_a)$, $V^a = \gamma_a^{-1}(S_a)$, sunt pozitiv echivalente (cf. [44], p. 587).

În legătură cu definițiile de mai sus, se cuvin făcute următoarele afirmații de natură topologică:

- 1) spațiile $(\mathbb{R}^2, \mathcal{T}_e)$, (S, \mathcal{T}_S) sunt local conexe (cf. [44], p. 590);
- 2) mulțimile $\gamma^{-1}(S_{ab})$ sunt deschise și conexe în spațiul $(\mathbb{R}^2, \mathcal{T}_e)$.

Justificarea afirmației 1). Se știe că o mulțime G deschisă în $(\mathbb{R}^2, \mathcal{T}_e)$ este conexă în acest spațiu dacă și numai dacă, pentru orice $u, v \in G$ există o linie poligonală situată în G având capetele u, v (cf. [39], problema II.2.76, p. 173). Astfel, pentru orice $u \in \mathbb{R}^2$ și $\varepsilon > 0$, $B(u, \varepsilon) = \bigcup_{v \in B(u, \varepsilon)} [u, v]$ este

o mulțime conexă. Într-adevăr, pentru $v_1, v_2 \in B(u, \varepsilon)$, putem scrie că $[v_1, u] \cup [u, v_2] \subset B(u, \varepsilon)$. Un spațiu topologic este local conex atunci când fiecare punct al său admite un sistem fundamental de vecinătăți format doar din mulțimi conexe. Ori, fiind dat $u \in \mathbb{R}^2$, familia $\mathcal{V}(u) = \{B(u, r) : r > 0\}$ alcătuiește sistemul de vecinătăți căutat. În concluzie, spațiul $(\mathbb{R}^2, \mathcal{T}_e)$ este local conex. Să construim acum un sistem fundamental de vecinătăți conexe pentru $M \in S$. Fie $r > 0$ și mulțimea $\gamma(U) \cap B(M, r) \stackrel{\text{not}}{=} W$, unde $\gamma : U \rightarrow E_3$ reprezintă o parametrizare locală a suprafeței S , astfel încât $M \in \gamma(U)$. Atunci, $W \in \mathcal{T}_{\gamma(U)}$, $\gamma^{-1}(W) \in \mathcal{T}_U$. Fie $u_0 \in \gamma^{-1}(W)$ cu proprietatea că $\gamma(u_0) = M$. Deoarece $U \in \mathcal{T}_e$, $\gamma^{-1}(W) \in \mathcal{T}_e$ și există $r_0 > 0$ pentru care $B(u_0, r_0) \subseteq \gamma^{-1}(W)$. De aici, la fel ca în demonstrația făcută în cazul curbelor netede, deducem că mulțimea $\gamma(B(u_0, r_0))$ este deschisă și conexă în (S, \mathcal{T}_S) . Ea face parte din sistemul fundamental de vecinătăți căutat.

Justificarea afirmației 2). Cum spațiul (S, \mathcal{T}_S) este local conex, $S_{ab} \in \mathcal{T}_S$. Concluzia rezultă ținând seama de faptul că γ_a este un homeomorfism.

Să considerăm suprafața netedă orientabilă conexă S și familiile orientate $(\gamma_a)_{a \in A}$, $(\zeta_b)_{b \in B}$, unde

$$\gamma_a : U_a \rightarrow E_3 \quad \zeta_b : V_b \rightarrow E_3.$$

Definim o *relație de echivalență* pe mulțimea \mathcal{A} a tuturor familiilor orientate ale suprafeței orientabile S spunând că familiile $(\gamma_a)_{a \in A}$, $(\zeta_b)_{b \in B}$ sunt

echivalente (la fel orientate) dacă există $a_0 \in A$, $b_0 \in B$ astfel încât $\gamma_{a_0}(U_{a_0}) \cap \zeta_{b_0}(V_{b_0}) \neq \emptyset$ și $S_{a_0 b_0}$ o componentă conexă a mulțimii $\gamma_{a_0}(U_{a_0}) \cap \zeta_{b_0}(V_{b_0})$ cu proprietatea că suprafețele parametrizate

$$\gamma_{a_0}|_{U_{a_0 b_0}} : U_{a_0 b_0} \rightarrow E_3 \quad \zeta_{b_0}|_{V_{a_0 b_0}} : V_{a_0 b_0} \rightarrow E_3,$$

unde $U_{a_0 b_0} = \gamma_{a_0}^{-1}(S_{a_0 b_0})$, $V_{a_0 b_0} = \zeta_{b_0}^{-1}(S_{a_0 b_0})$, sunt pozitiv echivalente (cf. [57], p. 98). În mod analog celor prezentate în cazul curbilor netede, mulțimea claselor de echivalență ale acestei relații de echivalență are doar două elemente. De aceea, o suprafață netedă orientabilă conexă S este considerată orientată (cu orientarea dată de familia orientată) dacă se precizează o familie orientată a sa. Există, așadar, doar două asemenea orientări (cf. [57], p. 99). Exemplul tipic de suprafață netedă orientată este cel al suprafeței simple. Orientarea sa este dată de familia orientată $\{\gamma\}$, unde $\gamma : U \rightarrow E_3$ reprezintă parametrizarea globală a suprafeței.

Conform [48], p. 38, [44], p. 590, graficul unei funcții netede de două variabile este o suprafață simplă în SF . Mai precis, fie $V \neq \emptyset$ o mulțime deschisă, mărginită și conexă în $(\mathbb{R}^2, \mathcal{T}_e)$. Să considerăm aplicația $\gamma : U \rightarrow E_3$ introdusă prin formula

$$\overline{OM} = q^1 \bar{i} + q^2 \bar{j} + \varphi(q^1, q^2) \bar{k} = \sigma(q^1, q^2), \quad (2.43)$$

unde $\overline{U} \subset V$, $M = \gamma(q^1, q^2)$, $(q^1, q^2) \in U$ și $\varphi \in C^\infty(V, \mathbb{R})$. Mulțimea \overline{U} fiind compactă în $(\mathbb{R}^2, \mathcal{T}_e)$, cum funcția φ este continuă pe \overline{U} , mulțimea $S \stackrel{not}{=} \gamma(U) \subset E_3$ va avea măsura (Lebesgue) nulă în SF (cf. [68], p. 229).

Atunci, urmând [68], p. 261,

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma}{\partial q^1}(q^1, q^2) \times \frac{\partial \sigma}{\partial q^2}(q^1, q^2) &= \left(-\frac{\partial \varphi}{\partial q^1}\right) \bar{i} + \left(-\frac{\partial \varphi}{\partial q^2}\right) \bar{j} + \bar{k} \\ &\neq 0, \quad (q^1, q^2) \in V. \end{aligned} \quad (2.44)$$

Se verifică imediat că aplicația $\gamma : U \rightarrow \gamma(U)$ este homeomorfism.

Să considerăm suprafața netedă orientată S . Fie $(\gamma_a)_{a \in A}$, unde $\gamma_a : U_a \rightarrow E_3$, familia de parametrizări locale care dă orientarea suprafeței și $M_0 \in S$. Există $a \in A$ astfel încât $M_0 \in \gamma_a(U_a)$. Aplicația $\gamma_a : U_a \rightarrow E_3$ este introdusă prin formula

$$\overline{OM} = x_a(q^1, q^2) \bar{i} + y_a(q^1, q^2) \bar{j} + z_a(q^1, q^2) \bar{k} = \sigma_a(q^1, q^2),$$

unde $M = \gamma_a(q^1, q^2)$, $(q^1, q^2) \in U_a$.

Planul $\{N \in E_3 : [\frac{\partial \sigma_a}{\partial q^1}(q_0^1, q_0^2) \times \frac{\partial \sigma_a}{\partial q^2}(q_0^1, q_0^2)] \cdot \overline{M_0 N} = 0\} \stackrel{not}{=} T_{M_0}$, unde $M_0 = \gamma_a(q_0^1, q_0^2)$, este *tangent* în punctul M_0 la suprafața S (cf. [48], p. 44-45, [44], p. 594). Asupra sa vom reveni ulterior. Fie $\vec{n}_{M_0} \in T_{M_0} \mathbb{R}^3$ versorul dat de relația

$$\vec{n}_{M_0} \in \frac{\frac{\partial \sigma_a}{\partial q^1}(q_0^1, q_0^2) \times \frac{\partial \sigma_a}{\partial q^2}(q_0^1, q_0^2)}{\left| \frac{\partial \sigma_a}{\partial q^1}(q_0^1, q_0^2) \times \frac{\partial \sigma_a}{\partial q^2}(q_0^1, q_0^2) \right|}. \quad (2.45)$$

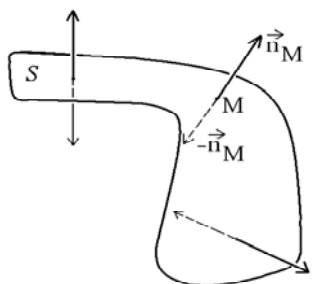


Figura 2.8

Versorul \vec{n}_{M_0} este independent de parametrizarea adoptată din familia orientată $(\gamma_a)_{a \in A}$ (cf. [48], p. 48). Într-adevăr, fie $b \in A$, $b \neq a$, astfel încât $M_0 \in \gamma_a(U_a) \cap \gamma_b(U_b)$. Notăm cu S_{ab} componenta conexă a mulțimii $\gamma_a(U_a) \cap \gamma_b(U_b)$ care îl conține pe M_0 . Fie λ schimbarea de variabile corespunzătoare, adică $\gamma_a = \gamma_b \circ \lambda$. La fel ca în cazul curbelor netede, avem $\sigma_a(q^1, q^2) = \sigma_b(\lambda_1(q^1, q^2), \lambda_2(q^1, q^2))$ și

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_a}{\partial q^1}(q^1, q^2) \times \frac{\partial \sigma_a}{\partial q^2}(q^1, q^2) &= \frac{D(\lambda_1, \lambda_2)}{D(q^1, q^2)}(q^1, q^2) \cdot \frac{\partial \sigma_b}{\partial \lambda_1}(\lambda_1(q^1, q^2), \lambda_2(q^1, q^2)) \\ &\quad \times \frac{\partial \sigma_b}{\partial \lambda_2}(\lambda_1(q^1, q^2), \lambda_2(q^1, q^2)), \end{aligned}$$

unde $(q^1, q^2) \in S_{ab}$ (cf. [48], p. 36). Cum $\frac{D(\lambda_1, \lambda_2)}{D(q^1, q^2)}(q^1, q^2) > 0$ în S_{ab} , justificarea afirmației de mai sus s-a încheiat.

Dreapta care trece prin M_0 și are versorul director \vec{n}_{M_0} poartă denumirea de *normală* la suprafața S în punctul M_0 (cf. [48], p. 45, [44], p. 594, [45], p. 181).

Reamintim faptul că, în cazul curbelor netede orientate Γ , orientarea putea fi "vizualizată" cu ajutorul săgeților versorilor tangenți la curbă, care erau îndreptate toate în aceeași parte, inducând un *sens de mișcare* pe curba Γ .

O asemenea situație are loc și aici, numai că *îndreptarea* săgeților versorilor \overrightarrow{n}_M , unde $M \in S$, trebuie precizată de la început.

Astfel, vezi Figura 2.8, putem alege ca *versor normal exterior* versorul \overrightarrow{n}_M dat de (2.45) pentru orice $M \in S$, respectiv versorul $-\overrightarrow{n}_M$ pentru orice $M \in S$ (cf. [48], p. 48, [44], p. 603). Săgețile acestora vor indica un *sens de parcurgere (traversare)* a suprafeței (de exemplu, dinspre interior către exterior în cazul sferei).

Fiind date suprafața netedă S și curba Γ spunem că Γ este *situată* pe S dacă $\Gamma \subset S$ (cf. [48], p. 40, [44], p. 591-592). Necesitatea de a verifica invarianța proprietăților (geometrice) ale curbelor și suprafețelor față de schimbările de variabile face dificil studiul acestora. De aceea, *extrapolând* noțiunile de bază ori de câte ori este nevoie, vom realiza anumite calcule (cu semnificație geometrică) folosind în locul suprafeței S și al curbei Γ suprafața parametrizată $\gamma : U \rightarrow E_3$ și drumul neted regulat $\zeta : I \rightarrow E_3$, unde $\zeta(I) \subset \gamma(U)$. Această preferință poate fi justificată în felul următor. Fie $M_0 \in \gamma(U)$ și $(q_0^1, q_0^2) \in U$ astfel încât $\gamma(q_0^1, q_0^2) = M_0$. Există mulțimea $V \subset U$ deschisă și conexă în $(\mathbb{R}^2, \mathcal{T}_e)$ astfel încât $M_0 \in \gamma(V)$ și mulțimea $\gamma(V)$ este o suprafață simplă în SF având parametrizarea globală $\gamma|_V : V \rightarrow E_3$ (cf. [48], p. 40, [44], p. 591). Fie acum $q_0 \in I$ astfel încât $\zeta(q_0) = M_0$. Atunci, $q_0^1 = q^1(q_0)$, $q_0^2 = q^2(q_0)$. Evident, $\gamma(V) \in \mathcal{T}_{\gamma(U)}$, căci funcția γ este un homeomorfism, de unde $\zeta(I) \cap \gamma(V) \in \mathcal{T}_{\zeta(I)}$. Aplicația ζ fiind continuă, $\zeta^{-1}(\zeta(I) \cap \gamma(V)) \in \mathcal{T}_I$. Ceea ce înseamnă, în particular, că va exista intervalul $J \subseteq I$, unde $J \in \mathcal{T}_I$, pentru care $q_0 \in J$ și $\zeta(J) \subset \gamma(V)$. Micșorând eventual acest interval, mulțimea $\zeta(J)$ va fi o curbă simplă în SF având parametrizarea globală $\zeta|_J : J \rightarrow E_3$ (cf. [48], p. 14, [44], p. 585) situată pe suprafața simplă $\gamma(V)$.

Să considerăm, așadar, suprafața parametrizată netedă $\gamma : U \rightarrow E_3$ introdusă prin formula (2.42). Fie, de asemeni, $I \subset \mathbb{R}$ un interval netrivial înzestrat cu topologia \mathcal{T}_I indusă de topologia uzuală a lui \mathbb{R} și funcțiile $q^i : I \rightarrow \mathbb{R}$, unde $q^i \in C^\infty(I, \mathbb{R})$, astfel încât $(q^1(q), q^2(q)) \in U$ pentru orice $q \in I$. Acest lucru este posibil deoarece $\mathcal{T}_e = \mathcal{T}_{\mathbb{R}} \times \mathcal{T}_{\mathbb{R}}$. Să presupunem, în plus, că $\frac{dq^1}{dq}, \frac{dq^2}{dq}$ nu se anulează simultan în I .

Aplicația $\zeta : I \rightarrow E_3$ introdusă prin formula

$$\overline{OM} = \sigma(q^1(q), q^2(q)) \stackrel{\text{not}}{=} \sigma(q), \quad (2.46)$$

unde $M = \zeta(q)$, $q \in I$, va desemna un drum neted regulat în SF . Într-

adevăr, prin derivare,

$$\sigma'(q) = \frac{dq^1}{dq}(q) \frac{\partial \sigma}{\partial q^1}(q^1, q^2) + \frac{dq^2}{dq}(q) \frac{\partial \sigma}{\partial q^2}(q^1, q^2), \quad q \in I. \quad (2.47)$$

Însă $\frac{\partial \sigma}{\partial q^1}(q^1, q^2) \times \frac{\partial \sigma}{\partial q^2}(q^1, q^2) \neq 0$ în U , ceea ce ne permite să deducem că $\sigma'(q) = 0$ dacă și numai dacă $\frac{dq^1}{dq}(q), \frac{dq^2}{dq}(q) = 0$. Afirmatia anterioară a fost justificată.

Pentru $q_0 \in I$ arbitrar fixat, există, conform celor precizate înainte, un subinterval J , $J \in \mathcal{T}_I$, al lui I care îl conține pe q_0 și pentru care $\zeta(J)$ constituie o curbă simplă în SF . Putem astfel extrapola noțiunea de tangentă în M_0 la curba simplă $\zeta(J)$ spunând că dreapta ce trece prin M_0 și are vectorul director $\sigma'(q_0)$ este *tangentă* în M_0 la drumul neted $\zeta : I \rightarrow E_3$. Din (2.47) rezultă că $\sigma'(q) \in Sp\{\frac{\partial \sigma}{\partial q^1}(q^1, q^2), \frac{\partial \sigma}{\partial q^2}(q^1, q^2)\}$. Rezultatul este valabil, în particular, pentru $q = q_0$.

Acum, dându-se numerele reale a, b care nu sunt nule simultan, există $\varepsilon > 0$ suficient de mic astfel încât $(q_0^1 + a \cdot q, q_0^2 + b \cdot q) \in U$ pentru orice $q \in (-\varepsilon, \varepsilon) \stackrel{\text{not}}{=} I$. Drumul regular $\zeta_{a,b} : I \rightarrow E_3$ introdus prin formula

$$\overline{OM} = \sigma(q_0^1 + a \cdot q, q_0^2 + b \cdot q) = \sigma(q), \quad (2.48)$$

unde $M = \zeta_{a,b}(q)$, $q \in I$, are direcția tangentei în punctul M_0

$$\sigma'(0) = a \cdot \frac{\partial \sigma}{\partial q^1}(q_0^1, q_0^2) + b \cdot \frac{\partial \sigma}{\partial q^2}(q_0^1, q_0^2)$$

(cf. [45], p. 181, [48], p. 44). În concluzie, mulțimea direcțiilor tangentelor în punctul M_0 la drumurile netede regulate situate pe suprafața parametrizată $\gamma : U \rightarrow E_3$, înzestrată cu operațiile cu vectori induse de operațiile din $T\mathbb{R}^3$, alcătuieste un spațiu linear 2-dimensional, notat $T_{M_0}S$, a cărui bază $\{\frac{\partial \sigma}{\partial q^1}(q_0^1, q_0^2), \frac{\partial \sigma}{\partial q^2}(q_0^1, q_0^2)\}$ poartă denumirea de bază *naturală* (cf. [44], p. 594). Astfel, devine clar că $T_{M_0}S$ reprezintă spațiul director al planului T_{M_0} , deci că *planul tangent în M_0 la suprafața S este, prin definiție, mulțimea tuturor tangentelor în punctul M_0 la curbe simple situate pe suprafața S* (cf. [48], p. 44-45, [45], p. 180-181, [44], p. 593-594).

Introducem matricea $G(M_0, \gamma)$ dată prin formula

$$G(M_0, \gamma) = \left(\begin{array}{cc} \left(\frac{\partial \sigma}{\partial q^1}\right)^2 & \frac{\partial \sigma}{\partial q^1} \cdot \frac{\partial \sigma}{\partial q^2} \\ \frac{\partial \sigma}{\partial q^1} \cdot \frac{\partial \sigma}{\partial q^2} & \left(\frac{\partial \sigma}{\partial q^2}\right)^2 \end{array} \right) \Big|_{(q_0^1, q_0^2)}$$

Folosim notațiile (cf. [34], p. 85, [48], p. 74)

$$\left(\frac{\partial\sigma}{\partial q^1}\right)^2 \stackrel{not}{=} g_{11} \quad \frac{\partial\sigma}{\partial q^1} \cdot \frac{\partial\sigma}{\partial q^2} \stackrel{not}{=} g_{12} \quad \left(\frac{\partial\sigma}{\partial q^2}\right)^2 \stackrel{not}{=} g_{22}.$$

Dacă $g_{11}(M) = 1$, $g_{12}(M) = g_{21}(M) = 0$, unde $M \in U$, parametrizarea locală $\gamma : U \rightarrow E_3$ se numește *semigeodezică* (cf. [44], p. 642, [48], p. 85).

Considerând $\eta : V \rightarrow E_3$ o suprafață parametrizată echivalentă cu $\gamma : U \rightarrow E_3$ și $\lambda : U \rightarrow V$ schimbarea de variabile corespunzătoare, are loc relația

$$G(M_0, \gamma) = \left(\left(\frac{\partial\lambda_j}{\partial q^i} \right)_{i,j} \right) \Big|_{(q_0^1, q_0^2)} \cdot G(M_0, \eta) \cdot \left(\left(\frac{\partial\lambda_j}{\partial q^i} \right)_{i,j} \right) \Big|_{(q_0^1, q_0^2)}^t.$$

Justificarea acestei afirmații rezultă din faptul că $\gamma = \eta \circ \lambda$ și putem aplica formalismul matriceal

$$G(M_0, \gamma) = \begin{pmatrix} \frac{\partial\sigma}{\partial q^1} \\ \frac{\partial\sigma}{\partial q^2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{\partial\sigma}{\partial q^1} & \frac{\partial\sigma}{\partial q^2} \end{pmatrix} \Big|_{(q_0^1, q_0^2)}.$$

Fiind dați vectorii $\bar{p}, \bar{q} \in T_{M_0}S$ de coordonate p_1, p_2 , respectiv q_1, q_2 în baza naturală, avem formula

$$\begin{aligned} \bar{p} \cdot \bar{q} &= \begin{pmatrix} p_1 & p_2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \end{pmatrix} \\ &= g_{11}p_1q_1 + g_{12}(p_1q_2 + p_2q_1) + g_{22}p_2q_2 \end{aligned} \quad (2.49)$$

(cf. [48], p. 56, [68], p. 363).

De asemeni, pe baza identității lui Lagrange, deducem că

$$\det G(M_0, \gamma) = \left| \frac{\partial\sigma}{\partial q^1}(q_0^1, q_0^2) \times \frac{\partial\sigma}{\partial q^2}(q_0^1, q_0^2) \right|^2.$$

Fiind date suprafața simplă S introdusă de (2.43) și funcția continuă $f : (\bar{S}, \mathcal{T}_{\bar{S}}) \rightarrow \mathbb{R}$, se numește *integrală de suprafață* mărimea

$$\iint_{\bar{U}} f(q^1, q^2, \varphi(q^1, q^2)) \left| \frac{\partial\sigma}{\partial q^1} \times \frac{\partial\sigma}{\partial q^2} \right| dq^1 dq^2 \stackrel{not}{=} \int_S f(M) d\sigma(M) \quad (2.50)$$

(cf. [68], p. 256, 259-260, [48], p. 94).

Reperul¹⁰ $\mathcal{R} = (M, \vec{\mathcal{B}})$, unde $\mathcal{B} = \left\{ \frac{\partial \sigma}{\partial q^1}(q_0^1, q_0^2), \frac{\partial \sigma}{\partial q^2}(q_0^1, q_0^2), \bar{n} \right\}$, poartă denumirea de *reper natural* al suprafeței S în punctul M_0 (cf. [48], p. 73). Aici, \bar{n} este introdus cu ajutorul reprezentantului său, $\vec{n}_{M_0} \in \bar{n}$.

În spiritul formulelor Frenet-Serret, folosind convenția de sumare a indicelui "mut" $\sum_{k=1}^2 a_k b^k \stackrel{not}{=} a_k b^k$, se stabilesc coordonatele derivatelor vectorilor din \mathcal{B} în raport cu \mathcal{B} .

1) Formula lui Gauss:

$$\frac{\partial^2 \sigma}{\partial q^i \partial q^j} = \Gamma_{ij}^k \frac{\partial \sigma}{\partial q^k} + h_{ij} \bar{n}; \quad (2.51)$$

2) Formula lui Weingarten:

$$\frac{\partial \bar{n}}{\partial q^i} = -h_{ij} g^{jk} \frac{\partial \sigma}{\partial q^k},$$

unde $g_{ij} = g_{ji}$, g^{ij} sunt elementele matricei $G(M_0, \gamma)^{-1}$, Γ_{ij}^k sunt *simbolurile lui Christoffel* (cf. [48], p. 74, [66], p. 266-267), adică

$$\Gamma_{ij}^k = \frac{1}{2} g^{kl} \left(\frac{\partial g_{jl}}{\partial q^i} + \frac{\partial g_{il}}{\partial q^j} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial q^l} \right),$$

și $h_{ij} = \bar{n} \cdot \frac{\partial^2 \sigma}{\partial q^i \partial q^j}$ (cf. [48], p. 73-75, [44], p. 628-629, [57], p. 170-171, [68], p. 385-386).

Fiind date suprafața simplă S cu parametrizarea globală $\gamma : U \rightarrow E_3$ și curba simplă Γ cu parametrizarea globală $\zeta : I \rightarrow E_3$ situată pe suprafața S , reperul $\mathcal{R} = (M_0, \vec{\mathcal{C}})$ dat de $M_0 \in \Gamma$ și $\mathcal{C} = \{\bar{\tau}, \bar{m}, \bar{n}\}$, unde¹¹ $\bar{m} = \bar{n} \times \bar{\tau}$, poartă denumirea de *triedrul lui Darboux* al curbei Γ în punctul M_0 (cf. [34], p. 89, [57], p. 176). *Versorii* \bar{m} , \bar{n} , fiind perpendiculari pe $\bar{\tau}$, *se găsesc în spațiul liniar director al planului normal al triedrului lui Frenet în punctul* M_0 . Introducem unghiul $\theta \stackrel{def}{=} \angle(\bar{n}, \bar{\nu})$. Evident, $\theta \in C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, $\theta = \theta(t)$ și are loc formula

$$\bar{n} = \cos \theta \cdot \bar{\nu} + \sin \theta \cdot \bar{\beta}. \quad (2.52)$$

¹⁰Baza \mathcal{B} nu este, în general, ortonormată. Totuși, în cazul unei parametrizări locale semigeodezice, reperul \mathcal{R} va respecta cerințele din definiția reperului cartezian dacă înlocuim, în baza \mathcal{B} , direcția $\frac{\partial \sigma}{\partial q^2}(q_0^1, q_0^2)$ cu versorul ei.

¹¹Tripletul \mathcal{C} este de *sens direct* căci $(\bar{\tau}, \bar{m}, \bar{n}) = |\bar{n} \times \bar{\tau}|^2 > 0$.

Apoi,

$$\begin{aligned}
 \bar{m} &= \bar{n} \times \bar{\tau} \\
 &= \cos \theta \cdot (\bar{\nu} \times \bar{\tau}) + \sin \theta \cdot (\bar{\beta} \times \bar{\tau}) \\
 &= \sin \theta \cdot \bar{\nu} - \cos \theta \cdot \bar{\beta}.
 \end{aligned} \tag{2.53}$$

Vom evalua mărimile $\frac{d\bar{\tau}}{ds}$, $\frac{d\bar{m}}{ds}$, $\frac{d\bar{n}}{ds}$ prin coordonatele lor în baza \mathcal{C} , ținând seama de formulele Frenet-Serret (2.9), (2.11), (2.12) (cf. [34], p. 90, [48], p. 87-89). Astfel,

$$\begin{aligned}
 \frac{d\bar{m}}{ds} &= \cos \theta \cdot \frac{d\theta}{ds} \cdot \bar{\nu} + \sin \theta \cdot \frac{d\bar{\nu}}{ds} + \sin \theta \cdot \frac{d\theta}{ds} \cdot \bar{\beta} - \cos \theta \cdot \frac{d\bar{\beta}}{ds} \\
 &= (\sin \theta \cdot \bar{\beta} + \cos \theta \cdot \bar{\nu}) \cdot \frac{d\theta}{ds} - \cos \theta \cdot (-T \cdot \bar{\nu}) + \sin \theta \cdot \\
 &\quad \cdot \left(-\frac{1}{R} \cdot \bar{\tau} + T \cdot \bar{\beta} \right) \\
 &= -\frac{\sin \theta}{R} \cdot \bar{\tau} + \left(\frac{d\theta}{ds} \cdot \sin \theta + T \cdot \sin \theta \right) \cdot \bar{\beta} + \left(\frac{d\theta}{ds} \cdot \cos \theta \right. \\
 &\quad \left. + T \cdot \cos \theta \right) \cdot \bar{\nu}.
 \end{aligned}$$

În continuare,

$$\begin{aligned}
 \frac{d\bar{n}}{ds} &= -\sin \theta \cdot \frac{d\theta}{ds} \cdot \bar{\nu} + \cos \theta \cdot \frac{d\bar{\nu}}{ds} + \cos \theta \cdot \frac{d\theta}{ds} \cdot \bar{\beta} + \sin \theta \cdot \frac{d\bar{\beta}}{ds} \\
 &= (-\sin \theta \cdot \bar{\nu} + \cos \theta \cdot \bar{\beta}) \cdot \frac{d\theta}{ds} + \sin \theta \cdot (-T \cdot \bar{\nu}) + \cos \theta \cdot \\
 &\quad \cdot \left(-\frac{1}{R} \cdot \bar{\tau} + T \cdot \bar{\beta} \right) \\
 &= -\frac{\cos \theta}{R} \cdot \bar{\tau} + \left(\frac{d\theta}{ds} \cdot \cos \theta + T \cdot \cos \theta \right) \cdot \bar{\beta} + \left(-\frac{d\theta}{ds} \cdot \sin \theta \right. \\
 &\quad \left. - T \cdot \sin \theta \right) \cdot \bar{\nu}.
 \end{aligned}$$

Pe baza relațiilor (2.52), (2.53) putem scrie că

$$\begin{cases} \bar{\nu} = \cos \theta \cdot \bar{n} + \sin \theta \cdot \bar{m} \\ \bar{\beta} = \sin \theta \cdot \bar{n} - \cos \theta \cdot \bar{m}. \end{cases} \tag{2.54}$$

Înlocuind aceste expresii în calculele anterioare, obținem că

$$\begin{cases} \frac{d\bar{\tau}}{ds} = \frac{\sin \theta}{R} \cdot \bar{m} + \frac{\cos \theta}{R} \cdot \bar{n} \\ \frac{d\bar{m}}{ds} = -\frac{\sin \theta}{R} \cdot \bar{\tau} + \left(\frac{d\theta}{ds} + T \right) \cdot \bar{n} \\ \frac{d\bar{n}}{ds} = -\frac{\cos \theta}{R} \cdot \bar{\tau} - \left(\frac{d\theta}{ds} + T \right) \cdot \bar{m}. \end{cases} \tag{2.55}$$

Relațiile (2.55) se numesc *formulele Darboux-Ribaucour* (cf. [57], p. 176).

Revenind la suprafața parametrizată $\gamma : U \rightarrow E_3$ introdusă prin (2.42), spunem că drumul neted $\zeta : I \rightarrow E_3$ dat de (2.46) este *geodezic* dacă, prin definiție, avem

$$\sigma''(q) \perp T_M S \quad M = \zeta(q)$$

pentru orice $q \in I$. În particular, cum $\bar{\tau}(M) = |\sigma'(q)|^{-1} \cdot \sigma'(q)$, $V = \mathbb{R}\sigma'(q)$, $\pi_V(\sigma''(q)) = 0$, obținem că $\bar{b}_2 = \sigma''(q)$, deci vectorii $\sigma''(q)$, $\bar{\nu}(M)$, $\bar{n}(M)$ vor fi coliniari.

Relația $\sigma''(q) \perp \sigma'(q)$ ne conduce la $\frac{d}{dq}(\frac{1}{2}|\sigma'(q)|^2) = \frac{d}{dq}(\frac{1}{2}\sigma'(q)^2) = \sigma'(q) \cdot \sigma''(q) = 0$, astfel că *mărimea $|\sigma'(q)|$ este constantă în I .*

Drumul neted $\eta : J \rightarrow E_3$, situat pe suprafața parametrizată $\gamma : U \rightarrow E_3$, echivalent cu $\zeta : I \rightarrow E_3$ este geodezic dacă și numai dacă schimbarea de variabilă $\lambda : I \rightarrow J$ corespunzătoare este *afină*¹², (cf. [48], p. 83, [44], p. 637). În particular, parametrizarea naturală $\eta : J \rightarrow E_3$ pozitiv echivalentă a drumului $\zeta : I \rightarrow E_3$ este un drum geodezic (cf. [48], p. 83, [44], p. 637-638).

Vom spune despre curba Γ situată pe suprafața netedă S că reprezintă o *geodezică* (geometrică) a suprafeței dacă pentru fiecare punct $M \in \Gamma$ există o parametrizare locală $\zeta : I \rightarrow E_3$ care este drum geodezic astfel încât $M \in \zeta(I)$ (cf. [44], p. 635).

Derivând relația (2.47), avem

$$\sigma''(q) = \frac{dq^i}{dq}(q) \cdot \frac{dq^j}{dq}(q) \cdot \frac{\partial^2 \sigma}{\partial q^i \partial q^j}(q^1, q^2) + \frac{d^2 q^i}{dq^2}(q) \cdot \frac{\partial \sigma}{\partial q^i}(q^1, q^2),$$

de unde, conform formulei lui Gauss (2.51),

$$\begin{aligned} \sigma''(q) &= \left(\frac{d^2 q^k}{dq^2} + \Gamma_{ij}^k(q^1, q^2) \frac{dq^i}{dq} \cdot \frac{dq^j}{dq} \right) \cdot \frac{\partial \sigma}{\partial q^k}(q^1, q^2) \\ &\quad + h_{ij}(q^1, q^2) \frac{dq^i}{dq} \cdot \frac{dq^j}{dq} \cdot \bar{n} \end{aligned} \quad (2.56)$$

(cf. [48], p. 84). Deoarece $\sigma''(q)$ este coliniar cu $\bar{n}(M)$,

$$\sigma''(q) \cdot \frac{\partial \sigma}{\partial q^k}(q^1(q), q^2(q)) = 0, \quad k = 1, 2,$$

¹²Adică, $\lambda(q) = c_1 q + c_2$, unde $q \in I$ și $c_1 \neq 0$.

astfel că drumul neted $\zeta : I \rightarrow E_3$ introdus prin formula (2.46) este geodezic dacă și numai dacă

$$\frac{d^2 q^k}{dq^2} + \sum_{i,j=1}^2 \Gamma_{ij}^k(q^1, q^2) \frac{dq^i}{dq} \cdot \frac{dq^j}{dq} = 0, \quad k = 1, 2, \quad (2.57)$$

unde $q \in I$ (cf. [48], p. 84, [44], p. 638). Relațiile (2.57) poartă denumirea de *ecuațiile diferențiale ale geodeziceii*.

Introducând mărimile $Q^1 = q^1$, $Q^2 = q^2$, $Q^3 = \frac{dq^1}{dq}$, $Q^4 = \frac{dq^2}{dq}$, ecuațiile (2.57) pot fi rescrise sub forma

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dQ^1}{dq} = Q^3 \\ \frac{dQ^2}{dq} = Q^4 \\ \frac{dQ^3}{dq} = f_1(Q^1, Q^2, Q^3, Q^4) \\ \frac{dQ^4}{dq} = f_2(Q^1, Q^2, Q^3, Q^4), \end{array} \right. \quad q \in I, \quad (2.58)$$

unde $f_k(Q^1, Q^2, Q^3, Q^4) = - \sum_{i,j=1}^2 \Gamma_{ij}^k(Q^1, Q^2) Q^{i+2} Q^{j+2}$.

Funcțiile f_k , $k = 1, 2$, fiind de clasă C^∞ , problema Cauchy atașată sistemului diferențial (2.58) va admite soluție unică, de clasă C^∞ . Existența și unicitatea soluției clasice (C^1) provin din teorema Picard-Lindelöf (cf. [31], p. 8, [6], p. 35-38, [4], p. 124-125). Apoi, cum $f_k \in C^\infty$, deci $\frac{dQ^3}{dq}$, $\frac{dQ^4}{dq} \in C^1$, deducem că $Q^3, Q^4 \in C^2$, de unde $Q^1, Q^2 \in C^3$, etc.

Pentru $M = \zeta(q)$, să considerăm $\bar{p}(q) \in T_M S$ dat de formula

$$\bar{p}(q) = p_1(q) \cdot \frac{\partial \sigma}{\partial q^1}(q^1, q^2) + p_2(q) \cdot \frac{\partial \sigma}{\partial q^2}(q^1, q^2), \quad q \in I, \quad (2.59)$$

unde $p_1, p_2 \in C^\infty(I, \mathbb{R})$. Atunci, conform teoriei generale a *dependenței soluțiilor de datele Cauchy*, există $\varepsilon > 0$ astfel încât problema Cauchy

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dQ^1}{du} = Q^3 \quad \frac{dQ^2}{du} = Q^4 \\ \frac{dQ^3}{du} = f_1(Q^1, Q^2, Q^3, Q^4) \\ \frac{dQ^4}{du} = f_2(Q^1, Q^2, Q^3, Q^4) \\ Q^1(0) = q^1(q) \quad Q^2(0) = q^2(q) \\ Q^3(0) = p_1(q) \quad Q^4(0) = p_2(q) \end{array} \right.$$

să admită soluția unică $Q^i = Q^i(u, q)$, unde $u \in (-\varepsilon, \varepsilon)$, $q \in I$, și $Q^i \in C^\infty((-\varepsilon, \varepsilon) \times I, \mathbb{R})$, $i = \overline{1, 4}$ (cf. [31], p. 100-101, [6], p. 57-60, 102-105, [1], p. 259-264, [72], p. 341-352).

Pe baza celor de mai sus pot fi deduse două rezultate fundamentale privind geodezicele.

Mai întâi, pentru orice $\bar{p} \in T_{M_0}S$, există un drum geodezic $\zeta : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow E_3$ astfel încât $\zeta(0) = M_0$ și $\sigma'(0) = \bar{p}$ (cf. [48], p. 85, [44], p. 639). Drumul geodezic $\zeta : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow E_3$ este introdus, conform (2.46), prin formula ($\bar{p}(q) = \bar{p}$)

$$\overline{OM} = \sigma(Q^1(u, q_0), Q^2(u, q_0)) = \sigma(u),$$

unde $M = \zeta(u)$, $u \in (-\varepsilon, \varepsilon)$.

Apoi, pentru orice punct M situat pe suprafața S există parametrizarea locală semigeodezică $\eta : V \rightarrow E_3$ a suprafeței S astfel încât $M \in \eta(V)$ (cf. [44], p. 643). Să justificăm această afirmație. Considerăm $\zeta : I \rightarrow E_3$ dat de formula (2.46) un drum situat pe suprafața S . Conform (2.48), un asemenea drum există întotdeauna. Introducem vectorul $\bar{p}(q)$ impunând ca $\bar{p}(q) \in T_{\zeta(q)}S$, $|\bar{p}(q)| = 1$, $\bar{p}(q) \cdot \sigma'(q) = 0$ și bazele $\{\bar{p}(q), \sigma'(q)\}$, $\{\frac{\partial \sigma}{\partial q^1}, \frac{\partial \sigma}{\partial q^2}\}$ să fie la fel orientate, $q \in I$. În acest fel, $\bar{p}(q)$ este unic determinat, $p_1, p_2 \in C^\infty(I, \mathbb{R})$. Fie $q_0 \in I$ fixat arbitrar. Vectorii $\bar{p}(q_0)$, $\sigma'(q_0)$ fiind liniar independenți, nu există număr real $\alpha \neq 0$ astfel încât $p_1(q_0) = \alpha \cdot \frac{dq^1}{dq}(q_0)$ și $p_2(q_0) = \alpha \cdot \frac{dq^2}{dq}(q_0)$. Ceea ce înseamnă că

$$\begin{vmatrix} p_1(q_0) & p_2(q_0) \\ \frac{dq^1}{dq}(q_0) & \frac{dq^2}{dq}(q_0) \end{vmatrix} = \frac{D(Q^1, Q^2)}{D(u, q)} \Big|_{(0, q_0)} \neq 0.$$

Conform teoremei de inversiune locală, există $0 < h \leq \varepsilon$ și intervalul deschis $J \subseteq I$, $q_0 \in J$, astfel încât aplicația $\Phi : (-h, h) \times J \stackrel{not}{=} V \rightarrow \Phi(V) \subset U$ cu formula $\Phi(u, q) = (Q^1(u, q), Q^2(u, q))$ să fie un difeomorfism (C^∞). Notăm cu σ_1 funcția $\sigma \circ \Phi$, $\sigma_1 : V \rightarrow T\mathbb{R}^3$. Aplicația η dată de $\eta(u, q) = M$, unde $\overline{OM} = \sigma_1(u, q)$, este parametrizarea locală a suprafeței S căutată. Într-adevăr, conform rezultatului anterior, pentru $q \in J$ fixat, drumul neted $\zeta_1 : (-h, h) \rightarrow E_3$ introdus prin formula

$$\overline{OM} = \sigma_1(u, q) \stackrel{not}{=} \sigma_2(u),$$

unde $M = \zeta_1(u)$, $u \in (-h, h)$, este geodezic. Atunci, $|\sigma_2'(u)| = \left| \frac{\partial \sigma_1}{\partial u}(u, q) \right| = \text{constant}$. De unde,

$$\begin{aligned} \left| \frac{\partial \sigma_1}{\partial u}(u, q) \right| &= \left| \frac{\partial \sigma_1}{\partial u}(0, q) \right| = |\bar{p}(q)| \\ &= 1. \end{aligned}$$

Să calculăm, în cele ce urmează, expresia $\frac{\partial}{\partial u}(\frac{\partial\sigma_1}{\partial u}(u, q) \cdot \frac{\partial\sigma_1}{\partial q}(u, q))$. Mai întâi,

$$\begin{aligned} \frac{\partial\sigma_1}{\partial u}(u, q) \cdot \frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{\partial\sigma_1}{\partial q}(u, q) \right) &= \frac{\partial\sigma_1}{\partial u}(u, q) \cdot \frac{\partial}{\partial q} \left(\frac{\partial\sigma_1}{\partial u}(u, q) \right) \\ &= \frac{\partial}{\partial q} \left(\frac{1}{2} \left(\frac{\partial\sigma_1}{\partial u}(u, q) \right)^2 \right) \\ &= \frac{\partial}{\partial q} \left[\frac{1}{2} \left| \frac{\partial\sigma_1}{\partial u}(u, q) \right|^2 \right] \\ &= 0. \end{aligned}$$

Însă, conform (2.56), (2.57),

$$\frac{\partial^2\sigma_1}{\partial u^2}(u, q) \|\bar{n}(u, q),$$

unde $\bar{n}(M) \stackrel{not}{=} \bar{n}(u, q)$ și $M = \eta(u, q)$. De asemeni,

$$\begin{aligned} \frac{\partial\sigma_1}{\partial q}(u, q) &= \frac{\partial Q^1}{\partial q}(u, q) \cdot \frac{\partial\sigma}{\partial q^1}(Q^1, Q^2) + \frac{\partial Q^2}{\partial q}(u, q) \cdot \frac{\partial\sigma}{\partial q^2}(Q^1, Q^2) \\ &\in T_M\eta(V). \end{aligned}$$

În concluzie, $\frac{\partial^2\sigma_1}{\partial u^2}(u, q) \cdot \frac{\partial\sigma_1}{\partial q}(u, q) = \frac{\partial}{\partial u}(\frac{\partial\sigma_1}{\partial u}(u, q) \cdot \frac{\partial\sigma_1}{\partial q}(u, q)) = 0$, adică funcția $u \mapsto \frac{\partial\sigma_1}{\partial u}(u, q) \cdot \frac{\partial\sigma_1}{\partial q}(u, q)$, $u \in (-h, h)$, este constantă ($q = \text{fixat}$). Atunci,

$$\begin{aligned} \frac{\partial\sigma_1}{\partial u}(u, q) \cdot \frac{\partial\sigma_1}{\partial q}(u, q) &= \frac{\partial\sigma_1}{\partial u}(0, q) \cdot \frac{\partial\sigma_1}{\partial q}(0, q) \\ &= \left[Q^3(0, q) \cdot \frac{\partial\sigma}{\partial q^1}(Q^1, Q^2) + Q^4(0, q) \cdot \frac{\partial\sigma}{\partial q^2}(Q^1, Q^2) \right] \\ &\quad \cdot \left[\frac{dq^1}{dq}(q) \cdot \frac{\partial\sigma}{\partial q^1}(Q^1, Q^2) + \frac{dq^2}{dq}(q) \cdot \frac{\partial\sigma}{\partial q^2}(Q^1, Q^2) \right] \\ &= \bar{p}(q) \cdot \sigma'(q) = 0. \end{aligned}$$

Am obținut că $g_{11}(u, q) = 1$, $g_{12}(u, q) = g_{21}(u, q) = 0$, unde $(u, q) \in V$. Justificarea afirmației s-a încheiat ¹³.

¹³Prezența parametrizării locale semigeodezice constituie un corespondent matematic al faptului că *universul curb* (einsteinian) și *experiențele lui Galilei* (lansarea unei bile de fildeș pe o placă de marmură așezată orizontal), care au condus la formularea *principiului inerției*, coexistă (vezi [79], p. 158).

Fie $\gamma : U \rightarrow E_3$ o parametrizare locală semigeodezică a suprafeței S , $(q_0^1, q_0^2) \in U$ și $\zeta : I \rightarrow E_3$ un drum neted introdus prin formula

$$\overline{OM} = \sigma(q_0^1 + q, q_0^2) = \sigma(q),$$

unde $M = \zeta(q)$, $q \in I$. Atunci, drumul $\zeta : I \rightarrow E_3$ reprezintă un drum geodezic parametrizat natural pe suprafața S (cf. [48], p. 85, [44], p. 642).

Să considerăm $\alpha, \beta \in I$, cu $\alpha < \beta$ și $M_1 = \zeta(\alpha)$, $M_2 = \zeta(\beta)$. Atunci,

$$\int_{\alpha}^{\beta} |\sigma'(q)| dq = \beta - \alpha.$$

Fiind dat drumul neted $\eta : I \rightarrow E_3$ situat pe suprafața S astfel încât $\eta(I) \subset \gamma(U)$ și $\eta(\alpha) = M_1$, $\eta(\beta) = M_2$, avem, conform (2.46), relațiile $q^1(\alpha) = q_0^1 + \alpha$, $q^2(\alpha) = q_0^2$ și $q^1(\beta) = q_0^1 + \beta$, $q^2(\beta) = q_0^2$. Atunci, pe baza formulei (2.49), putem scrie că

$$\begin{aligned} \int_{\alpha}^{\beta} |\sigma'(q)| dq &= \int_{\alpha}^{\beta} \left[g_{11}(q) \left(\frac{dq^1}{dq}(q) \right)^2 + 2g_{12}(q) \frac{dq^1}{dq}(q) \cdot \frac{dq^2}{dq}(q) \right. \\ &\quad \left. + g_{22}(q) \left(\frac{dq^2}{dq}(q) \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}} dq \\ &\geq \int_{\alpha}^{\beta} \left| \frac{dq^1}{dq}(q) \right| dq \geq q^1(\beta) - q^1(\alpha) = \beta - \alpha \end{aligned}$$

(cf. [48], p. 86, [44], p. 642).

Așadar, drumul geodezic este cel mai *scurt* drum situat pe suprafața S care leagă între ele punctele M_1, M_2 . Trebuie menționat că nu orice două puncte ale unei suprafețe pot fi legate între ele printr-o geodezică a suprafeței. Un exemplu elocvent se găsește în [57], p. 234-235.

2.1.14 Formula Gauss-Ostrogradski. Prima formulă a lui Green. Integrale de tip potențial. Ecuația lui Poisson

Introducem, în cele ce urmează, mulțimea jordaniană $G \subset E_3$ pe care o vom numi *domeniu* în SF . Astfel, fie $U_0, V_0, W_0 \neq \emptyset$ mulțimi deschise,

mărginite și conexe în $(\mathbb{R}^2, \mathcal{T}_e)$. Spunem că $M \in G$ dacă, *prin definiție*, au loc inegalitățile

$$\begin{aligned}\varphi_1(y, z) &\leq x \leq \varphi_2(y, z), & (y, z) \in \overline{U} \\ \psi_1(x, z) &\leq y \leq \psi_2(x, z), & (x, z) \in \overline{V} \\ \eta_1(x, y) &\leq z \leq \eta_2(x, y), & (x, y) \in \overline{W},\end{aligned}\tag{2.60}$$

unde $\overline{U} \subset U_0$, $\overline{V} \subset V_0$, $\overline{W} \subset W_0$, $\varphi_i \in C^\infty(U_0, \mathbb{R})$, $\psi_i \in C^\infty(V_0, \mathbb{R})$, $\eta_i \in C^\infty(W_0, \mathbb{R})$ și $i = 1, 2$. Aici, x, y, z reprezintă coordonatele punctului M în reperul canonic \mathcal{R} . Cu alte cuvinte, o dreaptă având una din direcțiile $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ sau va intersecta domeniul G după un segment (eventual, degenerat într-un *punct*) sau nu îl va intersecta deloc (cf. [68], p. 309).

Dacă punctul M are coordonatele x_0, y_0, z_0 în reperul canonic \mathcal{R} , $(y_0, z_0) \in U$, $(x_0, z_0) \in V$, $(x_0, y_0) \in W$ și inegalitățile (2.60) sunt *stricte*, atunci $M \in i(G)$. Într-adevăr, funcția φ_1 fiind continuă pe U_0 , inegalitatea $\varphi_1(y_0, z_0) < x_0$ ne conduce la existența numărului $\varepsilon > 0$ pentru care

$$\varphi_1(y, z) < x,$$

unde $x \in [x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon]$, $y \in [y_0 - \varepsilon, y_0 + \varepsilon]$, $z \in [z_0 - \varepsilon, z_0 + \varepsilon]$. Am folosit, implicit, faptul că $\mathcal{T}_e(E_3) = \mathcal{T}_e((\mathbb{R}, d)) \times \mathcal{T}_e((\mathbb{R}^2, d)) = (\mathcal{T}_e((\mathbb{R}, d)))^3$, unde d reprezintă metrica (distanța) euclidiană corespunzătoare (cf. [39], problema II.1.68, p. 145-146). În final, micșorându-l eventual pe ε , ajungem la

$$[x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon] \times [y_0 - \varepsilon, y_0 + \varepsilon] \times [z_0 - \varepsilon, z_0 + \varepsilon] \subseteq \overline{G}.$$

Mulțimile de forma $\{M \in E_3 : \varphi_1(y, z) \leq x \leq \varphi_2(y, z), (y, z) \in Fr(U)\}$ au măsura Lebesgue nulă. Pentru a explica aceasta, facem observația că măsura și integrala Lebesgue pot fi introduse pe spațiile \mathbb{R}, \mathbb{R}^2 într-un mod absolut analog introducerii lor pe \mathbb{R}^3 . În particular, $Fr(U)$ este neglijabilă în $(\mathbb{R}^2, \mathcal{A}_{\mathbb{R}^2}, \lambda_{\mathbb{R}^2})$. Ținând seama de mărginirea funcțiilor φ_1, φ_2 pe $Fr(U)$, deducem că mulțimea de mai sus este o submulțime a produsului cartezian dintre $Fr(U)$ și un interval compact din \mathbb{R} , notat $[a, b]$. Privind măsura Lebesgue în SF ca o măsură *produs* a măsurilor Lebesgue în \mathbb{R} și \mathbb{R}^2 (cf. [68], p. 204-205), obținem că

$$\begin{aligned}\lambda(Fr(U) \times [a, b]) &= \lambda_{\mathbb{R}^2}(Fr(U)) \cdot \lambda_{\mathbb{R}}([a, b]) \\ &= 0 \cdot (b - a) = 0,\end{aligned}$$

unde $-\infty < a \leq b < +\infty$, ceea ce justifică afirmația făcută.

De asemeni, mulțimile de forma $\{M \in E_3 : x = \varphi_1(y, z), (y, z) \in \overline{U}\}$ au măsura Lebesgue nulă. Măsura Lebesgue în SF fiind completă, putem spune că domeniul G este reuniunea dintre mulțimea punctelor M , unde $(y, z) \in U$, $(x, z) \in V$, $(x, y) \in W$, pentru care inegalitățile (2.60) sunt stricte (notată G^0) și ceva "neglijabil".

Trebuie spus că mulțimea G^0 este chiar *interiorul* domeniului G . Justificarea acestei afirmații se poate face în mai multe feluri, apelând la teoria măsurii Lebesgue, teoria *gradului topologic*, etc. Astfel, cum orice mulțime deschisă în E_3 conține măcar o celulă cu muchii finite netrivială, deducem că *mulțimile neglijabile (Lebesgue) au interiorul vid*.

Conform (2.43), mulțimile

$$\begin{aligned} S_{\text{sup}} &= \{M \in E_3 : z = \eta_2(x, y), (x, y) \in W\} \\ S_{\text{inf}} &= \{M \in E_3 : z = \eta_1(x, y), (x, y) \in W\} \end{aligned}$$

reprezintă suprafețe simple în SF pe care, dat fiind faptul că direcția \overline{k} desemnează *verticala*, le vom numi *partea superioară*, respectiv *inferioară* a frontierei lui G (cf. [68], p. 309).

Pentru a nu trivializa definiția mulțimii G , vom presupune că mulțimile

$$\begin{aligned} \{(y, z) \in \overline{U} : x = \varphi_1(y, z) = \varphi_2(y, z), M \in G\} \\ \{(x, z) \in \overline{V} : y = \psi_1(x, z) = \psi_2(x, z), M \in G\} \\ \{(x, y) \in \overline{W} : z = \eta_1(x, y) = \eta_2(x, y), M \in G\} \end{aligned}$$

sunt "neglijabile" în \mathbb{R}^2 . O asemenea prezumție are un suport intuitiv imediat; practic, cerem ca intersecția $\overline{S}_{\text{sup}} \cap \overline{S}_{\text{inf}}$ să fie o curbă (nu neapărat netedă). Atunci, frontiera mulțimii jordaniene G va fi formată din reuniunea suprafețelor simple S_{sup} , S_{inf} și ceva "neglijabil" în \mathbb{R}^2 . Ceea ce ne permite, apelând la (2.50), să introducem o integrală pe $Fr(G)$ pentru mărimi definite doar pe S_{sup} , S_{inf} .

Suprafețele S_{sup} , S_{inf} fiind simple, orientarea lor va fi dată, prin convenție, de $\overline{n}(M)$ pentru $M \in S_{\text{sup}}$, respectiv $-\overline{n}(M)$ pentru $M \in S_{\text{inf}}$. Justificarea acestei opțiuni va fi făcută ulterior. Notăm cu $\overline{N}(M)$ versorul normal exterior în ambele situații.

Atunci, conform (2.44), avem relațiile

$$\overline{N}(M) \cdot \overline{k} = \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{\partial \eta_2}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \eta_2}{\partial y}\right)^2 + 1}}, \quad M \in S_{\text{sup}}$$

$$\overline{N}(M) \cdot \overline{k} = -\frac{1}{\sqrt{\left(\frac{\partial \eta_1}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \eta_1}{\partial y}\right)^2 + 1}}, \quad M \in S_{\text{inf}}.$$

Să considerăm funcția $f : E_3 \rightarrow \mathbb{R}$, unde $f(M) = f(x, y, z)$, continuă pe \overline{G} astfel încât funcțiile $\frac{\partial f}{\partial x}(M)$, $\frac{\partial f}{\partial y}(M)$, $\frac{\partial f}{\partial z}(M)$, continue pe mulțimea G^0 , să fie prelungibile prin continuitate la \overline{G} (cf. [78], p. 18). Egalitatea $G^0 = i(G)$ ne permite să vorbim de *prelungirea prin continuitate* a unei funcții de la G^0 la \overline{G} .

Atunci, conform teoremelor generale de transformare a integralelor multiple în integrale iterate (vezi [68], p. 221, 233, [52], p. 105-108), putem scrie că

$$\begin{aligned} \iiint_{\overline{G}} \frac{\partial f}{\partial z}(x, y, z) dx dy dz &= \iint_{\overline{W}} \left[\int_{z=\eta_1(x,y)}^{z=\eta_2(x,y)} \frac{\partial f}{\partial z}(x, y, z) dz \right] dx dy \\ &= \iint_{\overline{W}} f(x, y, \eta_2(x, y)) dx dy \\ &\quad - \iint_{\overline{W}} f(x, y, \eta_1(x, y)) dx dy. \end{aligned}$$

Apoi, conform (2.50),

$$\begin{aligned} \iint_{\overline{W}} f(x, y, \eta_2(x, y)) dx dy &= \iint_{\overline{W}} f(x, y, \eta_2(x, y)) \cdot (\overline{N}(M) \cdot \overline{k}) \\ &\quad \cdot \sqrt{\left(\frac{\partial \eta_2}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \eta_2}{\partial y}\right)^2 + 1} dx dy \\ &= \int_{S_{\text{sup}}} f(M) (\overline{N}(M) \cdot \overline{k}) d\sigma(M). \end{aligned}$$

Analog,

$$\iint_{\overline{W}} f(x, y, \eta_1(x, y)) dx dy = - \int_{S_{\text{inf}}} f(M) (\overline{N}(M) \cdot \overline{k}) d\sigma(M)$$

(cf. [68], p. 309-310).

În concluzie,

$$\int_G \frac{\partial f}{\partial z}(M) d\lambda(M) = \int_{Fr(G)} f(M) (\overline{N}(M) \cdot \overline{k}) d\sigma(M). \quad (2.61)$$

”Procedând” în același mod pe direcțiile \overline{i} , \overline{j} , obținem că

$$\int_G \frac{\partial f}{\partial x}(M) d\lambda(M) = \int_{Fr(G)} f(M) (\overline{N}(M) \cdot \overline{i}) d\sigma(M), \quad (2.62)$$

respectiv

$$\int_G \frac{\partial f}{\partial y}(M) d\lambda(M) = \int_{Fr(G)} f(M) (\overline{N}(M) \cdot \overline{j}) d\sigma(M). \quad (2.63)$$

Fiind dată funcția $F : E_3 \rightarrow T\mathbb{R}^3$, unde $F(M) = f_1(M)\overline{i} + f_2(M)\overline{j} + f_3(M)\overline{k}$, $M \in E_3$, dacă funcțiile $f_i : E_3 \rightarrow \mathbb{R}$ îndeplinesc aceleași condiții ca funcția $f : E_3 \rightarrow \mathbb{R}$, atunci, pe baza relațiilor (2.61) - (2.63), putem scrie că

$$\int_G \operatorname{div} F(M) d\lambda(M) = \int_{Fr(G)} F(M) \cdot \overline{N}(M) d\sigma(M), \quad (2.64)$$

unde $\operatorname{div} F(M) \stackrel{\text{not}}{=} \frac{\partial f_1}{\partial x}(M) + \frac{\partial f_2}{\partial y}(M) + \frac{\partial f_3}{\partial z}(M)$ reprezintă *divergența* funcției $F(M)$ (cf. [76], p. 393, [34], p. 97).

Relația (2.64) poartă denumirea de **formula Gauss-Ostrogradski (flux-divergență)** (cf. [34], p. 108, [68], p. 307-308). Funcția $F : E_3 \rightarrow T\mathbb{R}^3$, unde $F(M) = F(x, y, z)$ (conform (1.2)), desemnează un *câmp de vectori* în SF (cf. [34], p. 95).

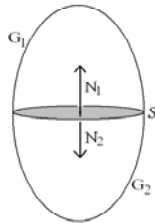


Figura 2.9

Formulele (2.61) - (2.64) pot fi generalizate pentru reuniuni de domenii ale SF . Alegerea lui \overline{N}_2 ca versor normal exterior (vezi Figura 2.9) atunci când S reprezintă partea inferioară a frontierei lui G_1 , respectiv a lui \overline{N}_1 atunci

când S reprezintă partea superioară a frontierei lui G_2 face ca *integralele pe suprafața S corespunzătoare să se anuleze reciproc prin sumare* în momentul când calculăm o integrală pe mulțimea $G_1 \cup G_2$ (cf. [68], p. 310). Justificarea orientării suprafețelor S_{sup} , S_{inf} s-a încheiat.

Utilizarea integralei (Lebesgue) în SF permite aplicarea formulelor (2.61) - (2.64) și în situațiile în care funcțiile (continue) $\frac{\partial f_i}{\partial x}$, $\frac{\partial f_i}{\partial y}$, $\frac{\partial f_i}{\partial z}$ sunt modificate pe o reuniune cel mult numărabilă de suprafețe simple interioare lui G .

Să considerăm funcția $g : E_3 \rightarrow \mathbb{R}$ continuă pe \overline{G} și admitând derivate parțiale de până la ordinul al II-lea, continue pe mulțimea G^0 , care să poată fi prelungite prin continuitate pe \overline{G} . Folosim notațiile

$$\begin{aligned}\nabla g(M) &\stackrel{\text{not}}{=} \frac{\partial g}{\partial x}(M)\bar{i} + \frac{\partial g}{\partial y}(M)\bar{j} + \frac{\partial g}{\partial z}(M)\bar{k} \\ \Delta g(M) &\stackrel{\text{not}}{=} \frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(M) + \frac{\partial^2 g}{\partial y^2}(M) + \frac{\partial^2 g}{\partial z^2}(M)\end{aligned}$$

ca să desemnăm mărimile numite *gradientul*, respectiv *laplacianul* funcției $g(M)$ (cf. [34], p. 96, 101). Prin calcul direct se verifică următoarele identități

$$\begin{aligned}\operatorname{div}(\nabla g(M)) &= \Delta g(M) \\ \operatorname{div}(g(M) \cdot F(M)) &= g(M) \cdot \operatorname{div} F(M) + \nabla g(M) \cdot F(M).\end{aligned}\tag{2.65}$$

Atunci, are loc egalitatea

$$\begin{aligned}&\int_G [f(M)\Delta g(M) + \nabla f(M) \cdot \nabla g(M)] d\lambda(M) \\ &= \int_{Fr(G)} f(M)\nabla g(M) \cdot \overline{N}(M) d\sigma(M)\end{aligned}\tag{2.66}$$

Relația (2.66) poartă denumirea de **prima formulă a lui Green** (cf. [29], p. 108). Ea provine din teorema flux-divergență (2.64) aplicată pentru $F(M) = f(M) \cdot \nabla g(M)$ și ținându-se seama de (2.65).

Fie punctul M_0 de coordonate x_0, y_0, z_0 în reperul canonic \mathcal{R} și $r > 0$ astfel încât $B(M_0, r) \subset G^0$. Aplicând formula (2.64), putem scrie că

$$\begin{aligned}\int_{G \setminus B(M_0, r)} \operatorname{div} F(M) d\lambda(M) &= \int_G \operatorname{div} F(M) d\lambda(M) \\ &\quad - \int_{B(M_0, r)} \operatorname{div} F(M) d\lambda(M)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \int_{Fr(G)} F(M) \cdot \overline{N}(M) d\sigma(M) \\
&\quad - \int_{Fr(B(M_0, r))} F(M) \cdot \overline{n}(M) d\sigma(M) \\
&= \int_{Fr(G)} F(M) \cdot \overline{N}(M) d\sigma(M) \\
&\quad + \int_{Fr(B(M_0, r))} F(M) \cdot \overline{N}(M) d\sigma(M) \\
&= \int_{Fr(G \setminus B(M_0, r))} F(M) \cdot \overline{N}(M) d\sigma(M),
\end{aligned}$$

unde $\overline{n}(M) = \frac{1}{r} \cdot \overline{M_0 M}$ și $M \in Fr(B(M_0, r))$, conform [48], p. 47. Am obținut astfel teorema flux-divergență pentru domeniile "cu găuri" (cf. [29], p. 118).

Fie $\rho : E_3 \rightarrow [0, +\infty)$ o funcție continuă pe \overline{G} ale cărei derivate de ordinul I, continue pe mulțimea G^0 , pot fi prelungite prin continuitate la \overline{G} . Introducem funcția $f_a : E_3 \rightarrow [0, +\infty)$ prin formula

$$f_a(M) = \int_G \frac{\rho(A)}{|\overline{AM}|^a} d\lambda(A), \quad M \in E_3,$$

unde $0 < a < 3$.

Să arătăm că mărimea $f_a(M)$ este finită în E_3 . Astfel, conform (2.41), $\int_{B(O, \delta)} \frac{1}{|\overline{OA}|^a} d\lambda(A) = 4\pi \int_0^\delta r^{2-a} dr = \frac{4\pi}{3-a} \cdot \delta^{3-a}$, unde $\delta > 0$. Apoi, aplicând invarianța la translații a măsurii Lebesgue, avem $\int_{B(P, \delta)} \frac{1}{|\overline{PA}|^a} d\lambda(A) = \frac{4\pi}{3-a} \cdot \delta^{3-a}$, $P \in E_3$. În sfârșit, putem scrie că

$$\begin{aligned}
\int_G \frac{\rho(A)}{|\overline{AM}|^a} d\lambda(A) &= \int_{G \cap B(M, \delta)} \frac{\rho(A)}{|\overline{AM}|^a} d\lambda(A) + \int_{G \setminus B(M, \delta)} \frac{\rho(A)}{|\overline{AM}|^a} d\lambda(A) \\
&\leq \sup_{B \in \overline{G}} \rho(B) \cdot \left[\int_{G \cap B(M, \delta)} \frac{1}{|\overline{AM}|^a} d\lambda(A) \right. \\
&\quad \left. + \int_{G \setminus B(M, \delta)} \delta^{-a} d\lambda(A) \right] \\
&\leq \delta^{-a} \cdot \left[\frac{4\pi}{3-a} \cdot \delta^3 + \lambda(G) \right] \cdot \sup_{B \in \overline{G}} \rho(B) \\
&< +\infty
\end{aligned}$$

(cf. [78], p. 28).

Au loc următoarele proprietăți:

- 1) $f_a \in C^p(\mathbb{R}^3, \mathbb{R})$, unde $a + p < 3$ (cf. [78], p. 28-31, [80], p. 211-212);
- 2)

$$\begin{aligned} \Delta f_1(M) &= 0, \quad M \in E_3 \setminus \overline{G} & \lim_{|\overline{OM}| \rightarrow +\infty} f_a(M) &= 0 \\ \Delta f_1(M) &= -4\pi \cdot \rho(M), \quad M \in G^0 \end{aligned}$$

(cf. [78], p. 28-31, [68], p. 340).

Pentru justificarea afirmațiilor de mai sus vom urma expunerile făcute în [78], p. 28-31, [68], p. 290-292, 294-297, [29], p. 113-119, [34], p. 382-386.

Mai întâi, să stabilim continuitatea lui $f_a(M)$. Fie $M \in E_3 \setminus \overline{G}$. Mulțimea $E_3 \setminus \overline{G}$ fiind deschisă în raport cu topologia metrică a spațiului E_3 , va exista $R > 0$ astfel încât $\overline{B(M, R)} \subset E_3 \setminus \overline{G}$. Atunci, $\inf\{d(N, P) : N \in B(M, R), P \in G\} \stackrel{\text{not}}{=} d_0 > 0$ (cf. [39], problema II.1.64, p. 144-145). Mărginirea mulțimii G implică $\sup\{d(N, P) : N \in B(M, R), P \in G\} \stackrel{\text{not}}{=} D_0 < +\infty$.

Sunt valabile inegalitățile $|\overline{MA}|^a - |\overline{NA}|^a \leq (|\overline{MN}| + |\overline{NA}|)^a - |\overline{NA}|^a$, respectiv $|\overline{NA}|^a - |\overline{MA}|^a \leq (|\overline{MN}| + |\overline{MA}|)^a - |\overline{MA}|^a$, de unde

$$\begin{aligned} \left| |\overline{MA}|^a - |\overline{NA}|^a \right| &\leq \left\{ |\overline{MA}|^a \cdot \left[\left(1 + \frac{|\overline{MN}|}{|\overline{MA}|} \right)^a - 1 \right] \right. \\ &\quad \left. + |\overline{NA}|^a \cdot \left[\left(1 + \frac{|\overline{MN}|}{|\overline{NA}|} \right)^a - 1 \right] \right\}. \end{aligned}$$

Dacă $0 < b \leq 1$, atunci, conform *inegalității lui Bernoulli* (cf. [40], p. 23), avem

$$\begin{aligned} \left| |\overline{MA}|^b - |\overline{NA}|^b \right| &\leq b \left(|\overline{MA}|^{b-1} + |\overline{NA}|^{b-1} \right) \cdot |\overline{MN}| \\ &\leq 2b \cdot d_0^{b-1} \cdot |\overline{MN}|, \end{aligned}$$

unde $N \in B(M, R)$.

Cum $0 < a < 3$, adică $a = 3b$, unde $b \in (0, 1)$, deducem că

$$\begin{aligned} \left| |\overline{MA}|^a - |\overline{NA}|^a \right| &= \left(|\overline{MA}|^{2b} + |\overline{MA}|^b \cdot |\overline{NA}|^b + |\overline{NA}|^{2b} \right) \\ &\quad \cdot \left| |\overline{MA}|^b - |\overline{NA}|^b \right| \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leq 6D_0^{2b} \cdot b \cdot d_0^{b-1} \cdot |\overline{MN}| \\
&= 2a \left(\frac{D_0^{2a}}{d_0^{3-a}} \right)^{\frac{1}{3}} \cdot |\overline{MN}| \\
&= C(a) \cdot |\overline{MN}|,
\end{aligned}$$

unde $N \in B(M, R)$. De aici,

$$\begin{aligned}
|f_a(M) - f_a(N)| &\leq \int_G \rho(A) \cdot \left| \frac{1}{|\overline{MA}|^a} - \frac{1}{|\overline{NA}|^a} \right| d\lambda(A) \\
&\leq d_0^{-2a} \sup_{B \in \overline{G}} \rho(B) \\
&\quad \cdot \int_G \left| |\overline{MA}|^a - |\overline{NA}|^a \right| d\lambda(A) \\
&\leq d_0^{-2a} C(a) \cdot \sup_{B \in \overline{G}} \rho(B) \cdot \lambda(G) \cdot |\overline{MN}|,
\end{aligned}$$

relație care dovedește continuitatea aplicației $f_a(M)$ în punctul M (cf. [29], p. 114).

Fie $M \in \overline{G}$. Să considerăm $\varepsilon > 0$ fixat arbitrar și $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ astfel încât $G \setminus B(M, 2\delta) \neq \emptyset$, $\frac{8\pi}{3-a} \cdot (3\delta)^{3-a} \cdot \sup_{B \in \overline{G}} \rho(B) < \frac{\varepsilon}{2}$. Atunci, pentru $N \in B(M, \delta)$ obținem că

$$\begin{aligned}
|f_a(M) - f_a(N)| &\leq \int_G \rho(A) \cdot \left| \frac{1}{|\overline{MA}|^a} - \frac{1}{|\overline{NA}|^a} \right| d\lambda(A) \\
&\leq \sup_{B \in \overline{G}} \rho(B) \cdot \int_{B(M, 2\delta)} \left| \frac{1}{|\overline{MA}|^a} - \frac{1}{|\overline{NA}|^a} \right| d\lambda(A) \\
&\quad + \int_{G \setminus B(M, 2\delta)} \rho(A) \cdot \left| \frac{1}{|\overline{MA}|^a} - \frac{1}{|\overline{NA}|^a} \right| d\lambda(A) \\
&\leq \sup_{B \in \overline{G}} \rho(B) \cdot \left[\frac{4\pi}{3-a} \cdot (2\delta)^{3-a} + \int_{B(M, 2\delta)} \frac{1}{|\overline{NA}|^a} d\lambda(A) \right] \\
&\quad + d_0^{-2a} C(a) \cdot \lambda(G) \cdot |\overline{MN}|,
\end{aligned}$$

unde $d_0 = \inf\{d(Q, P) : Q \in B(M, \delta), P \in G \setminus B(M, 2\delta)\} \geq \delta$, $D_0 = \sup\{d(Q, A) : Q \in B(M, \delta), A \in G \setminus B(M, 2\delta)\} \leq \sup\{d(M, A) : A \in$

$\overline{G}\} + \delta$. Însă $B(M, 2\delta) \subset B(N, 3\delta)$. Într-adevăr, pentru $P \in B(M, 2\delta)$ avem $d(N, P) \leq d(N, M) + d(M, P) < 3\delta$, conform *inegalității triunghiului*. Ceea ce ne conduce la

$$\int_{B(M, 2\delta)} \frac{1}{|\overline{NA}|^a} d\lambda(A) \leq \int_{B(N, 3\delta)} \frac{1}{|\overline{NA}|^a} d\lambda(A) = \frac{4\pi}{3-a} \cdot (3\delta)^{3-a}.$$

În concluzie,

$$\begin{aligned} |f_a(M) - f_a(N)| &\leq \sup_{B \in \overline{G}} \rho(B) \cdot \left[\frac{4\pi}{3-a} \cdot (2\delta)^{3-a} + \frac{4\pi}{3-a} \cdot (3\delta)^{3-a} \right. \\ &\quad \left. + d_0^{-2a} C(a) \cdot \lambda(G) \cdot |\overline{MN}| \right] \\ &< \frac{e}{2} + d_0^{-2a} C(a) \cdot \sup_{B \in \overline{G}} \rho(B) \cdot \lambda(G) \cdot |\overline{MN}|. \end{aligned}$$

Alegând $\eta = \eta(e) \in (0, \delta)$ astfel încât $d_0^{-2a} C(a) \cdot \sup_{B \in \overline{G}} \rho(B) \cdot \lambda(G) \cdot |\overline{MN}| < \frac{e}{2}$, ajungem la

$$|f_a(M) - f_a(N)| < e, \quad N \in B(M, \eta).$$

Continuitatea funcției $f_a(M)$ a fost stabilită.

Prin calcul direct obținem relațiile

$$\frac{\partial}{\partial x_0} (|\overline{AM}|) = \frac{x_0 - x}{|\overline{AM}|} \quad \frac{\partial^2}{\partial x_0^2} (|\overline{AM}|) = \frac{|\overline{AM}|^2 - (x_0 - x)^2}{|\overline{AM}|^3}, \quad (2.67)$$

unde x, y, z respectiv x_0, y_0, z_0 reprezintă coordonatele punctelor A, M în reperul canonic \mathcal{R} . Atunci,

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial x_0} \left(\frac{1}{|\overline{AM}|^a} \right) = -\frac{a}{|\overline{AM}|^{a+1}} \cdot \cos(\overline{AM}, \vec{i}) \\ \frac{\partial^2}{\partial x_0^2} \left(\frac{1}{|\overline{AM}|^a} \right) = -\frac{a}{|\overline{AM}|^{a+2}} [1 - (a+2) \cdot \cos^2(\overline{AM}, \vec{i})] \end{cases} \quad (2.68)$$

(cf. [68], p. 294).

De asemeni, sunt valabile estimările

$$\left| \frac{\cos(\overline{AM}, \vec{i})}{|\overline{AM}|^{a+1}} - \frac{\cos(\overline{AN}, \vec{i})}{|\overline{AN}|^{a+1}} \right| = \left(\frac{1}{|\overline{AM}| \cdot |\overline{AN}|} \right)^{a+1} \left| |\overline{AN}|^{a+1} \cos(\overline{AM}, \vec{i}) - |\overline{AM}|^{a+1} \right|$$

$$\begin{aligned}
& \cdot \cos(\overline{AN}, \bar{i})| = \left(\frac{1}{|\overline{AM}| \cdot |\overline{AN}|} \right)^{a+1} \cdot \left(|\overline{AN}|^{a+1} - |\overline{AM}|^{a+1} \right) \cdot \cos(\overline{AM}, \bar{i}) \\
& + [\cos(\overline{AM}, \bar{i}) - \cos(\overline{AN}, \bar{i})] \cdot |\overline{AM}|^{a+1} \leq \left(\frac{1}{|\overline{AM}| \cdot |\overline{AN}|} \right)^{a+1} \\
& \cdot \left| |\overline{AM}|^{a+1} - |\overline{AN}|^{a+1} \right| + \frac{1}{|\overline{AN}|^{a+1}} \cdot |\cos(\overline{AM}, \bar{i}) - \cos(\overline{AN}, \bar{i})| \\
& \text{și} \\
& \left| \frac{1}{|\overline{AM}|^{a+2}} [1 - (a+2) \cos^2(\overline{AM}, \bar{i})] - \frac{1}{|\overline{AN}|^{a+2}} [1 - (a+2) \cos^2(\overline{AN}, \bar{i})] \right| \\
& \leq \left| \frac{1}{|\overline{AM}|^{a+2}} - \frac{1}{|\overline{AN}|^{a+2}} \right| + (a+2) \left\{ \left(\frac{1}{|\overline{AM}| \cdot |\overline{AN}|} \right)^{a+2} \left| |\overline{AM}|^{a+2} - |\overline{AN}|^{a+2} \right| \right. \\
& \left. + \frac{1}{|\overline{AN}|^{a+2}} \cdot |\cos^2(\overline{AM}, \bar{i}) - \cos^2(\overline{AN}, \bar{i})| \right\}.
\end{aligned}$$

Aici,

$$\begin{aligned}
& |\cos(\overline{AM}, \bar{i}) - \cos(\overline{AN}, \bar{i})| \leq \frac{||\overline{AN}| \cdot \overline{AM} - |\overline{AM}| \cdot \overline{AN}||}{|\overline{AM}| \cdot |\overline{AN}|} = \frac{1}{|\overline{AM}| \cdot |\overline{AN}|} \left| |\overline{AN}| (\overline{AN} \right. \\
& \left. + \overline{NM}) - |\overline{AM}| \cdot \overline{AN} \right| = \frac{1}{|\overline{AM}| \cdot |\overline{AN}|} \left| (|\overline{AN}| - |\overline{AM}|) \overline{AN} + |\overline{AN}| \cdot \overline{NM} \right| \\
& \leq \frac{1}{|\overline{AM}|} \cdot \left| |\overline{AN}| - |\overline{AM}| \right| + \frac{1}{|\overline{AM}|} \cdot |\overline{NM}| \leq \frac{2}{|\overline{AM}|} \cdot |\overline{NM}|
\end{aligned}$$

și

$$|\cos^2(\overline{AM}, \bar{i}) - \cos^2(\overline{AN}, \bar{i})| \leq 2 |\cos(\overline{AM}, \bar{i}) - \cos(\overline{AN}, \bar{i})| \leq \frac{4}{|\overline{AM}|} |\overline{NM}|.$$

Folosind estimările anterioare se poate arăta că funcțiile f_a^* , $f_a^{**} : E_3 \rightarrow \mathbb{R}$ introduse prin formulele

$$f_a^*(M) = \int_G \rho(A) \frac{\partial}{\partial x_0} \left(\frac{1}{|\overline{AM}|^a} \right) d\lambda(A), \quad a+1 < 3,$$

respectiv

$$f_a^{**}(M) = \int_G \rho(A) \frac{\partial^2}{\partial x_0^2} \left(\frac{1}{|\overline{AM}|^a} \right) d\lambda(A), \quad a+2 < 3$$

sunt continue.

Fie $M \in E_3 \setminus \overline{G}$ și $N = N(h) \in B(M, R)$, unde $\overline{B(M, R)} \subset E_3 \setminus \overline{G}$, având coordonatele $x_0 + h$, y_0 , z_0 în reperul canonic \mathcal{R} . Atunci,

$$\frac{1}{|\overline{AN}|^a} = \frac{1}{|\overline{AM}|^a} + \frac{\partial}{\partial x_0} \left(\frac{1}{|\overline{AM}|^a} \right) \cdot h + o(|h|),$$

de unde rezultă că

$$f_a(N) = f_a(M) + f_a^*(M) \cdot h + o(|h|)$$

(cf. [68], p. 223). Un calcul asemănător celui cu care se justifică *unicitatea* diferențialei unei funcții într-un anumit punct (cf. [53], p. 260-261) ne permite să afirmăm că

$$\frac{\partial f_a}{\partial x_0}(M) = f_a^*(M), \quad a + 1 < 3.$$

În mod analog,

$$\frac{\partial^2 f_a}{\partial x_0^2}(M) = f_a^{**}(M), \quad a + 2 < 3$$

(cf. [29], p. 114).

Fie $M \in \overline{G}$. Introducem *funcția regularizantă* $h_e : [0, +\infty) \rightarrow [0, +\infty)$ dată de formula (cf. [68], p. 296)

$$h_e(r) = \begin{cases} \frac{1}{r}, & r \geq e \\ \frac{1}{2e} \cdot \left(3 - \frac{r^2}{e^2}\right), & 0 \leq r \leq e, \end{cases}$$

unde $e \in (0, \frac{1}{2})$ (vezi Figura 2.10).

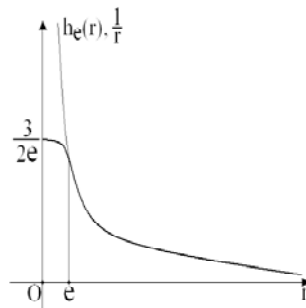


Figura 2.10

Atunci, $h_e \in C^1([0, +\infty), \mathbb{R})$ și $\frac{\text{sgn}(e-r)}{e} \leq h_e(r) \leq \frac{1}{r}$, $0 \leq |h_e'(r)| \leq \frac{1}{r^2}$, unde $r > 0$. Deducem că, pentru $0 < r < e$,

$$0 < h_e^y(r) \leq r^{-y} + e^{-y}, \quad y \in \mathbb{R}.$$

Aplicația $f^e : E_3 \rightarrow [0, +\infty)$ introdusă prin formula

$$f^e(M) = \int_G h_e^a(|\overline{AM}|) \rho(A) d\lambda(A), \quad M \in E_3 \quad a+1 < 3,$$

se găsește în $C^1(\mathbb{R}^3, \mathbb{R})$. În plus,

$$\frac{\partial f^e}{\partial x_0}(M) = \int_G \rho(A) \frac{\partial}{\partial x_0} (h_e^a(|\overline{AM}|)) d\lambda(A).$$

Justificarea acestor afirmații se bazează pe un calcul asemănător celui făcut anterior.

În continuare,

$$\begin{aligned} |f_a(M) - f^e(M)| &\leq \int_G \rho(A) \left| |\overline{AM}|^{-a} - h_e^a(|\overline{AM}|) \right| d\lambda(A) \\ &= \int_{B(M,e)} \rho(A) \left| |\overline{AM}|^{-a} - h_e^a(|\overline{AM}|) \right| d\lambda(A) \\ &\leq \sup_{B \in \overline{G}} \rho(B) \cdot \left[\int_{B(M,e)} |\overline{AM}|^{-a} d\lambda(A) \right. \\ &\quad \left. + \int_{B(M,e)} h_e^a(|\overline{AM}|) d\lambda(A) \right] \\ &\leq 2 \cdot \sup_{B \in \overline{G}} \rho(B) \cdot \frac{4\pi}{3-a} e^{3-a} \end{aligned}$$

și, cum $\left| \frac{\partial}{\partial x_0} (|\overline{AM}|) \right| \leq 1$,

$$\begin{aligned} \left| f_a^*(M) - \frac{\partial f^e}{\partial x_0}(M) \right| &\leq \int_{S(M,e)} \rho(A) \left| \frac{\partial}{\partial x_0} (|\overline{AM}|^{-a}) - a \cdot h_e^{a-1}(|\overline{AM}|) \right. \\ &\quad \left. \cdot h_e'(|\overline{AM}|) \cdot \frac{\partial}{\partial x_0} (|\overline{AM}|) \right| d\lambda(A) \\ &\leq \sup_{B \in \overline{G}} \rho(B) \cdot \left\{ a \cdot \frac{4\pi}{3-(a+1)} e^{3-(a+1)} \right. \\ &\quad \left. + a \cdot \int_{B(M,e)} [(|\overline{AM}|^{-1})^{a-1} + (e^{-1})^{a-1}] \right. \\ &\quad \left. \cdot |\overline{AM}|^{-2} d\lambda(A) \right\} \\ &= 4\pi a \cdot \frac{4-a}{2-a} \cdot \sup_{B \in \overline{G}} \rho(B) \cdot e^{2-a}. \end{aligned}$$

Estimările de mai sus arată că funcțiile $\{f^e : e \in (0, \frac{1}{2})\}$, $\{\frac{\partial f^e}{\partial x_0} : e \in (0, \frac{1}{2})\}$ converg uniform în \overline{G} la f_a , respectiv f_a^* atunci când e tinde la zero (cf. [29], p. 115, 117, [68], p. 295). Aceasta implică existența în \overline{G} a derivatei $\frac{\partial f_a}{\partial x_0}$ dată de formula

$$\frac{\partial f_a}{\partial x_0} = f_a^*$$

(cf. [53], p. 283-284).

Formula corespunzătoare derivatei de ordinul al II lea se va stabili în mod analog.

Justificarea afirmației 1) s-a încheiat.

Prima jumătate a afirmației 2) poate fi motivată ușor. Astfel, din calculele făcute în prima parte reiese că funcția f_a este indefinit derivabilă pe mulțimea $E_3 \setminus \overline{G}$ și că derivatele sale (parțiale) se obțin prin derivarea mărimii $|\overline{AM}|^{-a}$ sub semnul integral. Putem, așadar, scrie că

$$\begin{aligned} \Delta f_1(M) &= \int_G \rho(A) \left[\frac{\partial^2}{\partial x_0^2} (|\overline{AM}|^{-1}) + \frac{\partial^2}{\partial y_0^2} (|\overline{AM}|^{-1}) + \frac{\partial^2}{\partial z_0^2} (|\overline{AM}|^{-1}) \right] d\lambda(A) \\ &\stackrel{(2.68)}{=} \int_G \rho(A) \sum \frac{1-3 \cos^2(\overline{AM}, \vec{i})}{|\overline{AM}|^3} d\lambda(A) = 0. \end{aligned}$$

Apoi, $0 \leq f_a(M) \leq \sup_{B \in \overline{G}} \rho(B) \cdot \lambda(G) \cdot d_0^{-a}$, $M \in E_3 \setminus \overline{G}$, unde d_0 are aceeași semnificație ca la început. Astfel, cum

$$\lim_{|\overline{OM}| \rightarrow +\infty} d_0 = +\infty \text{ pentru } R > 0 \text{ fixat,}$$

rezultă că $\lim_{|\overline{OM}| \rightarrow +\infty} f_a(M) = 0$.

Fie $M \in G^0$. Atunci, $\frac{\partial f_1}{\partial x_0}(M) = \int_G \rho(A) \frac{\partial}{\partial x_0} \left(\frac{1}{|\overline{AM}|} \right) d\lambda(A)$. Folosind relația $\frac{\partial}{\partial x_0} \left(\frac{1}{|\overline{AM}|} \right) = -\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{|\overline{AM}|} \right)$ (cf. [68], p. 337) și (2.40), putem scrie că

$$\begin{aligned} \frac{\partial f_1}{\partial x_0}(M) &= \lim_{\epsilon \searrow 0} \int_{G \setminus B(M, \epsilon)} \rho(A) \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{|\overline{AM}|} \right) d\lambda(A) \\ &= \lim_{\epsilon \searrow 0} \int_{G \setminus B(M, \epsilon)} \frac{\partial}{\partial x} \left(\rho(A) \cdot \frac{1}{|\overline{AM}|} \right) d\lambda(A) \\ &\quad + \int_G \frac{1}{|\overline{AM}|} \cdot \frac{\partial}{\partial x} (\rho(A)) d\lambda(A) \\ &= - \int_G \frac{\partial}{\partial x} \left(\rho(A) \cdot \frac{1}{|\overline{AM}|} \right) d\lambda(A) \end{aligned}$$

$$+ \int_G \frac{1}{|AM|} \cdot \frac{\partial}{\partial x}(\rho(A))d\lambda(A).$$

Conform (2.62), (2.40),

$$\begin{aligned} \frac{\partial f_1}{\partial x_0}(M) &= - \lim_{e \searrow 0} \int_{Fr(G \setminus B(M, e))} \rho(A) \cdot \frac{1}{|AM|} \cdot (\overline{N}(A) \cdot \bar{i}) d\sigma(A) \\ &\quad + \int_G \frac{1}{|AM|} \cdot \frac{\partial}{\partial x}(\rho(A))d\lambda(A) \\ &= - \int_{Fr(G)} \rho(A) \cdot \frac{1}{|AM|} \cdot (\overline{N}(A) \cdot \bar{i}) d\sigma(A) \\ &\quad + \int_G \frac{1}{|AM|} \cdot \frac{\partial}{\partial x}(\rho(A))d\lambda(A). \end{aligned}$$

Se cuvine făcută următoarea observație. Deși, din rațiunile mecanicii teoretice, am considerat că funcția $\rho(A)$ ia doar valori nenegative, această proprietate a sa nu a influențat în nici un fel calculele de până acum.

De aceea, cum $\inf\{d(M, A) : A \in Fr(G)\} > 0$, deducem că mărimea

$$\int_{Fr(G)} [\rho(A)(\overline{N}(A) \cdot \bar{i})] \cdot \frac{1}{|AM|} d\sigma(A)$$

este indefinit derivabilă iar derivatele sale (parțiale) se obțin prin derivarea mărimii $|AM|^{-1}$ sub semnul integral. În ceea ce privește mărimea

$$\int_G \frac{1}{|AM|} \cdot \frac{\partial \rho}{\partial x}(A)d\lambda(A),$$

aplicația $\frac{\partial \rho}{\partial x}(A)$ fiind continuă pe \overline{G} , putem scrie că

$$\frac{\partial}{\partial x_0} \left(\int_G \frac{1}{|AM|} \cdot \frac{\partial \rho}{\partial x}(A)d\lambda(A) \right) = \int_G \frac{\partial \rho}{\partial x}(A) \cdot \frac{\partial}{\partial x_0} \left(\frac{1}{|AM|} \right) d\lambda(A).$$

Am folosit afirmația 1).

Așadar, există și este continuă funcția

$$\frac{\partial^2 f_1}{\partial x_0^2}(M) = - \int_{Fr(G)} [\rho(A)(\overline{N}(A) \cdot \bar{i})] \cdot \frac{\partial}{\partial x_0} \left(\frac{1}{|AM|} \right) d\sigma(A)$$

$$\begin{aligned}
& + \int_G \frac{\partial \rho}{\partial x}(A) \cdot \frac{\partial}{\partial x_0} \left(\frac{1}{|\overline{AM}|} \right) d\lambda(A) \\
& = \int_{Fr(G)} [\rho(A)(\overline{N}(A) \cdot \vec{i})] \cdot \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{|\overline{AM}|} \right) d\sigma(A) \\
& \quad - \int_G \frac{\partial \rho}{\partial x}(A) \cdot \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{|\overline{AM}|} \right) d\lambda(A).
\end{aligned}$$

Prin sumare,

$$\begin{aligned}
\Delta f_1(M) & = \sum \frac{\partial^2 f_1}{\partial x_0^2}(M) \\
& = \int_{Fr(G)} \rho(A) \left[\overline{N}(A) \cdot \sum \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{|\overline{AM}|} \right) \vec{i} \right] d\sigma(A) \\
& \quad - \int_G \left[\sum \frac{\partial \rho}{\partial x}(A) \vec{i} \right] \cdot \left[\sum \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{|\overline{AM}|} \right) \vec{i} \right] d\lambda(A) \\
& = \int_{Fr(G)} \rho(A) \left[\nabla \left(\frac{1}{|\overline{AM}|} \right) \cdot \overline{N}(A) \right] d\sigma(A) \\
& \quad - \int_G \nabla \rho(A) \cdot \nabla \left(\frac{1}{|\overline{AM}|} \right) d\lambda(A).
\end{aligned}$$

Cum $M \in G^0$, există $r > 0$ astfel încât $B(M, r) \subset G^0$. Prima formulă a lui Green (2.66), scrisă pentru domeniul "cu găuri" $G \setminus B(M, r)$, unde $f = \rho(A)$, $g = |\overline{AM}|^{-1}$, arată că

$$\begin{aligned}
& \int_{G \setminus B(M, r)} \left[\rho(A) \Delta \left(\frac{1}{|\overline{AM}|} \right) + \nabla \rho(A) \cdot \nabla \left(\frac{1}{|\overline{AM}|} \right) \right] d\lambda(A) \\
& = \int_{Fr(G \setminus B(M, r))} \rho(A) \left[\nabla \left(\frac{1}{|\overline{AM}|} \right) \cdot \overline{N}(A) \right] d\sigma(A).
\end{aligned}$$

Ca și anterior, $\Delta \left(\frac{1}{|\overline{AM}|} \right) = 0$ în $G \setminus B(M, r)$, astfel că

$$\int_{G \setminus B(M, r)} \rho(A) \Delta \left(\frac{1}{|\overline{AM}|} \right) d\lambda(A) = 0.$$

Apoi,

$$\begin{aligned} & \int_{Fr(G \setminus B(M,r))} \rho(A) \left[\nabla \left(\frac{1}{|\overline{AM}|} \right) \cdot \overline{N}(A) \right] d\sigma(A) \\ &= \int_{Fr(G)} \rho(A) \left[\nabla \left(\frac{1}{|\overline{AM}|} \right) \cdot \overline{N}(A) \right] d\sigma(A) \\ & \quad + \int_{Fr(B(M,r))} \rho(A) \left[\nabla \left(\frac{1}{|\overline{AM}|} \right) \cdot \overline{N}(A) \right] d\sigma(A). \end{aligned}$$

Deoarece $\overline{N}(A) = -\overline{n}(A) = -\frac{1}{r} \cdot \overline{MA}$, se ajunge la

$$\nabla \left(\frac{1}{|\overline{AM}|} \right) \cdot \overline{N}(A) = -\frac{1}{|\overline{AM}|^2} \nabla(|\overline{AM}|) \cdot \overline{N}(A) = \frac{1}{|\overline{AM}|^2} = r^{-2},$$

unde $A \in Fr(B(M,r))$.

Atunci, cum $\rho(A) = \rho(M) + o(1)$ când $d(A, M)$ tinde la zero, deducem că

$$\begin{aligned} & \int_{Fr(B(M,r))} \rho(A) \left[\nabla \left(\frac{1}{|\overline{AM}|} \right) \cdot \overline{N}(A) \right] d\sigma(A) \\ &= [\rho(M) + o(1)] \cdot \int_{Fr(B(M,r))} r^{-2} d\sigma(A) \\ &= 4\pi[\rho(M) + o(1)] \end{aligned}$$

(cf. [68], p. 262).

În concluzie, apelând la (2.40), putem scrie că

$$\begin{aligned} & \int_G \nabla \rho(A) \cdot \nabla \left(\frac{1}{|\overline{AM}|} \right) d\lambda(A) \\ &= \lim_{r \searrow 0} \int_{Fr(G \setminus B(M,r))} \rho(A) \left[\nabla \left(\frac{1}{|\overline{AM}|} \right) \cdot \overline{N}(A) \right] d\sigma(A) \\ &= \int_{Fr(G)} \rho(A) \cdot \left[\nabla \left(\frac{1}{|\overline{AM}|} \right) \cdot \overline{N}(A) \right] d\sigma(A) \\ & \quad + \lim_{r \searrow 0} \int_{Fr(B(M,r))} \rho(A) \left[\nabla \left(\frac{1}{|\overline{AM}|} \right) \cdot \overline{N}(A) \right] d\sigma(A) \end{aligned}$$

$$= \int_{Fr(G)} \rho(A) \cdot [\nabla \left(\frac{1}{|AM|} \right) \cdot \overline{N}(A)] d\sigma(A) + 4\pi \cdot \rho(M).$$

Justificarea afirmației 2) s-a încheiat.

Egalitatea $\Delta f_1(M) = -4\pi \cdot \rho(M)$, unde $M \in G^0$, poartă denumirea de *ecuația lui Poisson* (1813) (cf. [68], p. 358, [34], p. 381).

2.1.15 O formulă asimptotică pentru $f_1(M)$

Rezultatul conținut în această subsecțiune apelează la teoria *polinoamelor Legendre* (1785). Conform [23], p. 255-257, polinomul Legendre de ordinul n , notat $P_n(x)$, este *unica* soluție a ecuației diferențiale ordinare

$$(1 - x^2)y'' - 2xy' + n(n + 1)y = 0, \quad |x| < 1$$

care verifică relația $\lim_{x \rightarrow 1} y(x) = 1$.

Polinoamele $\{P_n(x) : n \geq 0\}$ admit următoarea reprezentare, cunoscută sub numele de *formula lui Rodrigues* (1814)

$$P_0(x) = 1 \quad P_n(x) = \frac{1}{2^n \cdot n!} \cdot \frac{d^n}{dx^n} [(x^2 - 1)^n], \quad n \geq 1$$

(cf. [67], p. 256-258, [78], p. 395-396).

Are loc, de asemeni, egalitatea

$$\frac{1}{\sqrt{1 - 2xh + h^2}} = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(x) \cdot h^n, \quad |x| \leq 1, \quad |h| < 1,$$

convergența seriei din membrul drept fiind uniformă și absolută (cf. [23], propoziția 3.3, p. 257-258, [78], p. 397-398, [72], p. 283-285, [66], p. 513-514).

Fie $M \in E_3 \setminus \overline{G}$. Ridicând la pătrat relația $\overline{AM} = \overline{OM} - \overline{OA}$, avem

$$|\overline{AM}|^2 = |\overline{OM}|^2 + |\overline{OA}|^2 - 2|\overline{OM}| \cdot |\overline{OA}| \cos(\overline{OM}, \overline{OA}).$$

De aici rezultă că

$$\begin{aligned} \frac{1}{|\overline{AM}|} &= \frac{1}{|\overline{OM}|} \cdot \left(1 - 2 \frac{|\overline{OA}|}{|\overline{OM}|} \cdot \cos(\overline{OM}, \overline{OA}) + \left(\frac{|\overline{OA}|}{|\overline{OM}|} \right)^2 \right)^{-\frac{1}{2}} \\ &= \frac{1}{|\overline{OM}|} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} P_n(\cos \theta) \cdot \left(\frac{|\overline{OA}|}{|\overline{OM}|} \right)^n, \quad A \in G, \end{aligned}$$

unde $\theta = \angle(\overline{OM}, \overline{OA})$, când $\sup_{A \in \overline{G}} |\overline{OA}| < |\overline{OM}|$.

Prin integrare termen cu termen (datorită *tipului* de convergență a seriei) ajungem la

$$\begin{aligned}
 f_1(M) &= \frac{1}{|\overline{OM}|} \cdot \int_G \rho(A) d\lambda(A) \\
 &+ \frac{1}{|\overline{OM}|^2} \cdot \int_G \rho(A) |\overline{OA}| \cos \theta d\lambda(A) + O\left(\frac{1}{|\overline{OM}|^3}\right) \\
 &= \frac{1}{|\overline{OM}|} \cdot \int_G \rho(A) d\lambda(A) \\
 &+ \frac{1}{|\overline{OM}|^2} \cdot \int_G \rho(A) \left(\overline{OA} \cdot \frac{\overline{OM}}{|\overline{OM}|} \right) d\lambda(A) + O\left(\frac{1}{|\overline{OM}|^3}\right) \\
 &= \frac{m}{|\overline{OM}|} + \frac{m}{|\overline{OM}|^3} \left[\overline{OM} \cdot \frac{1}{m} \int_G \rho(A) \overline{OA} d\lambda(A) \right] \\
 &+ O\left(\frac{1}{|\overline{OM}|^3}\right).
 \end{aligned}$$

Invarianța la izometrii (aplicații izometrice) a măsurii Lebesgue arată că mărimea

$$m = \int_G \rho(A) d\lambda(A) \quad (2.69)$$

este *independentă* de alegerea reperului \mathcal{R} . Într-adevăr, deoarece bazele din $T\mathbb{R}^3$ luate în considerare sunt ortonormate, matricea schimbării de bază va fi ortogonală, putând fi astfel ”privită” drept matricea de reprezentare a unui operator izometric (cf. [68], p. 268, [34], p. 39-41). Așadar, mărimea m constituie, conform calculului tensorial, o mărime *scalară* în SF (cf. [66], p. 242).

Fie $N \in E_3$ dat de

$$m \cdot \overline{ON} = \int_G \rho(A) \overline{OA} d\lambda(A).$$

Atunci, cum

$$m \cdot \overline{ON} = \int_G \rho(A) (\overline{ON} + \overline{NA}) d\lambda(A)$$

$$= m \cdot \overline{ON} + \int_G \rho(A) \overline{NA} d\lambda(A),$$

deducem că

$$\int_G \rho(A) \overline{NA} d\lambda(A) = 0.$$

Schimbând originea reperului \mathcal{R} în punctul N , obținem

$$f_1(M) = \frac{m}{|\overline{NM}|} + O\left(\frac{1}{|\overline{NM}|^3}\right) \quad (2.70)$$

pentru orice punct M aflat suficient de departe de \overline{G} .

Formula (2.70) reprezintă *alura la distanțe mari a potențialului newtonian* $f_1(M)$ (modulo o constantă multiplicativă) al unui corp (mediu) material ocupând în SF domeniul G . Aici, mărimea m desemnează *masa* corpului material iar funcția $\rho(A)$ (numită *densitate* sau *masă specifică*) este stabilită prin considerații de natură experimentală (cf. [34], p. 378, 384-386, [76], p. 559-560, [56], p. 103-104). Punctul N constituie *centrul de masă* al corpului material (cf. [56], p. 18, [34], p. 285, [76], p. 148). Este întâlnită și denumirea de *centru de inerție* (cf. [41], p. 29). Asupra acestor chestiuni vom reveni ulterior.

2.1.16 Viteza areolară a punctului material

Legea ariilor, care este valabilă în cazul mișcării punctului material M sub acțiunea forțelor centrale (cf. [54], p. 17, [56], p. 129-130, [34], p. 229-232), dă naștere mărimii numită *viteză areolară* a punctului material (cf. [32], p. 162, [41], p. 47, [76], p. 288, [63], p. 145-146, [14], p. 87-88, etc.).

Mulțimea segmentelor $OM(t)$, $t \in I$, reprezintă în SF o suprafață *conică* (adică, o suprafață *riglată*, *desfășurabilă*, ale cărei *generatoare* OM trec prin originea O a sistemului de referință \mathcal{R} ; cf. [48], p. 41). Considerând traiectoria Γ a punctului material M parametrizată natural cu ajutorul coordonatei curbilini s introdusă prin (2.4), suprafața conică va admite parametrizarea locală dată de formula

$$\overline{OP} = k \cdot \overline{r}(s) = \sigma(k, s)$$

(cf. [15], vol. I, p. 52-53, [48], p. 41).

Aria suprafeței ”măturate” de segmentul OM atunci când punctul material M a parcurs un arc de curbă de lungime s pe traiectoria Γ este, conform (2.50),

$$A(s) = \iint_{\bar{U}(s)} \left| \frac{\partial \sigma}{\partial k}(k, q) \times \frac{\partial \sigma}{\partial q}(k, q) \right| dk dq,$$

unde $\bar{U}(s) = [0, 1] \times [0, s]$. Astfel, cum

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma}{\partial k}(k, s) \times \frac{\partial \sigma}{\partial s}(k, s) &= \bar{r}(s) \times k \cdot \frac{d\bar{r}}{ds} \\ &= k \left[\bar{r}(s) \times \frac{d\bar{r}}{ds} \right], \end{aligned}$$

putem scrie că

$$\begin{aligned} A(s) &= \left(\int_0^1 k dk \right) \cdot \left(\int_0^s \left| \bar{r}(q) \times \frac{d\bar{r}}{dq} \right| dq \right) \\ &= \frac{1}{2} \int_0^s \left| \bar{r}(q) \times \frac{d\bar{r}}{dq} \right| dq, \quad s \geq 0. \end{aligned}$$

Apoi, prin derivare în raport cu timpul t , obținem

$$\begin{aligned} \dot{A} &= \frac{dA}{ds} \cdot \dot{s} = \frac{1}{2} \left| \bar{r} \times \frac{d\bar{r}}{ds} \right| \cdot \dot{s} = \frac{1}{2} \left| \bar{r} \times \left(\frac{d\bar{r}}{ds} \cdot \dot{s} \right) \right| \\ &= \frac{1}{2} |\bar{r} \times \bar{v}|. \end{aligned}$$

Introducând vectorul $\vec{\Omega} \in T_O\mathbb{R}^3$, unde $\vec{\Omega} \in \bar{\Omega}$, $\bar{\Omega} \stackrel{def}{=} \frac{1}{2} \bar{r} \times \bar{v}$, numit *viteză areolară* a punctului material M , are loc relația

$$\left| \vec{\Omega} \right| = \frac{dA}{dt}$$

(cf. [32], p. 162, [34], p. 234).

Vectorul $\vec{\Omega}$ se numește *vector-viteză areolară* al punctului material M .

Să descompunem vectorii \bar{r} , \bar{v} după două direcții ortogonale, dintre care una coliniară cu \bar{k} . Astfel, dacă

$$\bar{r} = (\bar{r} \cdot \bar{k})\bar{k} + \bar{r}_\perp = r_0\bar{k} + \bar{r}_\perp \quad \bar{v} = (\bar{v} \cdot \bar{k})\bar{k} + \bar{v}_\perp = v_0\bar{k} + \bar{v}_\perp,$$

deducem că

$$\begin{aligned}\bar{\Omega} \cdot \bar{k} &= \frac{1}{2}(r_0 \bar{k} \times \bar{v}_\perp + \bar{r}_\perp \times v_0 \bar{k} + \bar{r}_\perp \times \bar{v}_\perp) \cdot \bar{k} \\ &= \frac{1}{2}(\bar{r}_\perp \times \bar{v}_\perp) \cdot \bar{k} = \frac{1}{2}(\bar{r}_\perp, \bar{v}_\perp, \bar{k}).\end{aligned}$$

Am folosit *distributivitatea față de adunarea vectorilor* a produsului vectorial (cf. [34], p. 29). Prin derivare în raport cu timpul t , avem $\dot{\bar{r}} = \dot{r}_0 \bar{k} + \dot{\bar{r}}_\perp$. Cum $\dot{r}_0 = \frac{d}{dt}(\bar{r} \cdot \bar{k}) = \dot{\bar{r}} \cdot \bar{k} = \bar{v} \cdot \bar{k} = v_0$, se ajunge la $\dot{\bar{r}}_\perp = \bar{v}_\perp$. Aplicând metoda transformării Prüfer mărimii \bar{r}_\perp , obținem că

$$\bar{\Omega} \cdot \bar{k} = \frac{1}{2} r_1^2 \dot{\theta}_1, \quad (2.71)$$

unde $\bar{r}_\perp = r_1(\cos \theta_1 \cdot \bar{i} + \sin \theta_1 \cdot \bar{j})$, relație la care vom apela ulterior (cf. [76], p. 402).

2.1.17 Comentarii

În încheierea discuției privind elementele de cinematică a punctului material, să trecem în revistă câteva chestiuni semnificative pentru mecanica teoretică a sa.

1) (cf. [32], p. 23) În general, mișcarea punctului material M se descompune (prin descompunerea vectorilor) în trei mișcări rectilinii ale proiecțiilor acestuia pe trei axe ortogonale de coordonate (MacLaurin, 1742). În fiecare moment, viteza și accelerația punctului material M se compun (vectorial) din vitezele și accelerațiile acestor proiecții (H. Resal, 1862).

2) Presupunem că punctul material M se deplasează pe curba netedă orientată Γ în intervalul de timp I . Atunci, pentru $t_0 \in I$ are loc formula

$$\bar{r}(t_0 + \Delta t) = \bar{r}(t_0) + \Delta t \cdot \bar{v}(t_0) + o(|\Delta t|).$$

Când Δt este *suficient* de mic (infinitesimal), putem scrie că

$$\bar{r}(t_0 + \Delta t) = \bar{r}(t_0) + \Delta t \cdot \bar{v}(t_0). \quad (2.72)$$

Ecuția (2.72) aparține tangentei în punctul $M(t_0)$ la traiectoria Γ . În concluzie, *"infinit" de aproape de $M(t_0)$, mișcarea punctului material M poate fi aproximată cu o mișcare rectilinie (în linie dreaptă) uniformă desfășurată pe tangenta în $M(t_0)$ la curba Γ* (cf. [76], p. 285).

3) Fie $A \in E_3$ considerat fix în raport cu sistemul de referință \mathcal{R} și $\vec{v}_A(t) \in T_A\mathbb{R}^3$, unde $\vec{v}_A(t) \in \bar{v}$. Notăm cu γ *hodograful* vectorului-viteză \bar{v} al punctului material M (R. Hamilton, 1846) dat cu ajutorul vectorilor $\vec{v}_A(t)$, unde $t \in I$. Atunci, vectorul director $\vec{\eta}_N$ al tangentei în punctul $N(t)$ la γ verifică relația

$$\vec{\eta}_N \in \bar{a}(t), \quad t \in I.$$

Cu alte cuvinte, *acelerația punctului material M pe traiectoria Γ este echipolentă cu viteza extremității vectorului \vec{v}_A pe hodograful γ* (cf. [32], p. 23, [76], p. 285).

4) *Supraacelerația punctului material M în mișcarea pe curba simplă biregulară spațială Γ este nenulă.* Mai precis,

$$\dot{\bar{a}} = (\ddot{v} - \frac{v^3}{R^2}) \cdot \bar{\tau} + (\frac{3v\dot{v}}{R} - \frac{v^2}{R^2} \dot{R}) \cdot \bar{\nu} + \frac{v^3}{R} T \cdot \bar{\beta}$$

(cf. [76], p. 292).

5) Presupunând că punctul material M se deplasează pe suprafața netedă simplă S , putem stabili cu ajutorul formulelor Darboux-Ribaucour relațiile de mai jos

$$\begin{cases} \dot{\bar{\tau}} = \bar{\omega} \times \bar{\tau} \\ \dot{\bar{m}} = \bar{\omega} \times \bar{m} \\ \dot{\bar{n}} = \bar{\omega} \times \bar{n}, \end{cases}$$

unde $\bar{\omega} = v(\frac{d\theta}{ds} + T) \cdot \bar{\tau} - \frac{v \cos \theta}{R} \cdot \bar{m} + \frac{v \sin \theta}{R} \cdot \bar{n}$ (cf. [34], p. 175-176). Aici, mărimile $T_g \stackrel{\text{not}}{=} \frac{d\theta}{ds} + T$, $K_g \stackrel{\text{not}}{=} \frac{\sin \theta}{R}$, $K_n \stackrel{\text{not}}{=} \frac{\cos \theta}{R}$ reprezintă *torsiunea* și *curbura geodezică*, respectiv *curbura normală* (cf. [48], p. 64-65, 88-89, [57], p. 177).

6) Să considerăm suprafața netedă S având parametrizarea locală $\gamma : U \rightarrow E_3$ dată de (2.42). Introducem vectorul $\bar{p} \in T_{M(q^1, q^2)}S$ prin formula

$$\bar{p}(q^1, q^2) = p_1(q^1, q^2) \cdot \frac{\partial \sigma}{\partial q^1}(q^1, q^2) + p_2(q^1, q^2) \cdot \frac{\partial \sigma}{\partial q^2}(q^1, q^2),$$

unde $p_1, p_2 \in C^\infty(U, \mathbb{R})$, $(q^1, q^2) \in U$. Atunci, prin *liniarizare*, urmând expunerea făcută în [76], p. 962-964, putem scrie că

$$\begin{cases} p_i(q^1 + \Delta q^1, q^2 + \Delta q^2) = p_i(q^1, q^2) + \frac{\partial p_i}{\partial q^j}(q^1, q^2) \cdot \Delta q^j \\ \frac{\partial \sigma}{\partial q^i}(q^1 + \Delta q^1, q^2 + \Delta q^2) = \frac{\partial \sigma}{\partial q^i}(q^1, q^2) + \Delta q^j \cdot \frac{\partial^2 \sigma}{\partial q^i \partial q^j}(q^1, q^2), \end{cases}$$

unde $i = 1, 2$. Am utilizat convenția de sumare a indicelui "mut". Neglijând termenii de ordinul al doilea în $\Delta q^1, \Delta q^2$, obținem

$$\bar{p}(q^1 + \Delta q^1, q^2 + \Delta q^2) = \bar{p}(q^1, q^2) + (p_i \cdot \frac{\partial^2 \sigma}{\partial q^i \partial q^j} + \frac{\partial p_i}{\partial q^j} \cdot \frac{\partial \sigma}{\partial q^i}) \cdot \Delta q^j.$$

În continuare, conform formulei lui Gauss (2.51), avem că

$$\begin{aligned} \Delta \bar{p} &= [(p_i \Gamma_{ij}^k \cdot \frac{\partial \sigma}{\partial q^k} + p_i h_{ij} \cdot \bar{n}) + \frac{\partial p_k}{\partial q^j} \cdot \frac{\partial \sigma}{\partial q^k}] \cdot \Delta q^j \\ &= (p_i \Gamma_{ij}^k + \frac{\partial p_k}{\partial q^j}) \Delta q^j \cdot \frac{\partial \sigma}{\partial q^k} + p_i h_{ij} \Delta q^j \cdot \bar{n}. \end{aligned}$$

Cum $\Delta p_k = \frac{\partial p_k}{\partial q^j} \Delta q^j$, ajungem, trecând la mărimi infinitezimale, la relația

$$\delta \bar{p} = (p_i \Gamma_{ij}^k \delta q^j + \delta p_k) \cdot \frac{\partial \sigma}{\partial q^k}(q^1, q^2) + p_i h_{ij} \delta q^j \cdot \bar{n}(q^1, q^2). \quad (2.73)$$

Fiind dat drumul neted $\zeta : I \rightarrow E_3$, situat pe suprafața S , introdus prin formula (2.46), egalitatea (2.56) arată că expresia diferențială anterioară este *exactă* pentru $\bar{p} = \sigma'(q)$.

Să considerăm $q_0 < q_1$ în intervalul I și problemele Cauchy

$$(C_k) \quad \begin{cases} \frac{dp_i}{dq} + \Gamma_{sj}^i(q^1(q), q^2(q)) \frac{dq^j}{dq}(q) \cdot p_s = 0, & q \in I \\ p_i(q_k) = a_i^k \in \mathbb{R}, \end{cases}$$

unde $i = 1, 2$ și $k = 0, 1$. Sistemul diferențial fiind liniar, aceste probleme vor admite soluție unică, de clasă C^∞ , definită pe întreg intervalul I (cf. [6], p. 78-79).

Introducem funcția $F : T_{M(q_0)}S \rightarrow T_{M(q_1)}S$ care asociază vectorului $a_1^0 \cdot \frac{\partial \sigma}{\partial q^1}(q^1(q_0), q^2(q_0)) + a_2^0 \cdot \frac{\partial \sigma}{\partial q^2}(q^1(q_0), q^2(q_0))$ vectorul $p_1(q_1) \cdot \frac{\partial \sigma}{\partial q^1}(q^1(q_1), q^2(q_1)) + p_2(q_1) \cdot \frac{\partial \sigma}{\partial q^2}(q^1(q_1), q^2(q_1))$, unde $\{p_i(q) : i = 1, 2\}$ reprezintă soluția problemei Cauchy (C_0) (cf. [57], p. 175). Folosind iarăși liniaritatea ecuațiilor diferențiale de mai sus, se arată ușor că aplicația F este liniară și injectivă. Existența în $q = q_0$ a soluției problemei Cauchy (C_1) pentru orice $a_i^1 \in \mathbb{R}$, unde $i = 1, 2$, implică surjectivitatea funcției F . Astfel, F definește un *izomorfism liniar între spațiile $T_{M(q_0)}S$ și $T_{M(q_1)}S$* .

Fiind dată o suprafață netedă S , calculul realizat anterior arată că, pentru orice curbă simplă Γ situată pe S și pentru orice două puncte $M_1, M_2 \in \Gamma$,

există un izomorfism liniar între spațiile $T_{M_1}S$, $T_{M_2}S$ care păstrează valoarea produsului scalar (2.49) al vectorilor și care nu depinde decât de curba Γ . Acesta se numește *paralelism Levi-Civita* (*transport paralel*) (cf. [57], p. 174, [76], p. 964).

Curba Γ este considerată *autoparalelă* în sens Levi-Civita dacă pentru orice $M \in \Gamma$ există o parametrizare locală a sa care îl conține pe M astfel încât vectorii tangenți la porțiunea de curbă dată de parametrizarea locală respectivă să-și autocorespundă în transportul paralel (cf. [57], p. 176, [76], p. 965).

Conform ecuației (2.57), *drumul neted* $\zeta : I \rightarrow E_3$ *situat pe suprafața* S *este geodezic dacă și numai dacă este autoparalel în sens Levi-Civita*.

Cu ajutorul relației (2.73) se dă o justificare intuitivă noțiunii de transport paralel. Astfel, în SF , vectorul $\vec{u} \in T_O\mathbb{R}^3$, unde $\vec{u} \in \bar{u}$, poate fi transportat prin echipolență în orice punct A : $\vec{u}_A \in T_A\mathbb{R}^3$, $\vec{u}_A \in \bar{u}$. Vectorii \vec{u} , \vec{u}_A fiind paraleli (geometric), $\delta\bar{u} = 0$. Atunci, considerând vectorul $\vec{p} \in T_M\mathbb{R}^3$, unde $\vec{p} \in \bar{p}$ și $\bar{p} \in T_MS$, spunem că \vec{p} este transportat paralel de-a lungul drumului neted $\zeta : I \rightarrow E_3$ din punctul $M(q_0)$ până în punctul $M(q_1)$ dacă vectorul-proiecție pe planul $T_{M(q)}S$ al lui $\delta\bar{p}$ este nul pentru orice $q \in [q_0, q_1]$.

2.2 Statica și dinamica

Considerațiile făcute până acum, neimplicând masa punctului material, s-au limitat la menționarea anumitor aspecte de algebră liniară, geometrie diferențială a curbelor și suprafețelor, analiză reală și teoria integralei Lebesgue, etc. Nu trebuie însă trasă concluzia, de aici, că mecanica teoretică ar reprezenta o înșiruire de procedee matematice (cf. [34], p. 215-216), fără legătură cu viața de zi cu zi. În schimb, mecanica teoretică urmărește ”reproducerea” în cadrul unui *model matematic* a fenomenelor de mișcare mecanică sau de echilibru ale corpurilor materiale, dând astfel posibilitatea *descrierii* și *prevederii* unor asemenea fenomene (cf. [34], p. 211). Firește, aceste ”reproduceri” se realizează în mod aproximativ, simplificat, prin ”schematizarea” fenomenelor studiate (cf. [32], p. 11). Ca exemplu de model matematic (teoretic) am întâlnit deja *punctul material (particula)*, noțiune prin care este desemnat *un corp material ale cărui dimensiuni și rotații instantanee proprii sunt neglijabile în problema dată* (cf. [32], p. 18, [34], p. 220-221, [76], p. 3). De asemeni, prin punct material înțelegem și *cea mai ”mică” diviziune dintr-un corp material care are proprietățile fizice ale acestuia* (cf.

[63], p. 18), ceea ce este în acord cu caracterul de *mărime aditivă* al *masei corpurilor materiale* (cf. [56], p. 15). Vezi (2.69).

Rolul de bază în cele ce urmează îl joacă noțiunea de *forță*. Aceasta are la origine *senzația de efort care apare atunci când ridicăm sau ținem o greutate, când tragem sau împingem un corp pe o suprafață* (cf. [32], p. 43). Cum putem preciza *direcția și sensul* în care realizăm acest efort, ca și *locul* (punctul) în care ”apăsăm” ori de care ”tragem”, este normal ca forța să fie *abstractizată* sub forma unui *vector* (cf. [32], p. 43, [34], p. 6, 221). Astfel, spunem că asupra punctului material M *acționează* forța \vec{F} dacă precizăm vectorul $\vec{F} \in T_M \mathbb{R}^3$ (cf. [34], p. 8). Utilizarea unui alt model matematic al corpurilor materiale va afecta, în general, definiția forței. În cazul corpurilor solide rigide, de exemplu, forțele sunt reprezentate prin vectori alunecători (cf. [34], p. 8).

Statica și dinamica constituie părți ale mecanicii teoretice (structurată, din punct de vedere metodologic și istoric, în statică, cinematică și dinamică; cf. [76], p. 4, [34], p. 218) cu o evoluție diferită. Statica s-a dezvoltat încă din antichitate¹⁴ în legătură cu probleme specifice construcțiilor, care necesitau, mai ales, studiul *echilibrului* diferitelor corpuri materiale. Spre deosebire de statică, dinamica este o știință relativ ”tânără”, ale cărei principii sunt formulate satisfăcător abia în secolele XVII-XVIII (cf. [76], p. 109, [34], p. 211). D’Alembert consideră pentru prima oară statica drept un *caz particular* al dinamicii (cf. [34], p. 211). În 1743, el formulează *metoda cinetostatică* de rezolvare a problemelor de dinamică (cf. [34], p. 217, [76], p. 13, [63], p. 497-498).

Statica studiază transformarea sistemelor de forțe aplicate corpurilor materiale în sisteme echivalente și condițiile de echilibru ale acestor corpuri sub acțiunea sistemelor de forțe date (cf. [34], p. 218, [76], p. 4, [63], p. 15).

*Dinamica*¹⁵ studiază mișcarea corpurilor materiale bazându-se pe rezultatele cinematicii și ținând seama de forțele care acționează asupra lor, precum și de masa lor (cf. [34], p. 219, [76], p. 5, [63], p. 15).

¹⁴Cf. [12], p. 26, ”pentru filozofia antică, staticul, imobilitatea, obținuse un accent de întâietate față de tot ce este dinamic, mișcător, în sensul că aceste categorii din urmă sunt socotite ca derivate, ca atribute ale neexistenței sau ale semiexistenței.” Zenon eleatul ”demonstrează” că mișcarea este o contradicție, o imposibilitate (vezi *op. cit.*, p. 111).

¹⁵*dýnamis*, adică putere (Platon), potențialitate (Aristotel), cf.[58], p. 69.

2.2.1 Principiile dinamicii

Mecanica clasică este constituită pe baza a trei *principii* fundamentale, numite *lex* (legi), descrise de I. Newton în 1687 în lucrarea "Principiile matematice ale filozofiei naturale" (cf. [32], p. 41, [34], p. 214, [63], p. 19).

Principiul inerției (lex prima). *Un punct material își păstrează starea de repaus sau de mișcare rectilinie uniformă atâta timp cât nu intervine vreo forță care să-i modifice această stare.*

Acest principiu a fost dat inițial, într-o formulare asemănătoare, de Galilei (1632) (cf. [76], p. 12, [32], p. 41, [34], p. 213, [63], p. 15-16). El combate *teoria aristoteliană* conform căreia un corp se oprește atunci când forțele aplicate asupra lui își încetează acțiunea (cf. [63], p. 14).

Principiul inerției nu poate fi verificat "în practică" deoarece corpurile materiale nu pot fi sustrate complet acțiunii altor corpuri materiale¹⁶.

Experiența arată că un corp material se opune acțiunilor exterioare menite să-i schimbe starea de repaus sau de mișcare rectilinie uniformă descrisă de principiul inerției. Astfel, un automobil care se deplasează pe șosea cu viteză mare (constantă) are *tendința* de a derapa la viraje, adică de a-și *menține* traiectoria dreaptă (cf. [32], p. 42). Această *opozitie* la schimbarea stării de mișcare/repaus reprezintă *inerția* corpurilor materiale.

Într-o formulare mai cuprinzătoare a principiului inerției, putem spune că *particulele suficient de depărtate unele de altele (izolate între ele) se mișcă unele față de altele rectiliniu uniform*¹⁷ (cf. [32], p. 42).

Principiul fundamental al dinamicii (lex secunda). *Accelerația unui punct material este proporțională cu forța motoare aplicată și este îndreptată în direcția după care acționează forța.* Newton a introdus *masa* m a punctului material M pentru a exprima această proporționalitate între forță și accelerație:

$$\vec{F} = m \cdot \vec{a} \quad (2.74)$$

(cf. [76], p. 9).

Principiul acțiunii și reacțiunii (lex tertia). *Oricărei acțiuni îi corespunde întotdeauna o reacțiune egală și contrară; sau, acțiunile reciproce a două puncte materiale sunt întotdeauna egale și îndreptate în sens contrar*

¹⁶O interesantă analiză a acestei chestiuni poate fi citită în [12], p. 83.

¹⁷Un punct material, deplasându-se pe o hiperbolă sub acțiunea forței newtoniene (2.76), se va mișca rectiliniu uniform *la infinit* față de originea sistemului de referință - focarul traiectoriei sale. Vezi [60], exercițiul 8.2, p. 14.

(cf. [76], p. 10). Cu alte cuvinte, fiind date punctele materiale M_1 , M_2 aflate suficient de departe de alte puncte materiale pentru ca acestea să nu le influențeze mișcarea, dacă M_1 acționează asupra lui M_2 cu forța $\vec{F}_{12} \in T_{M_2}\mathbb{R}^3$, atunci și M_2 acționează asupra lui M_1 cu forța $\vec{F}_{21} \in T_{M_1}\mathbb{R}^3$ astfel încât vectorii \vec{F}_{12} , \vec{F}_{21} sunt coliniari cu $\overline{M_1M_2}$ și $\vec{F}_{12} + \vec{F}_{21} = 0$ (cf. [34], p. 223-224). \vec{F}_{12} este *acțiunea*, respectiv \vec{F}_{21} este *reacțiunea*.

Se cuvine subliniat faptul că avem de a face cu o *interacțiune*, forțele \vec{F}_{12} , \vec{F}_{21} fiind aplicate *simultan*, și nu cu un proces cauză-efect (cf. [32], p. 46).

Extensia d'Alembert a legii lui Newton (2.74) (cf. [73], p. 494)

$$(m\bar{a} - \vec{F})\delta\bar{r} = 0$$

împreună cu folosirea sistematică a *lucrului mecanic* permit renunțarea la principiul acțiunii și reacțiunii (cf. [56], p. 86, 113) în anumite situații (de exemplu, în absența *frecării*, cf. [76], p. 763, [41], p. 20). Nu vom urma această cale aici.

Trebuie menționat faptul că Newton numește *reacțiunea* \vec{F}_{21} cu care M_2 se "împotrivește" acțiunii lui M_1 *forță de inerție* (cf. [32], p. 201).

În comentariul făcut de Newton principiului fundamental al dinamicii, comentariu denumit **Corolarul I** (cf. [76], p. 10, [63], p. 19), este precizată modalitatea de *compunere* a forțelor care acționează asupra unui punct material, și anume *regula paralelogramului*. Aceasta era cunoscută în statică încă din antichitate (Heron), dar o formulare precisă a sa a fost dată abia de Stevin (1586) (cf. [32], p. 43, [76], p. 12, 109, [34], p. 215).

Principiul paralelogramului (independenței acțiunii forțelor). *Un punct material aflat sub acțiunea simultană a două forțe descrie (pornind din repaus) diagonala unui paralelogram având ca laturi aceste forțe, în același timp în care ar descrie separat fiecare latură sub acțiunea forței corespunzătoare. Astfel,*

$$\sum_h \vec{F}_h = m \cdot \left(\sum_h \vec{a}_h \right).$$

Principiul condițiilor inițiale (enunțat de Galilei, cf. [34], p. 213, 224). *Dacă două puncte materiale se găsesc suficient de departe de orice alte puncte materiale, forțele cu care ele interacționează sunt bine determinate la momentul t , în mărime, direcție și sens, dacă se cunosc la acel moment pozițiile relative ale celor două puncte materiale și vitezele lor relative. În*

acest fel este combătută *concepția scolastică* potrivit căreia mișcarea unui corp poate fi determinată doar prin cunoașterea poziției lui inițiale (cf. [34], p. 213).

În teoria sa, Newton consideră *masa* drept *măsură a cantității de materie* conținută în corpul material și *element caracteristic* al existenței acestuia (cf. [32], p. 43, [76], p. 8, [63], p. 13). Așa cum apare în (2.74), masa m a punctului material M reprezintă *o măsură a inerției lui M* , adică a gradului de opunere a punctului material la acțiunile exterioare menite să-i schimbe starea de repaus sau de mișcare rectilinie uniformă (cf. [34], p. 223). Într-adevăr, cu cât masa unui corp este mai mare, cu atât accelerația corpului, produsă de o forță dată, este mai mică. Practic, dacă se află la început în repaus, corpul este tot mai greu de *urnit* concomitent cu mărirea masei lui. Ca măsură a inerției corpurilor, masa m poartă denumirea de *masă inertă (inertială)*, $m = m_i$.

În mecanicile avansate, spre deosebire de mecanica newtoniană, masa corpurilor nu mai este independentă de timp. Astfel, în mecanica relativistă avem

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \quad m_0 = \text{masă de repaus},$$

în mecanica invariantivă (O. Onicescu)

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \varepsilon \cdot \frac{v^2}{\omega^2}}}, \quad \varepsilon \in \{\pm 1\},$$

unde ω poate fi considerat c (viteza luminii în vid), etc (cf. [32], p. 44, [56], p. 323). Când $v \ll c$, adică $\frac{v}{c} \simeq 0$, obținem $m \simeq m_0$. Deci masa m este *constantă* (cf. [32], p. 49). Viteza c este aproximativ $3 \cdot 10^8$ m/s, fapt descoperit de Rómer în 1676 pe baza observațiilor astronomice asupra unuia dintre sateliții lui Jupiter (cf. [43], p. 52).

O altă manifestare a materiei în mecanica clasică este dată de proprietatea corpurilor materiale de a atrage corpurile din jur, adică de a crea *câmp gravitațional* (cf. [63], p. 17, [32], p. 45-46, 173, [76], p. 508). Astfel,

$$\vec{F} = m \cdot \vec{\Gamma}, \quad (2.75)$$

unde $\vec{\Gamma}$ reprezintă *intensitatea* câmpului gravitațional generat de corpul punctiform M . **Legea atracției universale**, descoperită de Newton în 1687 (cf. [32], p. 163, 182, [54], p. 10) afirmă că *două corpuri punctiforme se*

atrag între ele cu o forță direct proporțională cu produsul maselor lor (gravitaționale) și invers proporțională cu pătratul distanței dintre ele. Așadar¹⁸,

$$\vec{F} = -\gamma \cdot \frac{m_1 m_2}{r^2} \cdot \frac{\vec{M}_1 \vec{M}_2}{r}, \quad (2.76)$$

unde $\gamma = 6,67 \cdot 10^{-11} \text{ N} \cdot \text{m}^2/\text{kg}^2$ desemnează *constanta atracției universale* (H. Cavendish, 1798) (cf. [34], p. 358, [32], p. 163-165, [43], p. 45). Coeficientul de proporționalitate m din (2.75) poartă denumirea de *masă gravifică* (*grea, gravitațională, sarcină gravifică*) (cf. [32], p. 46, [76], p. 508), $m = m_g$.

În mecanica newtoniană se admite *egalitatea* masei inerțiale cu masa gravifică. Experiența făcută de Eötvös arată cu o precizie de 10^{-7} (cf. [54], p. 10) că cele două mase sunt *proporționale*, raportul lor nedepinzând de forma corpului ori de materialul din care acesta este confecționat (natura sa) (cf. [32], p. 183). În concluzie, inerția și gravitația (calitatea materiei de a crea câmp gravitațional) sunt proprietăți ale unei *mase unice*:

$$\frac{m_i}{m_g} \equiv 1.$$

Astfel, intensitatea $\vec{\Gamma}$ va căpăta semnificația unei *acelerații*, notate \vec{g} , numită *acelerație gravitațională* (cf. [32], p. 29, 173). În vid, experimentele arată că toate corpurile cad cu *aceeași* accelerație g , independentă de masa, natura, dimensiunile ori forma lor (cf. [32], p. 29-30, 45). Vectorul \vec{g} are *local* direcția verticală (perpendiculara pe podeaua camerei) și sens descendent (cf. [34], p. 242). Utilizând *modelul sferic* al Pământului, dreapta-suport a lui \vec{g} trece prin centrul acestuia (cf. [32], p. 29, 183, 205). În realitate, "verticala" locului, determinată cu ajutorul *firului cu plumb*, suferă o *deviație* α (vezi Figura 2.11) ce se datorează mișcării de rotație a Pământului în jurul axei polilor și care își atinge valoarea maximă ($\alpha_{\max} \simeq 6'$) pe paralela $\lambda = 45^\circ$ (cf. [32], p. 205-206, [76], p. 148, 507-508, [34], p. 434-436).

Accelerația gravitațională g variază cu latitudinea și altitudinea. La ecuator, $g = 9,7805 \text{ m/s}^2$ iar la paralela 45° $g = 9,80616 \text{ m/s}^2$ (cf. [32], p. 30). O formulă de calcul aproximativă, cu valabilitate la nivelul mării, este

$$g = g_0 \cdot \left(1 + \frac{1}{288} \cdot \sin^2 \lambda \right),$$

¹⁸Conceptul lui Newton de "acțiune la distanță" a forței este de natură metafizică: "Și nu încapе vorbă că acest concept închidea în sine reziduuri paradoxale de gândire magică", cf. [12], p. 109.

unde λ definește *latitudinea* locului, iar g_0 desemnează accelerația gravitațională la ecuator (cf. [34], p. 436, [76], p. 508-509). Ea va fi stabilită ulterior.

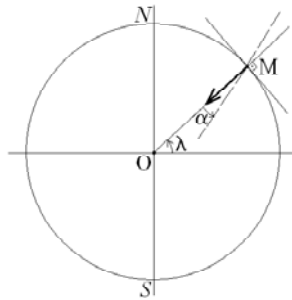


Figura 2.11

Egalitatea masei gravifice cu masa inerțială permite *determinarea masei unui corp prin cântărire* (cf. [32], p. 45, [54], p. 10).

Greutatea unui corp reprezintă forța cu care acesta este atras de Pământ, $\vec{G} = m \cdot \vec{g}$. *Static*, greutatea se manifestă prin forța cu care corpul apasă pe un plan orizontal sau întinde firul de suspensie. *Dinamic*, greutatea produce căderea corpului lăsat liber. Așa cum am spus deja, mărimea sa G , determinată prin măsurători fizice (greutate *aparentă*), reflectă mișcarea de rotație a Pământului în jurul axei polilor.

Prin introducerea relațiilor (2.74), (2.76) este combătută definitiv *teoria aristoteliană* a forței tangente la traiectorie (cf. [76], p. 431).

2.2.2 Ecuațiile diferențiale ale lui Newton

Relația (2.74) arată că un punct material M_1 , acționând asupra altui punct material M_2 , îi imprimă acestuia din urmă o anumită *accelerație* \vec{a}_{12} . Cu alte cuvinte, interacțiunea corpurilor se produce prin *inducerea* de accelerații, independent de natura fizică a respectivelor interacțiuni. Spunem că *forța*, așa cum apare ea în (2.74), dă un *model* al interacțiunii corpurilor (cf. [32], p. 44). Relația (2.74) se mai numește și *definiția dinamică* a forței.

Ceea ce nu putem preciza în relația (2.74) este *natura* forței: gravitațională, electromagnetică, elastică, etc. Faptul că relația (2.74) caracterizează în egală măsură *toate* forțele care intervin în viața de zi cu zi, indiferent de specificul lor, arată că ea reprezintă o *lege a naturii* (cf. [32], p. 44). Pe de altă parte însă, necunoașterea naturii forței se reflectă prin aceea că nu

putem afirma nimic, de exemplu, despre traiectoria punctului material supus ei.

Fie punctul material M , de masă m , caracterizat la momentul inițial al mișcării sale față de sistemul de referință \mathcal{R} de raza vectorie \bar{r}_0 și de vectorul-viteză \bar{v}_0 . Presupunem că asupra sa acționează forța \bar{F} , unde

$$\bar{F} = -\frac{k}{r^\lambda} \cdot \bar{r}, \quad \lambda, k > 0, \lambda \neq 2.$$

Atunci, conform (2.74), avem

$$m \cdot \ddot{\bar{r}} = -\frac{k}{r^\lambda} \cdot \bar{r},$$

de unde

$$\ddot{\bar{r}} \cdot \dot{\bar{r}} = -\frac{k}{m} \cdot \frac{1}{r^\lambda} \cdot (\bar{r} \cdot \dot{\bar{r}})$$

și

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} \dot{\bar{r}}^2 \right) = -\frac{k}{m} \cdot \frac{1}{r^\lambda} \cdot \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} \bar{r}^2 \right).$$

Așadar,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} \bar{v}^2 \right) &= -\frac{k}{m} \cdot \frac{1}{r^\lambda} \cdot \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} r^2 \right) \\ &= -\frac{k}{2m} \cdot (r^2)^{-\frac{\lambda}{2}} \cdot \frac{d}{dt} (r^2) \\ &= \frac{k}{m} \cdot \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{\lambda - 2} \cdot r^{2-\lambda} \right). \end{aligned}$$

Integrând în raport cu timpul t , obținem că

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} v^2 - \frac{k}{m} \cdot \frac{1}{\lambda - 2} r^{2-\lambda} &= \frac{1}{2} v_0^2 - \frac{k}{m} \cdot \frac{1}{\lambda - 2} r_0^{2-\lambda} \\ &= \text{constant}, \quad t \geq t_0. \end{aligned}$$

Relația de mai sus, care leagă viteza punctului material M de distanța dintre acesta și originea reperului \mathcal{R} , este *extrem* de particulară. Dându-i lui λ valori din $(0, 2)$ respectiv $(2, +\infty)$ ajungem la rezultate de *natură* diferită. În acest mod a devenit evident, pe de o parte, că este nevoie de cunoașterea *formulei* forței în (2.74) pentru rezolvarea anumitor probleme de dinamică.

Pe de altă parte, relația (2.74) poate fi privită drept *scrierea vectorială a unui sistem de ecuații diferențiale*.

Într-adevăr, ținând cont de principiul condițiilor inițiale, are sens introducerea problemei Cauchy de mai jos

$$\begin{cases} m \cdot \ddot{\bar{r}} = \bar{F}(t, \bar{r}, \dot{\bar{r}}), & t \geq t_0 \\ \bar{r}(t_0) = \bar{r}_0 \\ \dot{\bar{r}}(t_0) = \bar{v}_0. \end{cases} \quad (2.77)$$

Proiectarea pe axele reperului canonic \mathcal{R} a sistemului (2.77) ne conduce la *ecuațiile diferențiale ale lui Newton*. După C. Truesdell, aceste ecuații apar sub formă explicită abia în 1749, la L. Euler (cf. [34], p. 216). În "Principiile matematice ale filozofiei naturale" nu se găsesc ecuații diferențiale sub formă explicită. Ele sunt întâlnite în "Metoda fluxiunilor și a seriilor infinite" scrisă de I. Newton în jurul anului 1671 și tipărită în 1736. Termenul de "ecuație diferențială" a fost introdus de G. Leibniz într-o scrisoare către Newton din 1676 (cf. [72], p. 498 și nota de subsol, p. 499).

Sistemul diferențial

$$\begin{cases} \ddot{x} = \frac{1}{m} F_x(t, x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}) \\ \ddot{y} = \frac{1}{m} F_y(t, x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}) \\ \ddot{z} = \frac{1}{m} F_z(t, x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}) \end{cases} \quad (2.78)$$

cu datele Cauchy

$$\begin{cases} x(t_0) = x_0 & y(t_0) = y_0 & z(t_0) = z_0 \\ \dot{x}(t_0) = v_{0x} & \dot{y}(t_0) = v_{0y} & \dot{z}(t_0) = v_{0z} \end{cases}$$

va avea soluție unică în $C^\infty([t_0, +\infty), \mathbb{R})$ dacă impunem ca funcțiile F_x, F_y, F_z să fie de clasă C^∞ în raport cu ansamblul variabilelor lor și, simultan, *lipschitziene*¹⁹ în raport cu $x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}$.

¹⁹Această cerință este generică. În multe situații din viața de zi cu zi o asemenea restricție nu are loc și este nevoie de tehnici speciale (de exemplu, utilizarea *principiului inerției* - V. Vâlcovici), cf. [76], p. 398-399. Teoreme de unicitate a soluției unei probleme Cauchy în absența ipotezei Lipschitz pot fi citite în [31], p. 35, - teorema van Kampen - sau în J. Bownds, *A uniqueness theorem for non-lipschitzian systems of ordinary differential equations*, Funkcialaj Ekvacioj **13**(1970), p. 61-65.

Existența în $[t_0, +\infty)$ a soluției problemei (2.77), respectiv în $(-\infty, +\infty)$ atunci când timpul t nu apare sub formă explicită în (2.77), este în acord cu caracterul *perpetuu* al mișcării mecanice (cf. [56], p. 62). Împreună, existența și unicitatea soluției problemei (2.77) asigură *determinismul* mecanicii newtoniene.

Rezolvarea (integrarea) problemei (2.77) se realizează prin determinarea *integralelor prime*

$$f_i(t, x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}) = C_i, \quad i = \overline{1, 6},$$

astfel ca

$$\frac{D(f_1, \dots, f_6)}{D(x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z})} \neq 0$$

(cf. [6], p. 170-171, [72], p. 356-357, [56], p. 62-63).

Din punctul de vedere al teoriei generale a ecuațiilor diferențiale ordinare, lucrurile sunt lămurite. Totuși, nu orice integrală a problemei (2.77) găsită este mulțumitoare. Dat fiind că ecuațiile care intervin, plecând de la (2.77), în problemele de dinamică sunt, în general, complicate, se caută integrale prime care să poată fi *interpretate* din punct de vedere fizic. Astfel, sunt de interes acelea dintre integralele problemei (2.77) care, conținând relații între coordonatele punctului material, componentele vitezei sale pe axele sistemului de referință și timp, traduc în limbaj matematic proprietăți mecanice ale mișcării numite *legi de conservare* (cf. [34], p. 227, [56], p. 64).

2.2.3 Repere inerțiale. Principiul relativității în mecanica clasică

Principiul inerției, esențial în mecanica newtoniană, poate fi regăsit prin integrarea succesivă a relației (2.74):

$$m \cdot \ddot{\vec{r}} = 0, \quad t \geq t_0. \quad (2.79)$$

Astfel,

$$\vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{v}_0 \cdot (t - t_0),$$

ceea ce dovedește caracterul *rectiliniu* al mișcării punctului material ($v_0 \neq 0$) în absența oricărei forțe.

Matematic, calculul anterior este suficient de simplu pentru a părea neinteresant. În mecanică, însă, lucrurile nu se petrec la fel. Să presupunem că

ținem în mână dreaptă o bilă de fier. La un moment dat, prin desfacerea degetelor, lăsăm bila să cadă. Ce s-a întâmplat, de fapt? Dacă vom considera că degetele mâinii drepte alcătuiesc sistemul de referință \mathcal{R} , atunci bila de fier este în repaus (față de reperul \mathcal{R}) și, făcând abstracție de presiunea aerului, asupra sa nu acționează nici o forță exterioară. Conform principiului inerției, bila ar trebui să stea pe loc sau, în cel mai rău caz (fără *valabilitate*, dar îngăduit de dragul contradicției), să se miște rectiliniu uniform. În realitate, mișcarea sa, deși rectilinie, este accelerată, cu formula aproximativă (se neglijează rezistența aerului)

$$s = \frac{1}{2}g(t - t_0)^2$$

în baza *legii de cădere liberă* a corpurilor materiale (cf. [76], p. 294, [32], p. 27, [17], p. 68-69).

Există, așadar, sisteme de referință în care un punct material *liber* (adică, nesupus vreunei acțiuni exterioare), aflat la un moment dat în repaus, începe să se miște *cu de la sine putere* (cf. [41], p. 12). Într-un asemenea sistem de referință principiul inerției nu mai este valabil. Modelul matematic adoptat de mecanica clasică nu poate fi utilizat în situația descrisă mai sus. Astfel, bila de fier aflată la nivelul mâinii drepte *cade* dacă este lăsată *liberă*. În schimb, aceeași bilă, odată *translatată* până pe sol, va rămâne *în repaus* (față de reperul \mathcal{R}). Ceea ce dovedește că spațiul nu este *omogen* în cazul de față.

Analiza făcută succint problemei *cu bila de fier* pare, la prima vedere, *complet falsă*. Am neglijat în tot acest timp, în mod *vizibil*, prezența câmpului gravitațional al Pământului. Putem comenta situația în două moduri. Mai întâi, în cazul Pământului, *efectul* gravitației este cunoscut, ușor depistabil în viața de zi cu zi. Ce se întâmplă însă dacă, alegând o altă zonă a spațiului fizic pentru experiențele noastre, ne vom afla în raza de acțiune a unor câmpuri despre care nu știm nimic și care nu se dovedesc la fel de facil depistabile? Apoi, putem spune că, prin introducerea unui *model matematic* al SF , în particular cel având reperul canonic \mathcal{R} dat de degetele mâinii drepte, *alegem* să axiomatizăm, abstractizăm, schematizăm, etc. anumite fenomene fizice. Putem, în concluzie, asimila Pământul în structura SF astfel încât el să nu "se vadă" de la nivelul degetelor. Înglobarea forței gravitaționale în structura spațiului este specifică *mecanicii relativiste* a lui Einstein (cf. [76], p. 429, 432).

Rămânând în cadrul mecanicii newtoniene, vom numi *reper inerțial* acel

sistem de referință \mathcal{R} în care modelul matematic al SF descris în primul capitol și principiile mecanicii sunt aprioric valabile (cf. [34], p. 221, [32], p. 42, [54], p. 11).

Nu există, evident, reper cartezian care să poată fi privit ca un sistem de referință *riguros* inerțial. În marea majoritate a problemelor de mecanică este ales ca sistem de referință inerțial un triedru cu originea în *centrul de masă* al sistemului solar (confundat aproape cu Soarele, cf. [76], p. 525) și axele dirijate spre trei stele care *ne apar* fixe pe bolta cerească (cf. [34], p. 429, [54], p. 11).

Într-o primă aproximație, la problemele de zi cu zi, implicând corpuri de mărime obișnuită ce se deplasează pe distanțe mici, putem folosi un reper cartezian *local, legat* de Pământ (aflat în repaus față de cameră) (cf. [14], p. 7-8, [34], p. 433, [2], p. 4). Așa cum afirmă profesorul C. Iacob, *sensul mai profund al discuțiilor duse de Galilei împotriva adversarilor săi, în legătură cu valabilitatea sistemului heliocentric al lui Copernic revine tocmai la discutarea problemei dacă un reper legat de centrul Soarelui și cu axele de direcții fixe poate fi socotit ca un reper inerțial sau dacă, din contră, un reper cu originea în centrul Pământului și cu axele de direcții fixe ar avea această proprietate* (cf. [34], p. 429).

O chestiune subsidiară celei a existenței reperului inerțial se cuvine adusă în discuție. Am menționat anterior faptul că, în mecanica newtoniană, duratele evenimentelor și lungimea obiectelor (distanțele) sunt independente de mișcarea instrumentelor de măsură. Se poate pune, în mod logic, următoarea întrebare. În ce fel afectează *mișcarea* unui reper cartezian, luat ca sistem de referință într-o anumită problemă de mecanică, principiile fundamentale pe care trebuie să le utilizăm la rezolvarea problemei?

În primul rând, conform [56], p. 84-85, ținând seama de relațiile de raportare (1.2), deducem invarianța scrierii principiilor fundamentale ale mecanicii newtoniene atât cu vectori liberi cât și cu vectori legați față de *aplicațiile izometrice* ale SF . Apoi, pe baza definiției dinamice a forței, tragem concluzia că principiile fundamentale ale mecanicii newtoniene sunt invariante la mișcarea rectilinie uniformă ($\bar{\omega} = 0$, $\bar{v}_{transp} = \bar{v}_0$) a reperului cartezian \mathcal{R}' în care ele trebuie folosite față de un alt reper cartezian \mathcal{R} , "absolut" fix. Într-adevăr, aplicând legea de compunere a accelerațiilor în mișcarea relativă, putem scrie că

$$\bar{a} = \bar{a}_{rel},$$

de unde

$$\overline{F} = m \cdot \overline{a}_{rel.}$$

Această invarianță a principiilor fundamentale ale mecanicii newtoniene poartă denumirea de **principiul relativității** (Galilei, 1632; cf. [32], p. 50) în mecanica clasică. Profesorul O. Onicescu formulează principiul relativității astfel: *informațiile pe care ni le dau legile mecanicii despre poziția unui sistem material sunt insensibile la o translație rectilinie și uniformă globală a universului care cuprinde în același timp obiectele și reperul* (cf. [56], p. 86).

Cazul general ($\overline{\omega} \neq 0$) va fi dezvoltat ulterior.

Relațiile (vezi (2.25))

$$\begin{cases} \overline{AM} = \overline{OM} - \overline{r}_0 - \overline{v}_0 \cdot t' \\ t' = t - t_0, \end{cases}$$

care fac trecerea de la \mathcal{R} la \mathcal{R}' , se numesc *transformările Galilei* (cf. [32], p. 48, [34], p. 226, [76], p. 503).

Așadar, *principiile fundamentale ale mecanicii sunt invariante la transformările Galilei iar reperele inerțiale (în ipoteza existenței a măcar unuia) se mișcă unul față de celălalt rectiliniu uniform* (cf. [32], p. 49, 50).

2.2.4 Impulsul punctului material. Teorema impulsului

Din (2.74), ținând seama de independența masei m față de timp, rezultă că

$$\overline{F} = m \cdot \overline{a} = m \cdot \frac{d\overline{v}}{dt} = \frac{d(m \cdot \overline{v})}{dt}.$$

Vectorul $\overline{p} \in T_M \mathbb{R}^3$, $\overline{p} \in \overline{p}$, unde $\overline{p} = m \cdot \overline{v}$, poartă denumirea de *impulsul* punctului material M . O formulare echivalentă a principiului fundamental al dinamicii este dată de relația

$$\overline{F} = \frac{d\overline{p}}{dt}. \quad (2.80)$$

Sub această *formă* (forța aplicată unui corp punctiform reprezintă *variția* impulsului acestuia pe unitatea de timp; cf. [56], p. 59), principiul fundamental al dinamicii poate fi folosit în mecanici avansate, de exemplu,

în mecanica relativistă (cf. [32], p. 225), unde masa nu mai reprezintă, în general, o mărime constantă (cf. [54], p. 10). Noțiunea de impuls a fost introdusă de Leonardo da Vinci și Galilei sub numele de "impetus" (cf. [76], p. 375). Newton folosește denumirea de "cantitate de mișcare" (cf. [34], p. 227, [54], p. 9). Căutând o *măsură* a mișcării mecanice, Descartes (1644) introduce mărimea $m \cdot v$ (cf. [76], p. 384, [32], p. 59).

Integrând (2.80), avem ($\varepsilon > 0$)

$$\int_{t_0-\varepsilon}^{t_0+\varepsilon} \overline{F} dt = \Delta \overline{p}. \quad (2.81)$$

Mărimea din membrul stâng al egalității anterioare, numită *percuție* (*percusiune*, *impuls*) a forței \overline{F} atunci când intervalul de timp Δt pe care are loc integrarea este foarte "mic" (cf. [32], p. 52, [76], p. 400, [54], p. 15), se notează cu \overline{H} . Astfel, are loc **teorema impulsului**: *impulsul (percuția) forței rezultante aplicate punctului material este egal cu variația impulsului acestuia* (cf. [32], p. 53, [34], p. 616).

În cazul punctului material liber, principiul inerției arată că

$$\overline{p} = \text{constant}. \quad (2.82)$$

(cf. [54], p. 9).

Formula (2.81) se utilizează în teoria ciocnirilor, acolo unde apar restricții de netezime a parametrilor cinematici (cf. [32], p. 53, [54], p. 15, [34], p. 616-617):

$$\begin{aligned} \overline{H} &= \lim_{\varepsilon \searrow 0} \int_{t_0-\varepsilon}^{t_0+\varepsilon} \overline{F} dt \\ &= m \cdot \overline{v}(t_0 + 0) - m \cdot \overline{v}(t_0 - 0). \end{aligned}$$

2.2.5 Momentul forței. Momentul cinetic (orbital) al punctului material. Teorema momentului cinetic

Formula care dă **teorema momentului cinetic** va fi obținută în două etape. Mai întâi, pornind de la (2.74), putem scrie

$$\overline{r} \times m\overline{a} = m \left(\overline{r} \times \frac{d\dot{\overline{r}}}{dt} \right) = m \left[\left(\overline{r} \times \frac{d\dot{\overline{r}}}{dt} \right) + \left(\frac{d\overline{r}}{dt} \times \dot{\overline{r}} \right) \right]$$

$$\begin{aligned}
 &= m \cdot \frac{d}{dt} (\bar{r} \times \dot{\bar{r}}) = \frac{d}{dt} (\bar{r} \times m\dot{\bar{r}}) \\
 &= \frac{d}{dt} (\bar{r} \times \bar{p})
 \end{aligned}$$

și

$$\frac{d}{dt} (\bar{r} \times \bar{p}) = \bar{r} \times \dot{\bar{p}}. \quad (2.83)$$

Apoi, pentru $A \in E_3$ ales arbitrar, avem, conform (2.25),

$$\bar{r} \times \bar{p} = \overline{OA} \times \bar{p} + \overline{AM} \times \bar{p} \quad \bar{r} \times \dot{\bar{p}} = \overline{OA} \times \dot{\bar{p}} + \overline{AM} \times \dot{\bar{p}}.$$

Pe baza formulei (2.83), prin derivarea în raport cu timpul t a primeia dintre egalitățile precedente, deducem că

$$\frac{d}{dt} (\overline{AM} \times \bar{p}) + \bar{v}_A \times \bar{p} + \overline{OA} \times \dot{\bar{p}} = \overline{OA} \times \dot{\bar{p}} + \overline{AM} \times \dot{\bar{p}},$$

unde \bar{v}_A reprezintă vectorul-viteză al punctului (mobil) A .

Folosind (2.80), ajungem la

$$\frac{d}{dt} (\overline{AM} \times \bar{p}) = \overline{AM} \times \dot{\bar{p}} - \bar{v}_A \times \bar{p}. \quad (2.84)$$

Noțiunea de *moment al forței* \vec{F} pleacă de la următorul experiment ușor de imaginat. Să considerăm, ca în Figura 2.12, un corp solid rigid (bară, roată, piatră, etc) care se poate roti liber în jurul unei axe verticale. Se pune problema *măsurării* rotației acestui corp atunci când acționăm cu o anumită forță asupra sa (în punctul M).

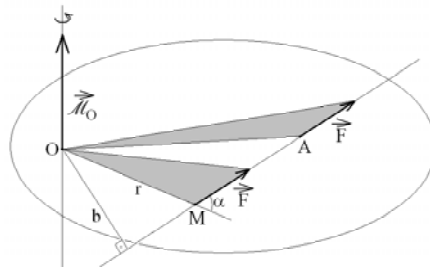


Figura 2.12

Vectorul $\vec{\mathcal{M}}_O \in T_O\mathbb{R}^3$, $\vec{\mathcal{M}}_O \in \overline{\mathcal{M}}_O$, unde $\overline{\mathcal{M}}_O = \overline{OM} \times \overline{F}$, poartă denumirea de *momentul forței \overline{F} (aplicată în M) față de polul O* . Distanța de la polul O la dreapta Δ determinată de punctul M și de vectorul (director) \overline{F} se numește *brațul forței \overline{F}* (cf. [32], p. 54). Evident, $|\overline{\mathcal{M}}_O| = rF \sin \alpha = Fb$, unde b desemnează brațul forței.

Fie $A \in \Delta$ ales arbitrar. Atunci,

$$\overline{\mathcal{M}}_O = (\overline{OA} + \overline{AM}) \times \overline{F} = \overline{OA} \times \overline{F}, \quad (2.85)$$

vectorii \overline{AM} , \overline{F} fiind coliniari. Cu alte cuvinte, aplicând forța \overline{F} în punctul A se obține *același* efect de rotație ca în cazul aplicării forței în punctul M , fenomen verificabil în mod direct. Calculul anterior dovedește, pe de altă parte, necesitatea unor *informații suplimentare* (în afara mărimii \overline{F}) atunci când ne referim la o forță aplicată asupra unui corp (mulțime de puncte) (cf. [34], p. 26-27). La această chestiune vom reveni ulterior.

Noțiunea de moment al forței \overline{F} a fost dată riguros de P. Varignon. Sub denumirea de "momento", ea apare la Leonardo da Vinci (cf. [76], p. 12).

În mod analog, putem defini momentul oricărui vector legat. Astfel, momentul vectorului \vec{p} față de polul O , notat \vec{L}_O , se numește *moment cinetic (unghiular) al punctului material M față de punctul O* (cf. [54], p. 16). Se folosește și apelativul *moment cinetic orbital (extern)*, fiind vorba de o mărime care caracterizează mișcarea corpului punctiform pe traiectorie (orbită) (cf. [32], p. 55).

Integrând (2.83), avem ($\varepsilon > 0$)

$$\overline{K}_O \stackrel{\text{not}}{=} \int_{t_0-\varepsilon}^{t_0+\varepsilon} \overline{\mathcal{M}}_O dt = \Delta \overline{L}_O, \quad (2.86)$$

unde $\overline{L}_O = \vec{r} \times \vec{p}$, $\vec{L}_O \in \overline{L}_O$. Astfel, are loc **teorema momentului cinetic: impulsul momentului față de polul O al forței rezultante aplicate punctului material este egal cu variația momentului cinetic al acestuia față de punctul O** (cf. [32], p. 55).

În cazul punctului material liber putem scrie (\overline{F} , $\overline{\mathcal{M}}_O = 0$)

$$\overline{L}_O = \text{constant.}$$

Ca și anterior, atunci când apar restricții de netezime a parametrilor

cinematici, sunt valabile egalitățile

$$\begin{aligned}\overline{K}_O &= \lim_{\varepsilon \searrow 0} \int_{t_0-\varepsilon}^{t_0+\varepsilon} \overline{\mathcal{M}}_O dt \\ &= \overline{\mathbf{r}}(t_0) \times \overline{\mathbf{p}}(t_0+0) - \overline{\mathbf{r}}(t_0) \times \overline{\mathbf{p}}(t_0-0) \\ &= \Delta \overline{L}_O\end{aligned}$$

(cf. [34], p. 618).

În cazul mișcării plane, aplicând metoda transformării Prúfer, obținem că

$$\overrightarrow{L}_O = mr^2 \dot{\theta} \cdot \overrightarrow{k} = 2m \overrightarrow{\Omega} \quad (2.87)$$

(cf. [32], p. 126, [34], p. 233-234, [63], p. 300).

În cazul mișcării circulare uniforme ($\varepsilon = 0$) avem, conform (2.74), $\overline{F} = -mR_0\omega^2 \cdot \overline{\mathbf{p}} = -m\omega^2 \overline{\mathbf{r}}$, ceea ce ne conduce la ($\overline{\mathcal{M}}_O = 0$)

$$\overline{L}_O = \text{constant.}$$

Formula (2.84) reprezintă o *variantă* a teoremei momentului cinetic dată față de un punct mobil:

$$\frac{d\overline{L}_A}{dt} = \overline{\mathcal{M}}_A - \overline{\mathbf{v}}_A \times \overline{\mathbf{p}}$$

(cf. [34], p. 229).

2.2.6 Lucrul mecanic. Puterea

În mod evident, forțele sunt responsabile pentru mișcarea corpurilor materiale (cf. [25], p. 7). O *măsură* a efectului de *mișcare* mecanică pe care îl are aplicarea forței \overrightarrow{F} asupra punctului material M este dată de mărimea infinitezimală

$$\overline{F} \cdot d\overline{\mathbf{r}}, \quad (2.88)$$

numită *lucru mecanic elementar* al forței \overrightarrow{F} relativ la *deplasarea elementară* $d\overline{\mathbf{r}}$ (cf. [34], p. 235, [76], p. 376, [63], p. 292, [2], p. 213, etc) a punctului material. Folosim notația $d\overline{\mathbf{r}}$ pentru a desemna deplasarea infinitezimală a punctului material în locul celei generale, $\delta \overline{\mathbf{r}}$, cf. [56], p. 31, dat fiind că d

\bar{r} , unde $\bar{r} = \bar{r}(t)$, este o mărime integrabilă (în raport cu timpul t) (cf. [56], p. 55, 64, [76], p. 746).

Mărimea (2.88), notată δW , este *influențată* numai de componenta *tangentială* a forței \vec{F} (L. Euler, cf. [32], p. 56, [76], p. 377). Într-adevăr, cum *forța se găsește în planul osculator al mișcării* (vezi (2.74)), avem $\vec{F} = F_\tau \cdot \vec{\tau} + F_\nu \cdot \vec{\nu}$. De asemenea, $d\bar{r} = \bar{v}(t)dt = \dot{s} \vec{\tau} dt$, astfel că

$$\vec{F} \cdot d\bar{r} = F_\tau v dt.$$

Această observație stă la baza *principiului lucrului mecanic virtual* din mecanica analitică (cf. [76], p. 758-761). Asupra sa vom reveni ulterior.

Expresia

$$\delta W = \vec{F}(t, \bar{r}, \bar{v}) d\bar{r}$$

reprezintă o cantitate diferențială (infinitesimală) generală, numită *formă Pfaff (pfaffian)* (cf. [76], p. 404), care nu este întotdeauna *exactă* (integrabilă). Să justificăm această afirmație. Am spus deja că sistemul diferențial (2.78) admite soluție unică în $[t_0, +\infty)$, deci că există mărimile netede $\bar{r} = \bar{r}(t)$, $\bar{v} = \bar{v}(t)$. Astfel, la prima vedere, mărimea $\delta W = \vec{F}(t, \bar{r}, \bar{v}) d\bar{r} = \vec{F}(t, \bar{r}(t), \bar{v}(t)) \cdot \bar{v}(t) dt$ este integrabilă.

Însă, pe de altă parte, chiar în cazul "simplu" al mișcării rectilinii sub acțiunea forței \vec{F} , integrarea *efectivă* a ecuației diferențiale

$$\ddot{x} = \frac{1}{m} F(t, x, \dot{x}) = f(t, x, \dot{x}), \quad t \geq t_0,$$

nu se poate realiza. Ca să dăm un exemplu elocvent, ecuația diferențială liniară și omogenă de ordinul al II-lea

$$\ddot{x} + a(t) \dot{x} + b(t)x = 0, \quad t \geq t_0,$$

este echivalentă cu *ecuația Riccati*

$$\dot{u} + u^2 + a(t)u + b(t) = 0, \quad t \geq t_0,$$

conform [46], p. 30, pe baza schimbării de variabilă $\dot{x}/x = u$. Numai că soluțiile ecuațiilor Riccati nu pot fi, în general, exprimate prin cvadraturi de funcții elementare (cf. [72], p. 52). Firește, în cazul funcțiilor $a(t)$, $b(t)$ *analitice*, există posibilitatea obținerii unor soluții *aproximative* prin metoda dezvoltării în serie de puteri. Cunoașterea, de asemenea, a unei integrale

(soluții) *particulare*, permite găsirea soluțiilor (cf., de exemplu, [76], p. 857-858). Cele spuse mai sus justifică afirmația privind neintegrabilitatea *de facto* a mărimii $\overline{F} \cdot d\vec{r}$. Pentru a scoate în evidență gradul de generalitate al acesteia, am "forțat" notațiile, apelând la δW în locul lui dW cum ar fi fost corect d. p. d. v. matematic.

În cazul când punctul material M se deplasează pe curba simplă Γ între pozițiile $M(t_0)$ și $M(t_1)$ sub acțiunea forței \overrightarrow{F} , unde \overline{F} reprezintă un *câmp de vectori* în SF , lucrul mecanic *total* corespunzător deplasării este dat de integrala curbilinie

$$W = \int_{M(t_0)}^{M(t_1)} \overline{F} \cdot d\vec{r} = \int_{M(t_0)M(t_1)} F_x dx + F_y dy + F_z dz$$

(cf. [34], p. 236, [76], p. 378). O asemenea forță \overrightarrow{F} se numește *forță de câmp* (cf. [32], p. 65). Evident, integrala curbilinie de mai sus depinde de *orientarea* curbei (sensul de parcurs pe curbă) (cf. [76], p. 379). În general, *lucrul mecanic total* va fi desemnat prin

$$W = \int_{t_0}^{t_1} \overline{F} \cdot \vec{v} dt.$$

Mărimea $P(t)$ introdusă de formula

$$P(t) = \frac{d}{dt} \left(\int_{t_0}^t \overline{F} \cdot \vec{v} dq \right) = \overline{F} \cdot \vec{v}$$

se numește *puterea dezvoltată de forța \overrightarrow{F} la momentul t* (cf. [32], p. 57, [63], p. 295). În mod analog, $P = F_\tau v$.

Noțiunea de *lucru mecanic* ("travail") este introdusă în 1835 de Prony în legătură cu forța de greutate \overrightarrow{G} . Ulterior, G. Coriolis utilizează noțiunea de lucru mecanic și în cazul altor forțe (cf. [76], p. 557).

2.2.7 Energia cinetică a punctului material. Teorema energiei cinetice

Pornind iarăși de la (2.80), avem

$$\begin{aligned}\overline{F} \cdot d\overline{r} &= \frac{d}{dt}(m\overline{v}) \cdot d\overline{r} \\ &= \frac{d}{dt}(m\overline{v}) \cdot \overline{v} dt \\ &= \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2}mv^2 \right) dt \\ &= d\left(\frac{1}{2}mv^2\right).\end{aligned}$$

De unde,

$$W = \int_{M(t_0)}^{M(t_1)} \overline{F} \cdot d\overline{r} = \Delta \left(\frac{1}{2}mv^2 \right). \quad (2.89)$$

Mărimea

$$E_c = \frac{1}{2}mv^2$$

se numește *energia cinetică* a punctului material M . Astfel, are loc **teorema (variației) energiei cinetice**: *lucrul mecanic efectuat de forța rezultantă aplicată punctului material între momentele $t = t_0$ și $t = t_1$ este egal cu variația energiei cinetice a punctului material între aceste momente* (cf. [32], p. 58, [34], p. 235, [76], p. 404).

Formula (2.89) poate fi scrisă sub forma

$$E_c(t_0) + W = E_c(t_1), \quad (2.90)$$

egalitate care exprimă, în particular, faptul că *energia cinetică a corpului punctiform este egală cu lucrul mecanic "cheltuit" pentru a aduce particula din repaus până la viteza v sau cu lucrul mecanic necesar pentru a opri particula* (cf. [32], p. 58-59).

Noțiunea de *energie cinetică* a apărut ca urmare a încercărilor de a găsi o *măsură (scalară) a mișcării mecanice*. Forma acestei măsuri era inițial mv (Descartes), apoi mv^2 ("vis viva", forță *vie*) și ulterior $\frac{1}{2}mv^2$. Numele de "forță vie" apare pentru prima oară în 1695, la Leibniz. Titulatura de "energie cinetică" a fost introdusă după 1850 de Thomson, Rankine și Umov.

Forma actuală a energiei cinetice a fost dată de Rankine (cf. [76], p. 384, 556, [34], p. 235, [32], p. 59).

Din (2.90) reiese că lucrul mecanic W poate fi pozitiv (lucru mecanic *motor*), negativ (lucru mecanic *rezistent*) sau nul.

2.2.8 Legi de conservare (I)

Să considerăm două puncte materiale, de mase m_1 , m_2 și raze vectoriale \vec{r}_1 , \vec{r}_2 , aflat suficient de departe de orice alte puncte materiale ca acestea să nu le influențeze, practic, mișcarea mecanică. Punctele materiale interacționează prin intermediul forțelor \vec{F}_1 , \vec{F}_2 , conform principiului acțiunii și reacțiunii, unde

$$\vec{F}_1 + \vec{F}_2 = 0.$$

Aplicând teorema impulsului fiecăruia dintre punctele materiale, obținem

$$\int_{t_0}^{t_1} \vec{F}_1 dt = \Delta(m_1 \vec{v}_1) \quad \int_{t_0}^{t_1} \vec{F}_2 dt = \Delta(m_2 \vec{v}_2).$$

De unde, prin sumare, avem că $\Delta(m_1 \vec{v}_1 + m_2 \vec{v}_2) = 0$, adică

$$m_1 \vec{v}_1 + m_2 \vec{v}_2 = \text{constant}.$$

Se produce, așadar, un transfer de impuls de la un corp punctiform la celălalt, realizat prin intermediul forței, în procesul interacțiunii, cu păstrarea constantă a mărimii totale $\vec{p}_1 + \vec{p}_2$ (cf. [32], p. 53). Cu alte cuvinte, teorema impulsului exprimă o lege de *conservare a mișcării mecanice*.

În continuare, să considerăm că are loc situația descrisă în Figura 2.13.

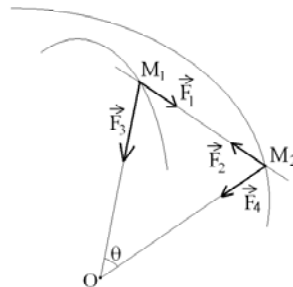


Figura 2.13

Aici, O reprezintă originea reperului inerțial \mathcal{R} . Teorema momentului cinetic ne conduce la

$$\int_{t_0}^{t_1} \overline{OM}_1 \times (\overline{F}_1 + \overline{F}_3) dt = \Delta \overline{L}_1 \quad \int_{t_0}^{t_1} \overline{OM}_2 \times (\overline{F}_2 + \overline{F}_4) dt = \Delta \overline{L}_2,$$

de unde, prin sumare, avem că

$$\begin{aligned} \Delta(\overline{L}_1 + \overline{L}_2) &= \int_{t_0}^{t_1} (\overline{OM}_1 \times \overline{F}_1 + \overline{OM}_2 \times \overline{F}_2) dt \\ &= \int_{t_0}^{t_1} [\overline{OM}_1 \times \overline{F}_1 + \overline{OM}_2 \times (-\overline{F}_1)] dt \\ &= \int_{t_0}^{t_1} (\overline{OM}_1 - \overline{OM}_2) \times \overline{F}_1 dt \\ &= \int_{t_0}^{t_1} \overline{M_2M_1} \times \overline{F}_1 dt = 0. \end{aligned}$$

În concluzie,

$$\overline{L}_1 + \overline{L}_2 = \text{constant.}$$

Deci, *se produce un transfer de moment cinetic de la o particulă la cealaltă, prin intermediul forței, în procesul interacțiunii*, cu păstrarea constantă a mărimii totale $\overline{L}_1 + \overline{L}_2$ (cf. [32], p. 56). Astfel, teorema momentului cinetic exprimă o lege de *conservare a mișcării mecanice*.

Existența mărimii mecanice *impuls* și a legii de conservare a impulsului este legată de proprietatea de *omogenitate* a spațiului fizic. Existența mărimii mecanice *moment cinetic* și a legii de conservare a momentului cinetic ține de proprietatea de *izotropie* a spațiului fizic. În sfârșit, mărimea mecanică *energie cinetică* și legea de conservare a energiei cinetice sunt în legătură cu proprietatea de *omogenitate* a timpului (cf. [32], p. 53, 56, 59).

Subsecțiunea următoare are un caracter auxiliar, cititorul nefiind obligat să o parcurgă la prima lectură. Rolul său este pur ilustrativ și anume acela de a insista asupra *legăturii* fundamentale dintre mărimile mecanice definite până acum și modelul matematic al spațiului și timpului. Argumentele folosite în subsecțiunea următoare aparțin mecanicii *hamiltoniene*, complet formalizată matematic.

2.2.9 Legi de conservare (II)

Să considerăm punctul material M , presupus *liber* (adică, în absența acțiunii vreunei forțe, cf. [41], p. 12) față de reperul inerțial \mathcal{R} . Plecând de la (2.79), prin înmulțire cu $\dot{\vec{r}}$, obținem

$$\begin{aligned} m \ddot{\vec{r}} \cdot \dot{\vec{r}} &= m \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} \dot{\vec{r}}^2 \right) = m \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} v^2 \right) \\ &= \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} m v^2 \right) = 0. \end{aligned}$$

Prin integrare în raport cu timpul t ajungem la relația

$$\frac{1}{2} m v^2 = \text{constant}. \quad (2.91)$$

Semnificația *energetică* a mărimii din membrul stâng al (2.91) a fost deja stabilită.

În sine, calculul de mai sus este simplu. Să ne gândim doar ce ar însemna să utilizăm, în locul produsului scalar euclidian, un produs scalar de tipul (2.49). Aceasta este numai una dintre complicațiile pe care modelul matematic al SF adoptat în capitolul întâi le evită. Firește, tot aici se găsește baza anumitor limitări ale mecanicii newtoniene. În esență, principiul inerției a căpătat formularea echivalentă (2.91), care reprezintă o *lege de conservare*, adică, o relație ce statutează *constanța* unei mărimi scalare caracterizând starea mecanică a punctului material.

Dorim, în cele ce urmează, să scoatem în evidență *legătura* profundă dintre modelul matematic al spațiului și timpului și principiile mecanicii newtoniene (cf. [56], p. 56). Acestea fiind stabilite plecând de la o serie de experiențe (cum ar fi, de exemplu, cea a lansării unei bile pe un plan orizontal perfect lucios, cf. [34], p. 444), este evident că *locul* experimentului intervine ”subtil” în formule.

Să considerăm o mulțime finită alcătuită din puncte materiale pe care o caracterizăm din punct de vedere mecanic cu ajutorul mărimilor

$$q = (q_1, \dots, q_s) \quad \dot{q} = (\dot{q}_1, \dots, \dot{q}_s).$$

Cantitățile q_i , \dot{q}_i , convenabil alese, se numesc *coordonate*, respectiv *viteze generalizate*. De exemplu, în cazul mișcării plane a punctului material,

mărimile $r, \theta, \dot{r}, \dot{\theta}$ (cf. [54], p. 72). Nu întotdeauna avem nevoie să utilizăm *efectiv* mărimile $x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}$ (cf. [73], p. 500-501).

Atunci, pe baza expunerii făcute în [41], p. 7-33, [54], p. 52-60, *sistemul mecanic* definit de mulțimea de puncte materiale are *starea mecanică* dată de funcția

$$L = L(t, q, \dot{q}), \quad (2.92)$$

indiferent de complexitatea ei. Mărimea L poartă denumirea de *funcția lui J. Lagrange (lagrangian)* a sistemului mecanic. Este întâlnită și denumirea specializată de *potențial cinetic* (cf. [76], p. 788, [73], p. 510).

Între două poziții, corespunzând momentelor $t = t_1$ și $t = t_2$, *mișcarea* sistemului mecanic este dată de *acțiunea generală*

$$S = \int_{t_1}^{t_2} L(t, q, \dot{q}) dt.$$

Experiența dezvăluie că, în mod *natural*, corpurile sunt "leneșe", adică au tendința să facă, în desfășurarea *acțiunii*, modificări *cât mai mici cu putință* stării lor mecanice. Condițiile de *minim* care trebuie, așadar, impuse variațiilor mărimilor ce definesc starea mecanică a corpurilor sunt stabilite într-un mod asemănător determinării punctelor *critice* ale unei funcții. Astfel, ca să aibă un corespondent în *realitate*, mărimea L verifică (plecând de la $\delta S = 0$) *ecuațiile Euler-Lagrange* date mai jos

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0, \quad i = \overline{1, s}. \quad (2.93)$$

Modalitatea de a stabili relațiile (2.93) este prezentată cu extremă eleganță în [29], p. 349 și următoarele, [71], [70], p. 205 și următoarele.

Să considerăm cazul particular al unui punct material liber. Teoretic, acesta poate ocupa *orice* poziție în SF și poate avea *orice* viteză (constantă).

Atunci, $q = (x, y, z) \equiv (r, \frac{x}{r}, \frac{y}{r}, \frac{z}{r})$, unde $r = \sqrt{\sum x^2}$, și $\dot{q} = (\dot{x}, \dot{y}, \dot{z}) \equiv (v, \frac{\dot{x}}{v}, \frac{\dot{y}}{v}, \frac{\dot{z}}{v})$, unde $v = \sqrt{\sum \dot{x}^2}$. Mărimile

$$\bar{p} = \frac{x}{r} \cdot \bar{i} + \frac{y}{r} \cdot \bar{j} + \frac{z}{r} \cdot \bar{k} \quad \bar{\tau} = \frac{\dot{x}}{v} \cdot \bar{i} + \frac{\dot{y}}{v} \cdot \bar{j} + \frac{\dot{z}}{v} \cdot \bar{k}$$

desemnează versorii vectorilor \bar{r} , \bar{v} .

Impunem ca lagrangianul L al punctului material liber să *reflecte* omogenitatea spațiului și timpului și izotropia spațiului. Adică, mărimea L să nu depindă *explicit* de t , de unde

$$\frac{\partial L}{\partial t} = 0,$$

de poziția punctului material, de unde

$$\frac{\partial L}{\partial r} = \frac{\partial L}{\partial \left(\frac{x}{r}\right)} = \frac{\partial L}{\partial \left(\frac{y}{r}\right)} = \frac{\partial L}{\partial \left(\frac{z}{r}\right)} = 0$$

și de versorul \bar{r} (acesta, legat într-un punct al SF , se poate *roti*), de unde

$$\frac{\partial L}{\partial \left(\frac{\dot{x}}{v}\right)} = \frac{\partial L}{\partial \left(\frac{\dot{y}}{v}\right)} = \frac{\partial L}{\partial \left(\frac{\dot{z}}{v}\right)} = 0.$$

În concluzie, $L = L(v)$ (cf. [41], p. 13). Pentru simplificarea calculului, considerăm $L = L(v^2)$.

Ecuatiile (2.93) devin în acest caz

$$\frac{d}{dt} \left(L'(v^2) \cdot \dot{x} \right) = 0 \quad \frac{d}{dt} \left(L'(v^2) \cdot \dot{y} \right) = 0 \quad \frac{d}{dt} \left(L'(v^2) \cdot \dot{z} \right) = 0. \quad (2.94)$$

Înainte de a trece mai departe, se cuvine observat că formulele (2.93) rămân nemodificate dacă înlocuim lagrangianul L cu mărimea

$$L^* = L + C^j \cdot \dot{q}_j,$$

unde C^j , $j = \overline{1, s}$, sunt constante.

Impunem ca lagrangianul L al punctului material să *reflecte* și relativitatea Galilei. Aceasta înseamnă, cu alte cuvinte, ca ecuațiile ce caracterizează mișcarea mecanică, și anume (2.93) (cf. [41], p. 10), să nu fie *influențate* de mișcările rectilinii uniforme ale reperului \mathcal{R}' în care avem de rezolvat o problemă oarecare de mecanică teoretică față de reperul \mathcal{R} "absolut" fix.

Dându-se o variație infinitezimală a vectorului-viteză al punctului material

$$\begin{aligned} \bar{v}^* &= \bar{v} + \delta \bar{v} \\ &= \bar{v} + \varepsilon^1 \cdot \bar{i} + \varepsilon^2 \cdot \bar{j} + \varepsilon^3 \cdot \bar{k}, \end{aligned} \quad (2.95)$$

unde $\varepsilon^i = o(1)$, $i = \overline{1, 3}$, putem scrie că

$$\begin{aligned} L(v^{*2}) &= L(\overline{v}^{*2}) \\ &= L(v^2 + 2\overline{v} \cdot \delta\overline{v} + (\delta\overline{v})^2) = L(v^2 + 2\overline{v} \cdot \delta\overline{v}) \\ &= L(v^2) + L'(v^2) \cdot (2\overline{v} \cdot \delta\overline{v}). \end{aligned}$$

Am *liniarizat* expresia lui L , neglijând termenii infinitezimali de ordinul al doilea. Dacă mărimea $L'(v^2)$ ar fi constantă, adică $L'(v^2) = C$, atunci

$$L'(v^2) \cdot (2\overline{v} \cdot \delta\overline{v}) = 2C \cdot \varepsilon^j \cdot \dot{q}_j.$$

Astfel, privind egalitatea (2.95) ca o *lege de compunere a vitezelor* (mișcării caracterizate de \overline{v} i se adaugă o mișcare rectilinie uniformă infinitezimală (instantanee) $\delta\overline{v}$, vezi comentariul 2) de la p. 92), deducem că lagrangianul L ("considerat" în \mathcal{R}') se modifică în \mathcal{R} după formula

$$L^* = L + 2C \cdot \varepsilon^j \cdot \dot{q}_j,$$

păstrând intacte ecuațiile de mișcare.

În concluzie, pe baza relației $L'(v^2) = C$, deducem că funcțiile

$$L = Cv^2$$

pot fi *lagrangieni* ai punctului material liber. În particular, mărimea

$$L = \frac{1}{2}mv^2 \tag{2.96}$$

este *lagrangianul* punctului material liber M . *Formula sa ține seama de proprietățile de omogenitate și izotropie ale spațiului, de omogenitatea timpului, de invarianța masei m față de timp ori viteză, ca și de principiul relativității.* Aici, masa m a fost introdusă în calitate sa de caracteristică a corpului punctiform. Coeficientul $\frac{1}{2}$ joacă un rol de "calibrare" (cf. [41], p. 11, 16).

Relațiile (2.94), aplicate mărimii (2.96), ne conduc la

$$\dot{x}, \dot{y}, \dot{z} = \text{constant},$$

adică $\overline{v} = \text{constant}$. Mișcarea punctului material liber poate fi, așadar, *doar* rectilinie, vectorul $\overline{v} \in \overline{v}$ fiind tangent la traiectorie.

În acest *sens* trebuie înțeleasă noțiunea de *reper inertțial (galilean)*: adică, un sistem de referință în care proprietățile spațiului și timpului *concură* la *valabilitatea* principiilor fundamentale ale mecanicii (cf. [41], p. 12-13, [54], p. 11).

Să considerăm acum sistemul mecanic format din n puncte materiale, de mase m_i și raze vectoare \bar{r}_i , aflate suficient de departe de orice alte puncte materiale pentru ca acestea să nu le afecteze starea mecanică (de exemplu, prin inducerea unui câmp gravitațional). Pe baza unor considerații asemănătoare celor precedente, introducem lagrangianul sistemului mecanic prin formula

$$L = \sum_{i=1}^n \frac{m_i v_i^2}{2} - V(\bar{r}_1, \bar{r}_2, \dots) \quad (2.97)$$

(cf. [41], p. 17). Mărimea $T = \sum_{i=1}^n \frac{m_i v_i^2}{2}$ poartă denumirea de *energie cinetică* a sistemului mecanic, iar mărimea V , care caracterizează *interacțiunea* celor n puncte materiale, se numește *energie potențială* a sistemului mecanic.

În formula lagrangianului L se reflectă două proprietăți fundamentale ale mecanicii clasice:

1) *Interacțiunea* corpurilor punctiforme aparținând unui sistem mecanic *închis* (neinfluențat de exterior) este *instantanee* (fapt deja menționat la *principiul acțiunii și reacțiunii*) (cf. [41], p. 17).

2) Orice mișcare mecanică în cadrul sistemului mecanic închis este *reversibilă* (cf. [41], p. 18).

Să dăm o justificare a reversibilității mișcării mecanice independentă de caracterizarea cu ajutorul funcțiilor lui Lagrange a stării mecanice. Pentru aceasta, presupunem că în (2.77) avem $\bar{F} = \bar{F}(\bar{r})$. Un asemenea formalism înglobează numeroase situații întâlnite în viața de zi cu zi. Notăm soluția problemei Cauchy (2.77) cu u , unde

$$(\bar{r}(t), \bar{v}(t)) = u(t; t_0, (\bar{r}_0, \bar{v}_0)), \quad t \in \mathbb{R}.$$

Fie $t_1 < t_0$ și

$$u(t_1; t_0, (\bar{r}_0, \bar{v}_0)) = (\bar{r}_1, \bar{v}_1).$$

Făcând schimbarea de variabilă $t^* = t_0 + t_1 - t$, cum $\bar{r}(t) = \bar{r}(t_0 + t_1 - (t_0 + t_1 - t))$, au loc relațiile

$$\begin{cases} \frac{d\bar{r}}{dt^*} = \dot{\bar{r}}(t) \cdot \frac{d(t_0 + t_1 - t^*)}{dt^*} = -\bar{v}(t) \\ \frac{d^2\bar{r}}{dt^{*2}} = \bar{a}(t). \end{cases}$$

Ecuția diferențială vectorială $m \cdot \ddot{\bar{r}} = \bar{F}(\bar{r})$ devine în urma acestei transformări

$$m \cdot \frac{d^2 \bar{r}}{dt^{*2}} = \bar{F}(\bar{r}), \quad t^* < t_0.$$

Soluția sa $u(t^*; t_1, (\bar{r}_0, -\bar{v}_0))$ caracterizează mișcarea inversată a punctului material:

$$u(t_0; t_1, (\bar{r}_0, -\bar{v}_0)) = (\bar{r}_1, -\bar{v}_1)$$

(cf. [56], p. 61). Justificarea reversibilității mișcării s-a încheiat.

Astfel, la proprietățile deja menționate ale timpului t , admise de mecanica clasică, se adaugă cea de *izotropie*. Conform ei, timpul "curge" la fel în ambele sensuri (cf. [41], p. 17, [54], p. 8). Legea $t^* = t_0 + t_1 - t$ fiind afină, mărimea t^* are semnificația de *timp* (cf. [56], p. 56).

Expresia (2.97) adoptată pentru lagrangianul L al sistemului mecanic face ca ecuațiile de mișcare (2.93) să nu se modifice în urma schimbării de variabilă $t \mapsto C - t$, unde $C \in \mathbb{R}$. De asemeni, formulele (2.93) devin

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \bar{v}_i} \right) = \frac{\partial L}{\partial \bar{r}_i}, \quad i = \overline{1, n}. \quad (2.98)$$

Aici, mărimea $\frac{\partial f}{\partial \bar{u}}$, unde $\bar{u} = u^1 \cdot \bar{i} + u^2 \cdot \bar{j} + u^3 \cdot \bar{k}$, desemnează o derivată euleriană (gradient) a scalarului f :

$$\frac{\partial f}{\partial \bar{u}} \stackrel{def}{=} \frac{\partial f}{\partial u^1} \cdot \bar{i} + \frac{\partial f}{\partial u^2} \cdot \bar{j} + \frac{\partial f}{\partial u^3} \cdot \bar{k}$$

(cf. [76], p. 870). Evident, $\frac{\partial}{\partial \bar{v}} \left(\frac{1}{2} m v^2 \right) = \frac{\partial}{\partial \bar{v}} \left(\frac{1}{2} m \bar{v}^2 \right) = m \bar{v}$.

Introducând (2.97) în (2.98), obținem că

$$m_i \frac{d\bar{v}_i}{dt} = - \frac{\partial V}{\partial \bar{r}_i} \quad (2.99)$$

sau, echivalent,

$$m_i \cdot \bar{a}_i = \bar{F}_i, \quad i = \overline{1, n},$$

unde mărimea $\vec{F}_i \in \bar{F}_i$ reprezintă *forța* cu care sistemul acționează asupra celui de-al i -lea punct material din componența sa (cf. [41], p. 18).

Ca și în cazul punctului material liber caracterizat de legile de conservare a mișcării mecanice (2.82), (2.91), vom arăta că au loc anumite legi de conservare a mișcării sistemului mecanic.

Mai întâi, plecând de la (2.92), impunem ca lagrangianul L al sistemului mecanic închis să *reflecte* omogenitatea timpului, adică să nu depindă explicit de mărimea t : $L = L(q, \dot{q})$. Atunci,

$$\frac{dL}{dt} = \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial L}{\partial q_i} \cdot \dot{q}_i + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \cdot \ddot{q}_i \right).$$

Ținând seama de (2.93), avem că

$$\begin{aligned} \frac{dL}{dt} &= \sum_{i=1}^n \left[\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) \cdot \dot{q}_i + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \cdot \ddot{q}_i \right] \\ &= \sum_{i=1}^n \frac{d}{dt} \left(\dot{q}_i \cdot \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right), \end{aligned}$$

de unde

$$\frac{d}{dt} \left(\sum_{i=1}^n \dot{q}_i \cdot \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - L \right) = 0.$$

Mărimea

$$E = \sum_{i=1}^n \dot{q}_i \cdot \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - L = \text{constant}$$

se numește *energia mecanică (totală)* a sistemului mecanic închis (cf. [41], p. 24, [54], p. 58). Evident, avem $\frac{\partial L}{\partial t} = 0$ pentru expresia lagrangianului L dată de (2.97), de unde, ținând seama de (2.99), deducem în mod analog că

$$E = 2T - L = T + V.$$

Impunem acum ca lagrangianul L dat de (2.97) să *reflecte* omogenitatea spațiului. Astfel, considerând variația infinitezimală a razelor vectoriale \bar{r}_i :

$$\begin{aligned} \bar{r}_i^* &= \bar{r}_i + \delta \bar{r}_i \\ &= \bar{r}_i + \varepsilon^1 \cdot \bar{i} + \varepsilon^2 \cdot \bar{j} + \varepsilon^3 \cdot \bar{k}, \end{aligned}$$

unde $\varepsilon^j = o(1)$, $j = \overline{1, 3}$, avem

$$\delta L = \sum_{i=1}^n \frac{\partial L}{\partial \bar{r}_i} \cdot \delta \bar{r}_i = \bar{\varepsilon} \cdot \sum_{i=1}^n \frac{\partial L}{\partial \bar{r}_i}.$$

Aici, $\bar{\varepsilon} = \varepsilon^1 \cdot \bar{i} + \varepsilon^2 \cdot \bar{j} + \varepsilon^3 \cdot \bar{k}$. Formula a fost obținută prin *liniarizarea* expresiei lui L , neglijându-se termenii infinitezimali de ordinul al doilea.

Deoarece $\bar{\varepsilon}$ este luat arbitrar, obținem

$$\begin{aligned} 0 &= \sum_{i=1}^n \frac{\partial L}{\partial \bar{r}_i} \stackrel{(2.98)}{=} \frac{d}{dt} \left(\sum_{i=1}^n \frac{\partial L}{\partial \bar{v}_i} \right) \\ &= \frac{d}{dt} \left(\sum_{i=1}^n m_i \bar{v}_i \right). \end{aligned}$$

Mărimea

$$\bar{p} = \sum_{i=1}^n m_i \bar{v}_i = \text{constant}$$

se numește *impulsul total* al sistemului mecanic închis (cf. [41], p. 26, [54], p. 59).

Egalitatea

$$\begin{aligned} 0 &= \sum_{i=1}^n \frac{\partial L}{\partial \bar{r}_i} = - \sum_{i=1}^n \frac{\partial V}{\partial \bar{r}_i} \\ &= \sum_{i=1}^n \bar{F}_i \end{aligned}$$

arată că, în cazul sistemului mecanic alcătuit din $n = 2$ puncte materiale, este valabil *principiul acțiunii și reacțiunii*:

$$\bar{F}_1 + \bar{F}_2 = 0.$$

În final, impunem ca lagrangianul L dat de (2.97) să reflecte *izotropia* spațiului. Astfel, considerând rotația infinitezimală (2.38), avem

$$\delta \bar{r}_i = \delta \bar{\alpha} \times \bar{r}_i \quad \delta \bar{v}_i = \delta \bar{\alpha} \times \bar{v}_i,$$

adică

$$\bar{r}_i^* = \bar{r}_i + \delta \bar{r}_i \quad \bar{v}_i^* = \bar{v}_i + \delta \bar{v}_i.$$

Din nou, prin *liniarizarea* expresiei lui L , ajungem la

$$\delta L = \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial L}{\partial \bar{r}_i} \cdot \delta \bar{r}_i + \frac{\partial L}{\partial \bar{v}_i} \cdot \delta \bar{v}_i \right)$$

$$\begin{aligned}
& \stackrel{(2.98)}{=} \sum_{i=1}^n \left[\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \bar{v}_i} \right) \cdot \delta \bar{r}_i + m_i \bar{v}_i \cdot \delta \bar{v}_i \right] \\
& = \sum_{i=1}^n \left(\dot{\bar{p}}_i \cdot \delta \bar{r}_i + \bar{p}_i \cdot \delta \bar{v}_i \right),
\end{aligned}$$

unde $\bar{p}_i = m_i \bar{v}_i$ reprezintă impulsul celui de-al i -lea punct material al sistemului mecanic.

Ținând seama de proprietățile *produsului mixt*, putem scrie că

$$\begin{aligned}
\dot{\bar{p}}_i \cdot \delta \bar{r}_i &= \dot{\bar{p}}_i \cdot (\delta \bar{\alpha} \times \bar{r}_i) = \delta \bar{\alpha} \cdot (\bar{r}_i \times \dot{\bar{p}}_i) \\
\bar{p}_i \cdot \delta \bar{v}_i &= \dot{\bar{p}}_i \cdot (\delta \bar{\alpha} \times \bar{v}_i) = \delta \bar{\alpha} \cdot (\bar{v}_i \times \bar{p}_i).
\end{aligned}$$

Apoi,

$$\begin{aligned}
\delta L &= \delta \bar{\alpha} \cdot \sum_{i=1}^n (\bar{r}_i \times \dot{\bar{p}}_i + \bar{v}_i \times \bar{p}_i) \\
&= \delta \bar{\alpha} \cdot \frac{d}{dt} \left(\sum_{i=1}^n \bar{r}_i \times \bar{p}_i \right).
\end{aligned}$$

Deoarece $\delta \bar{\alpha}$ este luat arbitrar, obținem

$$0 = \frac{d}{dt} \left(\sum_{i=1}^n \bar{r}_i \times \bar{p}_i \right).$$

Mărimea

$$\bar{L} = \sum_{i=1}^n \bar{r}_i \times \bar{p}_i = \text{constant}$$

poartă denumirea de *moment cinetic total* al sistemului mecanic închis (cf. [41], p. 31, [54], p. 60).

2.2.10 Legi de conservare (III)

Plecând de la teoremele impulsului și momentului cinetic, putem obține în *situații particulare* integrale ale sistemului diferențial (2.78) cu semnificație d. p. d. v. mecanic, adică *legi de conservare*.

Astfel, dacă forța \vec{F} (rezultantă) aplicată punctului material M este perpendiculară pe direcția fixă \vec{u} (adică, $\dot{\vec{u}}=0$), avem

$$0 = \vec{F} \cdot \vec{u} = \frac{d(m\vec{v})}{dt} \cdot \vec{u} = \frac{d}{dt} (m\vec{v} \cdot \vec{u}).$$

Integrala $\vec{v} \cdot \vec{u} = \text{constant}$ arată că *proiecția vitezei punctului material pe o direcție fixă este constantă* (cf. [34], p. 228).

De asemeni, într-o altă situație, să presupunem că dreapta-suport a forței \vec{F} trece prin originea O a reperului inerțial \mathcal{R} . Conform (2.83), avem

$$\overline{\mathcal{M}}_O = \frac{d\overline{\mathcal{L}}_O}{dt} = 0,$$

de unde $\vec{r} \times \vec{v} = \vec{C} = \text{constant}$. Dacă vectorul \vec{C} este nenul, atunci $\vec{C} \cdot \vec{r} = 0$, integrala primă fiind

$$C^1x + C^2y + C^3z = 0,$$

unde $\vec{C} = C^1 \cdot \vec{i} + C^2 \cdot \vec{j} + C^3 \cdot \vec{k}$. *Mișcarea punctului material M se desfășoară, așadar, într-un plan fix care trece prin O .* Dacă însă $\vec{C} = 0$, vectorii \vec{r} , \vec{v} sunt coliniari. Atunci, $\vec{v} = \lambda(t) \cdot \vec{r}$, unde $\lambda(t) = |\vec{r}|^{-2} (\vec{v} \cdot \vec{r})$. Ținând seama de netezimea parametrilor cinematici ($r \neq 0$), putem spune că λ este o funcție de clasă C^∞ . Au loc următoarele relații

$$\vec{r} = r(t) \cdot \vec{\rho} \quad \dot{\vec{r}} = \dot{r} \cdot \vec{\rho} + r \cdot \dot{\vec{\rho}} \quad \vec{\rho} \cdot \dot{\vec{\rho}} = 0.$$

Astfel, cum $\dot{r} \cdot \vec{\rho} + r \cdot \dot{\vec{\rho}} = \lambda(t)r \cdot \vec{\rho}$, prin înmulțire cu $\vec{\rho}$ în ambii membri, ajungem la

$$\dot{r} = \lambda(t)r,$$

respectiv $\dot{\vec{\rho}} = 0$.

În concluzie,

$$\vec{r}(t) = r_0 e^{\int_{t_0}^t \lambda(\tau) d\tau} \cdot \vec{\rho}_0 = e^{\int_{t_0}^t \lambda(\tau) d\tau} \cdot \vec{r}_0, \quad (2.100)$$

adică *mișcarea punctului material se desfășoară pe o dreaptă fixă trecând prin O* ²⁰. Aici, $\vec{\rho}_0 = \vec{\rho}(t_0)$, $\vec{r}_0 = \vec{r}(t_0)$. Integralele prime sunt date de (2.100) (cf.

²⁰O altă abordare a acestui caz, cf. [60], p. 2, se bazează pe formula

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\vec{u}}{u} \right) = \frac{(\vec{u} \times \dot{\vec{u}}) \times \vec{u}}{u^3} \quad u = |\vec{u}|,$$

întâlnită deja la p. 31. Astfel, pentru $\vec{u} = \vec{r}$, deducem că vectorul $\vec{\rho}$ este constant.

[34], p. 231-232).

2.2.11 Forțe conservative. Energie potențială. Conservarea energiei mecanice

Lucrul mecanic efectuat de forța de câmp \vec{F} aplicată punctului material M este introdus cu ajutorul integralei curbilinii

$$W = \int_{M_0 M_1} F_x dx + F_y dy + F_z dz.$$

Se pune *problema* să găsim condiții pe care trebuie să le îndeplinească funcțiile F_x, F_y, F_z pentru ca integrala W să nu depindă de traiectoria parcursă de punctul material M între pozițiile M_0, M_1 .

Spre a înțelege *semnificația* d. p. d. v. mecanic a unei asemenea chestiuni, vom folosi *metoda planului înclinat* (Galilei) (cf. [17], p. 68). Astfel, să considerăm un plan înclinat perfect lucios al cărui unghi de la bază $\alpha \in (0, \frac{\pi}{2})$ poate fi făcut să varieze. Experiența dezvăluie faptul că viteza cu care ajunge pe sol o bilă lansată în jos pe planul înclinat, de la înălțimea h , fără viteză inițială, este *independentă* de valorile lui α . Ținând seama de *formula Galilei-Torricelli* a vitezei în mișcarea rectilinie, și anume

$$v^2 = v_0^2 + 2as$$

(cf. [32], p. 27, [76], p. 294), unde $a = g \sin \alpha$, găsim viteza bilei la baza planului înclinat

$$v = \sqrt{2gh}.$$

O atare *independentă* de drumul parcurs a vitezei v a bilei este transmisă, conform (2.90), lucrului mecanic W realizat de forța de greutate \vec{G} . În concluzie, problema formulată anterior își găsește un *echivalent* în viața de zi cu zi.

În mod *natural*, dacă pfaffianul $F_x dx + F_y dy + F_z dz$ ar fi exact, atunci $W = U(M_1) - U(M_0)$, unde

$$dU = F_x dx + F_y dy + F_z dz = \nabla U(M) \cdot d\vec{r}.$$

Deși nu am precizat acest lucru, considerăm că tripletul (x, y, z) al coordonatelor punctului material M (în reperul inerțial \mathcal{R}), asupra căruia

acționează câmpul de forțe \overline{F} , se găsește într-o mulțime deschisă și *stelată* în raport cu un punct al său din $(\mathbb{R}^3, \mathcal{T}_e)$ (cf. [28], p. 277). Vom subînțelege în continuare că funcțiile care intervin în discuție sunt de clasă C^∞ pe mulțimea respectivă.

Condiția necesară și suficientă ca pfaffianul $X(x, y, z)dx + Y(x, y, z)dy + Z(x, y, z)dz$ să fie o *formă diferențială totală exactă* este dată de relațiile de mai jos (cf. [73], p. 425)

$$\frac{\partial X}{\partial y} = \frac{\partial Y}{\partial x} \quad \frac{\partial X}{\partial z} = \frac{\partial Z}{\partial x} \quad \frac{\partial Y}{\partial z} = \frac{\partial Z}{\partial y}.$$

Justificarea lor se realizează la fel ca în cazul a două variabile independente x, y (condiția lui L. Euler), întâlnit în cursurile de ecuații diferențiale (cf. [47], p. 28). Pentru detalii, vezi [72], p. 104-106, 423, [28], p. 276-277.

Să presupunem că forța de câmp \overline{F} care acționează asupra punctului material M între pozițiile $M_0 = M(t_0)$ și $M_1 = M(t_1)$ este introdusă prin formula $\overline{F} = \nabla U$. Atunci, relația (2.90) devine

$$E_c(t_0) + \Delta U = E_c(t_1)$$

sau, echivalent,

$$E_c(M_0) - U(M_0) = E_c(M_1) - U(M_1).$$

Mărima $V(M) = -U(M)$ se numește *energia potențială a punctului material M în câmpul (de forțe) \overline{F}* (cf. [76], p. 385, [34], p. 239). Funcția U poartă denumirea de *potențial (funcție de forță)* al câmpului \overline{F} (cf. [34], p. 237, [76], p. 73).

Datorită modalității de definire, energia potențială este *unică* până la o constantă aditivă (cf. [76], p. 385). Această proprietate a sa permite adoptarea formulei (generice)

$$V(M) = \int_M^\infty \overline{F} \cdot d\overline{r},$$

unde $\lim_{|\overline{OM}| \rightarrow +\infty} \overline{F}(M) = 0$. Formal, $V(M_0) = - \int_{M_0}^\infty \overline{F} \cdot d\overline{r}$, ceea ce arată că *energia potențială a punctului material M în poziția M_0 este lucrul mecanic,*

luat cu semn schimbat, efectuat de forțele câmpului \overline{F} pentru a aduce punctul material de la infinit în poziția M_0 (cf. [32], p. 60). Poziția "de la infinit" desemnează, în fapt, o zonă unde influența câmpului \overline{F} nu se face simțită ($\overline{F}(\infty) = 0$) (cf. [59], p. 86). Forța \overline{F} introdusă cu ajutorul formulei $\overline{F} = \nabla U$ se numește *conservativă*. La rândul său, \overline{F} reprezintă un *câmp de forțe conservative* (cf. [34], p. 239, [76], p. 406).

Putem enunța acum **teorema conservării energiei mecanice**: *într-un câmp de forțe conservative are loc, în timpul mișcării, o transformare reciprocă a energiilor cinetică și potențială ale particulei, suma acestora (energia mecanică) rămânând constantă* (cf. [32], p. 61).

Să presupunem, în final, că asupra punctului material aflat într-un câmp de forțe conservative \overline{F} acționează forța *disipativă* (neconservativă) \overline{F}^* . Atunci, conform (2.89), putem scrie că

$$\begin{aligned} \Delta E_c &= W = \int_{M_0}^{M_1} (\overline{F} + \overline{F}^*) \cdot d\vec{r} \\ &= -\Delta V + \int_{M_0}^{M_1} \overline{F}^* \cdot d\vec{r}, \end{aligned}$$

de unde

$$\Delta(E_c + V) = W^*.$$

Astfel, *lucrul mecanic al forței disipative aplicată unui punct material M este egal cu variația energiei mecanice a acestuia* (cf. [32], p. 61). Cazul cel mai des întâlnit în viața de zi cu zi este cel al forțelor *rezistente* \overline{F} (forță de frecare, de rezistență la înaintare într-un fluid, etc), având sens opus vitezei relative. Asemenea forțe, producând un lucru mecanic rezistent, diminuează energia mecanică a corpurilor materiale, transformând-o în căldură (cf. [76], p. 555-556, [56], p. 66-67).

Numele de "funcție de forță" apare în scrierile lui R. Hamilton. "Potențialul", al cărui gradient dă forța de atracție (universală), a fost introdus de J. Lagrange (1777). Energia potențială, definită prin schimbarea semnului lui U , este dată de H. Helmholtz (cf. [76], p. 557, [43], p. 45).

2.2.12 Suprafețele echipotențiale și liniile de forță ale unui câmp conservativ

Mulțimea punctelor $M \in E_3$ care au proprietatea că

$$U(x, y, z) = C,$$

unde $C \in \mathbb{R}$ este arbitrar fixat, poartă denumirea de *suprafață echipotențială* a câmpului de forțe conservative \overline{F} (cf. [76], p. 75-76, [32], p. 60). Deși nu este dată ca o suprafață parametrizată netedă, condiția $\nabla U(M) \neq 0$ arată că, local, suprafața echipotențială este o suprafață simplă (cf. [48], p. 38-39). În concluzie, aceste mulțimi reprezintă suprafețe netede în SF (cf. [44], p. 590-591). Suprafețele echipotențiale se mai numesc și *suprafețe de nivel* ale funcției U (cf. [76], p. 405).

Dacă punctul material M se găsește pe suprafața echipotențială S , atunci săgeata vectorului $\overrightarrow{F} \in T_M \mathbb{R}^3$, $\overrightarrow{F} \in \overline{F}$, este îndreptată în sensul creșterii mărimii C , deci al *descreșterii* energiei potențiale $V(M)$ (cf. [32], p. 61, [76], p. 406).

O curbă netedă Γ având proprietatea că în orice punct $M \in \Gamma$ vectorul $\overrightarrow{F} \in T_M \mathbb{R}^3$ este vectorul director al tangentei poartă denumirea de *linie de forță* a câmpului (de forțe) \overline{F} (cf. [32], p. 61). Din punct de vedere diferențial, coordonatele în reperul inerțial \mathcal{R} ale punctelor M care alcătuiesc linia de forță Γ sunt date de relațiile

$$\frac{dx}{F_x} = \frac{dy}{F_y} = \frac{dz}{F_z},$$

cu convenția obișnuită: anularea numitorului implică automat *constanța* coordonatei respective (pe o anumită mulțime) (cf. [76], p. 71).

Evident, *lucrul mecanic efectuat de forța de câmp \overline{F} aplicată asupra unui punct material M care se deplasează pe suprafața echipotențială S a câmpului este nul.*

2.2.13 Câmpul gravitațional. Potențialul gravitațional. Modelul punctiform al corpurilor cerești

Teoriile generale ale câmpului gravitațional (gravific) necesită cunoștințe importante de *mechanică relativistă*, *geometria varietăților diferențiabile*, etc. O lectură fundamentală în domeniu este constituită din lucrarea [42]. Recomandăm excelentul tratat [79].

Să considerăm că originea O a sistemului de referință inerțial \mathcal{R} adăpostește masa m_0 . Dată fiind *imobilitatea* apriorică a originii O , caracterul de măsură a inerției atribuit maselor în mecanica newtoniană poate fi scos din cauză în discuția de față în ceea ce privește masa m_0 . Așadar, singura "activitate" a masei m_0 este crearea unui *câmp gravitațional (gravific)*. Experiența ("tubul" lui Newton, cf. [32], p. 29, independența perioadei pendulului de natura corpului utilizat, cf. [43], p. 42, etc) dezvăluie faptul că *în apropierea suprafeței Pământului se comunică corpurilor o accelerație constantă, verticală și orientată în jos* (Galilei, Newton) (cf. [43], p. 42).

Atunci, în conformitate cu (2.76), un punct material oarecare M , de masă m , va căpăta pe direcția vectorului său de poziție o mărime de tip *accelerație*, notată $\vec{\Gamma}$, unde $\vec{\Gamma} \in T_M\mathbb{R}^3$, cu săgeata îndreptată către originea O :

$$\vec{\Gamma} = -\gamma \frac{m_0}{r^2} \cdot \frac{\vec{r}}{r}.$$

Forța \vec{F} cu care masa m_0 atrage punctul material M este *greutatea* acestuia (în câmpul masei m_0):

$$\vec{F} = m \cdot \vec{\Gamma}.$$

Pe baza relațiilor (2.67), se verifică imediat formula

$$-\gamma \frac{mm_0}{r^2} \cdot \frac{\vec{r}}{r} = \nabla \left(\gamma \frac{mm_0}{r} \right).$$

Astfel, energia potențială a particulei materiale M în câmpul gravitațional al originii O devine

$$\begin{aligned} V(M) &= - \int_{\infty}^M \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_{\infty}^r \gamma \frac{mm_0}{q^2} dq \\ &= -\gamma \frac{mm_0}{r} \end{aligned}$$

(cf. [32], p. 174).

Să justificăm acest calcul. Plecând de la $d\vec{r} = r d\vec{\rho} + \vec{\rho} dr$, unde $\vec{\rho}$ desemnează versorul razei vectoriale \vec{r} , și ținând seama de faptul că mărimile $\vec{\rho}$ și $d\vec{\rho}$ sunt ortogonale, obținem

$$\begin{aligned} \vec{F} \cdot d\vec{r} &= -\gamma \frac{mm_0}{r^2} \vec{\rho} \cdot d\vec{r} = -\gamma \frac{mm_0}{r^2} dr \\ &= F(r) dr \end{aligned}$$

(cf. [34], p. 238). Justificarea s-a încheiat.

În concluzie, *câmpul gravitațional al corpului punctiform* (O, m_0) este un *câmp de forțe conservative*.

Sistemul de ecuații diferențiale pus *sub formă simetrică* (cf. [72], p. 359-365)

$$\frac{dx}{-\gamma \frac{mm_0}{r^3} x} = \frac{dy}{-\gamma \frac{mm_0}{r^3} y} = \frac{dz}{-\gamma \frac{mm_0}{r^3} z}$$

arată că *suprafețele echipotențiale sunt sfere concentrice iar liniile de forță sunt razele acestor sfere* în cazul câmpului gravitațional punctiform (vezi Figura 2.14).

Mărimea $V_p(r) = \frac{1}{m} \cdot V(M)$ poartă denumirea de *potențialul câmpului gravitațional (punctiform)*. Evident, $\vec{\Gamma} = -\nabla V_p$.

Se cuvine subliniat faptul că, în baza principiului acțiunii și reacțiunii, între particulele (O, m_0) și (M, m) are loc o *interacțiune (gravitațională)*. Acest lucru apare pregnant în formula (2.76), *simetrică* în ceea ce privește mărimile m_1, m_2 . De aceea, în mod *natural*, energia potențială V trebuie privită ca o *energie de interacțiune*, cu repartizare egală a "contribuțiilor" celor două puncte materiale:

$$V = -\gamma \frac{mm_0}{r} = \frac{1}{2}m \left(-\gamma \frac{m_0}{r}\right) + \frac{1}{2}m_0 \left(-\gamma \frac{m}{r}\right).$$

Practic, putem spune că *energia de interacțiune gravitațională a două puncte materiale este egală cu semisuma produselor dintre masa fiecăruia din punctele materiale și potențialul câmpului gravific generat de celălalt punct material*.

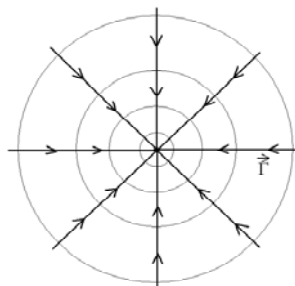


Figura 2.14

În cazul a n puncte materiale (M_i, m_i) , luând în calcul toate interacțiunile

posibile, energia de interacțiune gravitațională devine

$$V = \sum_{1 \leq i < j \leq n} \left[\frac{1}{2} m_i \left(-\gamma \frac{m_j}{r_{ij}} \right) + \frac{1}{2} m_j \left(-\gamma \frac{m_i}{r_{ij}} \right) \right],$$

unde $r_{ij} = d(M_i, M_j)$. Cu convenția $\frac{1}{r_{ii}} = 0$, introducem o *ordine* în structura mărimii V :

$$\begin{aligned} V &= \sum_{i=1}^n \left[\frac{1}{2} m_i \left(\sum_{j=i}^n -\gamma \frac{m_j}{r_{ij}} \right) \right] + \sum_{j=1}^n \left[\frac{1}{2} m_j \left(\sum_{i=1}^j -\gamma \frac{m_i}{r_{ij}} \right) \right] \\ &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n m_i \left[\sum_{k=1}^n \left(-\gamma \frac{m_k}{r_{ki}} \right) \right] = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n \left(-\gamma \frac{m_k}{r_{ki}} \right) m_i. \end{aligned}$$

Această formulă ne îngăduie să facem trecerea de la mulțimi *discrete* de puncte materiale la un corp material care ocupă în SF domeniul G . Astfel, atribuind fiecăreia dintre particulele componente ale corpului material o masă "specifică", de "punct", numită *densitate* (cf. [76], p. 559), $\rho(A)$, unde $A \in G$, vom scrie că

$$\begin{aligned} V &= \frac{1}{2} \int_G \rho(A) \left[\int_G \left(-\gamma \frac{\rho(B)}{|AB|} \right) d\lambda(B) \right] d\lambda(A) \\ &= \frac{1}{2} \int_G V_p(A) \rho(A) d\lambda(A). \end{aligned}$$

Mărima $-V \stackrel{\text{not}}{=} E_{leg}$ poartă denumirea de *energie de legătură gravitațională* a componentelor (particulelor) unui sistem (corp, mediu) material și reprezintă *lucrul mecanic necesar pentru a desface sistemul în componente, duse la infinit, respectiv energia cheltuită la formarea sistemului material din particule libere aduse de la infinit*. De exemplu, energia de legătură a unei molecule este energia necesară pentru a desface molecula în atomi, etc (cf. [32], p. 174-175). Energia de legătură gravitațională a unei sfere omogene cu masa $m = 1$ kg și raza $R = 5$ cm este $E_{leg} = 8 \cdot 10^{-10}$ J (căci $\text{J/kg} = \text{m}^2/\text{s}^2$, cf. [32], p. 175). Când raza sferei scade, energia de legătură gravitațională crește iar diferența rezultată se transformă în căldură. Aceasta poate constitui o explicație parțială (Kant²¹, Laplace, Helmholtz) a *incandescenței*

²¹I. Kant este adeptul panmatematismului filosofic, cf. [12], p. 142 și următoarele. Spre deosebire de el, G. Hegel, tratând problema *căderii* corpurilor, "aspiră spre o fizică mai empirică. Exact ca Aristotel în antichitate." (*op. cit.*, p. 178, nota de subsol)

stelelor, care ar fi formate teoretic din materie cosmică extrem de rarefiată (aflată "la infinit") prin *contractie* (legare) gravitațională. Firește, reacțiile nucleare care se produc măresc considerabil energia (cf. [32], p. 180).

Presupunând că densitatea $\rho(A)$ a corpului material, de masă m_0 , care ocupă în SF domeniul G îndeplinește condițiile precizate în subsecțiunea dedicată integralelor de tip potențial, a devenit clar că mărimea

$$\bar{\Gamma} = \gamma \cdot \nabla \left(\int_G \frac{\rho(A)}{|AM|} d\lambda(A) \right)$$

reprezintă *vectorul-accelerație (gravitațională)* căpătat de punctul material $M \in E_3$ din partea câmpului gravific al corpului material. Alura la distanțe mari a potențialului newtonian $-\gamma \cdot f_1(M)$ arată că, într-o anumită aproximație, acesta are formula $V_p(M) = -\gamma \frac{m_0}{|OM|}$, unde O desemnează centrul de masă al corpului material iar punctul M este exterior domeniului G . Obținem, așadar, aceleași valori ale potențialului gravitațional ca în cazul câmpului gravific punctiform. Ceea ce dovedește în mod convingător că *putem considera într-o serie de probleme ale mecanicii teoretice corpurile materiale drept particule localizate în centrul de masă al corpurilor materiale și având ca masă chiar masa acestora*. Sferoidul terestru și, în general, corpurile cerești *reci* (planete, sateliți naturali), fiind corpuri de rotație d. p. d. v. geometric, găsesc un *model* potrivit în domeniul G definit în lucrarea de față.

Un calcul bazat pe (2.40) și utilizarea coordonatelor sferice arată că, în cazul unei sfere de rază R omogenă ($\rho = \text{constantă}$) ori având omogenitate sferică (ρ este radial simetrică), au loc formulele

$$V(M) = \begin{cases} -\gamma \frac{mm_0}{r}, & r > R \\ -\frac{1}{2} \gamma \frac{mm_0}{R} \left(3 - \frac{r^2}{R^2} \right), & r < R \end{cases}$$

(cf. [59], p. 85). Pentru detalii, vezi [34], p. 378-381, [76], p. 388-394 ca și elegantele rezolvări date problemelor din capitolul 5 al cărții [59]. În particular, conform (2.41), energia de legătură gravitațională a sferei omogene este

$$E_{leg} = \frac{\gamma \pi m}{R} \cdot \int_0^R \left(3 - \frac{r^2}{R^2} \right) \rho r^2 dr$$

$$= \frac{3}{5} \gamma \frac{m^2}{R}$$

(cf. [32], p. 179).

2.2.14 Mișcarea în câmp central

O forță \vec{F} , aplicată punctului material M , poartă denumirea de *forță centrală* dacă vectorul \vec{F} este vector director al dreptei OM . În funcție de semnul mărimii $\vec{F} \cdot \vec{r}$, forța centrală se numește *atractivă* ($\vec{F} \cdot \vec{r} < 0$), respectiv *repulsivă* ($\vec{F} \cdot \vec{r} > 0$) (cf. [76], p. 418, [63], p. 319). Un câmp de forțe \vec{F} este considerat *central* dacă forțele $\vec{F} \in \vec{F}$ sunt forțe centrale. Aici, punctul O , aprioric fix, reprezintă *centrul* câmpului de forțe. *Câmpul gravitațional punctiform*, $\vec{F} = -\frac{\partial V_p}{\partial \vec{r}}$, constituie un exemplu elocvent de câmp central.

Legea ariilor. Formula lui J. Binet

Am văzut anterior că mișcarea unui punct material M sub acțiunea unei forțe (rezultante) centrale este plană. Aceasta ne permite să utilizăm metoda transformării Prúfer în planul mișcării. Cu notațiile cunoscute, $\vec{F} = F\vec{\rho}$. Proiectând relația (2.74) pe direcțiile $\vec{\rho}$, $\vec{\varepsilon}$, avem, conform (2.18),

$$\begin{cases} m \left(\ddot{r} - r \dot{\theta}^2 \right) = F \\ m \left(2 \dot{r} \dot{\theta} + r \ddot{\theta} \right) = 0. \end{cases} \quad (2.101)$$

În mod evident, discuția interesează atunci când $O \neq M$. Așadar, înmulțind cu r în ambii membri ai celei de-a doua relații (2.101), obținem $r^2 \dot{\theta} = \text{constant}$. Formula (2.87) arată că *momentul cinetic față de centrul O al punctului material M se conservă în mișcarea sa pe traiectorie*. De asemenea, are loc **legea ariilor**: *în mișcarea în câmp central, în jurul centrului O , a punctului material M , vectorul său de poziție "mătură" suprafețe de arii egale în intervale de timp egale* (cf. [63], p. 320, [41], p. 47).

Folosim în continuare prezentarea făcută în [34], p. 345-347, 354-357.

Fie η unghiul vectorilor \vec{r}_0 , \vec{v}_0 . Din nou, conform (2.18), avem

$$\vec{v}_0 \cdot \vec{\rho} = v_0 \cos \eta = \vec{\rho} \cdot \left[\dot{r}(t_0) \vec{\rho} + r(t_0) \dot{\theta}(t_0) \vec{\varepsilon} \right] = \dot{r}(t_0)$$

și $\bar{v}_0 \cdot \bar{\varepsilon} = v_0 \sin \eta = r_0 \dot{\theta}(t_0)$. Atunci, mărimea $r^2 \dot{\theta}$ are valoarea $C = r(t_0)[r(t_0) \dot{\theta}(t_0)] = r_0 v_0 \sin \eta$ în timpul mișcării punctului material M .

Prima dintre relațiile (2.101) poate fi pusă sub forma

$$m \ddot{r} - m \frac{C^2}{r^3} = F(t, r, \theta, \dot{r}, \dot{\theta})$$

(cf. [76], p. 421). Am ținut seama de expresia vectorilor \bar{r} , \bar{v} în coordonate polare ($F = F(t, \bar{r}, \bar{v})$).

Prin derivarea funcției compuse $r = r(\theta(t))$ în raport cu timpul t obținem

$$\begin{aligned} \dot{r} &= \frac{dr}{d\theta} \cdot \dot{\theta} = \frac{dr}{d\theta} \cdot \frac{C}{r^2} = -C \frac{d}{d\theta} \left(\frac{1}{r} \right) \\ \ddot{r} &= \frac{d}{dt} \left(-C \frac{d}{d\theta} \left(\frac{1}{r} \right) \right) = -C \frac{d^2}{d\theta^2} \left(\frac{1}{r} \right) \cdot \dot{\theta} \\ &= -\frac{C^2}{r^2} \cdot \frac{d^2}{d\theta^2} \left(\frac{1}{r} \right). \end{aligned}$$

Formulele elementare $\dot{\theta} = C \left(\frac{1}{r} \right)^2$, $r = \left(\frac{1}{r} \right)^{-1}$ ne conduc la expresia

$$-\frac{mC^2}{r^2} \left[\frac{d^2}{d\theta^2} \left(\frac{1}{r} \right) + \frac{1}{r} \right] = F \left(t, \frac{1}{r}, \theta, \frac{d}{d\theta} \left(\frac{1}{r} \right) \right).$$

În cazul particular al forței centrale \vec{F} independentă de timp, relația anterioară reprezintă o ecuație diferențială ordinară, numită *ecuația (formula) lui J. Binet* (cf. [32], p. 169, [76], p. 421).

Adăugând datele Cauchy

$$\begin{cases} \left(\frac{1}{r} \right) (\theta_0) = \frac{1}{r_0} \\ \left(\frac{1}{r} \right)' (\theta_0) = -\frac{\dot{r}(t_0)}{C} = -\frac{v_0 \cos \eta}{r_0 v_0 \sin \eta} = -\frac{1}{r_0 \tan \eta}, \end{cases}$$

unde²² $\theta(t_0) \stackrel{\text{not}}{=} \theta_0$, obținem *problema Cauchy* a mișcării particulei în câmp central:

$$\begin{cases} \left(\frac{1}{r} \right)'' + \frac{1}{r} = -\frac{F}{mC^2} \cdot \left(\frac{1}{r} \right)^{-2} \\ \left(\frac{1}{r} \right) (\theta_0) = \frac{1}{r_0} \quad \left(\frac{1}{r} \right)' (\theta_0) = -\frac{1}{r_0 \tan \eta}. \end{cases} \quad (2.102)$$

Firește, în cazul câmpului gravitațional, mărimea F are aspectul particular dat de $F = F(r) = -\gamma \frac{mm_0}{r^2}$. Însă formularea (2.102) are menirea să scoată în evidență importanța unui studiu *calitativ* al acestui gen de ecuații diferențiale ordinare.

²²Dacă $\eta = \frac{\pi}{2}$, atunci $\left(\frac{1}{r} \right)' (\theta_0) = 0$.

Rezolvarea problemei Cauchy a mișcării în câmpul gravitațional punctiform

În câmp gravitațional punctiform, ecuația lui J. Binet capătă forma unei ecuații diferențiale liniare și neomogene cu coeficienți constanți:

$$\left(\frac{1}{r}\right)'' + \frac{1}{r} = \frac{\gamma m_0}{C^2}. \quad (2.103)$$

Termenul neomogen al ecuației diferențiale fiind constant, integrarea ecuației se reduce la determinarea unei soluții particulare *constante* a sa (cf. [24], p. 400). În cazul nostru, este vorba chiar de $\frac{\gamma m_0}{C^2}$ (cf. [63], p. 323). Astfel, soluția problemei Cauchy (2.102) este dată de

$$\frac{1}{r} = \frac{\gamma m_0}{C^2} + A \cos \theta + B \sin \theta,$$

unde

$$\begin{cases} A = \left(\frac{1}{r_0} - \frac{\gamma m_0}{C^2}\right) \cos \theta_0 + \frac{1}{r_0 \tan \eta} \sin \theta_0 \\ B = \left(\frac{1}{r_0} - \frac{\gamma m_0}{C^2}\right) \sin \theta_0 - \frac{1}{r_0 \tan \eta} \cos \theta_0 \end{cases}$$

(cf. [34], p. 355). Să introducem mărimile λ, ψ prin $A = \lambda \cos \psi, B = \lambda \sin \psi$. Atunci²³,

$$\begin{aligned} \frac{1}{r} &= \frac{\gamma m_0}{C^2} + \lambda \cos(\theta - \psi) \\ &= \left(\frac{C^2}{\gamma m_0}\right)^{-1} \left[1 + \frac{C^2}{\gamma m_0} \sqrt{A^2 + B^2} \cos(\theta - \psi)\right], \end{aligned}$$

respectiv

$$r = \frac{p}{1 + e \cos(\theta - \psi)}. \quad (2.104)$$

²³Unghiul ψ se introduce atunci când cel puțin una dintre mărimile A, B este nenulă. Observăm că, dacă $\eta = \frac{\pi}{2}$ și $r_0 = \frac{C^2}{\gamma m_0}$, problema Cauchy atașată ecuației (2.103) admite soluția unică $r = r_0$, adică $A = B = 0$. *Mișcarea circulară uniformă* este, așadar, un caz particular de mișcare în câmp gravitațional punctiform (vezi [60], p. 9-10). Se poate arăta că există o singură curbă netedă plană, nedegenerată ($R \neq 0$), pe care o particulă se mișcă uniform astfel încât dreapta suport a accelerației sale să treacă printr-un punct fix, și anume *cercul* (cf. [32], problemele 1.23, 1.24, p. 40).

Cum

$$\begin{aligned}
 A^2 + B^2 &= \left(\frac{1}{r_0} - \frac{\gamma m_0}{C^2} \right)^2 + \frac{1}{r_0^2 \tan^2 \eta} \\
 &= \left(\frac{1}{r_0^2} + \frac{\cos^2 \eta}{r_0^2 \sin^2 \eta} \right) + \frac{\gamma^2 m_0^2}{C^4} - \frac{2\gamma m_0}{C^2 r_0} \\
 &= \frac{1}{(r_0 \sin \eta)^2} + \frac{\gamma^2 m_0^2}{C^4} \left(1 - \frac{2C^2}{\gamma m_0 r_0} \right) \\
 &= \frac{v_0^2}{C^2} + \frac{\gamma^2 m_0^2}{C^4} \left(1 - \frac{2C^2}{\gamma m_0 r_0} \right) \\
 &= \frac{\gamma^2 m_0^2}{C^4} \left[1 + \frac{C^2}{\gamma^2 m_0^2} \left(v_0^2 - 2 \frac{\gamma m_0}{r_0} \right) \right],
 \end{aligned}$$

obținem $e = \sqrt{1 + \frac{C^2}{\gamma^2 m_0^2} \left(v_0^2 - 2 \frac{\gamma m_0}{r_0} \right)}$, $p = \frac{C^2}{\gamma m_0}$ (cf. [63], p. 325).

Relația $r^2 \dot{\theta} = C$, privită ca o *ecuație diferențială ordinară cu variabilele separabile* (cf. [47], p. 9-10), ne conduce la *formula timpului*:

$$C(t - t_0) = \int_{\theta_0}^{\theta} r^2(q) dq.$$

În general, $C \neq 0$, ceea ce dovedește că *punctul material M se mișcă pe conică (2.104), cu înclinarea axei focale dată de unghiul ψ* (cf. [34], p. 352), *într-un singur sens ($\dot{\theta} = \frac{C}{r^2}$ are semn constant)* (cf. [41], p. 48, [76], p. 430). Aceasta ne va permite să considerăm, în cele ce urmează, că unghiul θ *crește mereu*.

O abordare echivalentă (teorema energiei mecanice)

Câmpul de forțe centrale $\overline{F} = -\frac{\partial V}{\partial \overline{r}}$, unde $V = V(r)$, fiind conservativ, energia mecanică (totală) a punctului material rămâne constantă în timpul mișcării:

$$E = \frac{1}{2} m v^2 + V(r) = \text{constant}.$$

Aici, energia cinetică a punctului material M poate fi pusă sub forma

$$E_c(M) = \frac{1}{2} m \left(\dot{r} \overline{\rho} + r \dot{\theta} \overline{\varepsilon} \right)^2 = \frac{1}{2} m \dot{r}^2 + \frac{1}{2} m r^2 \dot{\theta}^2$$

$$= \frac{1}{2} m \dot{r}^2 + \frac{mC^2}{2r^2}.$$

Cum $\dot{r}^2 = \frac{2}{m} [E - V(r)] - \frac{C^2}{r^2}$, alegându-ne un semn pentru valoarea mărimii \dot{r} , putem scrie, de exemplu, că

$$\dot{r} = \sqrt{\frac{2}{m} [E - V(r)] - \frac{L_O^2}{m^2 r^2}},$$

unde L_O reprezintă modulul momentului cinetic al punctului material M față de originea O (cf. [41], p. 48). Prin separarea variabilelor ajungem la

$$dt = \frac{dr}{\sqrt{\frac{2}{m} [E - V(r)] - \frac{L_O^2}{m^2 r^2}}}, \quad (2.105)$$

ceea ce ne permite estimarea $t = t(r)$. De asemeni, tot prin separarea variabilelor, avem

$$d\theta = \frac{L_O}{mr^2} dt \stackrel{(2.105)}{=} - \frac{d\left(\frac{L_O}{r}\right)}{\sqrt{2m [E - V(r)] - \left(\frac{L_O}{r}\right)^2}} \quad (2.106)$$

(cf. [32], p. 170), de unde, ținând seama de formula elementară $r = L_O \left(\frac{L_O}{r}\right)^{-1}$, obținem estimarea $\theta = \theta\left(\frac{L_O}{r}\right)$. Ceea ce încheie integrarea parametrilor mișcării: $\theta = \theta(r)$.

Detalii privind ecuațiile diferențiale de forma $\dot{r}^2 = X(r)$ pot fi găsite în [34], p. 325-327, [72], p. 182-187, etc.

Pozițiile punctului material M în care $\dot{r} = 0$ (adică, $\bar{v} \perp \bar{a}$, conform (2.18), (2.101)) poartă denumirea de *puncte de rebrusment (întoarcere)* ale traiectoriei sale (cf. [41], p. 49, [76], p. 314).

În cazul particular al mișcării punctului material în câmp gravitațional punctiform, teorema energiei mecanice devine

$$E = \frac{1}{2} m v^2 - \gamma \frac{m m_0}{r} = \frac{m}{2} \left(v^2 - 2 \frac{\gamma m_0}{r} \right), \quad (2.107)$$

de unde $v^2 - 2 \frac{\gamma m_0}{r} = v_0^2 - 2 \frac{\gamma m_0}{r_0}$ și $v^2 = \left(v_0^2 - 2 \frac{\gamma m_0}{r_0} \right) + 2 \frac{\gamma m_0}{r}$. Așadar, *constanta* care exprimă *raportul dintre dublul valorii energiei mecanice a punctului material și masa acestuia* intervine în formula *excentricității* e a traiectoriei

punctului material:

$$\begin{aligned} e &= \sqrt{1 + \frac{2E}{m} \cdot \frac{C^2}{\gamma^2 m_0^2}} = \sqrt{1 + 2 \frac{EL_0^2}{m\alpha^2}} \\ &= \sqrt{1 + 2 \frac{Ep}{\alpha}}, \end{aligned} \quad (2.108)$$

unde $\alpha \stackrel{\text{not}}{=} \gamma mm_0$ (cf. [34], p. 356, [41], p. 53, [32], p. 171). Aici, $p = \frac{L_0^2}{m\alpha}$.

2.2.15 Legile lui J. Kepler. Problema lui Newton

”Admirația noastră pentru acest om sublim (*n. n.*, J. Kepler) se împletește cu un alt sentiment de admirație și venerație, care, însă, nu mai e legat de o ființă umană, ci de misterioasa armonie a naturii în care ne-am născut. Încă din antichitate, oamenii au imaginat curbe ale celor mai simple legi posibile: printre acestea, pe lângă linia dreaptă și cercul, elipsa și hiperbola. Pe acestea din urmă le regăsim - cel puțin cu o mare aproximație - în orbitele corpurilor cerești.

S-ar părea că rațiunea umană trebuie să construiască mai întâi, independent, formele, înainte de a le putea dovedi existența în natură. Din minunata operă de-o viață a lui Kepler înțelegem clar că experiența simplă nu poate genera cunoașterea, aceasta fiind produsă doar prin compararea creațiilor spiritului cu faptele observației. (Albert Einstein, *Johannes Kepler*, [27], p. 57)”

Plecând de la observațiile astronomice ale lui Tycho Brahe, astronomul curții imperiale din Praga (cf. [34], p. 212), asistentul și apoi succesorul său, Johann Kepler, formulează cele trei legi care guvernează mișcările planetelor în jurul Soarelui (cf. [76], p. 430). Primele două legi sunt enunțate în 1609, iar cea de-a treia în 1618 (cf. [34], p. 212).

Legea întâi (traiectoria). *Planetele, asimilate cu puncte materiale, se mișcă în jurul Soarelui pe traiectorii eliptice, Soarele aflându-se într-unul din focarele elipsei.*

Legea a doua (aria). *Vectorul de poziție, dus de la Soare la planetă, ”mătură” arii egale în intervale de timp egale.*

Legea a treia (perioada de revoluție). *Pătratul perioadei de revoluție a planetei în jurul Soarelui este proporțional cu cubul semiaxei mari a traiectoriei, raportul de proporționalitate fiind același pentru toate planetele.*

Prin *problema lui Newton* înțelegem calculul pe baza căruia se justifică, plecând de la (2.76), valabilitatea celor trei legi ale lui J. Kepler (cf. [34], p. 354).

Am arătat deja, rezolvând problema Cauchy a mișcării în câmp gravitațional punctiform, că traiectoria particulei este o conică și că are loc legea ariilor, adică cea de-a doua lege a lui Johann Kepler. Nu putem, firește, stabili *doar* pe baza considerațiilor anterioare care dintre corpurile cerești se deplasează pe o elipsă și care, de exemplu, pe o hiperbolă. Totuși, informația astronomică indică faptul că traiectoria este aproximativ eliptică în cazul mișcării planetelor în jurul astrului solar ca și în cazul revoluției sateliților naturali ai acestora (cf. [34], p. 358). Traiectorii de tip hiperbolic au, se pare, anumite comete care traversează sistemul nostru solar (cf. [32], p. 173).

Traiectoria particulei în câmp gravitațional punctiform devine elipsă atunci când $e \in (0, 1)$. Parametrii (geometrici) ai elipsei sunt mărimile a , b , c , unde

$$p = \frac{L_O^2}{\alpha m} = \frac{b^2}{a} \quad e = \sqrt{1 + 2\frac{EL_O^2}{m\alpha^2}} = \frac{c}{a} \quad c = \sqrt{a^2 - b^2}.$$

Astfel, cum

$$\frac{c^2}{a^2} = 1 - \frac{b^2}{a^2} = 1 + 2\frac{EL_O^2}{m\alpha^2},$$

deducem că

$$a = \frac{\frac{b^2}{a}}{\frac{b^2}{a^2}} = \frac{\frac{L_O^2}{\alpha m}}{-2\frac{EL_O^2}{m\alpha^2}} = -\frac{\alpha}{2E} \quad (E < 0), \quad (2.109)$$

respectiv

$$b = \sqrt{ap} = \frac{L_O}{\sqrt{-2mE}}. \quad (2.110)$$

Conform (2.87), putem scrie $L_O = 2m\Omega = 2m \dot{A}$, de unde, prin integrare în raport cu timpul t , avem

$$T = \int_0^T dt = \int_0^{\pi ab} \frac{2m}{L_O} dA = \frac{2m\pi ab}{L_O} = \pi\alpha \sqrt{\frac{m}{-2E^3}}.$$

În sfârșit,

$$\frac{T^2}{a^3} = \frac{4\pi^2}{\alpha} m = \frac{4\pi^2}{\gamma m_0} = \text{constant} \quad (2.111)$$

(cf. [32], p. 172, [34], p. 356-357). Cea de-a treia lege a lui Johann Kepler fiind probată, problema lui Newton s-a încheiat. Apelând la legea ariilor,

putem scrie că $\Omega = \pi ab/T$, de unde rezultă o formulă similară relației (2.111), și anume

$$\frac{T^2}{a^3} = \frac{b^2/a}{a^2 b^2/T^2} = \pi^2 \frac{p}{\Omega^2}. \quad (2.112)$$

Să arătăm acum că formula (2.76) poate fi dedusă pornind de la legile lui Kepler (cf. [8], problema 11.16, p. 322).

Conform legii întâi, mișcarea planetei în jurul Soarelui este plană, ceea ce ne permite să utilizăm coordonatele polare (metoda transformării Prúfer). Mai precis,

$$r = \frac{p}{1 + e \cos(\theta - \psi)} \quad (2.113)$$

(vezi Figura 2.15).

Cu notațiile obișnuite, ținând seama de (2.18), (2.83), (2.87) și legea ariilor, avem

$$\vec{r} \times \vec{F} = \frac{d}{dt} (\vec{r} \times m\vec{v}) = 2m \frac{d}{dt} (\Omega \vec{k}) = 0$$

deoarece mărimile $\vec{\rho} \times \vec{\varepsilon} = \vec{k}$, respectiv Ω sunt constante în raport cu timpul t . Acest lucru dovedește coliniaritatea vectorilor \vec{r} , \vec{F} . Așadar, forța \vec{F} este centrală. Putem scrie că $\vec{F} = F\vec{\rho} = m \begin{pmatrix} \ddot{r} - r\dot{\theta}^2 \\ \ddot{\theta} \end{pmatrix} \vec{\rho}$, pe baza relațiilor (2.101).

Să calculăm, cu ajutorul formulei (2.113), mărimile care intervin în scrierea vectorului \vec{F} .

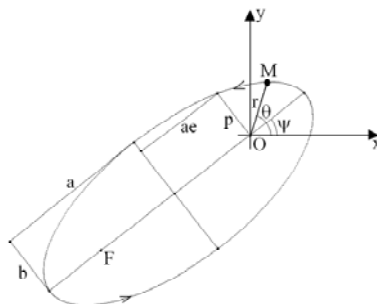


Figura 2.15

Astfel, derivând (2.113) în raport cu timpul t , obținem

$$\dot{r} = \frac{ep \sin(\theta - \psi) \dot{\theta}}{[1 + e \cos(\theta - \psi)]^2} = \frac{ep \sin(\theta - \psi)}{[1 + e \cos(\theta - \psi)]^2} \cdot \frac{2\Omega}{r^2}.$$

Însă $[1 + e \cos(\theta - \psi)]^2 = p^2/r^2$, de unde

$$\dot{r} = \frac{2\Omega e}{p} \sin(\theta - \psi). \quad (2.114)$$

Derivarea în raport cu timpul t a formulei (2.114) ne conduce la

$$\ddot{r} = \frac{2\Omega e}{p} \cos(\theta - \psi) \dot{\theta} = \frac{4\Omega^2 e}{p} \cos(\theta - \psi) \cdot \frac{1}{r^2}.$$

În sfârșit,

$$F = m \left[\frac{4\Omega^2 e}{pr^2} \cos(\theta - \psi) - r \frac{4\Omega^2}{r^4} \right].$$

Dar, conform (2.113), $\cos(\theta - \psi) = \frac{p-r}{re}$, astfel că

$$F = -\frac{4\Omega^2 m}{pr^2}.$$

De aici, ținând seama de (2.112), deducem că

$$F = -4\pi^2 \cdot \frac{a^3}{T^2} \cdot \frac{m}{r^2}. \quad (2.115)$$

Mărimea a^3/T^2 fiind constantă, introducem coeficientul γ prin

$$4\pi^2 \cdot \frac{a^3}{T^2} = \gamma \cdot M, \quad (2.116)$$

unde M este masa (gravifică) a Soarelui, presupusă ca localizată în originea O a sistemului de referință.

În concluzie,

$$\vec{F} = -\gamma \frac{mM}{r^2} \cdot \vec{p}.$$

Justificarea prezenței termenului M în (2.116) este următoarea: în baza principiului acțiunii și reacțiunii, planeta atrage Soarele cu o forță egală în mărime dar opusă ca sens forței \vec{F} . În plus, căutăm o expresie a forței *generale* de atracție gravitațională, ceea ce înseamnă că forța cu care planeta atrage Soarele trebuie să aibă aceeași *natură* cu forța de atracție a Soarelui. Ori, o atare cerință se realizează introducând masa M care să joace "rolul" mărimii m în (2.115) (cf. [34], p. 358). Justificarea s-a încheiat.

2.2.16 Problema celor două corpuri

Calcululele anterioare s-au referit la mișcarea planetei în jurul astrului solar presupus (aprioric) *fix*. De asemeni, s-a considerat că influența gravitațională a Soarelui asupra planetei este atât de mare încât orice altă influență, de aceeași *natură* (de exemplu, a Lunii asupra Pământului, cf. [76], p. 675), se cuvine neglijată (cf. [59], p. 89).

Să reluăm discuția dintr-o perspectivă mai largă. Mai precis, să considerăm sistemul mecanic închis a două particule materiale M_1, M_2 , de mase m_1, m_2 și raze vectoare \bar{r}_1, \bar{r}_2 în sistemul de referință inerțial \mathcal{R} .

Punctele materiale interacționează gravitațional, astfel că

$$m_1 \bar{a}_1 = \bar{F} \quad m_2 \bar{a}_2 = -\bar{F}, \quad (2.117)$$

unde $\bar{F} = \gamma \frac{m_1 m_2}{r^2} \cdot \frac{\overline{M_1 M_2}}{r}$, $r = d(M_1, M_2)$. Are loc legea de conservare a impulsului total: $m_1 \bar{v}_1 + m_2 \bar{v}_2 = \text{constant}$.

Notăm cu G baricentrul dat de ponderile $\alpha_i = m_i / (m_1 + m_2)$ al celor două puncte (geometrice) ale sistemului mecanic. Evident,

$$(m_1 + m_2) \cdot \overline{OG} = m_1 \bar{r}_1 + m_2 \bar{r}_2$$

și, prin derivare în raport cu timpul t , avem

$$(m_1 + m_2) \cdot \bar{v}_G = m_1 \bar{v}_1 + m_2 \bar{v}_2. \quad (2.118)$$

Conservarea impulsului total al sistemului mecanic arată că baricentrul G are, față de \mathcal{R} , o mișcare rectilinie uniformă cu viteza

$$\bar{v}_G = \frac{1}{m_1 + m_2} (\bar{p}_1 + \bar{p}_2).$$

Introducem reperul \mathcal{R}' cu originea în baricentrul G și axele de coordonate paralele cu axele de coordonate ale sistemului de referință \mathcal{R} . Mai precis, $\mathcal{R} = (O, \vec{B})$ și $\mathcal{R}' = (G, \vec{B})$. Conform relativității Galilei, *reperul cartezian \mathcal{R}' este inerțial*.

Plecând de la (2.117), putem scrie că

$$\begin{aligned} m_1 m_2 \cdot (\bar{a}_1 - \bar{a}_2) &= m_2 (m_1 \bar{a}_1) - m_1 (m_2 \bar{a}_2) \\ &= m_2 \bar{F} - m_1 (-\bar{F}) \\ &= (m_1 + m_2) \cdot \bar{F}, \end{aligned}$$

respectiv

$$\frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \cdot \bar{a} = \bar{F}, \quad (2.119)$$

unde $\bar{a} = \ddot{\bar{r}}$.

Cele două puncte materiale au în reperul \mathcal{R}' razele vectoriale

$$\bar{r}_1^* = -\frac{m_2}{m_1 + m_2} \bar{r} \quad \bar{r}_2^* = \frac{m_1}{m_1 + m_2} \bar{r} \quad (2.120)$$

(cf. [41], p. 45, [32], p. 167).

Astfel, egalitatea (2.119) poate fi pusă sub forma:

$$m_1 \cdot \ddot{\bar{r}}_1^* = \bar{F}. \quad (2.121)$$

Relația (2.121), stabilită în \mathcal{R} , se păstrează în reperul \mathcal{R}' și reprezintă legea de mișcare în câmpul de forțe centrale \bar{F} , de centru G , a unui punct material cu masa m_1 și raza vectorială \bar{r}_1^* . Aici, $F = -\gamma \frac{m_1 m_2}{r^2} = -\gamma \frac{m_1 m_2^3}{(m_1 + m_2)^2} \cdot \frac{1}{r_1^{*2}} = F(r_1^*)$ (cf. [76], p. 520).

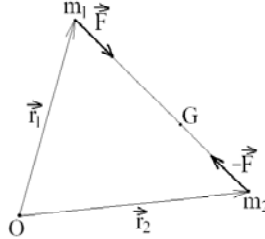


Figura 2.16

Formula lui J. Binet ne conduce la

$$\frac{d^2}{d\theta^2} \left(\frac{1}{r_1^*} \right) + \frac{1}{r_1^*} = \frac{\gamma}{C^2} \cdot \frac{m_2^3}{(m_1 + m_2)^2} = \frac{\nu}{C^2}.$$

Forma acestei ecuații, identică aceleia întâlnite la mișcarea particulei în câmp gravitațional punctiform, permite să afirmăm că primele două legi ale lui Kepler își păstrează valabilitatea în reperul \mathcal{R}' . Cât despre cea de-a treia lege, conform (2.111), avem

$$\frac{T^2}{a^3} = \frac{4\pi^2}{\nu} = \frac{4\pi^2}{\gamma} \cdot \frac{(m_1 + m_2)^2}{m_2^3} = \frac{4\pi^2}{\gamma} \cdot \frac{1}{m_2} \left(1 + \frac{m_1}{m_2} \right)^2. \quad (2.122)$$

Poate părea ciudat că un punct "gol" (fără masă), și anume baricentrul G , atrage particulele cu masă. Totuși, atunci când $m_1 \ll m_2$, adică $\frac{m_1}{m_2} \simeq 0$, relațiile (2.120) și (2.122) devin

$$\bar{r}_1^* = -\bar{r} \quad \bar{r}_2^* = 0 \quad \frac{T^2}{a^3} = \frac{4\pi^2}{\gamma} \cdot \frac{1}{m_2}.$$

De exemplu, în cazul Pământului, masa Soarelui m_2 este de aproximativ 333.000 ori mai mare decât masa m_1 a Pământului (cf. [34], p. 431), astfel că regăsim legile lui Johann Kepler în formularea dată lor anterior.

Relațiile (2.120), (2.118) arată că

$$\begin{cases} m_1 \bar{r}_1^* = -m_2 \bar{r}_2^* \\ m_1 \bar{v}_{rel,M_1} = -m_2 \bar{v}_{rel,M_2}. \end{cases}$$

Aici, vitezele relative sunt calculate în \mathcal{R}' . Conform (2.107), putem scrie că (vezi [60], exercițiul 14.1, p. 28)

$$\begin{aligned} E_{rel,M_1} &= \frac{m_1}{2} \left(v_{rel,M_1}^2 - 2 \frac{\gamma m_2^3 (m_1 + m_2)^{-2}}{r_1^*} \right) \\ &= \frac{m_1}{2} \left[\left(\frac{m_2}{m_1} \right)^2 v_{rel,M_2}^2 - 2 \left(\frac{m_2}{m_1} \right)^2 \frac{\gamma m_1^3 (m_1 + m_2)^{-2}}{r_2^*} \right] \\ &= \frac{m_2}{m_1} \cdot E_{rel,M_2}. \end{aligned}$$

În mod asemănător, păstrând notațiile subsecțiunii 2.2.14, deducem că

$$\left\{ \begin{array}{l} \eta_{rel,M_2} = \eta_{rel,M_1} \\ \psi_{rel,M_2} = \pi + \psi_{rel,M_1} \\ C_{rel,M_2} = \left(\frac{m_1}{m_2} \right)^2 C_{rel,M_1} \\ p_{rel,M_2} = \frac{m_1}{m_2} p_{rel,M_1} \\ \left(\frac{C^2}{\gamma m_0^2} \right)_{rel,M_2} = \left(\frac{m_1}{m_2} \right)^{-2} \left(\frac{C^2}{\gamma m_0} \right)_{rel,M_1} \\ e_{rel,M_2} = e_{rel,M_1} \\ A(B)_{rel,M_2} = - \left(\frac{m_1}{m_2} \right)^{-1} A(B)_{rel,M_1} \\ \lambda_{rel,M_2} = \left(\frac{m_1}{m_2} \right)^{-1} \lambda_{rel,M_1}. \end{array} \right.$$

În concluzie, mișcările punctelor materiale ale sistemului mecanic se desfășoară pe traiectorii asemenea (vezi Figura 2.17 a) în jurul baricentrului G (cf. [32], p. 167, [54], p. 38, [76], p. 518, 521).

Cât despre *mișcarea* sistemului mecanic, trebuie precizat că, în general, cele două particule materiale realizează o mișcare plană *instantanee* în jurul baricentrului G dar că planul mișcării (instantanee) se deplasează rectiliniu uniform (cf. [56], p. 145).

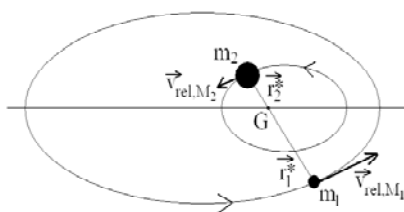


Figura 2.17 a

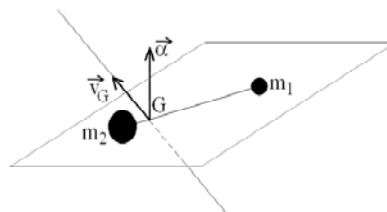


Figura 2.17 b

Într-adevăr, vectorii \overline{F} , \overline{r} fiind coliniari, deducem că

$$0 = \overline{r} \times \frac{m_1 + m_2}{m_1 m_2} \overline{F} = \overline{r} \times \ddot{\overline{r}} = \frac{d}{dt} (\overline{r} \times \dot{\overline{r}}).$$

Astfel, vectorul $\overline{\alpha} \stackrel{\text{not}}{=} \overline{r} \times \dot{\overline{r}}$ desemnează o mărime *constantă*, ceea ce ne îngăduie să afirmăm că vectorul \overline{r} se găsește în unicul hiperplan al spațiului $T\mathbb{R}^3$ care este perpendicular pe $\overline{\alpha}$ (cf. [56], p. 143). În particular, dreapta $M_1 M_2$ (de vector director \overline{r}) rămâne în permanență paralelă cu un plan având direcția normală *fixă* (căci $\overline{\alpha} \cdot \overline{r} = 0$) (vezi Figura 2.17 b).

Formula (2.122) arată că ce-a de-a treia lege a lui Kepler este susceptibilă de a fi *aproximativă*. Mai precis, dacă înlocuim reperul \mathcal{R}' cu $\mathcal{R}'' = (M_2, \overline{B})$, relația (2.119) poate fi scrisă sub forma

$$m_1 \overline{a}_{rel} = \frac{m_1 + m_2}{m_2} \overline{F} = \overline{F}^*. \quad (2.123)$$

Aici, $\ddot{\overline{r}} = \left(\frac{\partial^2 \overline{r}}{\partial t^2} \right)_{\mathcal{R}''}$ căci $\overline{\omega} = 0$, de unde $\overline{v}_{rel} = \dot{\overline{r}}$, $\overline{a}_{rel} = \ddot{\overline{r}}$.

La fel ca anterior, vectorii \overline{F}^* , \overline{r} sunt coliniari. Aceasta ne conduce la o mișcare plană, făcând posibilă utilizarea transformării Prüfer, deci *rescrierea*

relației (2.123) sub forma unei *ecuații a lui J. Binet*. Mai precis,

$$\begin{aligned} \frac{d^2}{d\theta^2} \left(\frac{1}{r} \right) + \frac{1}{r} &= -\frac{F^*}{m_1 C^2} \cdot \left(\frac{1}{r} \right)^{-2} \\ &= \frac{\gamma(m_1 + m_2)}{C^2} \end{aligned}$$

în planul M_2xy (am considerat $\bar{\alpha} = \alpha \bar{k}$, unde $\alpha > 0$).

Putem, așadar, conform (2.111), aduce o *corecție* celei de-a treia legi a lui J. Kepler:

$$\frac{T^2}{a^3} = \frac{4\pi^2}{\gamma m_2} \cdot \left(1 + \frac{m_1}{m_2} \right)^{-1}$$

(cf. [34], p. 361). Cu alte cuvinte, *constantă* din enunțul legii a treia *depinde de masa planetei*.

2.2.17 Ecuația lui J. Kepler

Să revenim la problema mișcării particulei în câmpul gravitațional punctiform al masei m_0 localizată în originea sistemului de referință inerțial \mathcal{R} .

Formulele (2.105), (2.106) realizează *legătura* între coordonatele particulei materiale și timp. Urmând expunerile făcute în [41], p. 55-56, [76], p. 434-438, acesteia i se poate asigura o *reprezentare parametrică* extrem de convenabilă.

Mai întâi, se cuvine precizat faptul că axa focală a traiectoriei particulei materiale este *imobilă* față de axele sistemului de referință \mathcal{R} (vezi Figura 2.15). Ea este caracterizată, după cum am văzut anterior, de unghiul ψ . Este posibil, așadar, pentru simplificarea calculelor, să alegem drept axa de coordonate Ox chiar axa focală a traiectoriei.

Ținând seama de (2.104), putem scrie că

$$r_{\min} = \frac{p}{1+e} = a(1-e) \quad r_{\max} = \frac{p}{1-e} = a(1+e),$$

de unde

$$a = \frac{r_{\min} + r_{\max}}{2} \quad e = \frac{r_{\max} - r_{\min}}{r_{\max} + r_{\min}}$$

(cf. [59], p. 89), formule extrem de utile în rezolvarea problemelor de mecanică teoretică.

Conform (2.105), avem

$$dt = \frac{dr}{\sqrt{\frac{2E}{m} + \frac{2\alpha}{r} - \frac{L_O^2}{m^2 r^2}}} = \frac{1}{\sqrt{-2Em}} \cdot \frac{mrd r}{\sqrt{-r^2 + \frac{\alpha}{-E}r - \frac{L_O^2}{-2Em}}}$$

$$\stackrel{(2.109), (2.110)}{=} \sqrt{\frac{m}{-2E}} \cdot \frac{rdr}{\sqrt{-r^2 + 2ar - ap}}.$$

Însă $p = a(1 - e^2)$, astfel că

$$dt = \sqrt{\frac{m}{-2E}} \cdot \frac{rdr}{\sqrt{a^2 e^2 - (a - r)^2}} = \sqrt{\frac{ma}{\alpha}} \cdot \frac{rdr}{\sqrt{a^2 e^2 - (a - r)^2}}$$

(cf. [41], p. 56, [76], p. 435).

Facem schimbarea de variabilă *naturală* $a - r = ae \cos u$ și integrăm ecuația diferențială *cu variabilele separate* obținută:

$$t = a\sqrt{\frac{ma}{\alpha}} \cdot \int_0^u (1 - e \cos q) dq.$$

S-a considerat că la momentul inițial ($t_0 = 0$) particula materială se găsea în poziția dată de $r = a(1 - e \cos 0) = r_{\min}$, numită *periheliul* traiectoriei²⁴ (poziția $r = r_{\max}$ reprezintă *afeliul* traiectoriei) (cf. [76], p. 431, 435, [41], p. 54, 56).

Așadar,

$$t = \sqrt{\frac{ma^3}{\alpha}} (u - e \sin u) \stackrel{(2.111)}{=} \frac{T}{2\pi} (u - e \sin u),$$

formulă cunoscută sub numele de *ecuația lui J. Kepler* (cf. [34], p. 364, [76], p. 436).

Apoi, conform (2.104), putem scrie că

$$\begin{aligned} x &= r \cos(\theta - \psi) = \frac{p - r}{e} = \frac{1}{e} [a(1 - e^2) - a(1 - e \cos u)] \\ &= a(\cos u - e) \\ y &= \sqrt{r^2 - x^2} = a\sqrt{1 - e^2} \sin u. \end{aligned}$$

²⁴În astronomie, această poziție se numește *pericentru*. Dacă masa m_0 reprezintă Soarele sau Pământul, vorbim de *periheliu*, respectiv *perigeu*. În cazul unui corp ceresc oarecare, poziția este *periastrul* traiectoriei, cf. [60], p. 6.

De asemeni, cum $\cos(\theta - \psi) = \frac{a(\cos u - e)}{r} = \frac{\cos u - e}{1 - e \cos u}$, avem

$$\begin{aligned} \tan \frac{\theta - \psi}{2} &= \sqrt{\frac{1 - \cos(\theta - \psi)}{1 + \cos(\theta - \psi)}} = \sqrt{\frac{1 + e}{1 - e}} \cdot \sqrt{\frac{1 - \cos u}{1 + \cos u}} \\ &= \sqrt{\frac{1 + e}{1 - e}} \cdot \tan \frac{u}{2} \end{aligned}$$

(cf. [34], p. 364).

Parametrul u admite următoarea *interpretare geometrică* (cf. [76], p. 436). Să notăm cu M_1, M_2 (vezi Figura 2.18) piciorul perpendicularei coborâtă din poziția M a particulei materiale, în mișcare pe elipsă, pe axa focală Ox , respectiv intersecția acestei perpendiculare cu cercul, situat în planul mișcării, care are drept diametru axa mare a traiectoriei. De asemeni, fie O_1 centrul cercului. Egalitatea $O_1M_1 = O_1O + OM_1 = ae + x$ ne conduce la $a \cos \angle(M_2O_1M_1) = ae + a(\cos u - e) = a \cos u$, de unde $\angle(M_2O_1M_1) = u$.

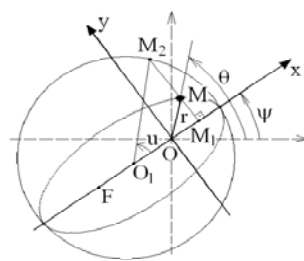


Figura 2.18

2.2.18 Limitele teoriei newtoniene a gravitației

În această subsecțiune urmărim prezentarea făcută în [76], p. 428-429.

Teorema conservării energiei mecanice în cazul mișcării particulei în câmp gravitațional punctiform, și anume $\frac{1}{2}mv^2 - \frac{\alpha}{r} = E$, explică de ce *traiectoriile hiperbolice* ($E > 0$) *corespund unor puncte materiale care vin de la infinit cu viteză "inițială" nenulă* (facem ca r să tindă către $+\infty$) în timp ce *traiectoriile parabolice* ($E = 0$) *corespund unor particule care au la infinit viteza nulă* (cf. [41], p. 55).

Să considerăm un punct material de masă m_0 și rază vectorială \vec{r} în sistemul de referință inerțial \mathcal{R} care vine de la infinit cu viteză nenulă (vezi Figura 2.19).

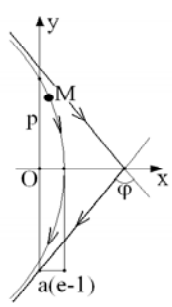


Figura 2.19

Impunând în (2.104) ca $r = +\infty$, obținem ecuația trigonometrică a *unghiurilor* făcute cu axa focală Ox de asimptotele traiectoriei:

$$\cos(\theta - \psi) = -\frac{1}{e} \quad (e > 1),$$

de unde $\theta - \psi = \pm \left(\frac{\pi}{2} + \arcsin \frac{1}{e}\right) + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. Diferența celor două cantități ne conduce la unghiul φ al asimptotelor hiperbolei, *drepte pe care am stabilit un sens de parcurs (orientare)*:

$$\varphi = 2 \arcsin \frac{1}{e}.$$

Dacă $\eta = \frac{\pi}{2}$, cum

$$e = \sqrt{1 + \frac{C^2}{\gamma^2 m_0^2} \left(v_0^2 - 2\frac{\gamma m_0}{r_0}\right)} = \sqrt{1 + \left[\left(\frac{r_0 v_0^2}{\gamma m_0}\right)^2 - 2\frac{r_0 v_0^2}{\gamma m_0}\right] \cdot \sin^2 \eta},$$

obținem

$$e = \frac{r_0 v_0^2}{\gamma m_0} - 1.$$

Atunci când valoarea lui e este *suficient* de mare, putem scrie că

$$\varphi = 2 \arcsin \frac{1}{e} \simeq \frac{2}{e} \simeq \frac{2\gamma m_0}{r_0 v_0^2}.$$

Mărimea $\varphi = \frac{2\gamma m_0}{r_0 v_0^2}$ reprezintă *unghiul de deviere* a traiectoriei unei particule *rapide* în câmp gravitațional punctiform.

Calculul anterior are următoarea justificare practică. Să presupunem că *lumina* este constituită din particule materiale, numite *fotoni*, având viteza

constantă $v_0 = 3 \cdot 10^8$ m/s. O rază luminoasă, provenind de la un astru îndepărtat, trece *razant* față de suprafața Soarelui și suferă o deviere a traiectoriei de unghi φ . Datele numerice sunt $r_0 = 696 \cdot 10^6$ m (raza Soarelui), $\eta = \frac{\pi}{2}$ (vezi Figura 2.20), $m_0 = 2 \cdot 10^{30}$ kg. Obținem $\varphi = 0'',87$ (grade sexagesimale). Valoarea determinată prin observație astronomică, în timpul eclipsei totale de Soare, este $\varphi_{\text{real}} = 1'',74$ (cf. [76], p. 429, [42], p. 339, [79], p. 159).

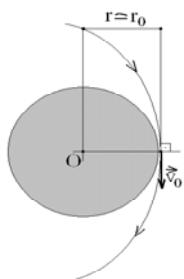


Figura 2.20

O altă neconcordanță între măsurătorile fizice și calculul făcut în teoria newtoniană a gravitației privește așa-zisul *imobilism* al axei focale a traiectoriei planetelor în mișcarea lor circumsolară. Observația astronomică a arătat că pozițiile periheliului planetelor variază în timp. Astfel, în cazul planetei Mercur avem de a face cu o deplasare seculară de $43'',5$ (grade sexagesimale) (cf. [76], p. 432).

S-a încercat corectarea teoriei clasice a gravitației prin introducerea unui termen aditiv în formula (2.76) sau luând în discuție prezența unor planete *fictive* (încă nedescoperite). Rezultatele obținute nu au fost însă mulțumitoare. Abia teoria relativistă a câmpului gravitațional [42], [79], oferă justificări fenomenelor descrise mai sus. O serie de detalii interesante privind variația poziției periheliului planetelor pot fi citite în [41], p. 49-50, 59-60.

În încheiere, să considerăm că asupra particulei materiale acționează un câmp de forțe centrale (gravitaționale) având formula $F(r) = -\frac{\alpha}{r^2} + \frac{\beta}{r^3}$, unde $\beta > 0$.

Atunci, problema (2.102) devine

$$\begin{cases} \left(\frac{1}{r}\right)'' + (1 + \lambda) \frac{1}{r} = \frac{\gamma m_0}{C^2} \\ \left(\frac{1}{r}\right)(\theta_0) = \frac{1}{r_0} \quad \left(\frac{1}{r}\right)'(\theta_0) = -\frac{1}{r_0 \tan \eta}, \end{cases} \quad (2.124)$$

unde $\lambda \stackrel{\text{not}}{=} \frac{\beta}{mC^2}$. Convenim să lucrăm cu ordinul de aproximare $\beta^2 \simeq 0$.

Rezolvarea ecuației diferențiale din (2.124) presupune, conform [24], p. 399-400, stabilirea formulei *soluției* pentru ecuația diferențială liniară și omogenă

$$\left(\frac{1}{r}\right)'' + (1 + \lambda) \frac{1}{r} = 0,$$

adică, în particular, determinarea soluțiilor ecuației algebrice $z^2 + 1 + \lambda = 0$. Astfel, folosind dezvoltarea limitată a funcției *radical* în vecinătatea lui 1, avem

$$z_{1,2} = \pm i\sqrt{1 + \lambda} \simeq \pm i \left(1 + \frac{\lambda}{2}\right).$$

Obținem, așadar, soluția problemei (2.124) sub forma

$$\frac{1}{r} = \frac{\gamma m_0}{C^2(1 + \lambda)} + A \cos \left(1 + \frac{\lambda}{2}\right) \theta + B \sin \left(1 + \frac{\lambda}{2}\right) \theta,$$

unde

$$\begin{cases} A = \left[\frac{1}{r_0} - \frac{\gamma m_0}{C^2(1 + \lambda)}\right] \cos \left(1 + \frac{\lambda}{2}\right) \theta_0 + \frac{1}{\left(1 + \frac{\lambda}{2}\right) r_0 \tan \eta} \sin \left(1 + \frac{\lambda}{2}\right) \theta_0 \\ B = \left[\frac{1}{r_0} - \frac{\gamma m_0}{C^2(1 + \lambda)}\right] \sin \left(1 + \frac{\lambda}{2}\right) \theta_0 - \frac{1}{\left(1 + \frac{\lambda}{2}\right) r_0 \tan \eta} \cos \left(1 + \frac{\lambda}{2}\right) \theta_0. \end{cases}$$

Se ajunge la

$$r = \frac{p_\lambda}{1 + e_\lambda \cos \left[\left(1 + \frac{\lambda}{2}\right) (\theta - \psi)\right]}.$$

Aici,

$$p_\lambda = \frac{C^2(1 + \lambda)}{\gamma m_0} \quad e_\lambda = \sqrt{1 + \frac{C^2(1 + \lambda)}{\gamma^2 m_0^2} \left[v_0^2 (1 + \lambda \sin^2 \eta) - 2 \frac{\gamma m_0}{r_0}\right]}.$$

Am ținut seama de ordinul de aproximare: $\left(1 + \frac{\lambda}{2}\right)^2 \simeq 1 + \lambda$. Ca și anterior, $\dot{\theta} > 0$, deci unghiul θ crește în permanență.

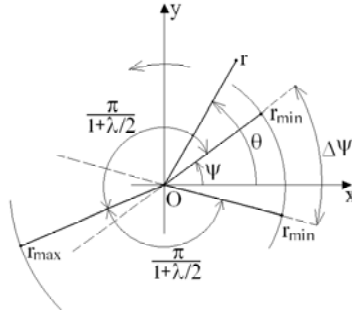


Figura 2.21

Să presupunem că la un moment dat planeta se găsește la periheliul traiectoriei sale: $r = r_{\min}$, $\theta = \psi$. Mișcarea desfășurându-se în sens trigonometric (vezi Figura 2.21), planeta ajunge la afeliu pentru prima oară după ce vectorul său de poziție s-a rotit cu unghiul $\frac{\pi}{1+\lambda/2}$. Planeta revine la periheliul dat de $r = r_{\min}$ după încă o rotație a vectorului său de poziție cu unghiul $\frac{\pi}{1+\lambda/2}$. Însă noua poziție a periheliului traiectoriei nu mai coincide cu poziția inițială. *Diferența* de unghi produsă este echivalentă unei *rotiri în sens invers trigonometric* a dreptei ce unește centrul O cu poziția inițială a periheliului, de unghi

$$\begin{aligned}\Delta\psi &= 2\pi - 2 \cdot \frac{\pi}{1 + \lambda/2} = 2\pi \frac{\lambda/2}{1 + \lambda/2} \simeq 2\pi \frac{\lambda}{2} \left(1 - \frac{\lambda}{2}\right) \\ &\simeq \frac{\pi\beta}{mC^2} = \frac{\pi\beta}{\alpha p},\end{aligned}$$

unde p reprezintă parametrul traiectoriei "neperturbate" ($p = p_0$), cu ordinul de aproximare dat de $\beta^2 \simeq 0$ (cf. [41], p. 60).

2.2.19 Teorema virialului

Această subsecțiune are un caracter auxiliar. Ea vine în continuarea calculului de mecanică hamiltoniană prezentate în subsecțiunea "Legi de conservare (II)". Cititorul nu este obligat să o parcurgă la prima lectură.

Teorema virialului (Clausius) privește media *temporală* a energiei cinetice a unui sistem mecanic închis. Ea are o semnificație excepțională în procesele de măsurare fizică (cf. [56], p. 195-196).

Să considerăm, așadar, sistemul mecanic închis a n puncte materiale, de mase m_i și raze vectoriale \bar{r}_i în raport cu sistemul de referință inerțial \mathcal{R} (cf. [41], p. 178), a cărui stare mecanică este caracterizată de lagrangianul (2.97).

Spunem că energia potențială V a sistemului mecanic este o funcție *omogenă* de ordinul $k \in \mathbb{Z}$ dacă, *prin definiție*, $V(\alpha\bar{r}_1, \alpha\bar{r}_2, \dots) = \alpha^k V(\bar{r}_1, \bar{r}_2, \dots)$, unde α reprezintă o constantă reală oarecare. Are loc următoarea **teoremă** a lui L. Euler:

$$kV = \sum_{i=1}^n \frac{\partial V}{\partial \bar{r}_i} \cdot \bar{r}_i \quad (2.125)$$

(cf. [41], p. 37).

Într-adevăr, putem scrie că

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\alpha} V(\alpha\bar{r}_1, \alpha\bar{r}_2, \dots) &= \frac{d}{d\alpha} [\alpha^k V(\bar{r}_1, \bar{r}_2, \dots)] \\ &= k\alpha^{k-1} \cdot V(\bar{r}_1, \bar{r}_2, \dots) \end{aligned}$$

și

$$\frac{d}{d\alpha} V(\alpha\bar{r}_1, \alpha\bar{r}_2, \dots) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial V}{\partial(\alpha\bar{r}_i)} \cdot \frac{d(\alpha\bar{r}_i)}{d\alpha} = \sum_{i=1}^n \left(\frac{1}{\alpha} \cdot \frac{\partial V}{\partial\bar{r}_i} \right) \cdot \bar{r}_i.$$

Egalând cele două expresii obținem

$$k\alpha^k \cdot V(\bar{r}_1, \bar{r}_2, \dots) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial\bar{r}_i} V(\alpha\bar{r}_1, \alpha\bar{r}_2, \dots) \cdot \bar{r}_i.$$

Justificarea relației (2.125) se încheie dacă alegem $\alpha = 1$.

Acest tip de formule se dovedește esențial, printre altele, în calcule legate de *reducerea numărului de variabile*. Cititorul poate consulta, de exemplu, lucrarea recentă a cercetătorilor canadieni A. Bóna și M. Slawiński, *Raypaths as parametric curves in anisotropic, nonuniform media: differential-geometry approach*, apărută în *Nonlinear Analysis*, **51**(2002), p. 983-994.

În continuare, conform (2.97), avem

$$2T = \sum_{i=1}^n (m_i \bar{v}_i) \cdot \bar{v}_i = \sum_{i=1}^n \bar{p}_i \cdot \bar{v}_i = \frac{d}{dt} \left(\sum_{i=1}^n \bar{p}_i \cdot \bar{r}_i \right) - \sum_{i=1}^n \bar{r}_i \cdot \dot{\bar{p}}_i.$$

Considerăm, în acord cu problemele vieții de zi cu zi, că particulele sistemului mecanic rămân "permanent" într-o zonă *mărginită* a SF și că există o *limitare superioară* a valorilor vitezelor acestora.

Media temporală a unei anumite mărimi $\Theta(t)$ este dată de formula

$$\bar{\Theta} \stackrel{\text{not}}{=} \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{1}{t} \int_{t_0}^t \Theta(\tau) d\tau$$

(cf. [41], p. 36).

Mărima $\sum_{i=1}^n \bar{p}_i \cdot \bar{r}_i$ fiind mărginită, media derivatei sale temporale este nulă:

$$\overline{\frac{d}{dt} \left(\sum_{i=1}^n \bar{p}_i \cdot \bar{r}_i \right)} = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{1}{t} \left\{ \sum_{i=1}^n [\bar{p}_i(t) \cdot \bar{r}_i(t) - \bar{p}_i(t_0) \cdot \bar{r}_i(t_0)] \right\}$$

$$= \frac{\text{mărginit}}{\text{infinit}} = 0.$$

Conform (2.99) și (2.125), deducem că

$$-\sum_{i=1}^n \bar{r}_i \cdot \dot{\bar{p}}_i = \sum_{i=1}^n \bar{r}_i \cdot \frac{\partial V}{\partial \bar{r}_i} = kV.$$

În concluzie, $2\bar{T} = k\bar{V}$. Însă $E = \bar{E} = \bar{T} + \bar{V}$, de unde

$$\bar{T} = \frac{k}{k+2}E \quad \bar{V} = \frac{2}{k+2}E.$$

Formula $\bar{T} = \frac{k}{2}\bar{V}$ reprezintă **teorema virialului**.

În cazul particular al interacțiunii gravitaționale ($n = 2$ și una dintre particule este localizată în originea sistemului de referință), cum $V(\bar{r}) = -\gamma \frac{m_1 m_2}{r}$ constituie o funcție omogenă de grad $k = -1$, avem $2\bar{T} = -\bar{V}$ și $E = -\bar{T} < 0$. O atare situație corespunde *realității*. Într-adevăr, atunci când energia mecanică este negativă ($e < 1$), mișcarea se produce într-o regiune mărginită a SF (cf. [41], p. 37).

2.2.20 Punct material liber. Punct material supus unor legături. Condiții de echilibru. Forțe de frecare

Mișcarea punctului material în câmp central (gravitațional) se datorează, după cum am văzut, acțiunii la *distanță* ($r > 0$) a unei forțe de tip atractiv, fără "atingerea" dintre particulă și corpul generator de câmp. Acest caz "cosmic" de mișcare prezintă o serie de avantaje pe care nu le regăsim în viața de zi cu zi. Astfel, în vid, corpul punctiform nu întâlnește nici un obstacol, nu se ciocnește de nimic.

Două exemple extrem de sugestive se cuvin aduse în discuție. Primul este cel al unui creion legat cu sfoară de degetul arătător al mâinii drepte (variante simplificată a jucăriei *yo-yo* care apare în filmele americane, mânăuită cu încântare de vreun puști de 5 – 6 ani). El se poate deplasa în orice direcție, dar distanța de la vârful său la degetul arătător al persoanei care realizează experimentul nu poate depăși valoarea $d_{\max} = l + (D - d)$, unde l reprezintă lungimea sforii iar d ($d < \frac{D}{2}$) distanța de la capătul creionului la nodul făcut de sfoară pe creion ("grosimea" creionului se neglijează) (vezi Figura 2.22).

Ceea ce arată că vârful V este supus unei restricții *dată printr-o inegalitate*, și anume

$$d(O, V) \leq d_{\max}$$

sau, echivalent,

$$x_V^2(t) + y_V^2(t) + z_V^2(t) - d_{\max}^2 \leq 0$$

(cf. [76], p. 123, [34], p. 387, [63], p. 328-329).

Al doilea exemplu este furnizat de cartea "Un veac de singurătate", aparținând scriitorului sudamerican G. G. Márquez, aflată într-un raft de bibliotecă, la etajul al doilea al Bibliotecii Județene din Craiova. Volumul respectiv poate fi scos din raft (deplasat *orizontal*) dar nu poate fi ridicat sau coborât (mișcat *pe verticală*) atâta timp cât se găsește în raft. Cu alte cuvinte, litera "U" din titlul cărții este supusă unei restricții *dată printr-o egalitate*, și anume

$$z_U(t) = h,$$

unde h reprezintă înălțimea (constantă) a raftului.

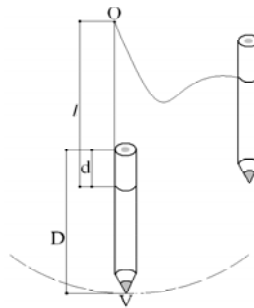


Figura 2.22

Exemplele anterioare arată că, în problemele vieții de zi cu zi, asupra corpurilor acționează o serie de restricții, numite *legături*. În cazul unei particule, se întâlnesc denumirile de *punct material liber* și *punct material legat* desemnând un corp punctiform care poate ocupa, în principiu, *orice* poziție în SF relativ la sistemul de referință \mathcal{R} , respectiv un corp punctiform *obligat*, de exemplu, să rămână pe o suprafață, pe o curbă sau într-un punct fix (cf. [76], p. 110).

Astfel, *legăturile constituie restricții de natură geometrică și/sau cinematică ale posibilităților de mișcare ale punctului material*. Legăturile bilaterale se exprimă prin egalități (ecuații) de forma

$$\varphi(t, x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}) = 0,$$

pe când legăturile *unilaterale* vor fi date cu ajutorul inegalităților

$$\varphi(t, x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}) \leq 0.$$

În funcție de prezența *explicită*, respectiv absența timpului t din formula legăturii, aceasta este *reonomă* (în prezența timpului t) sau *scleronomă* (în absența timpului t).

Admitem în cele ce urmează că *o legătură nu cedează (punctul material nu poate fi "smuls" legăturii) și nu se modifică sau distruge în timp*. În plus, prezența explicită a timpului t în formula legăturii permite evoluția acesteia *după o lege dată*, independent de forțele care acționează asupra punctului material (cf. [76], p. 476-477, [34], p. 387-388, [63], p. 328). Un exemplu în această privință este oferit de prezența unei pietricele în interiorul unei anvelope (aproximată, pentru simplitate, cu un tor 3-dimensional). Datorită existenței unei spărturi de dimensiuni reduse, anvelopa se dezumflă în timpul mișcării autovehiculului. Ceea ce înseamnă că pietricica se găsește într-un loc *din ce în ce mai "strâmt"*, fenomen independent de forțele care acționează asupra sa.

Nu insistăm în privința unor asemenea chestiuni, ele fiind tratate pe baza calculelor specifice *mecanicii analitice* (cf. [76], p. 482, 493). Oricum, a devenit clar că, atât în situația creionului legat de degetul arătător cât și în cea a cărții din raftul de bibliotecă, legăturile constituie expresii matematice ale *interacțiunii* corpurilor, dar că efectele acestor interacțiuni sunt neglijabile în cazul unuia dintre cele două corpuri implicate în proces. Astfel, tendința creionului de a "trage", la rândul său, de degetul arătător, respectiv a cărții de a apăsa raftul de bibliotecă atunci când cineva încearcă să o deplaseze vertical au consecințe practic *nule* asupra degetului arătător ori a raftului de bibliotecă. Cu alte cuvinte, legăturile au un sens *local*, identificându-se degetul arătător și raftul de bibliotecă cu *mediul* înconjurător (cf. [32], p. 65). În particular, cele două aspecte referitoare la punctul material liber, și anume *absența acțiunii vreunei forțe* (venite din partea "mediului" înconjurător) și posibilitatea de a ocupa *indiferent ce poziție* în SF sub acțiunea unor forțe corespunzătoare se pun de acord.

Vom stabili în continuare, pe baza expunerii făcută în [76], p. 112-124, ecuațiile care intervin în statică, numite *condiții de echilibru* ale punctului material. Următorul experiment poate fi ușor imaginat. Pe un plan înclinat (vezi Figura 2.23) este așezată o bucată de săpun de casă (având formă paralelipipedică) pe care o legăm cu sfoară. Variind unghiul β ($0 \leq \beta \leq 90^\circ$)

făcut de sfoară cu suprafața planului, putem împiedica bucata de săpun să alunece în jos pe planul înclinat. Evident, forța întrebuințată cu această ocazie (\vec{F} , \vec{F}_1 , \vec{F}_2 , etc) va depinde de unghiul β .

Asupra bucății de săpun (privită ca un "punct" material) acționează (în mod vizibil) două forțe:

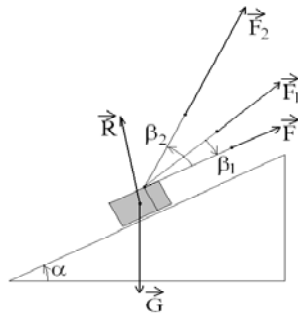


Figura 2.23

\vec{F} (transmisă prin intermediul sforii) și greutatea \vec{G} . Bucata de săpun este, în plus, supusă unei legături unilaterale, fiind obligată să se miște pe suprafața planului înclinat (legătura este unilaterală căci, dacă forța \vec{F} este suficient de mare, bucata de săpun va părăsi planul înclinat, fiind ridicată în aer). În mod evident, bucata de săpun *interacționează* cu planul înclinat "responsabil" de existența restricției de mișcare a sa; mai precis, bucata de săpun *apasă* planul înclinat (acțiune), acesta intervenind cu o forță necunoscută \vec{R} (reacțiune) asupra bucății de săpun (cf. [32], p. 46). În concluzie, asupra bucății de săpun acționează trei forțe: două "vizibile" \vec{F} , \vec{G} (forța \vec{F} exercitată prin *intermediul* sforii se mai numește și *activă*, cf. [32], p. 65, [14], p. 18) și o a treia, \vec{R} , venind din partea "mediului". Putem, în mod natural, face să *dispară* planul înclinat punând în locul său forța \vec{R} .

Condițiile de echilibru ale bucății de săpun trebuie să asigure rămânerea acesteia *în repaus* după așezarea pe planul înclinat. Pentru determinarea lor utilizăm *principiul paralelogramului (independenței acțiunii forțelor)* și *principiul inerției* (cf. [76], p. 112). Asupra bucății de săpun acționând trei forțe diferite, ele pot fi înlocuite cu una singură, *rezultanta* lor. Efectul acțiunii acesteia asupra corpului material va îngloba efectele acțiunii fiecăreia dintre cele trei forțe. Cum bucata de săpun trebuie să rămână în repaus odată așezată pe planul înclinat, *starea sa mecanică nu suferă vreo modificare*

(inițial, săpunul era ținut cu mâna), ceea ce arată că, pe baza principiului inerției, are loc relația

$$\vec{F} + \vec{G} + \vec{R} = 0. \quad (2.126)$$

”Slăbind” puțin sfoara, bucata de săpun va începe să alunece în jos pe planul înclinat. Mișcarea sa este *rectilinie*. Aceasta ne permite să *descompunem* ecuația (2.126) după două direcții ortogonale: una paralelă cu suprafața planului înclinat (direcția mișcării *posibile* a bucății de săpun) și cealaltă perpendiculară pe planul înclinat (vezi Figura 2.24).

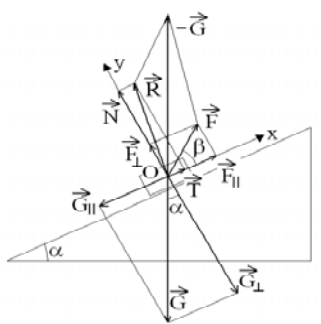


Figura 2.24

Putem da și o altă justificare (parțială) a acestei descompuneri: relația (2.126) arată că $\vec{R} \in Sp(\{\vec{F}, \vec{G}\})$. Forțele \vec{R} , \vec{F} , \vec{G} fiind, așadar, coplanare, ele se vor găsi în planul secțiunii verticale (\vec{G} are direcția verticalei descendente) având *unghiul* la bază α (cf. [76], p. 118) prin planul înclinat ce conține punctul material. Descompunerea relației (2.126) se poate face după direcțiile oricărei baze (ortonormate) a spațiului director al secțiunii.

Așadar, condițiile necesare și suficiente (cf. [76], p. 113) ca bucata de săpun să rămână în echilibru pe planul înclinat sunt

$$\begin{cases} F_{||} + T - G_{||} = F \cos \beta + T - G \sin \alpha = 0 \\ N + F_{\perp} - G_{\perp} = N + F \sin \beta - G \cos \alpha = 0. \end{cases} \quad (2.127)$$

Aici, $\vec{R} = \vec{N} + \vec{T}$ iar semnul lui T depinde de *tendința de mișcare* a bucății de săpun (vezi Figura 2.25) (cf. [63], p. 39-40, [14], p. 23-24, [76], p. 128).

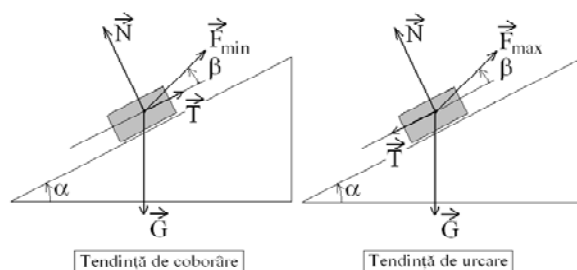


Figura 2.25

În general, dacă asupra unui punct material liber acționează mai multe forțe \vec{F}_i , atunci forma vectorială a condițiilor sale de echilibru este

$$\vec{\mathcal{F}} = \sum_i \vec{F}_i = 0, \quad (2.128)$$

unde $\vec{\mathcal{F}}$ desemnează *rezultanta* forțelor \vec{F}_i . Condițiile de echilibru se obțin proiectând (2.128) pe trei (două) direcții ortogonale alese convenabil (cf. [14], p. 18). Problemele staticii punctului material liber (cf. [63], p. 29, [14], p. 18) se referă, pe de o parte, la determinarea *poziției de echilibru* a acestuia în reperul canonic \mathcal{R} (forțele \vec{F}_i fiind cunoscute) și, pe de altă parte, la determinarea forțelor \vec{F}_i care trebuie aplicate punctului material pentru ca acesta să rămână în echilibru într-o anumită poziție. În acest al doilea caz, *asupra forțelor \vec{F}_i este necesar să fie impuse condiții suplimentare* (în particular, $\beta < 90^\circ$; trăgând de sfoară perpendicular pe suprafața planului înclinat nu putem opri alunecarea bucății de săpun ci, cel mult, desprinde bucata de săpun de planul înclinat) (cf. [76], p. 113-114).

Forța \vec{R} poartă denumirea de *forță de legătură (reacțiune)* (cf. [32], p. 65, [63], p. 31, [14], p. 18, [76], p. 115, 480). Dacă asupra componentelor sale \vec{N} , \vec{T} nu se impune nici o condiție, problema echilibrului bucății de săpun este *nedeterminată* (cf. [76], p. 115). Așa cum vom vedea ulterior, între mărimile N și T are loc relația $|T| \leq \mu N$, constanta μ fiind determinată experimental (cf. [14], p. 23).

Să considerăm punctul material M *obligat* să rămână pe suprafața simplă $\gamma : U \rightarrow E_3$. Legătura sa este bilaterală, punctul material M neputând părăsi suprafața. Mișcarea (posibilă) a punctului material M sub acțiunea unor forțe oarecare având loc pe suprafață, poziția acestuia este caracterizată *complet* de parametrii (variabilele) suprafeței, numiți *grade de libertate* ale punctului material (cf. [76], p. 110, 117, 479-480, [41], p. 7, [2], p. 57).

Micile variații ("slăbirea" sforii în cazul bucății de săpun) ale poziției punctului material M în jurul poziției sale de echilibru se fac pe un arc "infini" de mic de curbă situat pe suprafața $\gamma : U \rightarrow E_3$. Ori, așa cum precizăm la comentariile făcute în finalul secțiunii precedente, o asemenea mișcare poate fi aproximată cu deplasarea punctului material pe tangenta la arcul de curbă în poziția sa de echilibru. Ceea ce implică faptul că deplasările (posibile) "infini" de mici ale punctului material M se realizează, practic, în planul tangent la suprafața $\gamma : U \rightarrow E_3$ în poziția de echilibru a acestuia (cf. [76], p. 750). Apare astfel, în mod natural, *ideea* de a descompune forța de legătură necunoscută \vec{R} în două componente \vec{N} , \vec{T} , una coliniară cu versorul normal exterior al suprafeței $\gamma : U \rightarrow E_3$ în poziția de echilibru a punctului material (\vec{N}) și cealaltă (\vec{T}) situată în planul T_{M_0} , unde M_0 reprezintă poziția de echilibru a punctului material M . În mod evident, "rolul" componentei normale \vec{N} a reacțiunii \vec{R} este de a împiedica punctul material să părăsească legătura (bilaterală). La rândul său, componenta tangențială \vec{T} a reacțiunii \vec{R} va împiedica punctul material să se deplaseze pe legătură (cf. [76], p. 116, [14], p. 19, [63], p. 31-32). Componenta \vec{T} poartă denumirea de *forță de frecare* (cf. [76], p. 116, 480, [14], p. 19, [2], p. 61). Ea se datorează "asperităților" suprafeței $\gamma : U \rightarrow E_3$ (cf. [14], p. 21). Legătura $\gamma : U \rightarrow E_3$ este *ideală* (lucioasă, lucie) dacă $\vec{T} = 0$.

Considerațiile anterioare își păstrează valabilitatea atunci când punctul material este obligat să rămână pe curba simplă $\gamma : I \rightarrow E_3$. Singura deosebire constă în faptul că, acum, componenta normală \vec{N} a forței de legătură \vec{R} nu mai are o direcție *precizată*, ci se găsește în planul normal la curba $\gamma : I \rightarrow E_3$ în poziția de echilibru M_0 a punctului material M .

Forma vectorială a condițiilor de echilibru ale punctului material M supus unei legături lucii este

$$\vec{\mathcal{F}} + \lambda \cdot \vec{n}_{M_0} = 0$$

(cf. [76], p. 117-118, [15], p. 60, vol. II), unde $\vec{\mathcal{F}}$ desemnează rezultanta forțelor efectiv ("vizibil") aplicate punctului material M , respectiv

$$\vec{\mathcal{F}} + \lambda_1 \cdot \vec{\nu}_{M_0} + \lambda_2 \cdot \vec{\beta}_{M_0} = 0.$$

În practică, este utilă referirea la curba $\gamma : I \rightarrow E_3$ ca *intersecție* a două suprafețe (cf. [48], p. 15). Atunci, putem scrie că

$$\vec{\mathcal{F}} + \lambda_1 \cdot (\vec{n}_1)_{M_0} + \lambda_2 \cdot (\vec{n}_2)_{M_0} = 0,$$

unde \vec{n}_1, \vec{n}_2 reprezintă versorii normali exteriori ai suprafețelor $\gamma_i : U_i \rightarrow E_3$, $i = 1, 2$ (cf. [76], p. 120-121, [14], p. 20, [34], p. 399, [25], p. 20).

În ceea ce privește legăturile *unilaterale* (date cu ajutorul inegalităților), acestea constituie legături ce pot fi părăsite de punctul material M în anumite condiții (situația creionului legat de degetul arătător al mâinii drepte atunci când sfoara nu este întinsă, respectiv a bucății de săpun ridicată de pe planul înclinat prin acțiunea forței \vec{F}) (cf. [76], p. 122). O problemă de statică a punctului material M supus unei legături unilaterale se tratează în felul următor: presupunem, mai întâi, că legătura este bilaterală și determinăm poziția (pozițiile) de echilibru; apoi, pentru fiecare din aceste poziții, analizăm *sensul* rezultantei $\vec{\mathcal{F}}$. Dacă acesta *nu asigură legătura* (de exemplu, în cazul bucății de săpun, rezultanta $\vec{\mathcal{F}} = \vec{F} + \vec{G}$ asigură legătura, apăsând asupra planului înclinat), atunci *poziția de echilibru respectivă trebuie eliminată din soluția problemei* (cf. [76], p. 123, [34], p. 390).

Legile lui C. Coulomb privind frecarea. Unghi de frecare. Conuri de frecare

Inițiem următorul experiment, ținând seama de expunerea făcută în [32], p. 63-64. Pe o masă de lemn este așezată o cărămidă (vezi Figura 2.26).

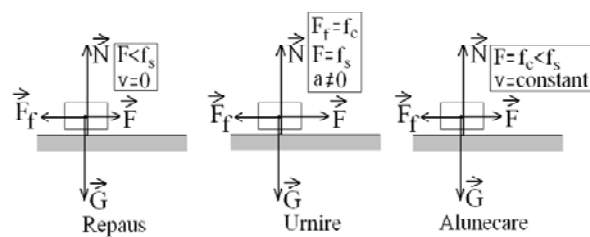


Figura 2.26

Forța de frecare \vec{T} , notată aici cu \vec{F}_f , poate fi pusă în evidență prin împingerea ușoară a cărămidii pe direcție orizontală; în absența *frecării*, cărămidă ar trebui să se deplaseze pe direcția forței \vec{F} . Ori, evident, acest lucru nu se petrece decât atunci când forța \vec{F} ajunge suficient de *intensă* (F este suficient de mare). Ceea ce arată că, la contactul cărămidii cu masa de lemn, *interven anumite forțe*, datorate *întrepătrunderii "neregularităților" microscopice* ale celor două suprafețe care se întâlnesc (ating). Identificând masa cu "mediul" înconjurător, interacțiunea celor două corpuri (cărămidă, masă)

ne va interesa doar din punctul de vedere al *reacțiunii* mediului, și anume \vec{T} . Faptul că, la un anumit moment, sub acțiunea unei forțe \vec{F} suficient de intense, cărămida se urnește din loc, începând să alunece într-o direcție oarecare, dovedește că acele forțe necunoscute care apar în proces nu pot fi *oricât* de intense, având o valoare *maximă* (determinabilă experimental). Forța necunoscută care "reține" cărămida (identificată cu un "punct" material) în repaus până când forța activă \vec{F} devine suficient de intensă poartă denumirea de *forță de frecare statică (aderență)*. Valoarea sa maximă este notată cu f_s . Odată urnită, cărămida poate fi făcută să alunece în mod uniform ($v = \text{constant}$) sub acțiunea unei forțe active $\vec{F} = -\vec{F}_f$ puțin *mai mică* decât forța necesară pornirii din loc. În acest caz, faptul că, sub acțiunea unei forțe active \vec{F} , mișcarea este uniformă ($a = 0$) implică prezența unei forțe necunoscute, datorată "ruperii" continue a "neregularităților" microscopice în procesul alunecării (cf. [32], p. 64, [76], p. 125). Această forță, de mărime f_c , se numește *forță de frecare de alunecare (cinetică)* (cf. [76], p. 124, [63], p. 35). Așa cum am precizat anterior, $f_c < f_s$ (cf. [63], p. 36).

O serie de experimente au evidențiat proprietățile mărimilor f_s, f_c . Astfel, sunt valabile, cu un anumit grad de aproximație (cf. [34], p. 388), următoarele **legi ale frecării**:

1) *Valoarea maximă a forței de aderență, f_s , nu depinde de aria de contact dintre corpuri, ci numai de natura materialelor din care acestea sunt constituite și de starea (felul prelucrării) suprafețelor de contact. Mărimea forței de frecare de alunecare, f_c , îndeplinește aceleași condiții ca și f_s , fiind, în plus, independentă de viteza relativă a corpurilor.*

2) *Mărimile f_s, f_c sunt direct proporționale cu mărimea N a reacțiunii normale la suprafața de contact.*

Astfel, putem scrie că $f_s = \mu_s N$, $f_c = \mu_c N$. Mărimile μ_s, μ_c reprezintă *coeficientul de aderență*, respectiv *coeficientul de frecare de alunecare* (cf. [32], p. 63, [63], p. 36, [76], p. 125-126).

Legile *frecării*, supranumită și *frecare uscată* (fără lubrifiere), cf. [63], p. 36, ori *coulombiană*, cf. [76], p. 778, au fost stabilite parțial de Leonardo da Vinci (cf. [76], p. 12), fiind redescoperite ulterior de G. Amontons (1699). C. Coulomb a subliniat deosebirea dintre frecarea statică și frecarea cinetică (cf. [32], p. 64). Legile frecării prezintă o serie de inexactități, cea mai ușor de dovedit apărând în experimentul *plăcilor de control* din metrologie. Acestea sunt suprafețe extrem de fin polizate, puse în contact. Teoretic, forța de frecare statică ar trebui să fie foarte mică, dar, în realitate, ea crește extrem

de mult în intensitate, fenomen datorat interacțiunii (coeziunii) moleculelor situate pe suprafețele de contact (cf. [76], p. 126). La rândul său, coeficientul de frecare de alunecare variază cu viteza: el scade brusc la început (între 0 și 10 km/h) după care prezintă o evoluție lentă (scădere) (cf. [63], p. 36). În acest mod poate fi explicat de ce un autovehicul frânează *mai ușor* dacă roțile sale nu sunt blocate complet, ci se rostogolesc și alunecă simultan (cu o viteză mai mică decât cea inițială) (cf. [76], p. 126).

În problemele privind echilibrul cu frecare al corpurilor materiale sau rostogolirea *fără alunecare* apare coeficientul μ_s , pe când în problemele de dinamică se folosește coeficientul μ_c (cf. [32], p. 64, [76], p. 608-611). În tehnică intervin și *frecarea de rostogolire* (cf. [32], p. 64, [63], p. 99-100, [76], p. 605-607, [2], p. 85-86), *de pivotare* (cf. [63], p. 102-103, [76], p. 617, [2], p. 87-89), *hidrodinamică* (cf. [76], p. 778), etc.

Să revenim la ecuațiile (2.127). Așa cum se poate observa în Figura 2.25, este de așteptat ca mărimea forței active \vec{F} să fie cuprinsă între o valoare *inferioară* F_{\min} și una *superioară* F_{\max} ; într-adevăr, în primul caz, bucata de săpun are tendința să alunece în josul planului înclinat pe când în cel de-al doilea caz, sub acțiunea forței \vec{F} , bucata de săpun este gata să înceapă *ascensiunea* pe planul înclinat. Inegalitatea $|T| \leq \mu N$, unde $\mu \stackrel{\text{not}}{=} \mu_s \simeq \mu_c$ (cf. [34], p. 389, [32], p. 64), ne conduce la

$$F_{\min} = G \frac{\sin \alpha - \mu \cos \alpha}{\cos \beta - \mu \sin \beta} \leq F \leq G \frac{\sin \alpha + \mu \cos \alpha}{\cos \beta + \mu \sin \beta} = F_{\max}$$

(cf. [14], p. 24). Cu alte cuvinte, în cazul echilibrului punctului material supus unei legături *aspre* (cu frecare), mărimea F nu poate fi determinată precis, ci doar încadrată între anumite *valori-limită*. Aceeași situație are loc în cazul cărămizii așezată pe o suprafață orizontală (masa de lemn). Aici, intensitatea forței active \vec{F} nu poate depăși valoarea μN . Acest fenomen face utilă introducerea unor modalități *geometrice* de poziționare a forței rezultante $\vec{\mathcal{F}}$, și anume *conurile de frecare*. Introducem unghiul $\varphi \in [0, \frac{\pi}{2})$, numit *unghi de frecare* (cf. [14], p. 21), prin formula $\tan \varphi = \mu$. Atunci, inegalitatea $|T| \leq \mu N$ ne conduce la (vezi Figura 2.27) $\beta \leq \varphi$, unde β desemnează unghiul făcut de forțele \vec{R} , \vec{N} . Evident, legătura dată de masa de lemn fiind unilaterală, pentru a menține cărămida în repaus este necesar ca forța $\vec{\mathcal{F}}$ să se afle în *zona hașurată* (cf. [76], p. 129, [14], p. 21). Dacă legătura ar fi fost bilaterală, rezultanta $\vec{\mathcal{F}}$ putea fi situată și în porțiunea *simetrică* (față de suprafața mesei) a zonei hașurate (cf. [76], p. 130).

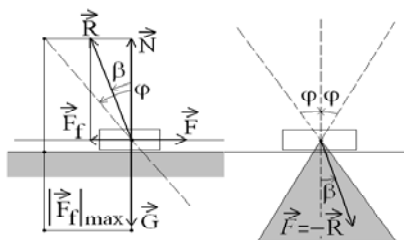


Figura 2.27

În general, dacă punctul material este supus unei legături bilaterale aspre, fiind obligat să rămână pe suprafața simplă $\gamma : U \rightarrow E_3$, putem construi conul cu două pânze (vezi Figura 2.28) având unghiul la centru 2φ și axa de simetrie (longitudinală) dată de normala la suprafață în M_0 . *Punctul M_0 desemnează o poziție de echilibru a punctului material M dacă rezultanta \vec{F} se găsește în interiorul sau, la limită, pe suprafața conului* (cf. [76], p. 130, [34], p. 391, [63], p. 37). În cazul unei legături bilaterale desemnate de curba simplă $\gamma : I \rightarrow E_3$, construim conul cu două pânze (vezi Figura 2.29) având unghiul la centru $\pi - 2\varphi$ și axa de simetrie (longitudinală) dată de tangenta la curbă în poziția M_0 . *Punctul M_0 reprezintă o poziție de echilibru a punctului material M dacă rezultanta \vec{F} se găsește în exteriorul sau, la limită, pe suprafața conului* (cf. [76], p. 131, [34], p. 398-399, [63], p. 38).

Cele două conuri poartă denumirea de *conuri de frecare* (cf. [76], p. 131, [14], p. 21, [34], p. 391, [63], p. 37).

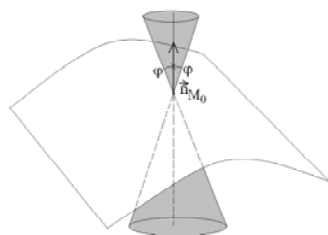


Figura 2.28

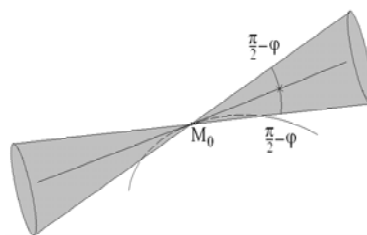


Figura 2.29

În sfârșit, în cazul legăturilor aspre, atunci când sunt cunoscute forțele \vec{F}_i efectiv aplicate punctului material M , este de așteptat să existe o *infinitate* de poziții de echilibru ale acestuia, grupate în arcuri de curbă, respectiv "regiuni" ale unei suprafețe (cf. [76], p. 127). Chestiunea delicată a aproximării $\mu_s \simeq \mu_c$ îi face pe unii autori să prefere scoaterea din discuție, la acest nivel, a cazului *punctelor de echilibru limită* (determinate prin poziționarea

rezultantei $\vec{\mathcal{F}}$ pe suprafața conurilor de frecare) (cf. [14], p. 21, [34], p. 391, 399, [26], p. 115).

Axioma legăturilor. Sensul forței de frecare

Restricția de mișcare impusă bucății de săpun, din experimentul descris în subsecțiunea precedentă, de către planul înclinat se face ”simțită” în calcul prin introducerea reacțiunii necunoscute \vec{R} . Practic, odată luată în considerare această forță, putem *elimina* planul înclinat din problemă. Obținem astfel un principiu general, cunoscut sub denumirea de **axioma legăturilor** (*axioma eliberării, principiul forțelor de legătură, etc.*) (cf. [76], p. 115, 480, [63], p. 31, 329, [14], p. 19, 135): *o legătură, prezentă în cadrul unei probleme de statica sau dinamica punctului material, poate fi înlocuită cu o forță necunoscută, numită forță de legătură, în așa fel încât, sub acțiunea forțelor efectiv aplicate și a forței de legătură, punctul material să poată fi considerat liber. În cazul unui corp material solid rigid, în afara forței de legătură se va ține seama și de momentul acesteia* (cf. [63], p. 31).

Așadar, *ecuația generală a mișcării punctului material M poate fi scrisă sub forma*

$$m \cdot \vec{a} = \vec{\mathcal{F}} + \vec{R}, \quad (2.129)$$

unde $\vec{\mathcal{F}}$ reprezintă rezultanta forțelor efectiv aplicate punctului material M iar \vec{R} desemnează rezultanta reacțiunilor (forțelor de legătură) datorate legăturilor la care punctul material M este supus.

Forța de frecare \vec{T} având rolul de a se împotrivi deplasării punctului material M pe legătură, *sensul său va fi opus celui al vitezei relative a punctului material M față de legătură* (cf. [34], p. 389).

2.2.21 Ecuatiile intrinseci ale lui L. Euler. Ecuatiile mișcării în triedrul lui Darboux. Legătura cu teorema energiei cinetice

A devenit clar, deja, că rezolvarea unei probleme oarecare de mecanică teoretică comportă două etape majore. Mai întâi, *se stabilește un anumit reper al SF pe axele cărui vor fi proiectate expresiile (vectoriale) ale legilor naturii care intervin în proces. Apoi, se determină soluția ecuației sau sistemului de ecuații diferențiale obținute în urma proiecției. În general, asemenea soluții nu pot fi exprimate cu ajutorul funcțiilor elementare, apelându-se*

la dezvoltări în serie, reprezentări integrale pe baza unor *nuclee* specifice, etc. A se vedea, de exemplu, *ecuația balisticii exterioare*, cf. [34], p. 338-344, [76], p. 411-417, [63], p. 312-318 ori *ecuația pendulului sferic*, cf. [34], p. 410-413, [76], p. 497-498, [41], p. 51. Utilizând forma particulară a unor asemenea ecuații diferențiale ori anumite *reprezentări integrale* ale mărimilor fizice legate de procesul în cauză, putem face o serie de considerații *calitative* asupra fenomenului respectiv fără a rezolva *efectiv* ecuația ori sistemul diferențial; cum ar fi, de exemplu, determinarea *perioadei* unei mișcări repetabile (periodice), cf. [41], p. 41, stabilirea *unghiului de deplasare* al vectorului de poziție aparținând unui punct de rebrusment pe traiectoria mișcării în câmp central, cf. [41], p. 49, calcule à la *problema lui Abel*, cf. [34], p. 405-406, [41], p. 43-44, ș. a. m. d. Triedrul lui Frenet, respectiv cel al lui Darboux joacă în acest context un rol fundamental.

Astfel, în cazul mișcării unui punct material M pe o legătură bilaterală ideală dată de curba *fixă* Γ în raport cu sistemul de referință inerțial \mathcal{R} este utilă proiectarea ecuației generale (2.129) pe axele triedrului lui Frenet în poziția curentă a mobilului. Traectoria acestuia este *cunoscută*, fiind dată chiar de curba Γ cu orientarea impusă de *sensul de mișcare* al punctului material M (cf. [76], p. 483). Atunci, putem scrie că

$$m \dot{v} = \mathcal{F}_\tau \quad m \frac{v^2}{R} = \mathcal{F}_\nu + N_\nu \quad 0 = \mathcal{F}_\beta + N_\beta. \quad (2.130)$$

Formulele (2.130) poartă denumirea de *ecuațiile intrinseci* de mișcare ale lui L. Euler (cf. [34], p. 240). Ele permit determinarea în mod direct a componentelor N_ν , N_β aparținând forței de legătură (cf. [15], p. 38).

Dacă corpul punctiform M este supus legăturii fixe bilaterale ideale dată de suprafața simplă S , proiectarea ecuației (2.129) pe axele triedrului lui Darboux atașat traiectoriei particulei în poziția sa curentă ne conduce la

$$m \dot{v} = \mathcal{F}_\tau \quad m \frac{v^2}{R} \cos \theta = \mathcal{F}_n + N \quad m \frac{v^2}{R} \sin \theta = \mathcal{F}_m, \quad (2.131)$$

unde $\theta = \angle(\bar{n}, \bar{\nu})$ (cf. [34], p. 394, [76], p. 494). Dată fiind modalitatea de introducere a triedrului lui Darboux, relațiile (2.131) capătă semnificația unor ecuații *intrinseci* (cf. [48], p. 54, [76], p. 494).

Un caz particular esențial este acela în care, începând cu un moment oarecare t_0 , rezultanta $\vec{\mathcal{F}}$ a forțelor efectiv aplicate mobilului M își încetează acțiunea. Atunci, cum $\mathcal{F}_\tau = \mathcal{F}_n = \mathcal{F}_m = 0$, deducem că

$$v = v_0 = \text{constant} \neq 0 \quad \sin \theta = 0,$$

de unde $\theta \in \{0, \pi\}$. Evident, cum $\theta \in C^\infty([t_0, t_1], \mathbb{R})$, $\theta(t)$ este constant: $\theta(t) = 0$ sau $\theta(t) = \pi$, $t \in [t_0, t_1]$. În concluzie, în intervalul de timp $[t_0, t_1]$ punctul material M se deplasează uniform pe o geodezică a legăturii S (cf. [48], p. 88).

Prima dintre ecuațiile intrinseci (2.130), (2.131), și anume $m \dot{v} = \mathcal{F}_\tau$, constituie o reformulare a teoremei energiei cinetice (cf. [76], p. 484). Într-adevăr, plecând de la $\mathcal{F}_\tau = \overline{\mathcal{F}} \cdot \overline{\tau} = m \dot{v} = m \dot{\overline{v}} \cdot \overline{\tau}$, avem că

$$\begin{aligned} \left(\overline{\mathcal{F}} \cdot \frac{d\overline{r}}{ds} \right) ds &= (\overline{\mathcal{F}} + \overline{N}) \cdot d\overline{r} = \overline{\mathcal{F}} \cdot d\overline{r} \\ &= m \left(\dot{\overline{v}} \cdot \frac{d\overline{r}}{ds} \right) ds = m \frac{d\overline{v}}{dt} \cdot d\overline{r} \\ &= \left(m \frac{d\overline{v}}{dt} \cdot \overline{v} \right) dt = \frac{d}{dt} \left(m \frac{\overline{v}^2}{2} \right) dt \\ &= d \left(\frac{mv^2}{2} \right). \end{aligned}$$

2.2.22 Principiul echivalenței. Forțe inerțiale

În călătoriile cu automobilul devenim conștienți frecvent de efectele *inerției* corpurilor materiale. Mai precis, ori de câte ori șoferul frânează brusc, pasagerul aflat pe "locul mortului" simte că este aruncat în parbriz. O altă situație din viața de zi cu zi în care inerția se face remarcată constă în alunecarea *oblică* a picăturilor de ploaie pe fereastra unui vagon de pasageri, în timpul mersului. Putem reproduce asemenea situații imaginându-ne următorul experiment (vezi Figura 2.30): un cărucior închis (fără geamuri) se deplasează rectiliniu uniform accelerat, cu accelerația \overline{a} .

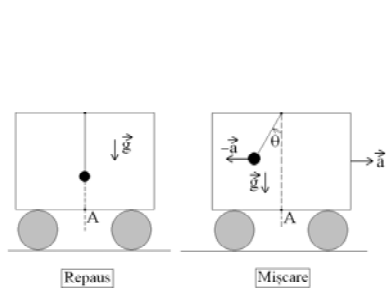


Figura 2.30

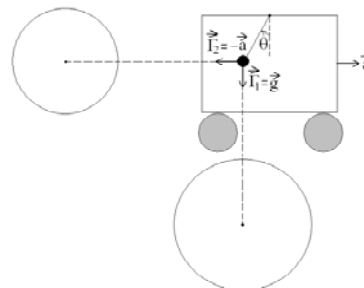


Figura 2.31

O persoană aflată în interiorul căruciorului constată devierea firului de suspensie al unei bile de oțel, în timpul mișcării, cu unghiul θ dat de $\tan \theta = \frac{a}{g}$. Față de persoana din experiment, bila de oțel se găsește în repaus (după încheierea *micilor oscilații* specifice, cf. [32], problema 3.6, p. 70, [59], problema 7.1.40, p. 111). Mai mult, persoana nu are posibilitatea să sesizeze mișcarea căruciorului față de sol. În concluzie, putem afirma că bila de oțel se comportă ca și cum, în afara Pământului, ar mai exista o "planetă" în spatele peretelui căruciorului (vezi Figura 2.31), responsabilă de existența unui câmp gravitațional suplimentar $\vec{\Gamma}_2 = -\vec{a}$. Amatorii de filme *science-fiction* au putut remarca în secvențele când camera de luat vederi survolează "stația spațială" că aceasta, "oprită" într-o zonă "pustie", "îndepărtată" a spațiului cosmic, se rotește în jurul unei axe imaginare. Accelerația (centrifugă) creată de o asemenea mișcare le permite astronauților să *umblă pe pereți* (cf. [73], nota de subsol, p. 364). Iată, așadar, o ilustrare elocventă a considerațiilor anterioare.

Pe baza legii fundamentale de compunere a accelerațiilor în mecanica teoretică putem scrie că ($\vec{\omega} = 0$)

$$\begin{aligned} 0 &= \vec{a}_{rel} = \vec{a} - \vec{a}_{transp} - \vec{a}_{Cor} \\ &= \vec{a} - \vec{a}_{transp}, \end{aligned}$$

de unde $\vec{a} = \vec{a}_{transp}$. Apoi, conform (2.129), avem

$$\begin{aligned} 0 &= m \cdot \vec{a}_{rel} = \vec{\mathcal{F}} + \vec{R} - m \cdot \vec{a}_{transp} \\ &= \vec{\mathcal{F}} + \vec{R} + m \cdot (-\vec{a}) \end{aligned} \quad (2.132)$$

(cf. [34], p. 425, [31], p. 200). Formula anterioară arată că, în problemele privind comportamentul bilei de oțel *relativ* la sistemul de referință dat de căruciorul în mișcare, forțelor efectiv aplicate corpului punctiform (bila de oțel) și forțelor de legătură li se adaugă o forță specială, numită *inertțială*. Ea nu trebuie confundată cu forța de inerție, neavând o *existență reală*, ci fiind un *efect al mișcării* (cf. [76], p. 503, [32], p. 202). Asupra forțelor inerțiale vom reveni ulterior.

În concluzie, *persoana din cărucior nu poate distinge dacă se găsește într-un mediu aflat în mișcare accelerată față de un sistem de referință inertțial sau, dimpotrivă, se mișcă inertțial (față de stele) dar în prezența unui câmp gravitațional suplimentar $\vec{\Gamma}_2$* (cf. [32], p. 184). Are loc astfel **principiul echivalenței** dintre forțele de gravitație și forțele inerțiale. Acest fapt este

în concordanță cu egalitatea dintre masa gravifică și masa inertă. Se cuvine menționat că echivalența dintre gravitație și inerție are un caracter *local* (în zone limitate ale SF - interiorul automobilului - și pe intervale mici de timp - perioada în care se produce frânarea -).

Reducerea formală prin formula (2.132) a unei probleme de dinamica punctului material la o problemă de statică constituie esența *metodei cinetostatice* (cf. [32], p. 202, [73], p. 469-471, [63], p. 489, 497-498).

2.2.23 Mișcarea în câmp gravitațional terestru, în vid. Bătaia și săgeata traiectoriei. Parabola de siguranță

Un corp punctiform de masă m este lansat *din vecinătatea solului* (cf. [34], p. 242), cu viteza \vec{v}_0 făcând unghiul $\alpha \in (0, \frac{\pi}{2})$ cu *planul orizontal* (vezi Figura 2.32). Dorim să determinăm traiectoria sa *neglijând rezistența aerului* (mișcare în vid).

O asemenea problemă aproximează situația *reală* a unui proiectil expulzat dintr-o armă de foc (*problema balisticii exterioare*, cf. [34], p. 338; *balistica interioară* desemnează, generic, studiile privind explozibilii folosiți la lansarea proiectilelor, cf. [76], p. 412) atunci când viteza acestuia este foarte mică (cf. [34], p. 244). În particular, nu se ține seama de curbura Pământului, raportând calculele la "planul" orizontal (cf. [76], p. 409).

În realitate, traiectoria proiectilului depinde *sensibil* de forma sa (cf. [63], p. 313, [32], p. 31), de viteza de lansare, etc. În plus, proiectilele au o *mișcare de precesie* în jurul centrului lor de masă (vezi Figura 2.33), datorată acțiunii rezistenței aerului (cf. [76], p. 663). Aceasta poate produce "răsturnarea" proiectilului în aer, fenomen corectat cu ajutorul ghinturilor din interiorul țevii armei de foc (cf. [17], p. 127, [73], p. 403).

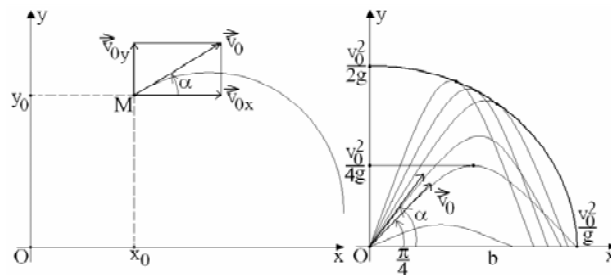


Figura 2.32

Relația (2.74) ne conduce în acest caz la

$$\ddot{\vec{r}} = \vec{g}, \quad (2.133)$$

de unde, ținând seama de (2.13), deducem că *mișcarea punctului material este plană*. Justificarea acestui fapt poate fi realizată și în mod direct (cf. [76], p. 407-408). Vom presupune, pentru simplitate, că poziția inițială a mobilului M este originea O a planului de coordonate Oxy care coincide cu planul mișcării (vertical).

Proiectând ecuația (2.133) pe axele de coordonate, avem

$$\begin{cases} \ddot{x} = 0 \\ x(0) = 0 \\ \dot{x}(0) = v_0 \cos \alpha \end{cases} \quad \begin{cases} \ddot{y} = -g \\ y(0) = 0 \\ \dot{y}(0) = v_0 \sin \alpha \end{cases}$$

și, prin integrări succesive, ajungem la

$$x = v_0 t \cos \alpha \quad y = -\frac{1}{2}gt^2 + v_0 t \sin \alpha, \quad (2.134)$$

relații care constituie *ecuațiile parametrice* ale traiectoriei punctului material M (cf. [76], p. 408).

Eliminând timpul t din (2.134), obținem ecuația unei *parabole* cu axa de simetrie verticală (Galilei, cf. [76], p. 12, [73], p. 293), și anume

$$\begin{aligned} y &= -\frac{g}{2v_0^2 \cos^2 \alpha} x^2 + x \tan \alpha \\ &= x \tan \alpha - \frac{gx^2}{2v_0^2} (1 + \tan^2 \alpha). \end{aligned} \quad (2.135)$$

Formula $v^2 = \dot{x}^2 + \dot{y}^2$ permite determinarea vitezei corpului punctiform M numai în funcție de înălțime și viteza inițială:

$$v = \sqrt{(v_0 \cos \alpha)^2 + (v_0 \sin \alpha - gt)^2} = \sqrt{v_0^2 - 2gy} \quad (2.136)$$

(cf. [34], p. 243). Ea poate fi obținută, în mod echivalent, aplicând teorema energiei cinetice (cf. [76], p. 409, [34], p. 243, [25], p. 86)

$$d\left(\frac{1}{2}mv^2\right) = m\vec{g} \cdot d\vec{r} = -mg\vec{j} \cdot d\vec{r}$$

și impunând ca *energia potențială la nivelul solului* ($y = 0$) să fie nulă (cf. [59], problema 2.5.12, p. 28).

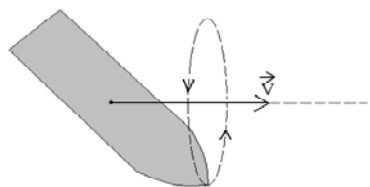


Figura 2.33

Vârful traiectoriei este determinat pe baza calității sale de *punct critic* al graficului funcției $y = y(x)$ (cf. [32], p. 30), deci ținând seama de $y'(x_{\max}) = 0$:

$$x_{\max} = \frac{1}{2g}v_0^2 \sin 2\alpha \quad y_{\max} = \frac{1}{2g}v_0^2 \sin^2 \alpha.$$

Datorită simetriei parabolei, punctul material M va reveni pe sol în poziția $(2x_{\max}, 0)$. Mărimile $b \stackrel{\text{not}}{=} 2x_{\max}$, $h \stackrel{\text{not}}{=} y_{\max}$ se numesc *bătaia*, respectiv *săgeata* traiectoriei balistice (cf. [76], p. 409, [32], p. 31).

Timpul de *urcare* (mișcare pe parabolă corespunzând lui $0 \leq x \leq x_{\max}$), egal cu timpul de *coborâre*, are formula

$$t_{\max} = \frac{x_{\max}}{v_0 \cos \alpha} = \frac{v_0}{g} \sin \alpha.$$

Date fiind aplicațiile practice ale unor asemenea chestiuni, se pune problema determinării unghiului de *înclinare* α al țevii armei de foc, numit și *unghi de tragere* (cf. [34], p. 244), pentru care proiectilul va lovi o țintă aflată în poziția M_0 dată. Introducând parametrul $u = \tan \alpha$ în (2.135), obținem ecuația algebrică de gradul al II-lea

$$\frac{gx^2}{2v_0^2} \cdot u^2 - x \cdot u + \left(y + \frac{gx^2}{2v_0^2} \right) = 0,$$

care arată că un proiectil nu poate atinge *decât* țintele situate în regiunea (x, y) caracterizată prin inegalitatea

$$\begin{aligned} \Delta_u &= x^2 - 4 \frac{gx^2}{2v_0^2} \left(y + \frac{gx^2}{2v_0^2} \right) \\ &= \frac{2g}{v_0^2} x^2 \left(\frac{v_0^2}{2g} - y - \frac{g}{2v_0^2} x^2 \right) \geq 0. \end{aligned}$$

Mai precis, pentru a fi lovită, o țintă trebuie să se găsească dedesubtul parabolei sau, la limită, pe parabola de ecuație

$$y = -\frac{g}{2v_0^2}x^2 + \frac{v_0^2}{2g} \quad (2.137)$$

(cf. [76], p. 410). Aceasta poartă denumirea de *parabolă de siguranță* (pentru un anumit v_0) a gurii de foc (cf. [25], p. 87, [34], p. 245, [32], p. 32).

Curba (2.137) desemnează *înfășurătoarea* familiei de traiectorii ale unui proiectil lansat cu viteza inițială v_0 realizată prin variația unghiului de tragere α (cf. [63], p. 310). Astfel, conform [24], p. 262, formula (2.137) se obține prin eliminarea parametrului u între ecuațiile

$$\begin{cases} f(x, y, u) = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial u}(x, y, u) = 0, \end{cases}$$

unde $f(x, y, u) = \frac{gx^2}{2v_0^2}(1+u^2) - xu + y$. Prin fiecare punct M_0 al parabolei de siguranță (2.137) trece câte o curbă din familia (2.135), iar tangentele celor două curbe în punctul M_0 coincid (cf. [72], p. 148). Detalii interesante privind traiectoriile (2.135) pot fi citite în [34], p. 245-246.

Vârful P al parabolei (2.135) este, în particular, singurul punct de rebrusment ($\bar{v} \perp \bar{g}$) al acesteia. Evident, aici viteza punctului material M are valoare minimă ($\dot{v} = 0$) și, ținând seama de $\bar{\tau} = \bar{i}$, $\bar{v} = -\bar{j}$ și egalitatea (2.136), obținem formulele

$$v^2(P) = R \cdot g \quad v_0 = \sqrt{g(R + 2h)}$$

(cf. [32], problema 1.4, p. 37).

2.2.24 Mișcarea pe un plan înclinat în câmp gravitațional terestru, în aer. Viteza limită a punctului material M

Un punct material M , de masă m , având viteza inițială v_0 , coboară de la înălțimea h pe un plan înclinat cu unghiul de la bază α (vezi Figura 2.34). Coeficientul de frecare de alunecare este $\mu = \tan \psi$, unde $0 < \psi < \alpha$ (cf. [59], problemele 2.3.13, 2.3.15, p. 25), iar viteza \vec{v}_0 este paralelă cu planul înclinat.

În afara forței de frecare $\vec{F}_f = -\mu N \cdot \vec{\tau}(M)$ și a greutateii \vec{G} , asupra particulei acționează *rezistența* aerului, sub forma unei forțe noi, și anume

$$\vec{F}_{rez} = -mg\varphi(v) \cdot \vec{\tau}(M)$$

(cf. [76], p. 411-412). Funcția $\varphi(v)$ este, în general, necunoscută, fiind stabilită prin considerații experimentale (gazodinamică). Vom admite, totuși,

că $\varphi(v) \geq 0$ și $\varphi(0) \in [0, 1)$, ținând seama de faptul că un corp punctiform, fără viteză inițială, cum ar fi, de exemplu, o bilă de fier de mici dimensiuni ținută în palmă la nivelul umerilor, va cădea pe verticală în jos, odată lăsat "liber". Adică, $|\vec{G}| > |\vec{F}_{rez}|$. De asemenea, $\varphi \in C^\infty([0, +\infty), \mathbb{R})$, $\varphi'(v) > 0$ și $\lim_{v \rightarrow +\infty} \varphi(v) = +\infty$ (cf. [34], p. 335).

La fel ca în cazul mișcării în vid, *traectoria este o curbă plană*. Mai precis, dacă (2.129) se scrie sub forma

$$\begin{aligned} m\bar{a} &= m\bar{g} + \bar{N} + C(t)\bar{\tau} \\ &= \text{constant} + C(t)\bar{\tau}, \end{aligned} \quad (2.138)$$

atunci, prin derivare în raport cu timpul t , avem

$$\begin{aligned} \dot{\bar{a}} &= \frac{1}{m} \left\{ \dot{C}(t)\bar{\tau} + C(t) \left[\frac{d\bar{\tau}}{ds} \cdot \frac{ds}{dt} \right] \right\} \\ &= \frac{1}{m} \left[\dot{C}(t)\bar{\tau} + \frac{v}{R}C(t)\bar{\nu} \right]. \end{aligned}$$

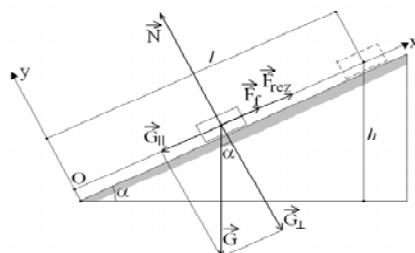


Figura 2.34

În particular, $\dot{\bar{a}} \in Sp(\{\bar{\tau}, \bar{\nu}\})$ și, cum $Sp(\{\bar{\tau}, \bar{\nu}\}) = Sp(\{\bar{\nu}, \bar{a}\})$, deducem că

$$(\bar{\nu} \times \bar{a}) \cdot \dot{\bar{a}} = (\bar{\nu}, \bar{a}, \dot{\bar{a}}) = 0.$$

De aici, pe baza (2.13), rezultă că torsiunea T a traiectoriei este identic nulă. Desigur, *traectoria particulei se va afla pe suprafața planului înclinat*, nefiind, însă, în general, rectilie (cf. [34], p. 395). Impunem, în vederea obiectivului final al acestei subsecțiuni, o condiție suplimentară simplificatoare: *la momentul inițial, vectorii $\bar{\nu}$, \bar{N} și \bar{G} sunt coplanari*. Atunci, *traectoria punctului material M va fi dreapta de intersecție cu suprafața*

planului înclinat a secțiunii verticale prin planul înclinat corespunzătoare unghiului diedru α .

Relația (2.138) devine în acest caz

$$m \ddot{\bar{r}} = m\bar{g} + \bar{N} - [N \tan \psi + mg\varphi(v)] \cdot \bar{r}(M).$$

Prin proiectarea ei pe axele de coordonate, avem că

$$\ddot{x} = -g \left[\sin \alpha - \frac{N}{mg} \tan \psi - \varphi(v) \right] \quad \ddot{y} = 0 = N - mg \cos \alpha.$$

Aici, coordonata curbilinie este dată de $s(t) = l - x(t)$. Eliminând necunoscuta N între cele două ecuații, obținem

$$- \ddot{x} = \dot{v} = g \left[\frac{\sin(\alpha - \psi)}{\cos \psi} - \varphi(v) \right]. \quad (2.139)$$

În mod evident, există și este unică mărimea $v^* > 0$ astfel încât $\varphi(v^*) = \frac{\sin(\alpha - \psi)}{\cos \psi}$. Ecuația diferențială (2.139) se scrie sub forma

$$\dot{v} = g[\varphi(v^*) - \varphi(v)], \quad t \geq t_0, \quad (2.140)$$

unde $v(t_0) = v_0$. La fel ca până acum, soluțiile ecuației (2.140) se găsesc în $C^\infty([t_0, +\infty), \mathbb{R})$ iar problema Cauchy atașată ei admite soluție unică.

Fiind dată soluția $v(t)$ a ecuației diferențiale (2.140), este valabilă una și numai una dintre afirmațiile următoare:

- 1) Dacă $v_0 > v^*$, atunci $v(t)$ este descrescătoare și $\lim_{t \rightarrow +\infty} v(t) = v^*$.
- 2) Dacă $v_0 = v^*$, atunci $v(t) = v^*$ pentru orice $t \geq t_0$.
- 3) Dacă $v_0 < v^*$, atunci $v(t)$ este crescătoare și $\lim_{t \rightarrow +\infty} v(t) = v^*$.

Vom justifica doar afirmația 1). Afirmația 3) va fi probată absolut identic cu prima afirmație. În ceea ce privește afirmația 2), justificarea acesteia se bazează pe *unicitatea* soluției problemei Cauchy atașate ecuației (2.140).

Să presupunem că există $t_1 > t_0$ astfel încât $v(t_1) = v^*$. Atunci, funcția $v = v(t)$, unde $v_0 = v(t_0) > v^*$, trebuie să verifice problema Cauchy

$$\dot{v} = g[\varphi(v^*) - \varphi(v)], \quad t \geq t_0 \quad v(t_1) = v^*.$$

Dar această problemă admite soluție unică, și anume $v(t) = v^*$, ceea ce contrazice ipoteza $v(t_0) \neq v^*$. Așadar, $v(t) > v^*$ pentru orice $t \in [t_0, +\infty)$.

Cum φ este crescătoare, deducem că $\varphi(v^*) - \varphi(v(t)) < 0$, de unde rezultă că $\dot{v} < 0$. Monotonia funcției $v = v(t)$ împreună cu mărginirea sa inferioară dovedesc existența limitei

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} v(t) = v^{**} \in \mathbb{R},$$

unde $v^{**} \geq v^*$.

Să presupunem că $v^{**} > v^*$. Cum $v(t) \in [v^{**}, v_0]$, putem separa variabilele în (2.140), astfel că

$$\frac{dv}{\varphi(v^*) - \varphi(v)} = g dt$$

și, prin integrare, ajungem la

$$\int_{v_0}^{v(t)} \frac{d\tau}{\varphi(v^*) - \varphi(\tau)} = \int_{v(t)}^{v_0} \frac{d\tau}{\varphi(\tau) - \varphi(v^*)} = g \int_{t_0}^t dq = g(t - t_0).$$

Însă, pentru $\tau \in [v(t), v_0]$, putem scrie că

$$\varphi(\tau) - \varphi(v^*) \geq \varphi(v(t)) - \varphi(v^*),$$

de unde

$$g(t - t_0) \leq \frac{1}{\varphi(v(t)) - \varphi(v^*)} \cdot \int_{v(t)}^{v_0} d\tau = \frac{v_0 - v(t)}{\varphi(v(t)) - \varphi(v^*)}, \quad t \geq t_0.$$

Trecând la limită după t în ambii membri ai inegalității, ajungem la o contradicție

$$+\infty = g \cdot (+\infty) \leq \frac{v_0 - v^{**}}{\varphi(v^{**}) - \varphi(v^*)} < +\infty.$$

În concluzie, $v^{**} = v^*$. Mărimea v^* reprezintă viteza limită a punctului material (cf. [63], p. 318). Spunem că prezența rezistenței aerului are un efect nivelator de viteze asupra mișcării pe planul înclinat a particulei M , cu tendința de a o uniformiza (cf. [76], p. 414-415).

Folosind ecuația (2.140), putem calcula mărimile x, t în funcție de viteza v a punctului material. Astfel, prin integrarea ecuațiilor diferențiale

$$dx = -v dt \quad dt = \frac{1}{g} \cdot \frac{dv}{\varphi(v^*) - \varphi(v)}$$

obținem

$$t(v) = t_0 + \frac{1}{g} \cdot \int_{v_0}^v \frac{dq}{\varphi(v^*) - \varphi(q)},$$

respectiv

$$x(v) = x_0 - \frac{1}{g} \cdot \int_{v_0}^v \frac{q dq}{\varphi(v^*) - \varphi(q)}.$$

Mișcarea este, așadar, complet determinată.

Cazul limită al mișcării pe verticală ($\alpha = \frac{\pi}{2}$, $\psi = 0$) ne conduce la aceleași rezultate. În particular, *timpul de coborâre pe sol a mobilului M este mai mare decât cel de urcare*. Detalii privind mișcarea pe verticală sub acțiunea gravitației într-un mediu rezistent pot fi citite în [34], p. 335-337, [63], p. 313-315, [76], p. 413-415, etc.

2.2.25 Soluții convergente ale unei ecuații diferențiale ordinare de ordinul I. Convergența unor funcții p -absolut integrabile

Această subsecțiune are un caracter auxiliar, cititorul nefiind obligat să o parcurgă la prima lectură.

Să analizăm ecuația (2.140) dintr-un alt punct de vedere. Mai precis, vom arăta că dacă $v(t)$ este o soluție a ecuației (2.140) pentru care există $l \in \mathbb{R}$ astfel încât $\lim_{t \rightarrow +\infty} v(t) = l$, atunci $l = v^*$.

Aceste soluții ale ecuației (2.140) se numesc *convergente* (cf. [5], p. 121). Ele au fost studiate intensiv în cadrul *teoriei calitative a ecuațiilor diferențiale* și provin din probleme specifice mecanicii teoretice, fizicii matematice, chimiei, ecologiei, etc. O abordare multidimensională a unor asemenea chestiuni, bazată pe *metoda mulțimilor ω -limită*, poate fi citită în [6], p. 150-156.

În cele ce urmează, vom justifica afirmația făcută în deschidere sub forma dată în [5], p. 122. Astfel, să considerăm $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ o aplicație continuă și ecuația diferențială

$$\dot{v} = f(v), \quad t \geq t_0. \quad (2.141)$$

Dacă $v(t)$ reprezintă o soluție convergentă a ecuației (2.141) și $\lim_{t \rightarrow +\infty}$

$v(t) = l$, atunci $f(l) = 0$. O demonstrație a acestui fapt se găsește în [18], p. 80, 235. În ce ne privește, vom urma o cale diferită.

Începem prin a dovedi că (I. Barbălat) o condiție necesară și suficientă ca $\lim_{t \rightarrow +\infty} \dot{v}(t) = 0$, unde v reprezintă o funcție continuu diferentiabilă cu limită finită la $+\infty$, definită pe $[t_0, +\infty)$, este ca funcția \dot{v} să fie uniform continuă pe $[t_0, +\infty)$.

Implicația directă rezultă din proprietatea generală a funcțiilor continue având limită finită la $+\infty$ de a fi uniform continue în "vecinătatea" lui $+\infty$. Reciproc, să presupunem că există șirul strict crescător și nemărginit superior $(t_n)_{n \geq 1}$, unde $t_{n+1} - t_n > 1$, astfel încât $|\dot{v}(t_n)| \geq \varepsilon_0 > 0$ pentru orice $n \geq 1$. Deoarece \dot{v} este uniform continuă, există $\eta = \eta(\varepsilon_0) > 0$ cu proprietatea că

$$|\dot{v}(t) - \dot{v}(s)| < \frac{\varepsilon_0}{2},$$

unde $|t - s| < \eta$, $t, s \geq t_0$. Introducem intervalele $V_n \stackrel{\text{not}}{=} (t_n - \varepsilon, t_n + \varepsilon)$ impunând ca $0 < \varepsilon < \min\{\frac{1}{2}, \eta\}$. Evident, $V_n \cap V_m = \emptyset$ pentru $n \neq m$.

Fie $t \in V_n$ și $s = t_n$. Atunci, $|t - s| < \eta$, de unde

$$|\dot{v}(t) - \dot{v}(t_n)| < \frac{\varepsilon_0}{2} \quad |\dot{v}(t)| > \frac{\varepsilon_0}{2}.$$

Conform teoremei lui Lagrange, există $s_n \in (t_n - \frac{\varepsilon}{2}, t_n + \frac{\varepsilon}{2})$ pentru care

$$v(t_n + \frac{\varepsilon}{2}) - v(t_n - \frac{\varepsilon}{2}) = \varepsilon \cdot \dot{v}(s_n), \quad n \geq 1. \quad (2.142)$$

Trecând la limită după n în ambii membri, ajungem la o contradicție

$$0 \geq \varepsilon \cdot \frac{\varepsilon_0}{2} > 0.$$

Să revenim la demonstrația principală. Deoarece $\lim_{t \rightarrow +\infty} v(t) = l$, există $M > 0$ astfel încât $|v(t)| \leq M$, $t \geq t_0$. În plus, funcția v este uniform continuă. Cum restricția funcției f la intervalul $[-M, M]$ este, la rândul ei, uniform continuă, deducem că $f \circ v$, adică \dot{v} , este uniform continuă.

În sfârșit,

$$0 = \lim_{t \rightarrow +\infty} \dot{v}(t) = \lim_{t \rightarrow +\infty} f(v(t)) = f\left(\lim_{t \rightarrow +\infty} v(t)\right) = f(l).$$

Justificarea afirmațiilor privind ecuația (2.141) s-a încheiat.

În cazul ecuației (2.140), $f(v) = g[\varphi(v^*) - \varphi(v)]$ și, dată fiind *injectivitatea* aplicației φ , deducem că $f(l) = 0$ va implica $l = v^*$.

Fie funcția $v : [0, +\infty) \rightarrow [0, +\infty)$ definită prin

$$v(t) = \begin{cases} n^{\frac{3}{4}} \left\{ \exp \left[(t-n)^2 \left(n + 2n^{-\frac{1}{4}} - t \right)^2 \right] - 1 \right\}, & t \in \left[n, n + 2n^{-\frac{1}{4}} \right] \\ 0, & \text{în rest,} \end{cases}$$

unde $n \geq 17$. Atunci, funcția v este continuu diferențiabilă pe $[0, +\infty)$ și $\lim_{t \rightarrow +\infty} v(t) = 0$. Totuși,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \dot{v} \left(n + \frac{1}{2} n^{-\frac{1}{4}} \right) = \frac{3}{2} \neq 0,$$

ceea ce dovedește *necesitatea* unei ipoteze suplimentare (de exemplu, a condiției de uniform continuitate).

Se cuvin făcute câteva comentarii cu relevanță hermeneutică.

Mai întâi, în cazul unei funcții continue și nenegative $g(t)$, integrabilă pe $[t_0, +\infty)$, este relativ ușor de dovedit *existența* unui șir strict crescător și nemărginit superior $(t_n)_{n \geq 1}$ de numere reale pentru care $\lim_{n \rightarrow +\infty} g(t_n) = 0$. O asemenea proprietate intervine, de exemplu, în demonstrația unor rezultate privind *stabilitatea* în sens Liapunov a soluțiilor sistemelor de ecuații diferențiale (cf. [6], p. 137). Se pune în mod natural problema obținerii unor condiții necesare și suficiente ca $\lim_{t \rightarrow +\infty} g(t) = 0$. Ori, o asemenea condiție rezultă din calculele anterioare, și anume *uniform continuitatea funcției* g . Ea se determină apelând la funcția convergentă $v(t) = \int_{t_0}^t g(s) ds$, unde $t \geq t_0$.

O a doua problemă se referă la cazul unei funcții continue $g(t)$, definită pe $[t_0, +\infty)$, despre care știm că verifică relația $\lim_{n \rightarrow +\infty} g(t_n) = L \in \mathbb{R}$. Sunt cerute condiții necesare și suficiente ca $\lim_{t \rightarrow +\infty} g(t) = L$.

Profesorul C. Avramescu stabilește în lucrarea *Sur le comportement asymptotique des solutions des équations différentielles ordinaires*, apărută în *Analele Științifice ale Universității "Al. I. Cuza"*, Iași, XIV, 2(1968), p. 297-311, următorul rezultat elegant: *Fie dat șirul $(t_n)_{n \geq 1}$ tinzând la $+\infty$ astfel încât $0 < t_n < t_{n+1}$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} (t_{n+1} - t_n) = 0$. Fie $g(t)$ o funcție scalară continuă pentru care $\lim_{n \rightarrow +\infty} g(t_n) = L$. Atunci, pentru ca limita $\lim_{t \rightarrow +\infty} g(t)$ să*

existe, este necesar și suficient ca $g(t)$ să fie uniform continuă pe \mathbb{R}_+ (op. cit., § 8, p. 309).

Construcția unui asemenea șir $(t_n)_{n \geq 1}$ în cazul funcției $\dot{v}(t)$ nu poate fi realizată datorită condiției $\lim_{n \rightarrow +\infty} (t_{n+1} - t_n) = 0$. Cum șirul $(s_n)_{n \geq 1}$ joacă în acest context "rolul" șirului $(t_n)_{n \geq 1}$, restricția anterioară, odată introdusă în (2.142), ar necesita înlocuirea constantei pozitive ε cu o mărime (depinzând de n) care să tindă spre zero pe măsură ce n crește. Atunci, condiția $\lim_{n \rightarrow +\infty} \dot{v}(s_n) = 0$ nu ar mai putea fi asigurată.

În concluzie, dacă $L = 0$, cerința $\lim_{n \rightarrow +\infty} (t_{n+1} - t_n) = 0$ poate fi înlocuită cu aceea a convergenței primitivei $v(t) = \int_{t_0}^t g(s) ds$.

Prima din cele două probleme precedente poate fi transpusă în cazul general al funcțiilor p -absolut integrabile. Mai precis, fiind dată funcția $g : [t_0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ continuă astfel încât $\int_{t_0}^{\infty} |g(t)|^p dt < +\infty$, unde $p > 0$, o condiție necesară și suficientă ca $\lim_{t \rightarrow +\infty} g(t) = 0$ este ca $g(t)$ să fie uniform continuă. Justificarea acestei afirmații se realizează în două etape. Mai întâi, vom arăta că o condiție necesară și suficientă (mai restrictivă) ca $\lim_{t \rightarrow +\infty} g(t) = 0$ este ca $g(t)$ să fie mărginită și uniform continuă. Aceasta se reduce la a proba că funcția $|g(t)|^p$ este uniform continuă atunci când $g(t)$ este mărginită și uniform continuă. Aici, $v(t) = \int_{t_0}^t |g(s)|^p ds$. În cea de-a doua etapă vom stabili că orice funcție $g : [t_0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ uniform continuă astfel încât $\int_{t_0}^{\infty} |g(t)|^p dt < +\infty$, unde $p > 0$, este mărginită.

Vom dovedi prin inducție matematică valabilitatea inegalității de mai jos

$$\begin{aligned} \left| |g(t_2)|^{n+\alpha} - |g(t_1)|^{n+\alpha} \right| &\leq C_n \cdot [|g(t_2) - g(t_1)| \\ &\quad + |g(t_2) - g(t_1)|^\alpha + |g(t_2) - g(t_1)|^{1-\alpha}] \end{aligned} \quad (2.143)$$

pentru orice $t_1, t_2 \geq t_0$, unde $C_n < +\infty$, $n \in \mathbb{N}$, $\alpha \in [0, 1)$.

Pasul " $k \Rightarrow k + 1$ " se bazează pe formulele ($a = |g(t_2)|$, $b = |g(t_1)|$)

$$\begin{aligned} a^{n+1+\alpha} - b^{n+1+\alpha} &= a^{n+1} \cdot a^\alpha - b^{n+1} \cdot b^\alpha = (a^{n+1} - b^{n+1})(a^\alpha + b^\alpha) \\ &\quad - (ab)^\alpha (a^{n+1-\alpha} - b^{n+1-\alpha}) \end{aligned}$$

și

$$|a^{n+1+\alpha} - b^{n+1+\alpha}| \leq D_1 \cdot |a - b| + D_2 \cdot |a^{n+\beta} - b^{n+\beta}|,$$

unde $D_1 = 2(n+1) \cdot \sup_{t \geq t_0} |g(t)|^{n+\alpha}$, $D_2 = \sup_{t \geq t_0} |g(t)|^{2\alpha}$, $\beta = 1 - \alpha$. Așadar,

$$|a^{n+1+\alpha} - b^{n+1+\alpha}| \leq (D_1 + D_2 + 1) (|a - b| + |a^{n+\beta} - b^{n+\beta}| + |a^{n+\alpha} - b^{n+\alpha}|).$$

Rămâne de arătat că $|a^s - b^s| \leq |a - b|^s$ pentru orice $a, b \geq 0$ și $s \in (0, 1)$. Pentru aceasta este nevoie de inegalitatea

$$(x + y)^s \leq x^s + y^s, \quad x, y \geq 0, \quad s \in (0, 1).$$

Într-adevăr, presupunând că $0 < x \leq y$, avem, conform inegalității lui Bernoulli,

$$\begin{aligned} (x + y)^s &= y^s \cdot \left(1 + \frac{x}{y}\right)^s \leq y^s \cdot \left(1 + s \frac{x}{y}\right) = y^s + s \frac{x}{y^{1-s}} \\ &\leq y^s + s \frac{x}{x^{1-s}} \leq y^s + x^s. \end{aligned}$$

Atunci, $a^s - b^s \leq (b + |a - b|)^s - b^s \leq |a - b|^s$, etc.

În concluzie, inegalitatea (2.143) are loc pentru $n = [p]$, $\alpha = \{p\}$, deci funcția $\dot{v}(t)$ este uniform continuă. Prima etapă a demonstrației s-a încheiat. Funcția $g : [1, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, unde $g(t) = t$, $t \geq 1$, este uniform continuă. În schimb, funcția $[g(t)]^n$, unde $n \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\}$, nu mai are o asemenea proprietate, dat fiind că

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{d}{dt} \{[g(t)]^n\} = n \cdot \lim_{t \rightarrow +\infty} t^{n-1} = +\infty.$$

Acest fapt dovedește *necesitatea* unei condiții suplimentare pentru a ”păstra” uniform continuitatea trecând de la $g(t)$ la $|g(t)|^p$, unde $p > 0$, și o asemenea condiție este *mărginirea* funcției $g(t)$.

Să presupunem acum, în etapa a doua a demonstrației, că $g(t)$ nu este mărginită. Atunci, există șirul strict crescător și nemărginit superior $(t_n)_{n \geq 1}$ astfel încât $|g(t_n)| = n$ pentru orice $n \geq 1$. Există, de asemeni, șirul strict crescător și nemărginit superior $(p_n)_{n \geq 1}$ astfel încât $t_n < p_n$, $|g(p_n)| = \frac{n}{2}$, $|g(t)| \geq \frac{n}{2}$ și $\operatorname{sgn} g(t) = \operatorname{sgn} g(t_n)$ pentru orice $t \in [t_n, p_n]$, $n \geq 1$.

Deoarece

$$\left(\frac{n}{2}\right)^p (p_n - t_n) \leq \int_{t_n}^{p_n} |g(t)|^p dt \leq \|g\|_{L^p}^p < +\infty,$$

avem

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} (p_n - t_n) = 0. \quad (2.144)$$

Deoarece $g(t)$ este uniform continuă, există $\eta > 0$ cu proprietatea că

$$|g(t) - g(s)| < 1,$$

unde $|t - s| < \eta$, $t, s \geq t_0$. Conform (2.144), există numărul natural $N \geq 2$ pentru care $p_n - t_n < \eta$, adică $|g(p_n) - g(t_n)| < 1$, unde $n \geq N$. Ajungem la o contradicție, căci

$$1 \leq \frac{n}{2} = |g(p_n) - g(t_n)| < 1, \quad n \geq N. \quad (2.145)$$

Facem observația că, pe baza (2.144), (2.145), o aplicare a teoremei lui Lagrange ne permite să înlocuim *uniform continuitatea* lui $g(t)$ cu *mărginirea* funcției $g'(t)$ (presupusă continuă). O discuție în acest sens poate fi citită în lucrările cercetătorilor japonezi K. Kamo și H. Usami, *Classification of proper solutions of some Emden-Fowler equations*, publicată în *Hiroshima Mathematical Journal*, **29**(1999), p. 459-477 (aut. K. Kamo) și *Asymptotic forms of positive solutions of third-order Emden-Fowler equations*, apărută în *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, **271**(2002), p. 297-312 (aut. K. Kamo și H. Usami), respectiv în articolul lui O. Mustafa și Y. Rogovchenko, *Limit-point criteria for superlinear differential equations*, publicat în *Bulletin of The Belgian Mathematical Society Simon Stevin*, **11**(2004), p. 431-44.

2.2.26 Problema balisticii exterioare

Presupunem că ne găsim în aceleași condiții ca în cazul mișcării curbilinii în vid sub acțiunea câmpului gravitațional terestru. Dorim să studiem mișcarea corpului punctiform M ținând seama de rezistența aerului, $\vec{F}_{rez} = -mg\varphi(v) \cdot \vec{\tau}(M)$ (vezi Figura 2.35).

Atunci, (2.129) devine

$$m\vec{a} = m\vec{g} - mg\varphi(v)\vec{\tau}. \quad (2.146)$$

Firește, conform celor deduse pentru ecuația (2.138), *mișcarea punctului material M va avea loc în planul vertical care conține viteza sa inițială* (cf. [76], p. 412). La fel ca anterior, putem proiecta relația precedentă pe cele două axe de coordonate, Ox (orizontala) și Oy (verticală locului)

$$\ddot{x} = -g\varphi(v) \cos \theta \quad \ddot{y} = -g - g\varphi(v) \sin \theta,$$

unde $\theta \stackrel{def}{=} \angle(\vec{\tau}, \vec{i})$.

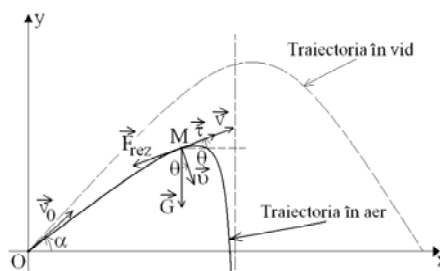


Figura 2.35

Vom înlocui, în cele ce urmează, necunoscutele x, y cu mărimile v, θ . Într-adevăr, plecând de la formula $\vec{v} = v \cdot \vec{\tau}$, putem scrie că

$$\dot{x} = v \cos \theta \quad \dot{y} = v \sin \theta.$$

Astfel,

$$\begin{cases} \dot{v} \cos \theta - v \dot{\theta} \sin \theta = -g\varphi(v) \cos \theta \\ \dot{v} \sin \theta + v \dot{\theta} \cos \theta = -g[1 + \varphi(v) \sin \theta]. \end{cases}$$

Privind formulele anterioare ca un *sistem algebric* având necunoscutele $\dot{v}, v \dot{\theta}$, obținem

$$\dot{v} = -g[\sin \theta + \varphi(v)] \quad v \dot{\theta} = -g \cos \theta.$$

În sfârșit, folosind teorema de derivare a funcției compuse $v = v(\theta(t))$, ajungem la

$$\frac{dv}{d\theta} = \frac{\dot{v}}{\dot{\theta}} = v \left[\tan \theta + \frac{\varphi(v)}{\cos \theta} \right] \quad v(\alpha) = v_0. \quad (2.147)$$

Înlocuirea mărimilor x, y cu mărimile $\dot{v}, v \dot{\theta}$ constituie esența **metodei hodografice**, aplicată cu mult succes în probleme de hidrodinamică (cf. [34], p. 338, [20], p. 344 și următoarele). Ecuația (2.147) poartă denumirea de *ecuația balisticii exterioare (hodografului)* (cf. [34], p. 339). Traiectoria particulei M se numește *curbă balistică* (cf. [32], p. 31).

Determinarea mărimilor x, y, t în funcție de unghiul θ făcut de viteza punctului material cu orizontala se bazează pe relațiile diferențiale de mai

jos

$$\frac{dx}{d\theta} = \frac{\dot{x}}{\dot{\theta}} = \frac{v \cos \theta}{-\frac{g \cos \theta}{v}} = -\frac{v^2}{g}, \quad (2.148)$$

respectiv

$$\frac{dy}{d\theta} = \frac{\dot{y}}{\dot{\theta}} = -\frac{v^2}{g} \tan \theta \quad \frac{dt}{d\theta} = -\frac{v}{g \cos \theta}. \quad (2.149)$$

Două formule utile în rezolvarea problemelor de mecanică teoretică sunt

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{g}{v_x^2} \quad R(M) = \frac{v^2}{g \cos \theta}$$

(cf. [32], problema 3.19, p. 73, [63], p. 317).

Într-adevăr, conform (2.148), (2.149), putem scrie că

$$\begin{aligned} \frac{d^2y}{dx^2} &= \frac{d}{dx} \left(\frac{\frac{dy}{d\theta}}{\frac{dx}{d\theta}} \right) = \frac{d}{dx} (\tan \theta) \\ &= \frac{d}{dt} (\tan \theta) \cdot \frac{1}{\dot{x}} = \frac{\dot{\theta}}{\cos^2 \theta} \cdot \frac{1}{\dot{x}} = \frac{-\frac{g \cos \theta}{v}}{\cos^2 \theta} \cdot \frac{1}{v_x} \\ &= -\frac{g}{v \cos \theta} \cdot \frac{1}{v_x} = -\frac{g}{v_x^2}. \end{aligned}$$

Pentru stabilirea celei de-a doua relații ținem seama de (2.16), (2.146). Astfel,

$$a_\nu = \frac{v^2}{R(M)} = \bar{a} \cdot \bar{\nu} = \bar{g} \cdot \bar{\nu} = g \cos \theta.$$

Urmând expunerile făcute în [34], p. 339-342, [76], p. 415-417, [25], p. 90-92, vom stabili o serie de proprietăți general-constitutive ale soluțiilor ecuației (2.147), respectiv curbei balistice.

Impunem, în mod natural, ca, atâta timp timp cât vectorul \vec{v} este situat deasupra paralelei dusă prin poziția curentă a mobilului M la orizontala Ox , să considerăm $\theta > 0$. În schimb, atunci când \vec{v} se va găsi dedesubtul paralelei respective, avem $\theta < 0$. Această presupunere este în acord cu formula

$$\dot{\theta} = -\frac{g \cos \theta}{v} < 0, \quad \theta \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right),$$

care arată că *unghiul θ descrește mereu pe traiectorie*. În acest sens, problema Cauchy (2.147) trebuie înțeleasă ca o *problemă a valorii finale*.

1) În problema balisticii exterioare, viteza punctului material M este limitată superior. Într-adevăr, din (2.147) rezultă că

$$\frac{dv}{d\theta} = \frac{v}{\cos \theta} [\sin \theta + \varphi(v)]. \quad (2.150)$$

Atunci când $0 \leq \theta < \alpha$ (mobilul se găsește pe porțiunea *ascendentă* a traiectoriei), avem $\cos \theta > \cos \alpha > 0$. În plus, $\sin \theta \geq 0$, deci $\frac{dv}{d\theta} \geq 0$. Apoi, cum $\dot{v} = \frac{dv}{d\theta} \cdot \dot{\theta}$, obținem că $\dot{v} \leq 0$, de unde $v(M) \leq v_0$.

Când $\theta \in (-\frac{\pi}{2}, 0]$, avem $\cos \theta > 0$. Este însă posibil ca $\sin \theta + \varphi(v) < 0$ pentru o anumită valoare a lui θ . Dată fiind continuitatea funcției φ , va exista un subinterval al lui $(-\frac{\pi}{2}, 0]$ pe care

$$\sin \theta + \varphi(v) < 0.$$

Atunci, $-1 + \varphi(v) \leq \sin \theta + \varphi(v) < 0$, de unde $\varphi(v) < 1$. Cum $[1, +\infty) \subset \varphi([0, +\infty))$, va exista mărimea $v^* > 0$ pentru care $\varphi(v^*) = 1$. De asemeni, $v(t) < v^*$ pe subintervalul în cauză (funcția φ este strict crescătoare).

2) *Soluția (unică) a problemei Cauchy (2.147) este pozitivă*. Într-adevăr, dacă ar exista $\theta_1 \in (-\frac{\pi}{2}, \alpha]$ pentru care $v(\theta_1) = 0$, atunci, cum problema Cauchy

$$\begin{cases} \frac{dv}{d\theta} = v \left[\tan \theta + \frac{\varphi(v)}{\cos \theta} \right], & \theta \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \\ v(\theta_1) = 0 \end{cases}$$

are soluția identic nulă, ar rezulta că $v(\alpha) = 0$, contradicție. Acest rezultat poate fi îmbunătățit considerabil.

3) În problema balisticii exterioare, viteza punctului material M este limitată inferior de o mărime pozitivă. Din nou, plecând de la (2.150), putem scrie că

$$\begin{aligned} \frac{dv}{d\theta} \cdot \cos \theta - v \sin \theta &= v\varphi(v) \\ &= \frac{d}{d\theta}(v \cos \theta) \end{aligned}$$

și

$$\frac{1}{v \cos \theta} \cdot \frac{d}{d\theta}(v \cos \theta) = \frac{\varphi(v)}{\cos \theta},$$

adică

$$\frac{d}{d\theta} [\log(v \cos \theta)] = \frac{\varphi(v)}{\cos \theta}. \quad (2.151)$$

Când $\theta \in [0, \alpha]$, funcția $v = v(\theta)$ crește (funcția $v = v(t)$ descrește); deci, $v(\theta) \geq v(0) \stackrel{not}{=} w_0 > 0$, conform 2). Ce se întâmplă însă pe $(-\frac{\pi}{2}, 0]$?

Dacă $v(\theta) \geq v^*$ pentru orice $\theta \in (-\frac{\pi}{2}, 0]$, unde $\varphi(v^*) = 1$, atunci afirmația de demonstrat ar fi justificată. Altfel, există subintervalul $[\theta_2, \theta_1]$ al lui $(-\frac{\pi}{2}, 0]$ pe care $v(\theta) < v^*$. Mărindu-l pe θ_1 , mai precis luând

$$\theta_1^* = \sup \{ \theta_1 \leq 0 : v(\theta) < v^*, \theta \in [\theta_2, \theta_1] \},$$

obținem intervalul $[\theta_2, \theta_1^*)$ pe care sau

$$\theta_1^* < 0 \quad v(\theta) < v^* \quad v(\theta_1^*) = v^*$$

sau

$$\theta_1^* = 0 \quad v(\theta) < v^* \quad v(\theta_1^*) = w_0 \leq v^*.$$

În concluzie, $v(\theta) \leq v^*$, unde $\theta \in [\theta_2, \theta_1^*]$. Atunci, conform (2.151), avem că

$$\frac{d}{d\theta} [\log(v \cos \theta)] \leq \frac{1}{\cos \theta}, \quad \theta \in [\theta_2, \theta_1^*],$$

ceea ce se mai scrie și

$$\frac{d}{d\theta} \left[\log(v \cos \theta) + \log \frac{1 - \sin \theta}{\cos \theta} \right] \leq 0,$$

respectiv

$$\frac{d}{d\theta} \{ \log [v (1 - \sin \theta)] \} \leq 0.$$

Integrând această ultimă inegalitate pe intervalul $[\theta_2, \theta_1^*]$, ajungem la

$$\log \frac{v(\theta_1^*) (1 - \sin \theta_1^*)}{v(\theta) (1 - \sin \theta)} \leq 0,$$

respectiv

$$\frac{v(\theta_1^*) (1 - \sin \theta_1^*)}{v(\theta) (1 - \sin \theta)} \leq 1, \quad \theta \in [\theta_2, \theta_1^*].$$

De aici,

$$v(\theta) \geq v(\theta_1^*) \frac{1 - \sin \theta_1^*}{1 - \sin \theta}.$$

Însă $\theta, \theta_1^* \in (-\frac{\pi}{2}, 0]$, de unde $1 - \sin \theta_1^* \geq 1$ și $(1 - \sin \theta)^{-1} \geq [1 - \sin(-\frac{\pi}{2})]^{-1} = \frac{1}{2}$. Așadar,

$$v(\theta) \geq \frac{1}{2}v(\theta_1^*) = \begin{cases} \frac{1}{2}w_0, & \theta_1^* = 0 \\ \frac{1}{2}v^*, & \theta_1^* < 0. \end{cases}$$

4) În problema balisticii exterioare, traiectoria (curba balistică) admite o asimptotă verticală. Într-adevăr, ținând seama de (2.148), (2.149), putem scrie că

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{d\theta}}{\frac{dx}{d\theta}} = \tan \theta,$$

de unde $\lim_{\theta \searrow -\frac{\pi}{2}} \frac{dy}{dx} = -\infty$. Apoi, cum $\lim_{\theta \searrow -\frac{\pi}{2}} x(\theta) = \frac{1}{g} \cdot \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\alpha} v^2(q) dq \leq \frac{1}{g} \cdot$

$\max\{v_0^2, v^{*2}\} \cdot \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\alpha} dq < +\infty$ (cf. [76], p. 417), justificarea s-a încheiat. Asimptota verticală este "responsabilă" de reducerea semnificativă a bătăii gurii de foc, fiind unul dintre efectele principale ale rezistenței aerului (cf. [34], p. 341).

5) În problema balisticii exterioare, există o disimetrie a ramurii descendente față de ramura ascendentă a traiectoriei. Să considerăm P_1, P_2 două puncte situate pe curba balistică la aceeași înălțime y_0 .

Ținând seama de (2.151), (2.148), avem că

$$\frac{dv_x}{dx} = \frac{\frac{d}{d\theta}(v \cos \theta)}{\frac{dx}{d\theta}} = -g \cdot \frac{\varphi(v)}{v} < 0,$$

ceea ce arată că mărimea v_x descrește mereu pe traiectorie (cf. [34], p. 341).

Pe de altă parte, sunt valabile relațiile

$$\begin{aligned} \int_{y_0}^{h_{\max}} \frac{d^2y}{dx^2} dy &= \int_{x_1}^{x_{\max}} \frac{d^2y}{dx^2} \cdot \frac{dy}{dx} dx \\ &= \int_{x_1}^{x_{\max}} \frac{d}{dx} \left\{ \frac{1}{2} [y'(x)]^2 \right\} dx = -\frac{1}{2} [y'(x_1)]^2, \end{aligned}$$

căci x_{\max} reprezintă un punct critic al funcției $y = y(x)$.

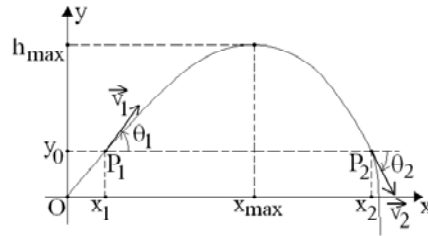


Figura 2.36

Așadar,

$$\frac{1}{2} [y'(x_1)]^2 = g \cdot \int_{y_0}^{h_{\max}} \frac{dy}{v_x^2}.$$

În mod analog,

$$\frac{1}{2} [y'(x_2)]^2 = g \cdot \int_{y_0}^{h_{\max}} \frac{dy}{v_x^2},$$

ceea ce ne conduce la $|y'(x_2)| > y'(x_1)$, respectiv $|\tan \theta_2| > \tan \theta_1$ sau, echivalent, $|\theta_2| > \theta_1$.

6) Viteza punctului material M în poziția P_1 este mai mare decât cea în poziția P_2 . Conform teoremei energiei cinetice, avem că

$$\begin{aligned} d\left(\frac{1}{2}mv^2\right) &= (\overline{G} + \overline{F_{rez}}) \cdot d\vec{r} \\ &= -mgdy - mg\varphi(v) \cos \theta dx - mg\varphi(v) \sin \theta dy \\ &= -mgdy - mg\varphi(v)v \cos^2 \theta dt - mg\varphi(v)v \sin^2 \theta dt \\ &= -mgdy - mg\varphi(v)v dt. \end{aligned}$$

Prin integrare, obținem

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}mv^2(P_2) - \frac{1}{2}mv^2(P_1) &= -mg \cdot \int_{y_0}^{y_0} dy - mg \cdot \int_{t_1}^{t_2} \varphi(v)v dt \\ &= -mg \cdot \int_{t_1}^{t_2} \varphi(v)v dt < 0, \end{aligned}$$

ceea ce justifică afirmația anterioară.

7) Dacă $v = v(\theta)$ este soluția problemei Cauchy de mai jos

$$\begin{cases} \frac{dv}{d\theta} = v \left[\tan \theta + \frac{\varphi(v)}{\cos \theta} \right], & \theta \in \left(-\frac{\pi}{2}, 0\right] \\ v(0) = w_0, \end{cases} \quad (2.152)$$

iar $\lim_{\theta \searrow -\frac{\pi}{2}} v(\theta) = l \in \mathbb{R}$, atunci $\varphi(l) = 1$. Cu alte cuvinte, dacă ecuația balisticii exterioare admite o soluție de tip *convergent*, atunci *limita* acestei soluții are o valoare *predefinită*.

Să presupunem că, în cazul soluției v a problemei (2.152), am avea $\varphi(l) > 1$. Atunci, există $\theta_0 \in \left(-\frac{\pi}{2}, 0\right)$ astfel ca $v(\theta) \in \left[\frac{l}{2}, \frac{3l}{2}\right]$, respectiv $\varphi(v(\theta)) \in \left[\frac{1+\varphi(l)}{2}, \frac{3\varphi(l)}{2}\right]$ pentru orice $\theta \in \left(-\frac{\pi}{2}, \theta_0\right]$. Integrând ecuația (2.152) în raport cu θ , putem scrie că

$$v(\theta) = w_0 - \int_{\theta_0}^{\theta} v(q) \left[\tan q + \frac{\varphi(v(q))}{\cos q} \right] dq - I(\theta),$$

unde $I(\theta) = \int_{\theta}^{\theta_0} v(\xi) \frac{\sin \xi + \varphi(v(\xi))}{\cos \xi} d\xi$. Dubla inegalitate

$$\frac{l}{2} \cdot \frac{\varphi(l) - 1}{2} \cdot \int_{\theta}^{\theta_0} \frac{d\xi}{\cos \xi} \leq I(\theta) \leq \frac{3l}{2} \cdot \frac{3\varphi(l)}{2} \cdot \int_{\theta}^{\theta_0} \frac{d\xi}{\cos \xi},$$

unde $-\frac{\pi}{2} < \theta \leq \theta_0$, ne conduce la $\lim_{\theta \searrow -\frac{\pi}{2}} I(\theta) = +\infty$, fapt care intră în contradicție cu mărginirea vitezei $v(\theta)$. Un raționament asemănător are loc atunci când $\varphi(l) < 1$.

La fel ca în cazul mișcării pe planul înclinat, se poate dovedi că *viteza punctului material M aflat în mișcare curbilinie sub acțiunea gravitației într-un mediu rezistent tinde către viteza limită v^* dată de $\varphi(v^*) = 1$* (cf. [34], p. 342). Pentru detalii privind dependența de viteză, înălțime ori forma proiectilului a funcției φ (formula lui Siacci) ca și transformarea ecuației (2.147) într-o ecuație diferențială *de tip Bernoulli* (cf. [4], p. 78-79, [47], p. 25, [24], p. 378, etc) a se vedea [63], p. 312-313, [34], p. 342-344.

2.2.27 Ecuația diferențială a mișcării pe o curbă fixă ideală. Lucrul mecanic al forțelor de legătură

Să considerăm mișcarea punctului material M pe o legătură bilaterală ideală dată de curba simplă Γ , având parametrizarea globală $\gamma : I \rightarrow E_3$, unde $\gamma = \gamma(q)$, sub acțiunea forței \vec{F} . Curba Γ este presupusă fixă în raport cu sistemul de referință inerțial \mathcal{R} iar $\vec{F} = \vec{F}(q)$.

Pe baza teoremei energiei cinetice, avem

$$d\left(\frac{1}{2}mv^2\right) = (\vec{F} + \vec{N}) \cdot d\vec{r} = \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

deoarece forța de legătură \vec{N} se găsește în planul normal al traiectoriei Γ în poziția curentă a mobilului. *Lucrul mecanic elementar al forței de legătură, și anume*

$$\delta W_{leg} = \vec{N} \cdot d\vec{r},$$

este întotdeauna nul, fapt valabil, evident, și atunci când legătura bilaterală ideală este dată de o suprafață simplă. Această proprietate constituie, după cum spuneam în subsecțiunea dedicată lucrului mecanic elementar, esența *principiului lucrului mecanic virtual (deplasărilor virtuale)* din mecanica analitică (cf. [63], p. 505, [14], p. 227).

Au loc formulele

$$v^2 = \sum \dot{x}^2 = \sum \left(\frac{dx}{dq} \cdot \dot{q}\right)^2 = \dot{q}^2 \cdot \sum [x'(q)]^2,$$

respectiv

$$\vec{F} \cdot d\vec{r} = \sum F_x dx = \left[\sum F_x(q) \cdot x'(q)\right] dq.$$

Așadar,

$$\frac{d}{dt} \left\{ \frac{m}{2} \cdot \sum [x'(q)]^2 \cdot \dot{q}^2 \right\} = Q(q) \cdot \dot{q},$$

de unde, prin integrare în raport cu timpul t , obținem

$$\frac{m}{2} \left\{ \varphi(q(t)) \cdot [\dot{q}(t)]^2 - \varphi(q(t_0)) \cdot [\dot{q}(t_0)]^2 \right\} = \int_{q_0}^{q(t)} Q(\xi) d\xi.$$

Aici, $q(t_0) \stackrel{not}{=} q_0$, $\varphi(q) \stackrel{def}{=} \sum [x'(q)]^2$. Mai departe,

$$\left[\dot{q}(t) \right]^2 = \frac{v_0^2 + \frac{2}{m} \cdot \int_{q_0}^{q(t)} Q(\xi) d\xi}{\varphi(q(t))},$$

unde $v(t_0) \stackrel{not}{=} v_0$. Ecuația diferențială autonomă

$$\dot{q} = \pm \sqrt{\frac{v_0^2 + \frac{2}{m} \cdot \int_{q_0}^q Q(\xi) d\xi}{\varphi(q)}}, \quad t \geq t_0,$$

caracterizează mișcarea punctului material M (cf. [76], p. 482, [34], p. 400). Cititorul poate consulta și prezentarea făcută în [56], p. 95-96.

2.2.28 Ecuația diferențială a pendulului gravitațional simplu (matematic). Formula perioadei mișcării. Legile pendulului simplu

Pendulul simplu este constituit dintr-un punct material M care se deplasează fără frecare pe o circumferință situată în plan vertical (cf. [76], p. 484, [63], p. 331). Din punct de vedere practic, pendulul gravitațional simplu poate fi realizat apelând la o legătură *bilaterală*, ca în situația mișcării unei bile metalice în interiorul unui jgheab cu secțiune circulară (cf. [34], p. 419); aici, rezultatele sunt influențate de prezența *frecării* (cf. [76], p. 491); putem utiliza, de asemeni, legătura *unilaterală* care intervine în cazul mișcării oscilatorii a unui corp punctiform, suspendat de tavanul laboratorului printr-un fir inextensibil și de masă neglijabilă, în jurul punctului de suspensie, sub acțiunea forței de greutate (vezi Figura 2.37) (cf. [63], p. 332, [32], p. 67); folosind obiecte de dimensiuni și masă reduse, ca și un fir de suspensie scurt, efectele rotației terestre nu se vor face "simțite" (mișcarea *în rozetă*) (cf. [32], p. 208-209, [34], p. 439).

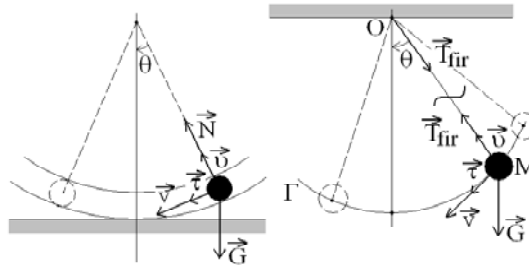


Figura 2.37

În ceea ce privește firul de suspensie, vom admite (vezi Figura 2.38) că *distanța dintre punctele materiale (particule) ce îl alcătuiesc nu se modifică (inextensibilitate) pe parcursul experimentului*. Mai precis, distanțele d , D dintre centrele sferelor tangente care simbolizează punctele materiale din constituția firului de suspensie, respectiv punctul material greu (adică, $\frac{m_0}{m} \simeq 0$, unde m_0 reprezintă masa firului, cf. [17], p. 75) suspendat rămân *constante* indiferent de forțele care acționează asupra lor. Punctul material greu, fiind atras de Pământ cu forța gravitațională \vec{G} , acționează asupra sferei tangente lui, aparținând firului de suspensie, cu o forță necunoscută, notată \vec{T}_{fir} ; la rândul său, sfera va reacționa cu o forță egală în mărime și de sens contrar pe care o vom nota tot \vec{T}_{fir} . Forța \vec{T}_{fir} , aplicată primei sfere a firului de suspensie, tinde să deplaseze această sferă. Atunci, dat fiind că distanța d dintre prima și cea de-a doua sferă aparținând firului de suspensie trebuie să rămână nemodificată, putem spune că forța \vec{T}_{fir} se transmite celei de-a doua sfere a firului de suspensie.

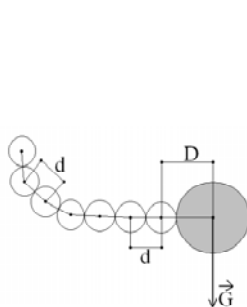


Figura 2.38 a

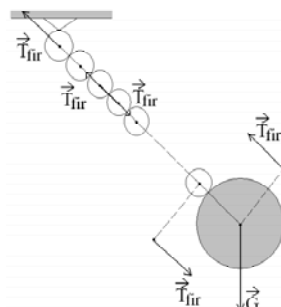


Figura 2.38 b

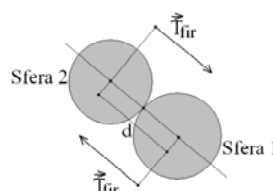


Figura 2.39

Modelul firului de suspensie are drept *caracteristică fundamentală* faptul că această *transmisie de forță* se realizează *integral* (fără pierderi). În continuare, prezența forței \vec{T}_{fir} având punctul de aplicație în centrul celei de-a

doua sfere a firului de suspensie (vezi Figura 2.39) poate fi considerată ca rezultat al *acțiunii* primei sfere din constituția firului de suspensie; acest fapt implică, în baza principiului acțiunii și reacțiunii, prezența unei "noi" forțe \vec{T}_{fir} (reacțiune) aplicată în centrul primei sfere.

Acum, forța \vec{T}_{fir} aplicată celei de-a doua sfere se va transmite celei de-a treia sfere aflată în componența firului de suspensie, forța \vec{T}_{fir} "nouă" aplicată sferei întâi va "aluneca" până în centrul celei de-a doua sfere a firului de suspensie, devenind "noua" forță \vec{T}_{fir} a celei de-a doua sfere, ș. a. m. d. Practic, putem spune că *forța \vec{T}_{fir} alunecă (glisează) instantaneu de-a lungul firului până în punctul de suspensie al acestuia*. Pentru ilustrarea unui asemenea fenomen, forța \vec{T}_{fir} poartă denumirea sugestivă de *tensiune în fir* și este utilizat *elementul grafic* de mai jos.

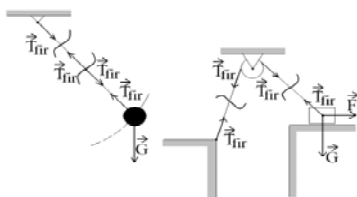


Figura 2.40

În cele ce urmează vom stabili ecuația diferențială care caracterizează pendulul simplu (vezi Figura 2.41). La momentul inițial t_0 , punctul material M se găsește în poziția M_0 , fără viteză inițială. Notăm cu θ unghiul făcut de dreptele OM și Oy (verticala locului). Aici, coordonata curbilinie s este dată de

$$s = l(\alpha - \theta).$$

Putem scrie că

$$\begin{aligned} \vec{\rho} &= \frac{\overline{OM}}{|\overline{OM}|} = \sin \theta \cdot \vec{i} - \cos \theta \cdot \vec{j} \\ &= \sin(\pi - \theta) \cdot \vec{i} + \cos(\pi - \theta) \cdot \vec{j}, \end{aligned}$$

respectiv

$$\begin{aligned} \vec{\tau} &= \frac{d\vec{r}}{ds} = \frac{d(l \cdot \vec{\rho})}{d[l(\alpha - \theta)]} = -\frac{d\vec{\rho}}{d\theta} \\ &= \frac{d\vec{\rho}}{d(\pi - \theta)} = \cos(\pi - \theta) \cdot \vec{i} - \sin(\pi - \theta) \cdot \vec{j} \\ &= -\cos \theta \cdot \vec{i} - \sin \theta \cdot \vec{j}. \end{aligned}$$

De asemeni, versorul $\vec{\tau}$ are săgeata îndreptată în sensul creșterii variabilei de derivare, adică al scăderii unghiului θ .

În sfârșit, conform (2.9), avem

$$\frac{1}{l} \cdot \vec{\nu} = \frac{d\vec{\tau}}{ds} = -\frac{1}{l} \cdot \frac{d\vec{\tau}}{d\theta} = \frac{1}{l} \cdot \frac{d\vec{\tau}}{d(\pi - \theta)},$$

de unde

$$\vec{\nu} = -\sin \theta \cdot \vec{i} + \cos \theta \cdot \vec{j} = -\vec{\rho}.$$

Versorul $\vec{\nu}$ se obține din versorul $\vec{\tau}$ prin rotire cu $\frac{\pi}{2}$ în sens invers trigonometric.

În mod natural, vom presupune că $\theta \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ astfel încât $\theta > 0$ dacă și numai dacă $x > 0$.

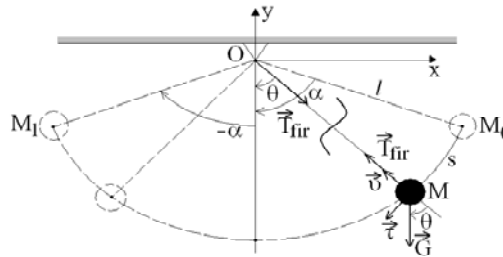


Figura 2.41

Proiectând (2.129) pe axele triedrului lui Frenet al traiectoriei în poziția curentă a punctului material M , obținem

$$\begin{cases} ma_{\tau} = m \dot{v} = (\vec{T} + \vec{G}) \cdot \vec{\tau} \\ \quad = \vec{G} \cdot \vec{\tau} = mg \sin \theta \\ ma_{\nu} = m \frac{v^2}{l} = (\vec{T} + \vec{G}) \cdot \vec{\nu} \\ \quad = -T - mg \cos \theta. \end{cases} \quad (2.153)$$

Aici, $\vec{T} = T \cdot \vec{\rho}$. Ținând seama de formula $v = \dot{s} = -l \dot{\theta}$, prima din relațiile (2.153) ne conduce la *ecuația diferențială a pendulului matematic*, și anume

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{l} \sin \theta = 0 \quad (2.154)$$

(cf. [32], p. 67). Unghiul θ scăzând mereu pe traiectorie atunci când particula M se deplasează de la M_0 către M_1 , avem $\dot{\theta} < 0$. Prin înmulțire cu $\dot{\theta}$ în ambii

membri ai (2.154), deducem că

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} \dot{\theta}^2 \right) - \frac{g}{l} \cdot \frac{d}{dt} (\cos \theta) = 0, \quad t \geq t_0.$$

Dacă integrăm această relație în raport cu timpul t , avem

$$\left[\dot{\theta}(t) \right]^2 - \left[\dot{\theta}(t_0) \right]^2 = 2 \frac{g}{l} \cdot [\cos \theta(t) - \cos \alpha],$$

de unde

$$v^2 = 2gl (\cos \theta - \cos \alpha) \quad (2.155)$$

(cf. [34], p. 416). Am folosit faptul că $v_0 = -l \dot{\theta}(t_0) = 0$.

Ecuția diferențială a pendulului matematic poate fi stabilită și într-un alt mod. Astfel, deoarece

$$\bar{r} = l \cdot \bar{\rho} = l \left[\cos \left(\theta - \frac{\pi}{2} \right) \cdot \bar{i} + \sin \left(\theta - \frac{\pi}{2} \right) \cdot \bar{j} \right],$$

deducem, pe baza (2.87), că $\bar{L}_O = ml^2 \dot{\theta} \cdot \bar{k}$. Atunci, conform *teoremei momentului cinetic*, putem scrie că

$$\begin{aligned} ml^2 \ddot{\theta} &= \frac{d\bar{L}_O}{dt} \cdot \bar{k} = [\bar{r} \times (\bar{G} + \bar{T})] \cdot \bar{k} = (\bar{r}, \bar{G}, \bar{k}) \\ &= -mgl \sin \theta \end{aligned}$$

(cf. [32], p. 67, [63], p. 334-335).

Pe de altă parte, formulele (2.154), (2.155) pot fi obținute direct, prin aplicarea *teoremei energiei cinetice* (cf. [34], p. 415). Recomandăm cititorului să consulte expunerea făcută teoriei pendulului matematic în [63], p. 332 și următoarele, respectiv detaliile relative la tensiunea în fir T din [34], p. 419.

Relația (2.155) arată că $v(-\alpha) = 0$. Cu alte cuvinte, punctul material M se va opri în poziția M_1 , simetrică poziției inițiale M_0 față de verticala Oy . Mișcarea se reia în *sens invers*, cu păstrarea formulelor (2.154) și (2.155) (cf. [76], p. 486). Astfel, *perioada pendulului simplu* (adică, durata necesară revenirii particulei M în poziția inițială) reprezintă *dublul* duratei mișcării acesteia din poziția M_0 până în poziția M_1 .

Conform (2.155), avem

$$-l \dot{\theta} = \sqrt{2gl(\cos \theta - \cos \alpha)},$$

de unde

$$\frac{d\theta}{dt} = -\sqrt{\frac{4g}{l} \left(\sin^2 \frac{\alpha}{2} - \sin^2 \frac{\theta}{2} \right)}.$$

Separând variabilele și integrând în ambii membri, obținem că

$$\frac{T}{2} = -\sqrt{\frac{l}{4g}} \cdot \int_{\alpha}^{-\alpha} \frac{d\theta}{\sqrt{\sin^2 \frac{\alpha}{2} - \sin^2 \frac{\theta}{2}}} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{l}{g}} \cdot \int_{-\alpha}^{\alpha} \frac{d\theta}{\sqrt{\sin^2 \frac{\alpha}{2} \cdot (1 - u^2)}},$$

unde $\sin \frac{\theta}{2} = u(\theta) \cdot \sin \frac{\alpha}{2}$ (cf. [34], p. 418). Schimbarea de variabilă $\theta(u) = 2 \arcsin(u \cdot \sin \frac{\alpha}{2})$, $u \in [-1, 1]$, ne conduce la

$$T = 2\sqrt{\frac{l}{g}} \cdot \int_{-1}^1 \frac{du}{\sqrt{(1-u^2)(1-k^2u^2)}} = 4\sqrt{\frac{l}{g}} \cdot \int_0^1 \frac{du}{\sqrt{(1-u^2)(1-k^2u^2)}}.$$

Aici, $k \stackrel{\text{not}}{=} \sin \frac{\alpha}{2}$.

Pe baza *formulei lui Abel* (cf. [53], p. 285),

$$\begin{aligned} (1 - k^2 u^2)^{-\frac{1}{2}} &= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{5}{2} \cdot \dots \cdot \frac{2n-1}{2} \cdot k^{2n} \cdot u^{2n} \\ &= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \dots \cdot (2n)} k^{2n} \cdot u^{2n}. \end{aligned}$$

De asemeni, $\int_0^1 \frac{u^{2n}}{\sqrt{1-u^2}} du = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \dots \cdot (2n)} \cdot \frac{\pi}{2}$, astfel că

$$\begin{aligned} T &= 4\sqrt{\frac{l}{g}} \cdot \left[\int_0^1 \frac{du}{\sqrt{1-u^2}} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \dots \cdot (2n)} k^{2n} \right. \\ &\quad \left. \cdot \int_0^1 \frac{u^{2n}}{\sqrt{1-u^2}} du \right] \\ &= 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}} \cdot \left\{ 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \dots \cdot (2n)} \right]^2 \cdot \sin^{2n} \frac{\alpha}{2} \right\}. \end{aligned}$$

Folosind ordinul de aproximare $\alpha^4 \simeq 0$, putem scrie că

$$\sin \frac{\alpha}{2} = \frac{\alpha}{2} - \frac{\alpha^3}{12} \quad \sin^2 \frac{\alpha}{2} = \frac{\alpha^2}{4},$$

de unde $T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}} \cdot \left(1 + \frac{\alpha^2}{16}\right)$ (cf. [76], p. 487). Cu ordinul de aproximare $\alpha^2 \simeq 0$, obținem *formula lui Galilei*

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}} \quad (2.156)$$

(cf. [34], p. 417).

Ordinul de aproximare $\alpha^2 \simeq 0$ este acceptat pentru unghiurile $\alpha < 6^\circ$ (cf. [32], p. 68). Atunci, ecuația (2.154) devine

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{l}\theta = 0, \quad t \geq t_0, \quad (2.157)$$

iar soluțiile sale pot fi scrise sub forma $\theta(t) = A \cos(\omega t + \varphi)$, unde $\omega = \sqrt{\frac{g}{l}}$ (cf. [76], p. 485). Evident, perioada lor principală este dată de (2.156).

Forma soluțiilor ecuației (2.157) permite stabilirea *legilor pendulului simplu* (cf. [32], p. 68):

1) **Legea substanței.** *Perioada mișcării nu depinde de masa punctului material ori natura materialului din care acesta este alcătuit.*

2) **Legea izocronismului micilor oscilații** (Galilei, cf. [17], p. 75). *Oscilațiile punctului material în jurul punctului de suspensie nu depind de amplitudinea lor unghiulară atunci când aceasta este mică ($\alpha < 6^\circ$).*

3) **Legea perioadei.** *Perioada oscilațiilor este direct proporțională cu rădăcina pătrată din lungimea firului (pendulului) și invers proporțională cu rădăcina pătrată din accelerația gravitațională.*

2.2.29 Problema lui Wittenbauer și ecuația diferențială a oscilatorului armonic

Să presupunem că punctul material M se mișcă în planul Oxy al sistemului de referință inerțial \mathcal{R} respectând legea

$$r = C_1 \cdot e^{C_2\theta}, \quad C_2 \leq 0 < C_1,$$

astfel încât viteza sa unghiulară ω să fie constantă (vezi Figura 2.41). Notăm cu P proiecția punctului $M(x, y)$ pe axa Ox . Se pune problema de a determina *ecuația diferențială*

$$f(x, \dot{x}, \ddot{x}) = 0$$

care caracterizează mișcarea rectilinie a punctului P (Wittenbauer, cf. [8]).

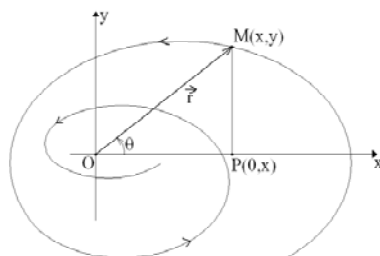


Figura 2.41

Prin derivarea relației $x = C_1 \cdot e^{C_2 \theta} \cos \theta$ în raport cu timpul t deducem că

$$\dot{x} = C_1 e^{C_2 \theta} \omega \cdot (C_2 \cos \theta - \sin \theta) = \omega x \cdot (C_2 - \tan \theta). \quad (2.158)$$

O nouă derivare în raport cu timpul t ne conduce la

$$\begin{aligned} \ddot{x} &= C_1 e^{C_2 \theta} \omega^2 \cdot [(C_2^2 - 1) \cos \theta - 2C_2 \sin \theta] \\ &= \omega^2 x \cdot (C_2^2 - 1 - 2C_2 \tan \theta). \end{aligned} \quad (2.159)$$

Conform (2.158), avem

$$\ddot{x} = \omega^2 x \cdot \left[C_2^2 - 1 - 2C_2 \left(C_2 - \frac{\dot{x}}{\omega x} \right) \right],$$

de unde

$$\ddot{x} - 2C_2 \omega \dot{x} + \omega^2 (1 + C_2^2) x = 0.$$

În cazul particular $C_2 = 0$, obținem *ecuația oscilatorului armonic (liniar)*

$$\ddot{x} + \omega^2 x = 0$$

(cf. [32], p. 66, [34], p. 330). Ea caracterizează mișcarea (rectilinie) a punctului "material" P sub acțiunea unei forțe de tip central, numită *elastică*, și anume $\vec{F} = -k \cdot \vec{OP}$, unde $k = m\omega^2$ (cf. [76], p. 452, [19], p. 12). Cazul

$C_2 \neq 0$ corespunde *oscilatorului cu amortizare (vâscoasă)* (cf. [19], p. 22), în prezența forței de rezistență $\vec{F}_{rez} = -m \cdot \lambda^2 v \cdot \vec{i}$, unde $\lambda^2 = -2C_2\omega$ și $\vec{i} \in T_P\mathbb{R}^3$, $\vec{i} \in \vec{i}$ (cf. [34], p. 333).

În general, ecuația mișcării punctului material M sub acțiunea unei forțe elastice ($\lambda > 0$)

$$m \ddot{\vec{r}} = -\lambda \cdot \vec{r}, \quad t \geq t_0,$$

ne conduce la

$$\begin{aligned} 0 &= m \left(\ddot{\vec{r}} \cdot \dot{\vec{r}} \right) + \lambda \left(\vec{r} \cdot \dot{\vec{r}} \right) = \frac{d}{dt} \left[m \left(\frac{1}{2} v^2 \right) + \frac{\lambda}{2} r^2 \right] \\ &= \frac{d}{dt} \left(E_c + \frac{\lambda}{2} r^2 \right) \end{aligned}$$

(cf. [76], p. 448).

Formula $E_c + \frac{\lambda}{2} r^2 = C$, obținută prin integrare în raport cu timpul t , arată că mișcarea punctului material M se desfășoară într-o zonă *mărginită* ($r^2 \leq \frac{2C}{\lambda} < +\infty$) a SF . Mai precis, *traectoria (plană) a punctului material M sub acțiunea forței elastice $\vec{F} = -\lambda \cdot \vec{r}$ constituie o elipsă în SF* (cf. [76], p. 445-446, [34], p. 332).

Nu vom insista asupra unor asemenea chestiuni, pe care le considerăm ca făcând parte, mai degrabă, din deschiderea unui curs de *teoria vibrațiilor mecanice ori a elasticității (rezistența materialelor)*.

Ecuația (2.157) coincidând cu ecuația oscilatorului armonic, proiecția punctului material M pe tangenta la traiectorie în punctul său cel mai *jos* ($y_{\min} = -l$) va executa o *mișcare oscilatorie liniară* (cf. [76], p. 450, [34], p. 414). Aici, $x = l\theta$.

2.2.30 Ecuația diferențială a pendulului gravitațional sferic

Revenim la *problema corpului punctiform suspendat de un fir inextensibil și lipsit de masă*, fără a mai impune însă ca viteza inițială a mobilului să fie nulă. Pentru valori mici ale acesteia, mișcarea se va desfășura în interiorul și, la limită, pe suprafața semisferei S , de rază egală cu lungimea l a firului de suspensie și având centrul în punctul de suspensie (vezi Figura 2.42). Notăm cu $P(x, z)$ proiecția punctului material M pe planul orizontal Oxz (tavanul laboratorului).

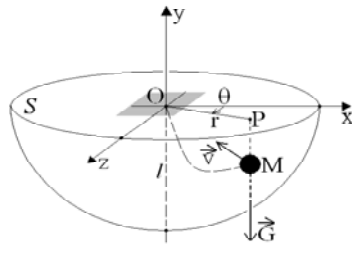


Figura 2.42

Vom face referire în cele ce urmează doar la situația când *firul este întins*. Acest fenomen se produce odată cu ”potolirea” mișcării. Utilizând metoda transformării Prúfer, introducem mărimile r, θ date de

$$x = r \cos \theta \quad z = r \sin \theta,$$

unde $r \in [0, l], \theta \in C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

Atunci, $l^2 = \sum x^2 = r^2 + y^2$ și $v^2 = \sum \dot{x}^2 = \dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2 + \dot{y}^2$ (cf. [34], p. 411).

Aplicăm *teorema energiei cinetice* și ținem seama de faptul că lucrul mecanic elementar al forțelor de legătură este nul. Astfel,

$$d\left(\frac{1}{2}mv^2\right) = \overline{G} \cdot d\overline{r} = -mgdy,$$

respectiv

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}mv^2\right) = -mg\dot{y}.$$

Prin integrare în raport cu timpul t , ajungem la

$$v^2 = \frac{2}{m} \left[mg(y_0 - y) + \frac{1}{2}mv_0^2 \right] = -2gy + h. \quad (2.160)$$

Ca și anterior, *teorema momentului cinetic* implică

$$\frac{d\overline{L}_O}{dt} \cdot \overline{j} = \frac{d}{dt} (2m\overline{\Omega} \cdot \overline{j}) = (\overline{OP}, \overline{G}, \overline{j}) = 0,$$

de unde, conform (2.71), avem că $r^2 \dot{\theta} = C$.

Prin derivarea în raport cu timpul t a relației $l^2 = r^2 + y^2$, putem scrie că

$$r \cdot \dot{r} + y \cdot \dot{y} = 0.$$

Introducând mărimile $\dot{r} = -\frac{y\dot{y}}{r}$, $\dot{\theta} = \frac{C}{r^2}$, $r = \sqrt{l^2 - y^2}$ în (2.160), obținem

$$\begin{aligned} -2gy + h &= \left(-\frac{y\dot{y}}{r}\right)^2 + (l^2 - y^2) \left(\frac{C}{r^2}\right)^2 + \dot{y}^2 \\ &= \frac{y^2 \cdot \dot{y}^2}{l^2 - y^2} + \frac{C^2}{l^2 - y^2} + \dot{y}^2 \\ &= \frac{1}{l^2 - y^2} \left(l^2 \cdot \dot{y}^2 + C^2\right). \end{aligned}$$

Formula

$$l \dot{y} = \pm \sqrt{(-2gy + h)(l^2 - y^2) - C^2} \quad (2.161)$$

constituie *ecuația diferențială a pendulului gravitațional sferic* (cf. [76], p. 497, [34], p. 412). Integrarea sa apelează la *teoria funcțiilor eliptice* (cf. [76], p. 645, [34], p. 413).

Separând variabilele în (2.161), putem determina parametrii mișcării punctului material M

$$dt = \pm l \cdot \frac{dy}{\sqrt{\mathcal{P}(y)}} \quad d\theta = \frac{C}{r^2} dt = \pm Cl \cdot \frac{dy}{(l^2 - y^2) \sqrt{\mathcal{P}(y)}},$$

unde $\mathcal{P}(y) = (-2gy + h)(l^2 - y^2) - C^2$ (cf. [34], p. 412).

O abordare asemănătoare a problemei, bazată pe utilizarea coordonatelor sferice, poate fi citită în [41], p. 51.

Dată fiind forma polinomului $\mathcal{P}(y)$, avem $\mathcal{P}(\pm l) = -C^2 < 0$ și $\lim_{y \rightarrow +\infty} \mathcal{P}(y) = +\infty$. Deducem de aici că polinomul $\mathcal{P}(y)$ are măcar o rădăcină y_3 în intervalul $(l, +\infty)$. Dacă celelalte două rădăcini ale sale, notate y_1, y_2 , se vor afla în $(-l, l)$, adică $|y_1 y_2| < l^2$, atunci, conform relației lui Viète

$$y_1 y_2 + y_2 y_3 + y_3 y_1 = -l^2,$$

obținem

$$(y_1 + y_2) y_3 = -l^2 - y_1 y_2 < 0.$$

Din $y_1 + y_2 < 0$ rezultă că măcar una dintre rădăcini se găsește în intervalul care ne interesează, și anume $(-l, 0)$.

Dacă, în plus, $\mathcal{P}(0) < 0 < \mathcal{P}(y_0)$, se poate demonstra că mișcarea pe semisferă a punctului material M are loc în segmentul delimitat de planele

$y = y_1$, $y = y_2$, unde $-l < y_1 < y_0 < y_2 < 0$, și că funcția $y = y(t)$ admite perioada

$$T = 2l \cdot \int_{y_1}^{y_2} \frac{du}{\sqrt{\mathcal{P}(u)}}.$$

De asemenea, proiecția pe planul orizontal Oxz a unghiului făcut de dreptele $OM(t^*)$, $OM(t^* + T)$, unde $y(t^*) \in \{y_1, y_2\}$, este determină un unghi obtuz (cf. [34], p. 413, [76], p. 497).

2.2.31 Stabilitatea echilibrului punctului material M

Experiența arată că, în cazul pendulului gravitațional (simplu sau sferic), există o unică *poziție de echilibru*, și anume $y_{\min} = -l$. De asemenea, corpul punctiform M , odată *mișcat* din această poziție, execută oscilații în jurul punctului de suspensie rămânând, atunci când "perturbarea" sa este "mică", *în apropierea* poziției de echilibru. Un asemenea fenomen poartă denumirea de *stabilitate* a poziției de echilibru (cf. [34], p. 421). Mai mult chiar, ținând seama de (2.160), putem scrie că

$$-l - y_0 \leq y(t) - y_0 \leq \frac{v_0^2}{2g},$$

unde $y(t_0) \stackrel{\text{not}}{=} y_0$ (cf. [34], p. 413). Astfel, $y(t) \in [-l, y_0 + \frac{v_0^2}{2g}]$, ceea ce arată că *poziția și viteza inițiale* y_0, v_0 ale mobilului M controlează *pozițiile ulterioare ale acestuia*.

Poziției $y_{\min} = -l$ îi corespunde, în problema pendulului matematic, soluția identic nulă a ecuației (2.154). Fenomenul descris anterior, al stabilității poziției, este reflectat, d. p. d. v. matematic, prin aceea că soluția $\theta(t) = 0$ a ecuației (2.154) este *stabilă în sens Liapunov*. O demonstrație a acestui fapt poate fi citită în [6], p. 126.

În general, fiind dată ecuația diferențială autonomă

$$\ddot{x} + g(x) = 0, \quad t \geq t_0, \quad (2.162)$$

unde funcția $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ este continuă, $g(0) = 0$ și $g(x)x \geq 0$ pe un mic interval centrat în O , se poate arăta că *pentru orice* $\varepsilon > 0$ *există* $\delta(\varepsilon) > 0$ *astfel încât, fiind date mărimile* $x_0, v_0 \in \mathbb{R}$, *cu* $|x_0|, |v_0| < \delta(\varepsilon)$, *orice soluție*

$x(t)$ a ecuației (2.162) care verifică datele Cauchy $x(t_0) = x_0$, $\dot{x}(t_0) = v_0$ va fi definită pe $[t_0, +\infty)$ și, în plus,

$$|x(t)|, \quad \left| \dot{x}(t) \right| < \varepsilon, \quad t \geq t_0.$$

Regăsim, în particular, controlul mărimii $x(t)$ cu ajutorul cantităților x_0 , v_0 . Demonstrația rezultatului precedent se bazează pe funcția lui Liapunov $\mathcal{V}(x, y)$, unde $\mathcal{V} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, introdusă prin formula

$$\mathcal{V}(x, y) = \frac{1}{2}y^2 + \int_0^x g(u)du$$

(cf. [6], p. 143).

Este evident că $\mathcal{V}(0, 0) = 0$ și $\mathcal{V}(x, y) \geq 0$ pe o mică vecinătate a lui $(0, 0)$ în $(\mathbb{R}^2, \mathcal{T}_e)$. Caracteristica esențială a funcției lui Liapunov $\mathcal{V}(x, y)$ provine din calculul următor

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left[\mathcal{V}(x(t), \dot{x}(t)) \right] &= \frac{\partial \mathcal{V}}{\partial x} \cdot \dot{x}(t) + \frac{\partial \mathcal{V}}{\partial \dot{x}} \cdot \ddot{x}(t) \\ &= \dot{x}(t) \left[g(x(t)) + \ddot{x}(t) \right] \\ &= 0, \end{aligned}$$

și anume $\frac{d}{dt} \left[\mathcal{V}(x(t), \dot{x}(t)) \right] \leq 0$.

În cazul particular al ecuației (2.154), avem

$$\mathcal{V}(\theta, \dot{\theta}) = \frac{1}{2} \dot{\theta}^2 + \frac{g}{l} (1 - \cos \theta).$$

Impunând ca $l = 1$ și atribuind poziției $y_{\min} = -l$ nivelul de energie potențială nulă, observăm că mărimea $\mathcal{V}(\theta, \dot{\theta})$ desemnează energia mecanică (totală) a punctului material M (de masă $m = 1$) în mișcarea sa pe legătura unilaterală ideală Γ (cf. [6], p. 142).

Teoria stabilității ecuațiilor diferențiale se datorează cercetărilor întreprinse de H. Poincaré și A. Liapunov, în mod independent. În timp ce studiile lui H. Poincaré au un caracter topologic (el introduce noțiunea de ciclu-limită), A. Liapunov se preocupă de valabilitatea și limitele problemei stabilității soluțiilor unui sistem diferențial neliniar în primă aproximație

(liniarizare) (cf. [72], p. 527-528). Punctul de plecare îl constituie teza sa de doctorat, intitulată "Problema generală a stabilității mișcării" (Harkov, 1892) (cf. [6], p. 123, [76], p. 806). Cititorul poate consulta în această privință prezentările făcute în [6], Cap. IV, [76], p. 806-809, 814-820, [4], etc. Câteva dintre lucrările fundamentale în domeniu sunt [10], [22], [30]. O serie de aplicații practice și detalii extrem de interesante se găsesc în [9], [21], etc.

Să presupunem acum că asupra punctului material M , supus unei legături bilaterale ideale - constituită din suprafața simplă S a cărei parametrizare globală este dată de (2.42) -, acționează câmpul de forțe conservative $\overline{F} = \nabla U$. Dacă punctul material M rămâne în echilibru, în acest câmp conservativ, în poziția M_0 , deducem că forța $\overrightarrow{F} \in T_{M_0}\mathbb{R}^3$, $\overrightarrow{F} \in \overline{F}$, va fi ortogonală vectorilor din $T_{M_0}S$. Astfel,

$$0 = \overline{F} \cdot \frac{\partial \sigma}{\partial q^i} = \nabla U \cdot \frac{\partial \sigma}{\partial q^i} = \frac{\partial U}{\partial q^i}, \quad i = 1, 2$$

(cf. [34], p. 420). Însă formulele anterioare reprezintă condiții necesare de *extrem* pentru funcția $U(q^1, q^2)$ (cf. [68], p. 97, [24], p. 251, etc.). Acest fapt este evident în cazul pendulului gravitațional, unde poziția de echilibru $y_{\min} = -l$ se caracterizează prin valoarea *minimă* a energiei potențiale $V = -U$.

Se poate arăta, privind mărimea V ca o *formă pătratică pozitiv definită* în vecinătatea echilibrului M_0 (cf. [76], p. 794, [56], p. 174), că *poziția de echilibru M_0 a punctului material M în câmpul de forțe conservative \overline{F} este stabilă dacă M_0 reprezintă un punct de minim izolat al energiei potențiale V* . Rezultatul în cauză poartă denumirea de **teorema Lagrange-Dirichlet** (J. Lagrange (1788), G. Dirichlet (1846), cf. [32], p. 62) în mecanica teoretică (cf. [34], p. 421, [76], p. 794, [6], p. 143, [63], p. 551, etc.). Demonstrația sa riguroasă aparține lui G. L. Dirichlet (cf. [76], p. 795-797).

Un rezultat interesant, în "spiritul" teoremei Lagrange-Dirichlet, privește sistemul diferențial de tip *conservativ*

$$\ddot{\overline{u}} + \nabla V = 0. \quad (2.163)$$

Aici, $V = V(u_1, u_2, u_3)$. Dacă (C_1, C_2, C_3) reprezintă un minim izolat al mărimii V , atunci $u(t) = C_1 \overline{i} + C_2 \overline{j} + C_3 \overline{k}$ constituie o soluție asimptotic stabilă a sistemului (2.163) (cf. [6], teorema 9, p. 144-145).

Capitolul 3

Mecanica solidului rigid

În subiectele dezbătute anterior (teoria newtoniană a gravitației, mișcarea proiectilelor pe curba balistică) am folosit, *în locul* unor corpuri materiale distincte prin formă și structură interioară, puncte geometrice. Natura problemelor studiate a făcut posibil acest lucru. Analiza unor fenomene diferite, în schimb, cum ar fi cel al mișcării titirezului (sfârlezei), cf. [32], p. 132-133, necesită introducerea altor modele matematice ale corpurilor materiale. Cel mai simplu dintre acestea, solidul rigid, înlocuiește, *într-o primă aproximație* (cf. [76], p. 133) a situațiilor întâlnite în viața de zi cu zi, corpul material cu un *ansamblu discret de puncte materiale* (cf. [54], p. 108, [41], p. 136). Modelul matematic al solidului rigid necesită, de asemenea, o *actualizare* a definiției forței.

Generic, un *sistem mecanic* reprezintă o mulțime de puncte materiale

$$S = \{(M_i, m_i) : i = \overline{1, n}\},$$

supuse unor legături reciproce (interacțiuni), care alcătuiesc un "întreg", deformabil într-o măsură mai mică sau mai mare (R. Boscovich, 1758) (cf. [32], p. 75, [63], p. 18, [54], p. 108, [76], p. 3, [14], p. 7). Practic, putem considera că un corp este *sistemul mecanic* al "particulelor" sale.

Legile care guvernează mișcarea mecanică a oricărui sistem de puncte materiale (mecanic) nu necesită axiome noi, ci se deduc din principiile mecanicii punctului material (cf. [32], p. 75).

Solidul rigid este acel sistem mecanic S căruia i se atașează o proprietate esențialmente geometrică (cf. [76], p. 560), și anume

$$\frac{d}{dt} [d(M_i, M_j)] = 0, \quad t \geq t_0,$$

unde $1 \leq i, j \leq n$. Cu alte cuvinte, *distanța dintre două puncte oarecare ale solidului rigid S nu se modifică în timp, indiferent de mărimea forțelor aplicate asupra corpului material ori a mișcării efectuate de acesta* (cf. [34], p. 161, [63], p. 18, [32], p. 76).

Nu există, în realitate, corpuri perfect rigide. Totuși, obiectele confecționate din materiale dure (metal, lemn, zidărie, etc.) pot fi privite ca solide rigide, într-o primă aproximație, atunci când forțele care se exercită asupra lor nu depășesc în intensitate (mărime) anumite *limite* (cf. [34], p. 8).

Poziția unui corp solid rigid S față de reperul canonic \mathcal{R} este caracterizată de șase parametri. Aceștia pot fi aleși în mai multe feluri (cf. [76], p. 168). Mai precis, să considerăm drept *fixat* un punct oarecare A al solidului S (în mod sugestiv, mișcarea generală a solidului rigid poate fi asemănată cu aceea a unei cărămizi care "se dă peste cap"; aici, punctul A va fi "fixat" cu cretă într-unul din colțurile cărămizii). Poziția sa este dată cu ajutorul a *trei parametri*, coordonatele punctului în \mathcal{R} . Orice alt punct al corpului material se va găsi pe o sferă de rază constantă în timp, centrată în A . Alegând, de exemplu, un punct B situat pe sfera de rază egală cu unitatea, putem caracteriza poziția acestuia cu numai *doi parametri*. Într-adevăr, cu ajutorul paralelelor duse prin punctul A la axele reperului \mathcal{R} obținem un sistem de coordonate care ne furnizează, prin intermediul coordonatelor sferice, poziția punctului B . Un al treilea punct C , situat la distanțe neegale de A , B , va aparține cercului comun sferelor centrate în A și B de raze $d(A, C)$, respectiv $d(B, C)$. Poziția sa pe cercul fix se determină cu *un parametru*. Așadar, *pentru a preciza (fixa) poziția unui corp solid rigid S la momentul t este suficient să se precizeze pozițiile pe care le ocupă în sistemul de referință \mathcal{R} , la acel moment, trei puncte necoliniare ale acestuia* (cf. [76], p. 167).

Cunoașterea poziției punctelor A , B , C ale rigidului S (vezi Figura 3.1) permite introducerea unui reper (mobil) \mathcal{R}' *solidar (rigid) legat de corpul solid* (cf. [41], p. 136). Într-adevăr, dacă O_1 reprezintă centrul cercului pe care se găsește punctul C , putem alege pe acest cerc un al patrulea punct, notat D , astfel ca versorii vectorilor $\overrightarrow{O_1C}$, $\overrightarrow{O_1B}$, $\overrightarrow{O_1D}$ să alcătuiască un *sistem ortonormat, de sens direct*. În acest fel, putem spune că studiul mișcării solidului rigid S față de sistemul de referință \mathcal{R} este același cu studiul mișcării unui reper \mathcal{R}' solidar legat de rigid față de reperul \mathcal{R} . În formularea profesorului O. Onicescu, *rigidul este un corp ale cărui mișcări sunt replica mișcărilor euclidiene ale spațiului care proced exact ca și cum spațiul întreg ar fi un rigid* (cf. [56], p. 145). De asemenea, *mișcarea unui sistem rigid se*

extinde în mod firesc la întreg spațiul și se studiază fără a specifica sistemul particular considerat pentru a o defini (T. Levi-Civita) (cf. [56], p. 354). Formula $\bar{v}_M = \bar{v}_{O_1} + \bar{\omega} \times \overline{O_1M}$, pe care o vom stabili ulterior, arată că viteza punctelor M ale spațiului "rigid" crește *indefinit* cu distanța dintre M și dreapta determinată de O_1 și de vectorul director $\bar{\omega}$, ceea ce face inutilizabil un asemenea model al corpului material în mecanicile avansate (ținând seama de limitarea superioară a vitezei în Univers) (cf. [56], p. 354, [32], p. 94). Aici, $\bar{\omega}$ constituie vectorul-viteză unghiulară instantanee al mișcării reperului \mathcal{R}' față de \mathcal{R} iar \bar{v}_M, \bar{v}_{O_1} vitezele absolute ale punctelor M, O_1 .

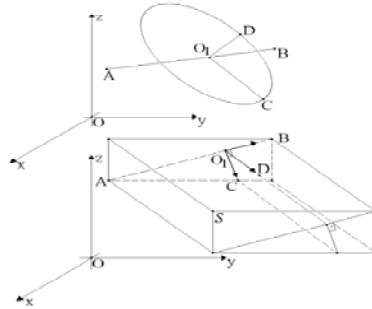


Figura 3.1

3.1 Vectori și tensori

3.1.1 Vectori alunecători. Principiul suprimării forțelor

Trecerea de la corpurile punctiforme (puncte geometrice) la solide *complexe* (mulțimi de puncte materiale) presupune luarea în discuție a fenomenului de *transmitere* (propagare) a forței. Exemple de asemenea propagări se întâlnesc la tot pasul în viața de zi cu zi: *apăsarea* furculiței asupra unei bucăți de brânză, *ridicarea* mânerului unui geamantan, *apăsarea* clanței unei uși, *împinsul* pedalei de ambreiaj, etc. Aceste "apăsări pe buton" comunică presiunea exercitată de palmă obiectelor cu care se află în contact: felia de brânză, arcul broaștei, etc. Astfel, un model matematic al forței care se exercită din partea mediului înconjurător asupra corpului solid rigid va trebui să țină seama de *conductibilitatea* sa în ceea ce privește forța.

Să considerăm sistemul de referință \mathcal{R} și solidul rigid S . O dreaptă Δ ce trece prin două puncte A, B ale corpului S are versorul director \bar{u} .

Presupunem că forța $\vec{F} \in T_A\mathbb{R}^3$ acționează asupra lui S astfel ca $\vec{F} = F_u \cdot \bar{u}$ (adică, dreapta sa suport coincide cu Δ). Formula (2.85) arată că o

forță $\vec{F}_1 \in T_B\mathbb{R}^3$, echipolentă cu \vec{F} , produce *același* efect asupra solidului rigid S , și anume

$$\overline{\mathcal{M}}_O = \overline{OA} \times \overline{F} = \overline{OB} \times \overline{F} \quad (3.1)$$

(cf. [34], p. 54, [63], p. 44). Așadar, *momentul unei forțe \vec{F} față de polul O rămâne neschimbat atunci când punctul de aplicație al forței se deplasează pe direcția \overline{F}* (cf. [76], p. 45). Cu alte cuvinte, noțiunea de moment al forței față de polul O formalizează matematic fenomenul de propagare a acesteia.

De aceea, *prin definiție*, spunem că a *exercita* o forță \vec{F} asupra corpului solid rigid S înseamnă a introduce vectorul $\overline{F} \in T\mathbb{R}^3$ și *axa* (linia) sa de acțiune Δ (cf. [76], p. 24). Un asemenea vector se numește *alunecător* sau *glisant* (P. Varignon, cf. [32], p. 145, [76], p. 25, [14], p. 24).

Deși nu am insistat anterior asupra acestui fapt, din punct de vedere "tensorial", vectorii liberi sunt caracterizați prin *trei parametri* (coordonatele lor în baza \mathcal{B} a spațiului $T\mathbb{R}^3$) iar vectorii legați prin *șase parametri* (coordonatele vectorului liber care constituie clasa de echipolență a vectorului legat ca și coordonatele punctului său de aplicație în \mathcal{R}). Ceea ce este esențial într-o asemenea caracterizare a mărimilor vectoriale este tocmai *modalitatea* de modificare (variație) a acestor parametri odată cu schimbarea reperului. În mod natural, ne punem problema precizării acelor parametri care constituie *expresia tensorială* a unui vector glisant. Acești parametri poartă denumirea de *coordonate plückeriene (Plücker)* (cf. [34], p. 55, [76], p. 49).

Dacă $\overline{OA} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ și $\overline{F} = X\vec{i} + Y\vec{j} + Z\vec{k}$, atunci coordonatele vectorului $\overline{\mathcal{M}}_O$ sunt date de mărimile

$$L = yZ - zY \quad M = zX - xZ \quad N = xY - yX$$

(cf. [34], p. 53, [76], p. 48).

Conform (3.1), $\overline{\mathcal{M}}_O \cdot \overline{F} = (\overline{OB}, \overline{F}, \overline{F}) = 0$, de unde

$$LX + MY + NZ = 0.$$

Cu alte cuvinte, doar cinci dintre numerele L, M, N, X, Y, Z sunt independente. Ele reprezintă cei *cinci parametri* care caracterizează tensorial, în mod *biunivoc*, un vector alunecător (cf. [2], p. 7, [76], p. 48-49).

Din punct de vedere practic, cum vectorul \overline{F} și brațul său b sunt mărimi cunoscute, există doar două posibilități de alegere a dreptei-suport Δ (vezi Figura 3.2). Aici, $|\overline{\mathcal{M}}_O| = |\overline{F}| \cdot b$.

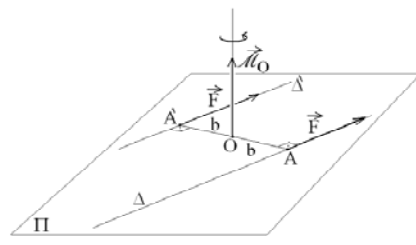


Figura 3.2

Sensul vectorului \vec{M}_O este acela care desemnează dreapta Δ deoarece rotația lui \vec{OA} în jurul dreptei-suport a lui \vec{M}_O trebuie să se realizeze în sens direct trigonometric și cu un unghi $\leq 180^\circ$ (cf. [35], p. 49, [34], p. 27).

Să presupunem acum că asupra punctului material A , aflat în constituția corpului solid rigid S , acționează două forțe \vec{F}_1, \vec{F}_2 coliniare, egale în mărime dar de sens opus (vezi Figura 3.3).

Evident, $\vec{F}_1 + \vec{F}_2 = 0$, ceea ce exprimă faptul că *prezența* forțelor \vec{F}_1, \vec{F}_2 nu împietează cu nimic asupra stării mecanice curente a corpului S . Făcând să alunece, pe rând, cele două forțe până în poziția particulei B din constituția rigidului, putem scrie

$$\vec{F}_1 + \vec{F}'_2 = 0 \quad \vec{F}_2 + \vec{F}'_1 = 0.$$

Cu alte cuvinte, compresia (comprimarea) realizată asupra lui S de forțele \vec{F}_1, \vec{F}_2 , respectiv extensia realizată de forțele \vec{F}_2, \vec{F}'_1 nu influențează în nici un fel solidul rigid. Spunem că *aceste forțe își fac echilibru și pot fi suprimate fără a schimba starea de repaus sau mișcare a corpului* (cf. [34], p. 8, [76], p. 134, [63], p. 42, [14], p. 24, etc). Proprietatea în cauză este cunoscută sub denumirea de **principiul suprimării forțelor**.

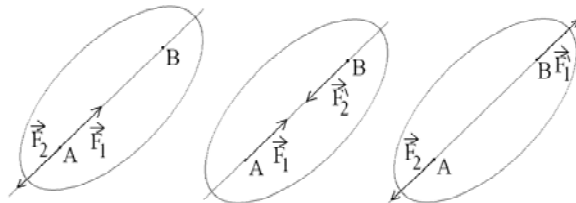


Figura 3.3

3.1.2 Momentul unui vector față de o axă. Momentul cinetic față de o axă al punctului material. Teorema momentului cinetic

După cum am văzut anterior, mărimea vectorială $\overrightarrow{\mathcal{M}}_O$ are o semnificație mecanică precisă atât în cazul vectorilor legați cât și alunecători. Definirea vectorului *liber* drept o clasă de echivalență (echipolența segmentelor orientate) face ca noțiunea de moment de pol O să nu îi poată fi atașată (cf. [76], p. 45). Putem obține, în schimb, o serie de concluzii interesante dacă interpretăm anumite produse vectoriale ca "momente".

Să considerăm vectorul legat sau alunecător \overrightarrow{F} cu dreapta-suport Δ și o altă dreaptă Δ_1 de versor (director) \overline{w} . Atunci, pentru $P_1, P_2 \in \Delta_1$ și $A \in \Delta$, avem

$$\begin{aligned}\overline{\mathcal{M}}_{P_2} &= \overline{P_2A} \times \overline{F} = (\overline{P_2P_1} + \overline{P_1A}) \times \overline{F} \\ &= \overline{P_2P_1} \times \overline{F} + \overline{\mathcal{M}}_{P_1},\end{aligned}$$

respectiv

$$\overline{\mathcal{M}}_{P_2} \cdot \overline{w} = (\overline{P_2P_1}, \overline{F}, \overline{w}) + \overline{\mathcal{M}}_{P_1} \cdot \overline{w} = \overline{\mathcal{M}}_{P_1} \cdot \overline{w}.$$

Aici, $\overline{P_2P_1} = k \cdot \overline{w}$, $k \in \mathbb{R}$. Așadar, proiecția pe dreapta Δ_1 a momentului unui vector \overrightarrow{F} față de un punct (pol) P al acesteia este independentă de poziția lui P pe dreaptă (cf. [76], p. 46, [34], p. 55). Mărimea $\overline{\mathcal{M}}_P \cdot \overline{w}$, notată \mathcal{M}_{Δ_1} , unde $P \in \Delta_1$, se numește *momentul vectorului \overrightarrow{F} față de axa Δ_1* (cf. [63], p. 44, [35], p. 49).

Momentul \mathcal{M}_{Δ_1} admite următoarea caracterizare. Fie Π planul perpendicular pe dreapta Δ_1 care o intersectează în P (vezi Figura 3.4).

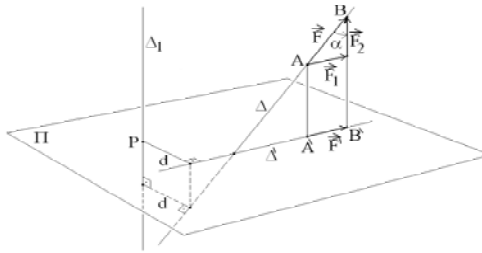


Figura 3.4

Dacă proiectăm vectorul \overrightarrow{F} pe planul Π , atunci vom putea scrie că

$$\overline{F} = \overline{F}_1 + \overline{F}_2 = \overline{F}' + k_1 \cdot \overline{w} \quad \overline{PA} = \overline{PA'} + \overline{A'A} = \overline{PA'} + k_2 \cdot \overline{w},$$

unde $k_{1,2} \in \mathbb{R}$, și

$$\begin{aligned}
 \mathcal{M}_{\Delta_1} &= \bar{w} \cdot [(\overline{PA'} + k_2 \cdot \bar{w}) \times (\overline{F'} + k_1 \cdot \bar{w})] \\
 &= (\bar{w}, \overline{PA'}, \overline{F'}) + (\bar{w}, \overline{PA'}, k_1 \bar{w}) + (\bar{w}, k_2 \bar{w}, \overline{F'}) \\
 &\quad + (\bar{w}, k_2 \bar{w}, k_1 \bar{w}) \\
 &= \overline{\mathcal{M}}_P(\overline{F'}) \cdot \bar{w} = \mathcal{M}_{\Delta_1}(\overline{F'}) = \pm |\overline{F'}| \cdot d \\
 &= \pm d \cdot |\overline{F'}| \cdot \sin \alpha
 \end{aligned}$$

(cf. [34], p. 55). Cu alte cuvinte, *momentul vectorului \overline{F} față de axa Δ_1 este egal cu momentul față de aceeași axă al vectorului-proiecție al său pe un plan perpendicular pe Δ_1* (cf. [63], p. 46).

Egalitatea $\mathcal{M}_{\Delta_1} = \overline{\mathcal{M}}_P(\overline{F'}) \cdot \bar{w} = F_{\perp} \cdot d$, unde F_{\perp} reprezintă proiecția vectorului \overline{F} pe direcția $\overline{A'B'}$, scoate în evidență faptul că efectul de *rotație* al aplicării forței \overline{F} asupra unui corp solid rigid care se poate roti liber în jurul axei fixe verticale Δ_1 este produs numai de componenta *transversală* (pe axă) a lui \overline{F} (cf. [32], p. 54).

La rândul lor, formulele $|\overline{\mathcal{M}}_O(\overline{F})| = |\overline{F}| \cdot b$, $\mathcal{M}_{\Delta_1} = \pm d \cdot |\overline{F}| \cdot \sin \alpha$ arată că:

1) *Momentul vectorului \overline{F} față de polul O este nul dacă și numai dacă vectorul \overline{F} este nul sau dreapta sa suport trece prin punctul O* (cf. [35], p. 48, [34], p. 54).

2) *Momentul vectorului \overline{F} față de axa Δ_1 este nul dacă și numai dacă vectorul \overline{F} este nul sau dreapta sa suport este coplanară cu dreapta Δ_1* (cf. [76], p. 48, [34], p. 56).

În particular, în cazul unui solid rigid cu axă de rotație fixă, o forță având linia de acțiune paralelă cu axa de rotație ori concurentă cu aceasta *nu produce rotație* (cf. [32], p. 54).

Calculule precedente pot fi aplicate și unor mărimi vectoriale diferite de forțe. Astfel, ținând seama de (2.87), (2.71), mărimea

$$L_{Oz} \stackrel{not}{=} L_z = mr_1^2 \dot{\theta}_1$$

reprezintă *momentul cinetic* al punctului material față de axa Oz , exprimat în coordonate polare (cf. [76], p. 402). Aici, planul Π este chiar Oxy .

În sfârșit, **teorema momentului cinetic** față de axa Oz , aplicată punctului material M , este

$$\dot{L}_z = \mathcal{M}_z,$$

unde $\mathcal{M}_{Oz} \stackrel{not}{=} \mathcal{M}_z$.

3.1.3 Torsorul unui sistem de vectori. Sisteme de vectori echivalente. Invarianți

Operațiile cu vectori glisanți se definesc, în mod evident, prin *extrapolarea* operațiilor corespunzătoare cu vectori legați. Astfel, având vectorii alunecători \vec{F}_1, \vec{F}_2 cu drepte-suport concurente Δ_1, Δ_2 (vezi Figura 3.5), putem construi *suma* lor, reprezentată de vectorul (alunecător) \vec{F} , unde $\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2$, cu linia de acțiune Δ definită de punctul A comun dreptelor Δ_1, Δ_2 și de vectorul director \vec{F} (cf. [76], p. 233). O formulă elementară, utilă în cadrul problemelor de mecanică teoretică, este (vezi Figura 3.5)

$$\cos \alpha = \frac{|\vec{F}_1|^2 - |\vec{F}_2|^2}{|\vec{F}| \cdot |\vec{F}'|}$$

(cf. [35], p. 224). Aici, $\vec{F}' = \vec{F}_1 - \vec{F}_2$.

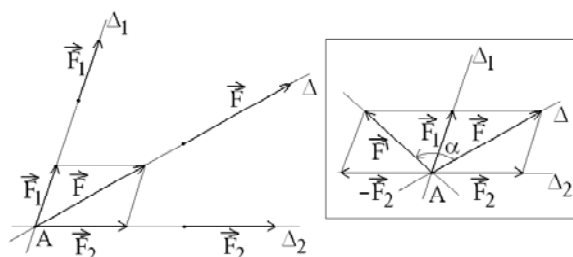


Figura 3.5

Să considerăm, în cele ce urmează, un sistem de vectori legați sau alunecători $\vec{F}_1, \dots, \vec{F}_n$ având drepte-suport $\Delta_1, \dots, \Delta_n$ și punctele $A_i \in \Delta_i$, unde $1 \leq i \leq n$. Fixând punctul $A \in E_3$ în raport cu reperul canonic \mathcal{R} , introducem vectorii $\vec{\mathcal{R}}_A, \vec{\mathcal{M}}_A \in T_A \mathbb{R}^3$ prin formulele

$$\vec{\mathcal{R}}_A = \sum_{i=1}^n \vec{F}_i, \quad \vec{\mathcal{R}}_A \in \vec{\mathcal{R}}_A \quad \vec{\mathcal{M}}_A = \sum_{i=1}^n \overline{AA}_i \times \vec{F}_i, \quad \vec{\mathcal{M}}_A \in \vec{\mathcal{M}}_A$$

(cf. [76], p. 55).

Vectorii $\vec{\mathcal{R}}_A$, $\vec{\mathcal{M}}_A$ poartă denumirea de *rezultantă generală* sau *vector rezultant*, respectiv *moment rezultant* al sistemului de vectori $\{\vec{F}_i : i = \overline{1, n}\}$ (cf. [34], p. 57, [35], p. 50).

Fixând un al doilea punct $B \in E_3$, au loc relațiile

$$\vec{\mathcal{R}}_A = \vec{\mathcal{R}}_B, \quad (3.2)$$

respectiv

$$\begin{aligned} \vec{\mathcal{M}}_A &= \sum_{i=1}^n (\overline{AB} + \overline{BA}_i) \times \vec{F}_i = \overline{AB} \times \left(\sum_{i=1}^n \vec{F}_i \right) \\ &\quad + \sum_{i=1}^n \overline{\mathcal{M}}_B(\vec{F}_i) \\ &= \overline{\mathcal{M}}_B + \overline{AB} \times \vec{\mathcal{R}}_B \end{aligned} \quad (3.3)$$

(cf. [34], p. 59, [14], p. 31).

Formula (3.2) arată că rezultanta generală $\vec{\mathcal{R}}_A$ este "transportată" în orice alt punct al SF într-un vector echipolent, și anume $\vec{\mathcal{R}}_B$. Aplicația care asociază fiecărui punct $A \in E_3$ vectorul $\vec{\mathcal{R}}_A \in \vec{\mathcal{R}}_A$ definește astfel un *câmp vectorial uniform* (cf. [35], p. 52). De aceea, convenim să spunem că *rezultanta generală a unui sistem de vectori legați sau alunecători poate fi privită ca un vector liber și constituie un invariant (mărime invariantă la schimbarea polului A) al sistemului* (cf. [34], p. 57, 59).

În ceea ce privește momentul rezultant, deducem că

$$\overline{\mathcal{M}}_A \cdot \vec{\mathcal{R}}_A = \overline{\mathcal{M}}_B \cdot \vec{\mathcal{R}}_A + (\overline{AB}, \vec{\mathcal{R}}_B, \vec{\mathcal{R}}_A) \stackrel{(3.2)}{=} \overline{\mathcal{M}}_B \cdot \vec{\mathcal{R}}_B,$$

adică *proiecția momentului rezultant al unui sistem de vectori legați sau alunecători pe direcția vectorului rezultant este independentă de alegerea polului A , constituind un invariant al sistemului* (cf. [32], p. 151).

Dublețul

$$\tau_A = \left(\vec{\mathcal{R}}_A, \vec{\mathcal{M}}_A \right)$$

se numește *torsorul de pol A* al sistemului de vectori $\{\vec{F}_i : i = \overline{1, n}\}$ (cf. [76], p. 56). El exprimă *efectul mecanic* al aplicării sistemului de forțe asupra corpului solid rigid S (cf. [63], p. 54). Dată fiind existența celui de-al

doilea invariant al sistemului de vectori, putem spune că aplicația care asociază fiecărui punct $A \in E_3$ vectorul $\vec{\mathcal{M}}_A \in \overline{\mathcal{M}}_A$ definește un *câmp vectorial echiproiectiv* (cf. [35], p. 52).

Atunci când rezultanta generală a unui sistem de vectori este nulă, câmpul vectorial al momentului rezultat devine uniform. Putem considera, astfel, momentul rezultat ca un *vector liber* (transportabil prin echipolență în orice punct al SF) (cf. [34], p. 59, [35], p. 52-53).

Se pune în mod natural problema *simplificării* (reducerii) unui sistem de forțe aplicate asupra corpului solid rigid, cu păstrarea efectului mecanic al acțiunii lor, și aceasta pentru a putea clarifica și rezolva diverse situații din viața de zi cu zi, scopul final al mecanicii. Reducerea, prin operații specifice, a forțelor care intervin în probleme practice va permite stabilirea cu ușurință, în general, a efectului acestora asupra corpului material.

Operațiile elementare de echivalență cu ajutorul cărora putem modifica un sistem de vectori fără a influența torsorul acestuia sunt:

- 1) glisarea unui vector pe dreapta sa suport;
- 2) suprimarea a doi vectori egali în mărime dar de sens opus, având aceeași dreaptă-suport;
- 3) compunerea mai multor vectori cu același punct de aplicație A ;
- 4) descompunerea unui vector cu punctul de aplicație în A în mai mulți vectori cu același punct de aplicație (cf. [34], p. 60-61, [76], p. 52-54).

Fiind date două sisteme de vectori legați sau alunecători, notate S_1, S_2 , spunem că, *prin definiție*, ele sunt *echivalente* dacă $\tau_A(S_1) = \tau_A(S_2)$, unde $A \in E_3$. Relațiile (3.2), (3.3) arată că o asemenea egalitate este *independentă* de alegerea polului A (cf. [35], p. 54). Se poate dovedi că *sistemul de vectori S_1 poate fi transformat pe baza operațiilor elementare de echivalență în sistemul S_2 dacă și numai dacă cele două sisteme sunt echivalente* (cf. [35], p. 54, 57-58, [34], p. 61, 64-65). În particular, un sistem având *torsorul nul* ($\overline{\mathcal{R}}_A = \overline{\mathcal{M}}_A = 0$) nu produce nici un efect mecanic asupra corpului solid rigid, putând fi eliminat sau adăugat în problemă în funcție de necesități (cf. [34], p. 64, [35], p. 57, [14], p. 29).

Un sistem de vectori având torsorul nul este considerat *echivalent cu zero* (*nul*) (cf. [34], p. 64, [2], p. 22). Dat fiind scopul final al operațiilor de echivalență, se întâlnesc și denumirile de *torsor de reducere* (cf. [63], p. 55) pentru $\tau_A(S)$, respectiv *punct (centru) de reducere* (cf. [32], p. 150, [63], p. 54) pentru polul A .

3.1.4 Teorema lui P. Varignon. Cuplu de forțe. Reducerea sistemelor de vectori

În cazul în care $\bigcap_{i=1}^n \Delta_i = \{A\}$, au loc relațiile

$$\begin{aligned} \overline{\mathcal{M}}_B &= \sum_{i=1}^n \overline{BA}_i \times \overline{F}_i = \sum_{i=1}^n (\overline{BA} + \overline{AA}_i) \times \overline{F}_i \\ &= \overline{BA} \times \left(\sum_{i=1}^n \overline{F}_i \right) + \sum_{i=1}^n (k_i \cdot \overline{F}_i) \times \overline{F}_i \\ &= \overline{BA} \times \overline{\mathcal{R}}_A = \overline{\mathcal{M}}_B \left(\overline{\mathcal{R}}_A \right), \end{aligned}$$

unde $k_i \in \mathbb{R}$, $1 \leq i \leq n$, ceea ce arată că, *întotdeauna, un sistem de vectori cu liniile de acțiune concurente poate fi redus la un singur vector, rezultanta lor* (cf. [76], p. 140). Egalitatea

$$\overline{\mathcal{M}}_B \left(\left\{ \overline{F}_i : i = \overline{1, n} \right\} \right) = \overline{\mathcal{M}}_B \left(\overline{\mathcal{R}}_A \right), \quad B \in E_3,$$

este cunoscută sub numele de **teorema lui P. Varignon** (1725) (cf. [32], p. 152, [34], p. 60, [14], p. 37). Un alt caz al acestei formule, privind sistemele de forțe în plan, este discutat la p. 229. Considerând o dreaptă oarecare Δ , introdusă cu ajutorul punctului $B \in E_3$ și al versorului director \overline{u} , putem scrie că

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_\Delta \left(\overline{\mathcal{R}}_A \right) &= \overline{\mathcal{M}}_B \left(\overline{\mathcal{R}}_A \right) \cdot \overline{u} = \sum_{i=1}^n (\overline{BA}_i \times \overline{F}_i) \cdot \overline{u} \\ &= \sum_{i=1}^n \mathcal{M}_\Delta \left(\overline{F}_i \right). \end{aligned}$$

Cu alte cuvinte, *momentul în raport cu o axă oarecare al rezultantei unui sistem de vectori cu drepte-suport concurente este egal cu suma algebrică a momentelor forțelor componente în raport cu aceeași axă* (cf. [14], p. 38). Sub această formulare, teorema lui P. Varignon se mai numește și **teorema momentelor** (cf. [63], p. 48).

Un caz particular important de sistem de vectori îl constituie *cuplul de forțe*. Prin *cuplu de forțe* înțelegem perechea $\{\overline{F}_1, \overline{F}_2\}$ alcătuită din forțe

egale în mărime și de sens opus care au liniile de acțiune paralele (cf. [14], p. 27). Astfel,

$$\begin{aligned}\overline{\mathcal{M}}_A &= \overline{AA_1} \times \overline{F_1} + \overline{AA_2} \times (-\overline{F_1}) = (\overline{AA_1} - \overline{AA_2}) \times \overline{F_1} \\ &= \overline{A_2A_1} \times \overline{F_1} = \overline{\mathcal{M}}_B.\end{aligned}$$

Câmpul vectorial definit de *momentul rezultat* al unui cuplu de forțe aplicate solidului rigid S fiind uniform, *momentul rezultat al cuplului poate fi considerat drept vector liber* (L. Poincot, 1804) (cf. [32], p. 148-149, [34], p. 63).

Egalitatea $\overline{\mathcal{M}}_A = \overline{\mathcal{M}}_{A_2}(\overrightarrow{F_1})$ (vezi Figura 3.5) ne conduce la $|\overline{\mathcal{M}}_A| = r_0 \cdot F_1 \cdot \sin \alpha = F_1 \cdot b$. Aici, b reprezintă *brațul cuplului* (cf. [14], p. 27).

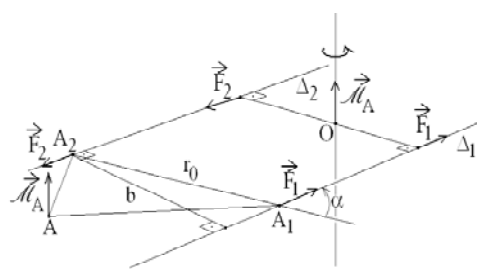


Figura 3.5

Mărimea $\overline{\mathcal{M}}_A$ (vector liber) constituie *momentul cuplului* (cf. [35], p. 56, [32], p. 146).

Se cuvin făcute în acest moment câteva precizări relative la legătura dintre noțiunea de *moment al forței* față de un pol (axă) și *efectul de rotație* produs prin aplicarea forței respective asupra corpului material, efect la care am făcut referire anterior. Cum mecanica teoretică reproduce în cadrul unor modele matematice întâmplări din viața de zi cu zi, este natural ca introducerea unor noțiuni *auto-conținute* de tip matematic în discuție să fie *ilustrată* prin menționarea unor fapte experimentale ușor de imaginat ori realizat efectiv. De aceea, aceste comentarii privind *rotația* suferită de un corp cu "axă fixă" sub acțiunea "apăsării" ori "tragerii" noastre trebuie luate numai în sens *ilustrativ*. Încercați, de exemplu, să rotiți *cu mâinile goale* o elice de vapor! Am putea spune, pur intuitiv și neriguros, că acolo unde există un *moment* ar putea apărea și o *rotație*. Dar o asemenea afirmație are drept scop să ne ajute în a ne imagina fenomenul, *nu* în a realiza demonstrarea unor "întâmplări" mecanice precise.

Revenind la chestiunea *cuplului de forțe*, acesta seamănă cu o "pocnitură din degete" (ansamblu de mișcări opuse ale falangelor), deci ne-am *aștepta* să apară o rotație (cf. [35], p. 75). Și, într-adevăr, dacă solidul rigid asupra căruia acționează cuplul $\{\vec{F}_1, \vec{F}_2\}$ este în repaus, liber, constituit dintr-un material omogen și având forma unei sfere $S(O, R)$, atunci acesta va căpăta o mișcare de rotație când planul cuplului de forțe conține punctul O (vezi Figura 3.6) (cf. [76], p. 137, [63], p. 49). Rotația se va realiza în jurul axei Δ perpendiculară în punctul O pe planul cuplului. Dar, trebuie știut că, în ciuda aparențelor, un cuplu de forțe nu conduce în mod automat la o rotație. În general, determinarea mișcării unui solid rigid sub acțiunea unui cuplu de forțe depinde de condițiile inițiale, de *geometria maselor*, etc (cf. [76], observația de la p. 137). Priviți un copil care își aruncă jucăriile pe podea. Acțiunea copilului se repetă în mod aproximativ identic, dar "rostogolirea" jucăriei pe sol diferă de la caz la caz, fapt ce pare a fi în legătură cu *forma* jucăriei, greutatea ei, ș. a. m. d.

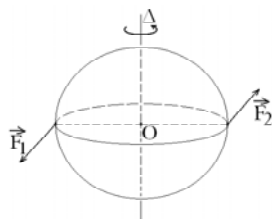


Figura 3.6

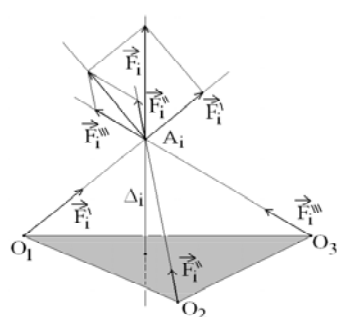


Figura 3.7

Revenind la sistemul de vectori $\{\vec{F}_i : i = \overline{1, n}\}$, să considerăm un plan Π care nu conține punctele A_i . Atunci, dreptele Δ_i vor intersecta planul Π în cel mult n puncte.

Putem, așadar, fixa punctele $O_1, O_2, O_3 \in \Pi$ necoliniare astfel încât $O_k \notin \Delta_i$ pentru orice k, i . Vectorii $\overline{O_1A_i}, \overline{O_1O_2}, \overline{O_1O_3}$ sunt necoplanari, ceea ce este echivalent cu

$$\begin{aligned} (\overline{O_1A_i}, \overline{O_1O_2}, \overline{O_1O_3}) &= (\overline{O_1A_i}, \overline{O_2O_1}, \overline{O_3O_1}) \\ &= (\overline{O_1A_i}, \overline{O_2O_1} + \overline{O_1A_i}, \overline{O_3O_1} + \overline{O_1A_i}) \\ &= (\overline{O_1A_i}, \overline{O_2A_i}, \overline{O_3A_i}) \neq 0. \end{aligned}$$

Vectorii $\vec{e}_{1i}, \vec{e}_{2i}, \vec{e}_{3i}$, introduși prin formula

$$\vec{e}_{\alpha i} \in \overline{O_\alpha A_i}, \quad \vec{e}_{\alpha i} \in T_{A_i} \mathbb{R}^3, \quad \alpha = 1, 2, 3,$$

alcătuiesc o bază (neortonormată) a spațiului $T_{A_i}\mathbb{R}^3$. În concluzie, există o descompunere *unică* a vectorului \vec{F}_i în $T_{A_i}\mathbb{R}^3$ pe direcțiile $\vec{e}_{\alpha i}$ (vezi Figura 3.7), și anume

$$\vec{F}_i = \vec{F}'_i + \vec{F}''_i + \vec{F}'''_i, \quad i = \overline{1, n}.$$

Prin glisarea vectorilor $\vec{F}'_i, \vec{F}''_i, \vec{F}'''_i$ până în punctele O_1, O_2, O_3 putem reduce sistemul inițial la un *sistem de trei vectori*

$$\left\{ \sum_{i=1}^n \vec{F}'_i, \sum_{i=1}^n \vec{F}''_i, \sum_{i=1}^n \vec{F}'''_i \right\}$$

(cf. [34], p. 61-62, [35], p. 54-55).

Sistemul $\{\vec{R}_1, \vec{R}_2, \vec{R}_3\}$ obținut poate fi redus în continuare.

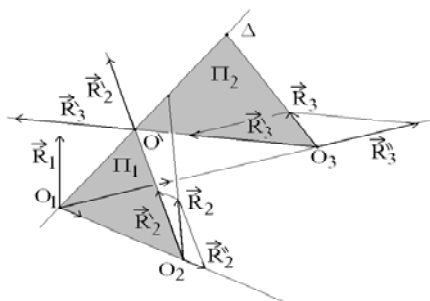


Figura 3.8

Astfel, să notăm cu $\Pi_{1,2}$ planele determinate de O_1 și de dreapta-suport a vectorului \vec{R}_2 , respectiv O_1 și dreapta-suport a vectorului \vec{R}_3 (vezi Figura 3.8). În cazul cel mai complicat, $\Pi_1 \cap \Pi_2 = \Delta$. Fixând un punct $O' \in \Delta$, $O' \neq O_1$, descompunem vectorul \vec{R}_2 după direcțiile $\vec{O}_1\vec{O}_2$, $\vec{O}'\vec{O}_2$ și facem să gliseze vectorii \vec{R}'_2, \vec{R}''_2 până în punctele O', O_1 . În final, ajungem la *sistemul de doi vectori*

$$\left\{ \vec{R}_1 + \vec{R}'_2 + \vec{R}''_3, \vec{R}_2 + \vec{R}'_3 \right\}$$

(cf. [34], p. 62-63, [35], p. 55-56).

Următorul procedeu este cunoscut sub denumirea de *reducerea forței* aplicată unui corp solid rigid (cf. [63], p. 53, [14], p. 29). Să considerăm vectorul \vec{F} , legat sau alunecător, având linia de acțiune Δ (vezi Figura 3.9) și $A \in \Delta$.

Într-un punct oarecare B al solidului rigid aplicăm sistemul nul de forțe $\{\vec{F}_1, \vec{F}_2\}$ dat de $\vec{F}_1 = -\vec{F}_2 = \vec{F}$. Atunci, sistemele de vectori $\{\vec{F}\}$, $\{\vec{F}, \vec{F}_1, \vec{F}_2\}$ sunt echivalente. Dubletul $\{\vec{F}, \vec{F}_2\}$ constituie un cuplu de forțe având momentul \vec{M} . El poate fi înlocuit, păstrându-se echivalența, cu orice alt cuplu $\{\vec{F}', \vec{F}''\}$ de moment \vec{M} . Astfel, forța \vec{F} aplicată unui solid rigid S poate fi "transportată" în forța \vec{F}_1 a cărei linie de acțiune trece printr-un punct *convenabil ales* dacă aducem în discuție un cuplu de forțe *suplimentar* (cf. [63], p. 53-54, [14], p. 29-30). Cuplul $\{\vec{F}', \vec{F}''\}$ se numește *compensator* (cf. [32], p. 147). Aici, $\vec{M} = \vec{AB} \times \vec{F}_2 = -\vec{AB} \times \vec{F} = \vec{BA} \times \vec{F} = \vec{M}_B(\vec{F})$.

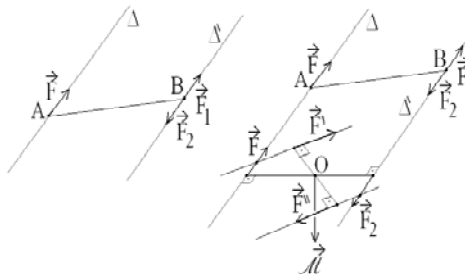


Figura 3.9

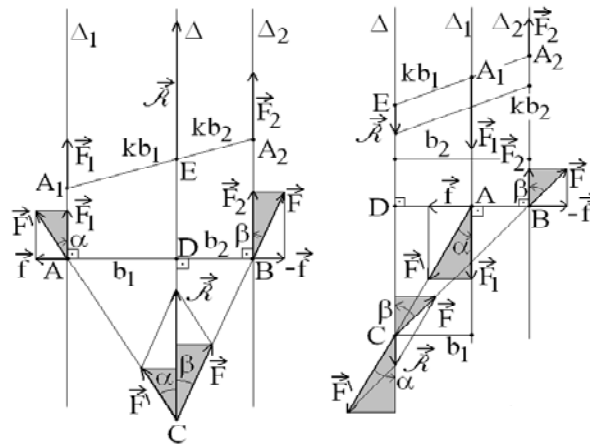


Figura 3.10

Așadar, pentru a deplasa forța \vec{F} din punctul A în punctul B nesituat pe dreapta sa suport trebuie introdus un cuplu compensator al cărui moment (rezultant) este echipolent cu momentul forței \vec{F} față de polul B (cf. [32], p. 147).

Torsorul $\tau_B = (\vec{F}_1, \vec{M})$ caracterizează complet vectorul alunecător \vec{F} (cf. [76], observația de la p. 50).

Reducerea unui sistem de vectori $\{\vec{F}_1, \vec{F}_2\}$, unde $|\vec{F}_1| \neq |\vec{F}_2|$, având liniile de acțiune Δ_1, Δ_2 paralele poate fi realizată *pe cale grafică*, prin introducerea sistemului nul $\{\vec{f}, -\vec{f}\}$, într-un mod extrem de simplu (vezi Figura 3.10).

Ținând seama de congruența triunghiurilor hașurate, avem

$$\frac{\tan \alpha}{\tan \beta} = \frac{\frac{|\vec{f}|}{|\vec{F}_1|}}{\frac{|\vec{f}|}{|\vec{F}_2|}} = \frac{|\vec{F}_2|}{|\vec{F}_1|} \quad \tan \alpha = \frac{AD}{DC} = \frac{AD}{DB} = \frac{b_1}{b_2}.$$

Așadar, $b_1 \cdot |\vec{F}_1| = b_2 \cdot |\vec{F}_2|$, de unde $A_1E/A_2E = |\vec{F}_2|/|\vec{F}_1|$. Vectorial, putem scrie că

$$\overline{A_1E} \cdot \vec{F}_1 + \overline{A_2E} \cdot \vec{F}_2 = 0. \quad (3.4)$$

Cu alte cuvinte, *deplasând echipolent forțele \vec{F}_1, \vec{F}_2 pe dreapta A_1A_2 până în punctul E , definit de relația $A_1E \cdot |\vec{F}_1| = A_2E \cdot |\vec{F}_2|$ (interior sau exterior segmentului A_1A_2 după cum forțele sunt la fel orientate sau invers orientate), vom obține prin sumarea vectorială a acestora reducerea sistemului $\{\vec{F}_1, \vec{F}_2\}$ (cf. [32], p. 148). Poziționarea punctului E în raport cu segmentul A_1A_2 se deduce din (3.4) pe baza definiției produsului scalar.*

Tehnica anterioară este utilizată pentru reducerea sistemelor de cupluri de forțe. Într-adevăr, în cazul cuplurilor situate în plane *paralele* (având momentele coliniare), putem aduce vectorii într-un singur plan astfel încât noile cupluri să aibă *același braț* (cf. [32], p. 149, [63], p. 50-52). Operațiile se realizează prin introducerea sistemului nul $\{\vec{f}, -\vec{f}\}$.

1) Deplasarea cuplului $\{\vec{F}, -\vec{F}\}$ într-un plan paralel:

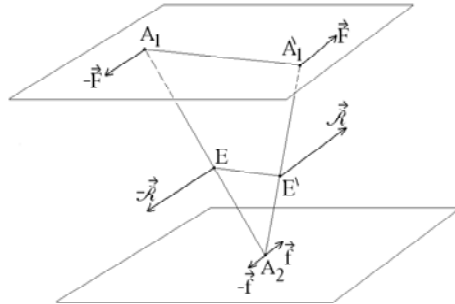


Figura 3.11

2) Obținerea, în plan, a unui anumit braț b al cuplului $\{\vec{F}, -\vec{F}\}$:

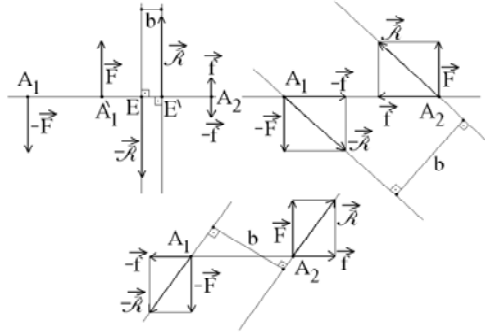


Figura 3.12

3) Aducerea, în plan, a vectorilor cuplului $\{\vec{F}, -\vec{F}\}$ pe două drepte paralele Δ'_1, Δ'_2 date (cf. [63], p. 52):

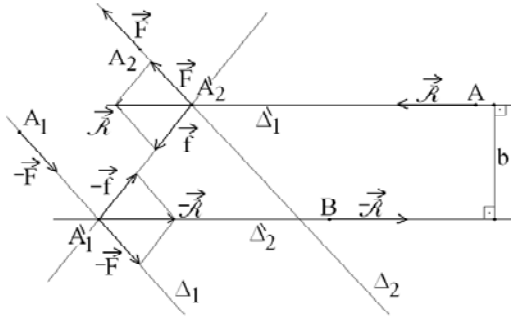


Figura 3.13

În sfârșit, să considerăm cuplurile $\{\vec{F}_1, -\vec{F}_1\}, \{\vec{F}_2, -\vec{F}_2\}$ situate în planele $\Pi_{1,2}$. Aici, $\Pi_1 \cap \Pi_2 = d$. Fixăm două puncte $A, B \in d$ și construim perpendicularele $\Delta_{1,A}, \Delta_{1,B} \in \Pi_1$, respectiv $\Delta_{2,A}, \Delta_{2,B} \in \Pi_2$, în aceste puncte, pe dreapta d . Evident, planele determinate de dreptele $\Delta_{1,A}, \Delta_{2,A}$ și $\Delta_{1,B}, \Delta_{2,B}$ sunt paralele (dreapta d reprezintă perpendiculara lor comună). Aducând vectorii $\vec{F}_1, -\vec{F}_1$ și $\vec{F}_2, -\vec{F}_2$ pe dreptele $\Delta_{1,A}, \Delta_{1,B}$, respectiv $\Delta_{2,A}, \Delta_{2,B}$ obținem cuplul $\{\vec{F}_1 + \vec{F}_2, -\vec{F}_1 - \vec{F}_2\}$.

Efectul mecanic al acțiunii unei familii de cupluri de forțe asupra corpului solid rigid S este, așadar, cel al acțiunii unui *singur* cuplu de forțe, al cărui moment este suma (vectorială) a momentelor cuplurilor de forțe inițiale (cf. [76], p. 142).

Discuția precedentă arată că, în cazul sistemului de vectori $\{\vec{F}_i : i = \overline{1, n}\}$, putem realiza, aplicând *reducerea forței* \vec{F}_i , o transformare a sistemului de vectori inițial într-un sistem alcătuit dintr-o familie de vectori cu dreptele-suport concurente în punctul A , ales arbitrar, și o familie de cupluri de forțe (cf. [14], p. 30, [63], p. 54). Astfel, *orice sistem de forțe aplicate unui solid rigid se reduce la un sistem de vectori alcătuit din rezultanta forțelor inițiale (transportate prin echipolență) și un cuplu al cărui moment resultant față de punctul de reducere A , ales arbitrar, este suma momentelor forțelor inițiale față de polul A* (cf. [34], p. 65, [35], p. 58).

3.1.5 Axa centrală a unui sistem de vectori. Reducerea canonică a unui sistem de vectori și cazuri de degenerescență ale ei. Centrul unui sistem de vectori paraleli. Centrul de greutate al unui corp material. Centrul de masă al unui sistem mecanic

Dintre cele două metode de reducere a unui sistem oarecare de forțe acționând asupra corpului solid rigid S , aceea care transformă sistemul într-un vector $\vec{\mathcal{R}}_A$ și un cuplu de moment resultant $\vec{\mathcal{M}}_A$ posedă avantajul de a putea fi realizată în *orice* punct de reducere A . Am văzut că invarianții $\vec{\mathcal{R}}_A$, $\vec{\mathcal{M}}_A \cdot \vec{\mathcal{R}}_A$ reprezintă elemente *caracteristice* ale ansamblului de forțe aplicate solidului rigid, adică mărimi neinfluențate de alegerea polului A . Se pune în mod natural problema de a investiga, odată calculați invarianții într-o poziție convenabilă A , existența unui punct B al solidului rigid care, folosit drept *punct de reducere* a forțelor, să ne conducă la un moment resultant $\vec{\mathcal{M}}_B$ calculat *numai* cu ajutorul invarianților. Vrem, cu alte cuvinte, să găsim un punct B în care torsorul $\tau_B(S)$ să poată fi privit drept un obiect matematic caracteristic sistemului S de forțe.

Având la dispoziție un vector ($\vec{\mathcal{R}}_A$) și un scalar ($\vec{\mathcal{M}}_A \cdot \vec{\mathcal{R}}_A$), determinarea altui vector ($\vec{\mathcal{M}}_B$) ne conduce la *problema existenței unui punct B pentru care vectorii $\vec{\mathcal{R}}_B$, $\vec{\mathcal{M}}_B$ sunt coliniari*.

Presupunând problema rezolvată, să considerăm că B este un punct al solidului rigid pentru care $\vec{\mathcal{R}}_B \times \vec{\mathcal{M}}_B = 0$. Atunci, pe baza (3.3), putem scrie

că

$$\begin{aligned}
 0 &= \overline{\mathcal{R}}_B \times \overline{\mathcal{M}}_A + \overline{\mathcal{R}}_B \times (\overline{BA} \times \overline{\mathcal{R}}_B) \\
 &= \overline{\mathcal{R}}_A \times \overline{\mathcal{M}}_A + \overline{\mathcal{R}}_B^2 \cdot \overline{BA} - (\overline{BA} \cdot \overline{\mathcal{R}}_B) \cdot \overline{\mathcal{R}}_B \\
 &= \overline{\mathcal{R}}_A \times \overline{\mathcal{M}}_A - \overline{\mathcal{R}}_A^2 \cdot \overline{AB} + (\overline{AB} \cdot \overline{\mathcal{R}}_A) \cdot \overline{\mathcal{R}}_A,
 \end{aligned}$$

de unde

$$\overline{AB} = \frac{\overline{\mathcal{R}}_A \times \overline{\mathcal{M}}_A}{\overline{\mathcal{R}}_A^2} + \lambda \cdot \overline{\mathcal{R}}_A, \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

Așadar, *punctul B se găsește pe o dreaptă* (cf. [35], p. 60). Reciproc, avem

$$\begin{aligned}
 \overline{\mathcal{R}}_B \times \overline{\mathcal{M}}_B &= \overline{\mathcal{R}}_B \times \overline{\mathcal{M}}_A + \overline{\mathcal{R}}_B \times (\overline{BA} \times \overline{\mathcal{R}}_B) \\
 &= \overline{\mathcal{R}}_A \times \overline{\mathcal{M}}_A - \overline{\mathcal{R}}_A \times \left(\frac{\overline{\mathcal{R}}_A \times \overline{\mathcal{M}}_A}{\overline{\mathcal{R}}_A^2} \times \overline{\mathcal{R}}_A \right) \\
 &\quad - \overline{\mathcal{R}}_A \times [(\lambda \cdot \overline{\mathcal{R}}_A) \times \overline{\mathcal{R}}_A] \\
 &= 0.
 \end{aligned}$$

În concluzie, *locul geometric al punctelor B din SF pentru care mărimile $\overline{\mathcal{R}}_B$, $\overline{\mathcal{M}}_B$ sunt coliniare este o dreaptă* (cf. [34], p. 59). Ea se numește *axa centrală* a sistemului de forțe aplicate solidului rigid (cf. [32], p. 151, [14], p. 33).

Să descompunem momentul rezultat $\overline{\mathcal{M}}_A$ după două direcții ortogonale, și anume $\overline{\mathcal{M}}_A = \alpha \cdot \overline{\mathcal{R}}_A + \overline{\mathcal{R}}_A^\perp$. Înmulțind scalar în ambii membri cu $\overline{\mathcal{R}}_A$, obținem

$$\overline{\mathcal{M}}_A = \frac{\overline{\mathcal{R}}_A \cdot \overline{\mathcal{M}}_A}{|\overline{\mathcal{R}}_A|} \cdot \frac{\overline{\mathcal{R}}_A}{|\overline{\mathcal{R}}_A|} + \overline{\mathcal{R}}_A^\perp.$$

Atunci,

$$|\overline{\mathcal{M}}_A| = \sqrt{\left(\frac{\overline{\mathcal{R}}_A \cdot \overline{\mathcal{M}}_A}{|\overline{\mathcal{R}}_A|} \right)^2 + |\overline{\mathcal{R}}_A^\perp|^2} \geq \frac{|\overline{\mathcal{R}}_A \cdot \overline{\mathcal{M}}_A|}{|\overline{\mathcal{R}}_A|} = \text{constant}.$$

Așadar, *dacă la momentul t asupra solidului rigid acționează forțele $\{\overline{F}_i : i = \overline{1, n}\}$, mărimea $|\overline{\mathcal{M}}_A|$ (ca funcție de A) își va atinge minimumul în punctele*

axei centrale Δ ($\overline{\mathcal{R}}_B^\perp = 0$). Reciproca este, de asemenea, adevărată (cf. [76], p. 57). De aceea, torsorul de reducere $\tau_A(S)$ se mai numește și *minimal* atunci când $A \in \Delta$ (cf. [63], p. 57).

Reducerea unui sistem de forțe S având primul invariant nenul ($\overline{\mathcal{R}}_A \neq 0$, condiția de existență a axei centrale) se numește *reducere canonică* atunci când centrul de reducere se găsește pe axa Δ (cf. [35], p. 58, [76], p. 136).

Sunt valabile situațiile de mai jos (cf. [34], p. 65-66).

1) $\overline{\mathcal{R}}_A \cdot \overline{\mathcal{M}}_A \neq 0$. Sistemul de forțe este echivalent cu vectorul $\overline{\mathcal{R}}_A$ aplicat pe axa centrală Δ și cu un cuplu de moment $\overline{\mathcal{M}}_A$, aflat într-un plan perpendicular pe axa Δ . Folosind "ilustrarea" cuplului cu ajutorul rotației, putem spune că mișcarea (instantanee) poate fi imaginată ca o înșurubare în lungul axei centrale (mișcare elicoidală). Firește, în realitate, lucrurile nu se petrec așa. Interpretat astfel, un asemenea sistem se mai numește și *dinamă* sau *torsor răsucitor* (cf. [76], p. 137).

2) $\overline{\mathcal{R}}_A \neq 0$, $\overline{\mathcal{M}}_A = 0$. Sistemul este echivalent cu un vector unic $\overline{\mathcal{R}}_A$ glisant pe axa centrală Δ . Este cazul sistemului format din doi vectori cu liniile de acțiune paralele (dreapta DE reprezintă axa centrală a acestuia). Aici, axa centrală poate fi determinată aplicând o variantă a *teoremei momentelor*, vezi p. 229, privind sistemele de forțe în plan (cf. [14], p. 37-38). De exemplu, pentru un sistem alcătuit din forțe paralele (vezi Figura 3.14), putem scrie că

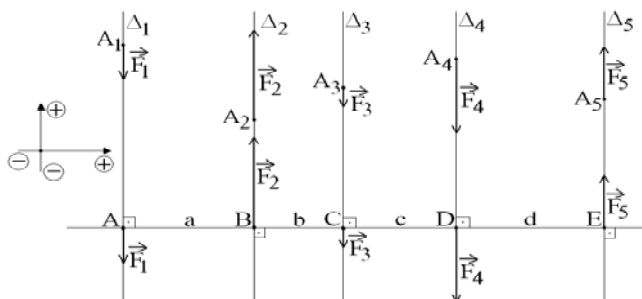


Figura 3.14

$$\begin{aligned} & -F_1 \cdot 0 + F_2 \cdot a - F_3 \cdot (a + b) - F_4 \cdot (a + b + c) + F_5 \cdot (a + b + c + d) \\ = & (-F_1 + F_2 - F_3 - F_4 + F_5) \cdot x, \end{aligned}$$

unde x desemnează distanța de la polul A la axa centrală Δ (cf. [76], aplicația 5°, p. 145).

3) $\vec{\mathcal{R}}_A = 0$, $\vec{\mathcal{M}}_A \neq 0$. *Sistemul este echivalent cu un cuplu de moment $\vec{\mathcal{M}}_A$. Nu există axă centrală și momentul resultant $\vec{\mathcal{M}}_A$ al cuplului poate fi legat în orice punct al solidului rigid.*

4) $\vec{\mathcal{R}}_A, \vec{\mathcal{M}}_A = 0$. *Sistemul este nul, putând fi eliminat din discuție.*

Să considerăm un sistem de vectori $\{\vec{F}_i : i = \overline{1, n}\}$ având liniile de acțiune paralele (de direcție \vec{u}). Atunci,

$$\vec{\mathcal{R}}_A = \sum_{i=1}^n \vec{F}_i = \sum_{i=1}^n F_i \cdot \vec{u} = \left(\sum_{i=1}^n F_i \right) \cdot \vec{u}$$

și

$$\vec{\mathcal{M}}_A = \sum_{i=1}^n \overline{AA}_i \times \vec{F}_i = \left(\sum_{i=1}^n F_i \cdot \overline{AA}_i \right) \times \vec{u}.$$

Condiția de existență a axei centrale este dată de $\sum_{i=1}^n F_i \neq 0$. În acest caz, putem scrie că

$$\vec{\mathcal{M}}_A = \frac{\sum_{i=1}^n F_i \cdot \overline{AA}_i}{\sum_{j=1}^n F_j} \times \left[\left(\sum_{j=1}^n F_j \right) \cdot \vec{u} \right] = \overline{AG} \times \vec{\mathcal{R}}_A.$$

Punctul $G \in E_3$ este baricentrul de ponderi $\alpha_p = \frac{F_p}{\sum_{j=1}^n F_j}$ al familiei

$(A_p)_{p \in \overline{1, n}}$ și se numește *centrul sistemului de vectori paraleli* (cf. [76], p. 143). Conform [34], p. 67, pe baza (3.3), obținem

$$\vec{\mathcal{M}}_G = \vec{\mathcal{M}}_A + \overline{GA} \times \vec{\mathcal{R}}_A = (\overline{AG} + \overline{GA}) \times \vec{\mathcal{R}}_A = 0.$$

Astfel, mărimea $|\vec{\mathcal{M}}_A|$ (ca funcție de A) își atinge *minimal* în punctul G , ceea ce arată că $G \in \Delta$. Vectorul director al axei centrale fiind $\vec{\mathcal{R}}_A$, deducem că *axa centrală a unui sistem de vectori paraleli ale căror linii de acțiune au direcția \vec{u} este dreapta ce trece prin centrul G al sistemului de vectori și are ca vector director direcția \vec{u}* . Centrul G reprezintă un element *intrinsec* (caracteristic) al sistemului de forțe (cf. [76], p. 144). Formula

$$\overline{OG} = \frac{\sum_{i=1}^n F_i \cdot \overline{OA}_i}{\sum_{j=1}^n F_j}$$

arată *independența* lui G față de direcția comună \bar{u} a vectorilor \vec{F}_i . Centrul G este invariant, ca baricentru, la schimbarea sistemului de referință \mathcal{R} . În plus, partiționând sistemul S de vectori paraleli în subsistemele S_1, S_2 și notând cu Δ_1, Δ_2 axele centrale ale celor două subsisteme, se poate dovedi că axa centrală (trecând prin G) a sistemului S constituie axa centrală a sistemului de vectori $\{\sum_{S_1} \vec{F}, \sum_{S_2} \vec{F}\}$ glisanți pe axele Δ_i (trecând prin G_i).

Evident, G va fi centrul noului sistem de vectori paraleli. Justificarea acestor afirmații poate fi citită în [34], p. 68-69, [35], p. 63-64.

În cazul unui corp de dimensiuni obișnuite, centrul sistemului de *forțe de greutate* ale "particulelor" din constituția corpului material poartă denumirea de *centru de greutate* al corpului (cf. [32], p. 154). Cum câmpul gravitațional este doar *local* uniform (cf. [76], p. 148), nu vom putea vorbi, de exemplu, despre centrul de greutate al Oceanului Pacific!

În sfârșit, în cazul sistemului mecanic S , baricentrul G corespunzător ponderilor $\alpha_i = m_i / (\sum_{j=1}^n m_j)$ se numește *centru de masă* (cf. [32], p. 79).

Astfel,

$$\vec{r}_G = \frac{1}{m} \cdot \sum_{k=1}^n m_k \cdot \vec{r}_k, \quad (3.5)$$

unde \vec{r}_G, \vec{r}_k reprezintă vectorii de poziție ai punctelor G, M_k , iar $m \stackrel{\text{not}}{=} \sum_{j=1}^n m_j$ constituie *masa* sistemului mecanic (cf. [56], p. 16). Formula

$$\overline{OG} = \frac{\sum_{i=1}^n m_i g \cdot \overline{OM}_i}{\sum_{j=1}^n m_j g}$$

arată că *centrul de masă și centrul de greutate coincid* pentru corpurile materiale de dimensiuni obișnuite (cf. [14], p. 56-57).

Centrul de masă al unui sistem mecanic *omogen* ($m_i = m, 1 \leq i \leq n$) se bucură de o serie de proprietăți *geometrice*. Astfel, *dacă sistemul mecanic admite un plan, o axă sau un centru de simetrie, atunci centrul de masă se va găsi în planul, pe axa, respectiv în centrul de simetrie al configurației punctelor materiale din sistem* (cf. [76], p. 150, [14], p. 59). Vom justifica această afirmație în cazul existenței unui plan de simetrie. Formula (3.5) probează independența centrului de masă al sistemului S față de reperul

\mathcal{R} . Făcând, eventual, o schimbare de reper, putem considera drept plan de simetrie al sistemului mecanic chiar planul de coordonate Oxy . Astfel, dacă un punct material al sistemului S va avea coordonatele x, y, a , unde $a > 0$, va exista un punct material în cadrul sistemului S de coordonate $x, y, -a$. De unde deducem că

$$\sum_{M \in S} m_M \cdot z(M) = 0.$$

Pe de altă parte, ținând seama de (3.5), avem $z(G) = m^{-1} \cdot \sum_{M \in S} m_M \cdot z(M)$.

În concluzie, $z(G) = 0$, adică G se găsește în planul de coordonate Oxy .

Mărimile $m_M \cdot z(M)$ se numesc *momente statice* ale punctelor sistemului mecanic față de planul Oxy (cf. [14], p. 59). Egalitatea $m \cdot z(G) = \sum_{M \in S} m_M \cdot z(M)$ este cunoscută sub denumirea de **teorema momentelor statice** (cf. [76], p. 152, [63], p. 70-71). A se vedea și [56], p. 17.

Plecând de la (3.5), putem scrie că

$$m \cdot \overline{OG} = \sum_{k=1}^n m_k \cdot \overline{OM}_k = \left(\sum_{k=1}^n m_k \right) \cdot \overline{OG} + \sum_{k=1}^n m_k \cdot \overline{GM}_k.$$

Relația $\sum_{k=1}^n m_k \cdot \overline{GM}_k = 0$, întâlnită deja la calculul alurii la distanțe mari a potențialului newtonian, constituie o caracterizare *echivalentă* a centrului de masă al unui sistem mecanic. În cazul corpurilor (mediilor) materiale, formula centrului de masă se bazează pe mărimea numită *densitate*. Astfel,

$$\overline{OG} = \frac{1}{m} \cdot \int_D \rho(M) \cdot \overline{OM} \, d\lambda(M) \quad m = \int_D \rho(M) \, d\lambda(M),$$

unde D reprezintă domeniul ocupat în SF de corpul material (cf. [76], p. 153-154, [63], p. 71-73, [56], p. 18-19).

În încheierea acestei subsecțiuni, facem câteva comentarii privind *sistemele de forțe în plan*. Astfel, să considerăm sistemul de vectori $\{\vec{F}_i : i = \overline{1, n}\}$ ale căror linii de acțiune se găsesc într-un plan Π oarecare și $A \in \Pi$. Dacă $\vec{\mathcal{R}}_A \neq 0$, sistemul de vectori va avea o axă centrală, situată în planul Π . Vectorii \vec{u}, \vec{v} alcătuiesc o bază a spațiului vectorial (director) al planului Π . Atunci,

$$\vec{\mathcal{M}}_A = \sum_{i=1}^n \overline{AA}_i \times \vec{F}_i = \sum_{i=1}^n (\alpha_i \cdot \vec{u} + \beta_i \cdot \vec{v}) \times \vec{F}_i$$

$$\begin{aligned}
&= \bar{u} \times \left(\sum_{i=1}^n \alpha_i \bar{F}_i \right) + \bar{v} \times \left(\sum_{i=1}^n \beta_i \bar{F}_i \right) \\
&= \bar{u} \times (\alpha \cdot \bar{u} + \beta \cdot \bar{v}) + \bar{v} \times (\gamma \cdot \bar{u} + \varepsilon \cdot \bar{v}) \\
&= (\beta - \gamma) \cdot \bar{u} \times \bar{v},
\end{aligned}$$

ceea ce arată că vectorul $\vec{\mathcal{M}}_A$ este sau nul sau perpendicular pe planul Π . În ambele situații, $\vec{\mathcal{M}}_A \cdot \vec{\mathcal{R}}_A = 0$, adică sistemul se reduce la un singur vector $\vec{\mathcal{R}}_A$ glisant în lungul axei centrale Δ (cf. [32], p. 152). Într-adevăr, cum $\vec{\mathcal{R}}_A \neq 0$, există axa centrală Δ și atunci, luând $A \in \Delta$, avem $\vec{\mathcal{R}}_A^\perp = 0$, de unde $\vec{\mathcal{M}}_A = 0$.

Invarianta momentului rezultat față de operațiile elementare de echivalență ne conduce la egalitatea (valabilă pentru orice $A \in \Pi$)

$$\vec{\mathcal{M}}_A(S) = \vec{\mathcal{M}}_A(\vec{\mathcal{R}}_B), \quad B \in \Delta,$$

care constituie **teorema lui Varignon** (cf. [76], p. 140). *Teorema momentelor*, vezi discuția de la p. 216, se formulează asemănător.

Avem $\vec{\mathcal{M}}_A = \overline{AB} \times \vec{\mathcal{R}}_B = \overline{AB} \times \vec{\mathcal{R}}_A$, de unde

$$\vec{\mathcal{R}}_A \times \vec{\mathcal{M}}_A = \vec{\mathcal{R}}_A \times (\overline{AB} \times \vec{\mathcal{R}}_A) = \vec{\mathcal{R}}_A^2 \cdot \overline{AB} - (\vec{\mathcal{R}}_A \cdot \overline{AB}) \cdot \vec{\mathcal{R}}_A,$$

respectiv

$$\overline{AB} = \frac{\vec{\mathcal{R}}_A \times \vec{\mathcal{M}}_A}{\vec{\mathcal{R}}_A^2} + \lambda \cdot \vec{\mathcal{R}}_A, \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

Am regăsit ecuația axei centrale. În aceste condiții, putem spune că *formula* din teorema lui Varignon, și anume $\vec{r} \times \vec{\mathcal{R}}_O = \vec{\mathcal{M}}_O$, reprezintă *ecuația în reperul canonic \mathcal{R} a axei centrale a unui sistem de forțe în plan* (cf. [76], p. 58, 140). Acest rezultat a fost deja utilizat în cazul sistemelor de forțe paralele.

Un al doilea comentariu privește reducerea pe cale grafică a sistemului de forțe $\{\vec{F}_i : i = \overline{1, n}\}$ prin *metoda poligonului funicular*. Chiar dacă, în practică, asemenea metode au fost înlocuite cu tehnici avansate, utilizând calculatorul, pentru studentul matematician ele rămân relevante prin prisma legăturilor profunde cu geometria (de exemplu, cu *geometria proiectivă*, cf. [76], p. 242). Recomandăm cititorului expunerile metodelor grafice făcute în [76] ca și regăsirea pe baza considerațiilor de mecanica sistemelor de puncte materiale a unor teoreme din *geometria sintetică* în [35], [51], Cap. IV (de

exemplu, teoremele lui Leonardo da Vinci (1508) și Commandino (1565), cf. [35], p. 129, [51], p. 97-98, 139, teorema lui Fagnano (1750), cf. [35], p. 154, [51], p. 11, teorema lui Viviani (1660), cf. [35], p. 217, etc).

Sistemul de forțe în plan $\{\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3, \vec{F}_4\}$ este dat în Figura 3.15. Vom urma expunerile făcute în [76], p. 234-236, [32], p. 153, [63], p. 64-65, [35], p. 215-217.

Mai întâi, plecând de la *regula paralelogramului*, putem construi *regula triunghiului* (Figura 3.15 a) și a *poligonului* forțelor (Figura 3.15 b) (cf. [34], p. 12-14, [63], p. 24-25). Ele vor fi aplicate aici. Astfel, fixând un punct A în planul forțelor în mod convenabil (Figura 3.15 c), transportăm prin echipolență forța \vec{F}_1 în A , apoi forța \vec{F}_2 în B , etc. Forța care va închide linia poligonală $ABCDE$, notată \vec{R} , constituie *rezultanta generală* a sistemului de forțe în plan (*metoda poligonului forțelor*). Fixăm, apoi, un punct O în planul forțelor, nesituat pe dreapta-suport a rezultantei \vec{R} , și, folosind regula triunghiului, construim forțele \vec{f}_0, \vec{f}_1 , etc. Aici, $\vec{f}_0 + \vec{f}_1 = \vec{F}_1$, $(-\vec{f}_1) + \vec{f}_2 = \vec{F}_2$, $(-\vec{f}_2) + \vec{f}_3 = \vec{F}_3$ și $(-\vec{f}_3) + \vec{f}_4 = \vec{F}_4$. Prin sumare, avem $\vec{R} = \vec{f}_0 + \vec{f}_4$. Alegând convenabil punctul F în planul forțelor (Figura 3.15 d), ducem paralela FG la dreapta AO , apoi paralela GH la dreapta BO , etc.

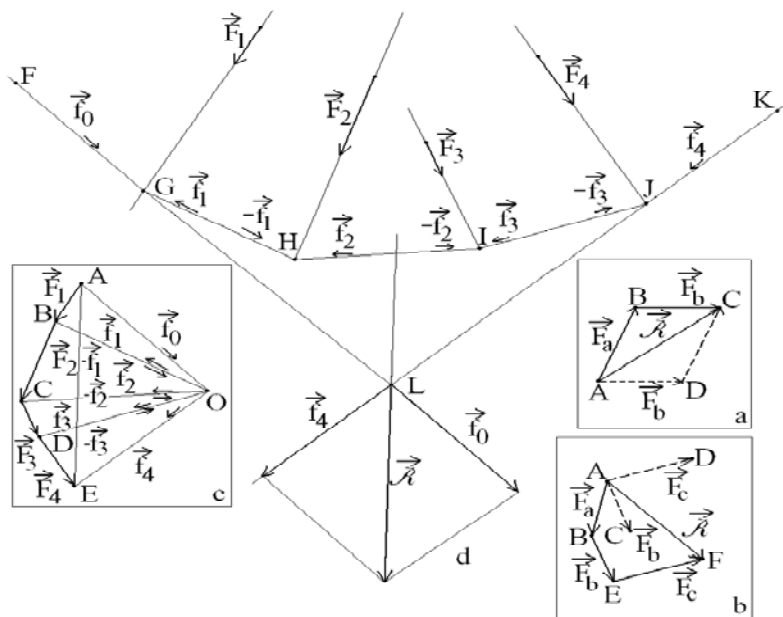


Figura 3.15

Transportăm prin echipolență în punctul G forțele \vec{f}_0, \vec{f}_1 , unde $\vec{f}_0 \in$

$\vec{f}_0 = \overline{AO}$, $\vec{f}_1 \in \vec{f}_1 = \overline{OB}$, în punctul H forțele $-\vec{f}_1$, \vec{f}_2 , etc. Punctul O se numește *pol*, iar segmentele OA , OB , etc *raze polare* (cf. [76], p. 234). Sistemul de forțe inițial este echivalent cu sistemul $\{\vec{f}_0, \vec{f}_1, -\vec{f}_1, \vec{f}_2, -\vec{f}_2, \vec{f}_3, -\vec{f}_3, \vec{f}_4\}$. Aplicând principiul suprimării forțelor, vectorii $\vec{f}_1, -\vec{f}_1, \vec{f}_2, -\vec{f}_2, \vec{f}_3, -\vec{f}_3$ vor dispărea din sistem. Facem să gliseze forțele \vec{f}_0, \vec{f}_4 până în punctul comun L al liniilor lor de acțiune. În sfârșit, prin compunerea acestor două forțe, găsim rezultanta sistemului inițial, echipolentă cu \vec{R} . Linia poligonală $FGHIJK$ poartă denumirea de *poligon funicular*.

Dacă poligonul forțelor rămâne *deschis* ($A \neq E$), atunci sistemul inițial este echivalent cu un singur vector, determinat cu ajutorul poligonului funicular. Dacă, în schimb, poligonul forțelor este închis iar forțele \vec{f}_0, \vec{f}_4 (de-a lungul razei polare AO) au sensuri opuse, atunci sistemul inițial este echivalent cu cuplul $\{\vec{f}_0, \vec{f}_4\}$. În acest caz, poligonul funicular rămâne deschis. Când forțele \vec{f}_0, \vec{f}_4 au același sens de-a lungul razei polare, sistemul inițial va fi echivalent cu zero (poligonul funicular este închis) (cf. [76], p. 236-237, [63], p. 65).

3.1.6 Tensorul de inerție al unui sistem mecanic. Momente de inerție. Formula lui Leibniz. Formula lui Lagrange. Formula Huygens-Steiner. Teorema Steiner-Lurie. Formula Euler-Cauchy pentru calculul momentului de inerție față de o axă

Chestiunile care urmează necesită referirea la mărimile numite *tensori* de ordinul al II-lea. Dat fiind caracterul restrâns al intervenției *directe* a proprietăților tensoriale specifice acestor mărimi, ne vom limita la expunerea făcută în [35], p. 46 și următoarele. Generalități privitoare la tensori pot fi citite în [66], Cap. VIII. O prezentare elegantă a elementelor algebrei tensoriale aparține profesorilor G. Gheorghiu și V. Oproiu, în *Geometria Diferențială*, p. 11-21. *Momentele de inerție*, pe care le introducem aici, sunt tratate pe larg în [76], Cap. XXV, [63], p. 354 și următoarele, etc.

Să considerăm două repere carteziane $\mathcal{R}' = (B, \vec{C})$, $\mathcal{R}'' = (C, \vec{D})$ aflate în repaus față de sistemul de referință \mathcal{R} . Notăm cu A matricea cosinuşilor directori α_{mn} ai bazei \mathcal{D} în raport cu baza \mathcal{C} . Atunci, matricea A este *ortogonală* (stochastică) și are loc proprietatea $A^t = A^{-1}$ (cf. [35], p. 42, [77], propoziția III.3, p. 102-103).

O mărime fizică sau geometrică, notată cu \overrightarrow{X} , se numește *tensor de ordinul al II-lea* dacă poate fi descrisă (numeric) în raport cu un reper cartezian oarecare printr-o matrice din $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$. Spunem că tensorul \overrightarrow{X} este reprezentat *tensorial* de matricea

$$[X] = (X_{ij})_{i,j}.$$

Ca și în cazul vectorilor, ceea ce conferă un caracter *tensorial* mărimii \overrightarrow{X} este *modul* în care componentele matricei $[X]$ se modifică la schimbarea reperului cartezian. Mai precis, dintre toate mărimile fizice ori geometrice exprimabile cu ajutorul matricelor numai cele supuse *legii de transformare* de mai jos

$$[X^*] = A \cdot [X] \cdot A^t$$

constituie tensori de ordinul al II-lea (cf. [35], p. 44).

Fiind dați vectorii $\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v} \in T_B\mathbb{R}^3$, unde $\overrightarrow{u} \in \overline{u}, \overrightarrow{v} \in \overline{v}$, de coordonate u_1, u_2, u_3 , respectiv v_1, v_2, v_3 în reperul \mathcal{R}' , mărimea \overrightarrow{T} , notată $\overline{u} \otimes \overline{v}$ și introdusă pe baza matricei $(u_i \cdot v_j)_{i,j}$, constituie un tensor de ordinul al II-lea. Ea poartă denumirea de *produsul tensorial* al vectorilor $\overline{u}, \overline{v}$. Într-adevăr, ținând seama de calculul formal, putem scrie că

$$\begin{aligned} [T^*] &= \begin{pmatrix} u_1^* \\ u_2^* \\ u_3^* \end{pmatrix} \cdot (v_1^* \ v_2^* \ v_3^*) = [A \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix}] \cdot [A \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}]^t \\ &= A \cdot [T] \cdot A^t. \end{aligned}$$

În schimb, o mărime fizică sau geometrică descrisă (numeric) în raport cu un reper cartezian oarecare printr-un număr real este numită *scalară* dacă numărul în cauză nu se modifică la schimbarea reperului (cf. [66], p. 254). Nu orice mărime fizică ori geometrică reprezentată printr-un număr real în raport cu un reper cartezian constituie un scalar. Există *pseudoscalari, densități, capacități scalare*, etc (cf. [66], p. 254). În cazul vectorilor $\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}, \overrightarrow{c} \in T_B\mathbb{R}^3$, unde $\overrightarrow{a} \in \overline{a}, \overrightarrow{b} \in \overline{b}, \overrightarrow{c} \in \overline{c}$, de coordonate a_i, b_i, c_i în reperul \mathcal{R}' , mărimea $(\overline{a}, \overline{b}, \overline{c})$, numită *produs mixt*, pe care o definim cu ajutorul numărului

$$M = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} \stackrel{\text{not}}{=} (\overline{a}, \overline{b}, \overline{c})$$

(cf. [34], p. 31), va fi supusă legii de transformare $M^* = \det A \cdot M = M$. Ea este, așadar, scalară. Introducând în discuție și baze neortonormate ($\det A \neq 1$), mărimea $(\overline{a}, \overline{b}, \overline{c})$ devine o *densitate scalară* (cf. [66], p. 255).

La rândul său, *produsul scalar* este o mărime scalară. Într-adevăr, conform calculului formal, avem

$$\bar{a} \cdot \bar{b} = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix},$$

de unde

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} a_1^* & a_2^* & a_3^* \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_1^* \\ b_2^* \\ b_3^* \end{pmatrix} &= [A \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}]^t \cdot [A \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}] \\ &= \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \end{pmatrix} \cdot (A^t \cdot A) \cdot \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Mărimea \vec{E} , reprezentată în reperul cartezian \mathcal{R}' prin matricea

$$[E] = \begin{pmatrix} \bar{i}_1 \\ \bar{j}_1 \\ \bar{k}_1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \bar{i}_1 & \bar{j}_1 & \bar{k}_1 \end{pmatrix},$$

unde $\mathcal{C} = \{\bar{i}_1, \bar{j}_1, \bar{k}_1\}$, constituie *tensorul-unitate (Kronecker)* (cf. [35], p. 44, [34], p. 44).

Mărimea $c(\vec{X})$, numită *contractia* tensorului \vec{X} (cf. [34], p. 50), este reprezentată în reperul \mathcal{R}' de numărul (*urma* matricei $[X]$)

$$tr([X]) \stackrel{not}{=} X_{11} + X_{22} + X_{33}.$$

Cum $tr(A \cdot [X] \cdot A^{-1}) = tr([X])$ (cf. [50], problema 29, 4), p. 95), deducem că $c(\vec{X})$ este un scalar.

Modulul unui vector (liber) este o mărime scalară. Într-adevăr, are loc relația $c(\vec{X}) = |\vec{x}|^2$, unde $\vec{X} = \vec{x} \otimes \vec{x}$ (cf. [35], p. 46).

În mod evident, *operațiile cu tensori* (adunarea, înmulțirea cu scalari) se definesc cu ajutorul operațiilor matricelor de reprezentare (cf. [34], p. 45).

Putem introduce acum mărimea

$$\vec{I}_O(S) = \left(\sum_{k=1}^n m_k \cdot \vec{r}_k^2 \right) \cdot \vec{E} - \sum_{k=1}^n m_k \cdot \vec{r}_k \otimes \vec{r}_k,$$

unde $\overline{OM}_k \stackrel{\text{not}}{=} \vec{r}_k$, $1 \leq k \leq n$, numită *tensor de inerție* al sistemului mecanic S în punctul O din SF (cf. [76], p. 586, [41], p. 141). Caracterul tensorial al mărimii $\vec{I}_O(S)$ rezultă imediat din considerațiile anterioare.

Operatorul *urmă* fiind liniar (cf. [50], problema 29, 1), 2), p. 95), putem scrie că

$$c(\vec{I}_O(S)) = \left(\sum_{k=1}^n m_k \cdot \vec{r}_k^2 \right) \cdot c(\vec{E}) - \sum_{k=1}^n m_k \cdot c(\vec{r}_k \otimes \vec{r}_k).$$

Astfel, $c(\vec{I}_O(S))$ este reprezentată în reperul \mathcal{R}' de numărul $2 \cdot \sum_{k=1}^n m_k \cdot \vec{r}_k^2$.

Expresia

$$I_O(S) = \sum_{k=1}^n m_k \cdot \vec{r}_k^2$$

poartă denumirea de *moment de inerție polar* al sistemului mecanic S (cf. [76], p. 567) în *polul* O . În sfârșit, $c(\vec{I}_O(S)) = 2 \cdot I_O(S)$.

Cum $\sum_{k=1}^n m_k \cdot \overline{GM}_k = 0$, obținem

$$I_O(S) = \sum_{k=1}^n m_k \cdot (\overline{OG} + \overline{GM}_k)^2 = m \cdot \overline{OG}^2 + \sum_{k=1}^n m_k \cdot \overline{GM}_k^2.$$

Egalitatea $I_O(S) = I_G(S) + m \cdot \overline{OG}^2$ constituie **formula lui Leibniz**. Conform ei, *momentul de inerție al sistemului mecanic S față de punctul O este egal cu momentul său de inerție față de centrul de masă G plus momentul de inerție față de punctul O al punctului geometric G dotat cu masa totală a sistemului mecanic* (cf. [35], p. 147, [76], observația de la p. 575, [51], p. 137).

Aplicând formula lui Leibniz în punctele M_i , avem relațiile

$$I_{M_i}(S) = I_G(S) + m \cdot \overline{M_iG}^2, \quad 1 \leq i \leq n,$$

de unde deducem că

$$\sum_{i=1}^n m_i \cdot I_{M_i}(S) = m \cdot I_G(S) + m \cdot \sum_{i=1}^n m_i \cdot \overline{M_i G}^2 = 2m \cdot I_G(S),$$

respectiv

$$\begin{aligned} I_G(S) &= \frac{1}{2m} \cdot \sum_{i=1}^n m_i \left(\sum_{j=1}^n m_j \cdot \overline{M_i M_j}^2 \right) \\ &= \frac{1}{m} \cdot \sum_{1 \leq i < j \leq n} m_i m_j \cdot \frac{\overline{M_i M_j}^2 + \overline{M_j M_i}^2}{2} \\ &= \frac{1}{m} \cdot \sum_{1 \leq i < j \leq n} m_i m_j \cdot \overline{M_i M_j}^2. \end{aligned} \quad (3.6)$$

Relația (3.6) reprezintă **teorema lui Lagrange** (1783) (cf. [35], p. 148). Cu ajutorul său, obținem *formula lui Lagrange*, și anume

$$\sum_{k=1}^n m_k \cdot \overline{OM_k}^2 = m \cdot \overline{OG}^2 + \frac{1}{m} \cdot \sum_{1 \leq i < j \leq n} m_i m_j \cdot \overline{M_i M_j}^2,$$

pe baza căreia pot fi stabilite numeroase relații (metrice) în *geometria sintetică*. De exemplu, fixând în vârfurile triunghiului ABC masele $m_A = m_B = m_C = 1$, formula lui Lagrange ne conduce la egalitatea

$$\sum MA^2 = 3MG^2 + \frac{1}{3} (a^2 + b^2 + c^2),$$

unde M este un punct oarecare din planul triunghiului (cf. [74], problema 571, p. 64, [35], p. 150).

Un alt exemplu îl constituie **teorema lui Stewart** (cf. [51], p. 9): fiind dat punctul M pe latura BC a triunghiului ABC , între B și C , are loc relația

$$AM^2 \cdot BC = AB^2 \cdot MC + AC^2 \cdot MB - BC \cdot BM \cdot CM.$$

Presupunând că M este diferit de B și C , plasăm în aceste puncte (geometrice) masele $m_B = CM$, $m_C = BM$. Atunci, cum $m_B \cdot \overline{MB} + m_C \cdot \overline{MC} = 0$, rezultă că M este centrul de masă al sistemului mecanic $S = \{(B, m_B), (C, m_C)\}$ (cf. [35], p. 169). Pe baza formulei lui Leibniz, avem

$$\begin{aligned} I_A(S) &= m_B \cdot AB^2 + m_C \cdot AC^2 \\ &= I_M(S) + (m_B + m_C) \cdot AM^2. \end{aligned}$$

Formula (3.6) ne conduce la $I_M(S) = \frac{m_B \cdot m_C}{m_B + m_C} \cdot BC^2$. Înlocuind mărimea $I_M(S)$ în egalitatea anterioară, regăsim relația din teorema lui Stewart.

Să considerăm acum dreapta Δ care trece prin punctul O și are versorul director \vec{u} fix (vezi Figura 3.16). Mărimea

$$I_{\Delta}(S) = \sum_{k=1}^n m_k \cdot d_k^2,$$

unde $d_k \stackrel{\text{not}}{=} d(M_k, \Delta)$, desemnează *momentul de inerție* al sistemului mecanic față de *axa* Δ (C. Huygens, 1673) (cf. [32], p. 109, [76], p. 12, 565). Notăm cu Δ_G dreapta determinată de centrul de masă G al sistemului mecanic S și de vectorul (director) \vec{u} .

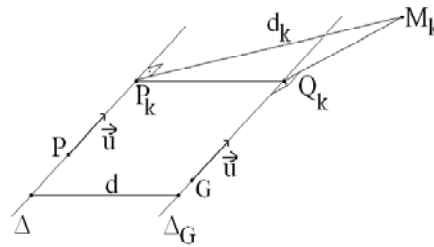


Figura 3.16

Evident, Δ și Δ_G sunt paralele. Are loc relația $\overline{P_k M_k} = \overline{P_k Q_k} + \overline{Q_k M_k}$, vectorii implicați găsindu-se în planul perpendicular pe direcția \vec{u} . Atunci,

$$\begin{aligned} I_{\Delta}(S) &= \sum_{k=1}^n m_k \cdot (\overline{P_k Q_k} + \overline{Q_k M_k})^2 \\ &= \sum_{k=1}^n m_k \cdot d^2 + 2 \cdot \vec{v} \cdot \sum_{k=1}^n m_k \cdot \overline{Q_k M_k} + I_{\Delta_G}(S), \end{aligned}$$

unde $\overline{P_k Q_k} = \vec{v}$ și $|\overline{P_k Q_k}| = d$, $1 \leq k \leq n$. Însă $\overline{Q_k M_k} = \overline{Q_k G} + \overline{G M_k}$, astfel că

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n m_k \cdot \overline{Q_k M_k} &= \sum_{k=1}^n m_k \cdot (\alpha_k \cdot \vec{u}) + \sum_{k=1}^n m_k \cdot \overline{G M_k} \\ &= \left(\sum_{k=1}^n m_k \alpha_k \right) \cdot \vec{u}. \end{aligned}$$

Deoarece $\bar{u} \cdot \bar{v} = 0$, obținem egalitatea

$$I_{\Delta}(S) = I_{\Delta_G}(S) + m \cdot d^2,$$

cunoscută și sub numele de **formula Huygens-Steiner** (cf. [35], p. 174-175). Conform ei, *momentul de inerție al sistemului mecanic S față de dreapta Δ este egal cu momentul de inerție față de o dreaptă paralelă cu Δ trecând prin centrul de masă G plus masa totală m a sistemului mecanic înmulțită cu pătratul distanței dintre cele două drepte* (cf. [76], p. 574, [34], p. 270, [73], p. 373). Demonstrația formulei Huygens-Steiner a fost dată de L. Euler în 1749 (cf. [32], p. 120).

Pe baza formulei Huygens-Steiner stabilim că

$$I_{\Delta}(S) - m \cdot d^2(\Delta, \Delta_G) = I_{\Delta'}(S) - m \cdot d^2(\Delta', \Delta_G),$$

unde Δ' este o dreaptă oarecare paralelă cu Δ (cf. [34], p. 271, [76], p. 574). Această relație exprimă variația în raport cu axa Δ de direcție fixă a *momentului de inerție axial* $I_{\Delta}(S)$ al sistemului mecanic (cf. [76], p. 567).

Momentul de inerție al sistemului mecanic S față de axa Δ_G , numită *axă centrală*, are următoarea expresie

$$I_{\Delta_G}(S) = \frac{1}{m} \cdot \sum_{1 \leq i \leq j \leq n} m_i m_j (\overline{M_i M_j} \times \bar{u})^2$$

(cf. [35], p. 175). Pentru stabilirea acesteia, să considerăm mai întâi un punct P ales arbitrar pe axa Δ (vezi Figura 3.16). Atunci, conform identității lui Lagrange (cf. [34], p. 34), avem

$$\begin{aligned} d_k^2 &= |\overline{PM_k}|^2 - |\overline{PP_k}|^2 = |\overline{PM_k}|^2 - (\overline{PM_k} \cdot \bar{u})^2 \\ &= \overline{PM_k}^2 \cdot \bar{u}^2 - (\overline{PM_k} \cdot \bar{u})^2 = (\overline{PM_k} \times \bar{u})^2. \end{aligned} \quad (3.7)$$

Notăm cu Δ_i dreapta de direcție \bar{u} care trece prin punctul M_i . Atunci, aplicând formula Huygens-Steiner, obținem relațiile

$$I_{\Delta_i}(S) = I_{\Delta_G}(S) + m \cdot d^2(\Delta_i, \Delta_G), \quad 1 \leq i \leq n,$$

de unde deducem că

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n m_i \cdot I_{\Delta_i}(S) &= m \cdot I_{\Delta_G}(S) + m \cdot \sum_{i=1}^n m_i \cdot d^2(\Delta_i, \Delta_G) \\ &= 2m \cdot I_{\Delta_G}(S) \end{aligned}$$

deoarece $d(\Delta_i, \Delta_G) = d(M_i, \Delta_G)$. La fel ca anterior,

$$I_{\Delta_G}(S) = \frac{1}{m} \cdot \sum_{1 \leq i \leq j \leq n} m_i m_j \cdot d^2(\Delta_i, \Delta_j).$$

Însă, din (3.7) rezultă că $(\Delta = \Delta_i, P = M_i)$

$$d^2(\Delta_i, \Delta_j) = (\overline{M_i M_j} \times \bar{u})^2$$

(cf. [35], p. 176) și demonstrația se încheie.

Să revenim la tensorul de inerție $\vec{I}_O(S)$. Considerând că doi tensori de ordinul al II-lea sunt *egali* dacă matricele lor de reprezentare în orice reper cartezian sunt egale și ținând seama de *biliniaritatea* evidentă a produsului tensorial a doi vectori, se poate stabili relația

$$\vec{I}_O(S) = \vec{I}_G(S) + \vec{I}_O(\{(G, m)\}), \quad (3.8)$$

cunoscută sub numele de **teorema J. Steiner-L. Lurie** (cf. [35], p. 183). Într-adevăr, conform formulei lui Leibniz, avem

$$\left(\sum_{k=1}^n m_k \cdot \overline{OM_k^2} \right) \cdot \vec{E} = \left(\sum_{k=1}^n m_k \cdot \overline{GM_k^2} \right) \cdot \vec{E} + (m \cdot \overline{OG^2}) \cdot \vec{E}.$$

Apoi, cum $\overline{OM_k} = \overline{OG} + \overline{GM_k}$, $\overline{OM_k} \otimes \overline{OM_k} = \overline{OG} \otimes \overline{OG} + \overline{OG} \otimes \overline{GM_k} + \overline{GM_k} \otimes \overline{OG} + \overline{GM_k} \otimes \overline{GM_k}$ și

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n m_k \cdot \overline{OG} \otimes \overline{GM_k} &= \overline{OG} \otimes \left(\sum_{k=1}^n m_k \cdot \overline{GM_k} \right) = 0 \\ \sum_{k=1}^n m_k \cdot \overline{GM_k} \otimes \overline{OG} &= \left(\sum_{k=1}^n m_k \cdot \overline{GM_k} \right) \otimes \overline{OG} = 0, \end{aligned}$$

obținem

$$\sum_{k=1}^n m_k \cdot \overline{OM_k} \otimes \overline{OM_k} = m \cdot \overline{OG} \otimes \overline{OG} + \sum_{k=1}^n m_k \cdot \overline{GM_k} \otimes \overline{GM_k},$$

ceea ce încheie demonstrația. În mod analog, *tensorul central de inerție* $\vec{I}_G(S)$ are următoarea expresie remarcabilă

$$\vec{I}_G(S) = \frac{1}{2m} \cdot \left[\left(\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n m_i m_j \cdot \overline{M_i M_j^2} \right) \cdot \vec{E} - \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n m_i m_j \cdot \overline{M_i M_j} \otimes \overline{M_i M_j} \right] \quad (3.9)$$

(cf. [35], p. 184), de unde, dat fiind că $\overline{M_i M_j} \otimes \overline{M_i M_j} = \overline{M_j M_i} \otimes \overline{M_j M_i}$, avem

$$\vec{I}_G(S) = \frac{1}{m} \left[\left(\sum_{1 \leq i < j \leq n} m_i m_j \overline{M_i M_j^2} \right) \vec{E} - \sum_{1 \leq i < j \leq n} m_i m_j \overline{M_i M_j} \otimes \overline{M_i M_j} \right].$$

Aplicând contractia tensorială în (3.8), (3.9), regăsim formula lui Leibniz, respectiv teorema lui Lagrange (cf. [35], observațiile de la p. 184-185).

Notând cu α, β, γ cosinuşii directori ai vectorului \vec{u} în raport cu baza \mathcal{B} a spațiului $T\mathbb{R}^3$, putem scrie că

$$\begin{aligned} I_\Delta(S) &= \sum_{k=1}^n m_k \cdot d_k^2 \stackrel{(3.7)}{=} \sum_{k=1}^n m_k \cdot \overline{OM_k^2} \cdot \vec{u}^2 - \sum_{k=1}^n m_k \cdot (\overline{OM_k} \cdot \vec{u})^2 \\ &= \sum_{k=1}^n m_k (x_k^2 + y_k^2 + z_k^2) (\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2) - \sum_{k=1}^n m_k (\alpha x_k + \beta y_k + \gamma z_k)^2 \\ &= I_{11} \alpha^2 + I_{22} \beta^2 + I_{33} \gamma^2 + 2I_{12} \alpha \beta + 2I_{13} \alpha \gamma + 2I_{23} \beta \gamma, \end{aligned}$$

unde

$$\begin{aligned} I_{11} &= \sum_{k=1}^n m_k (y_k^2 + z_k^2) & I_{22} &= \sum_{k=1}^n m_k (x_k^2 + z_k^2) & I_{33} &= \sum_{k=1}^n m_k (x_k^2 + y_k^2) \\ I_{12} &= I_{21} = - \sum_{k=1}^n m_k x_k y_k & I_{13} &= I_{31} = - \sum_{k=1}^n m_k x_k z_k \\ I_{23} &= I_{32} = - \sum_{k=1}^n m_k y_k z_k \end{aligned}$$

(cf. [32], p. 112). Matricea $(I_{ij})_{i,j}$ constituie matricea de reprezentare a tensorului $\vec{I}_O(S)$ în sistemul de referință $\mathcal{R} = (O, \vec{\mathcal{B}})$ (cf. [76], p. 587).

Mărimile

$$J_1 = \sum_{k=1}^n m_k x_k^2 \quad J_2 = \sum_{k=1}^n m_k y_k^2 \quad J_3 = \sum_{k=1}^n m_k z_k^2,$$

care verifică formulele $I_{11} = J_2 + J_3$, $I_{22} = J_1 + J_3$, $I_{33} = J_1 + J_2$ (cf. [76], relația d), p. 568) se numesc *momente de inerție planare* ale sistemului mecanic S . În mod evident, ele se scriu sub forma $J = \sum m_M \cdot d^2(M, \mathcal{P})$, unde \mathcal{P} desemnează unul din planele de coordonate ale sistemului de referință \mathcal{R} . Mărimile I_{12} , I_{13} , I_{23} poartă denumirea de *momente de inerție centrifugale* (*de deviație, relative la două plane*) (cf. [32], p. 112, [63], p. 355, [14], p. 166). Variația momentelor centrifugale este descrisă de o relație analoagă formulei Huygens-Steiner. Astfel, *momentul de inerție centrifugal față de un sistem de axe ortonormat al unui sistem mecanic S este egal cu momentul de inerție centrifugal al acestuia față de un sistem având axele de coordonate paralele cu primul și originea în centrul de masă G minus produsul dintre masa totală a sistemului mecanic și coordonatele punctului G în sistemul inițial* (cf. [76], p. 575).

Relația

$$I_{\Delta}(S) = I_{11}\alpha^2 + I_{22}\beta^2 + I_{33}\gamma^2 + 2I_{12}\alpha\beta + 2I_{13}\alpha\gamma + 2I_{23}\beta\gamma$$

reprezintă **formula Euler-Cauchy** (1827) pentru calculul momentului de inerție axial (cf. [32], p. 116, [35], p. 186).

Este ușor de observat că

$$I_{11} = I_{Ox}(S) \quad I_{22} = I_{Oy}(S) \quad I_{33} = I_{Oz}(S).$$

Momentele de inerție polare, axiale, planare și centrifugale (față de două plane) au un caracter *geometric* (scalar) (cf. [14], p. 166). Într-adevăr, considerând un punct Q , o dreaptă Δ și două plane concurente $\Pi_{1,2}$ aflate suficient de departe de sistemul mecanic S , putem scrie că

$$\begin{aligned} I_Q(S) &= \sum_{k=1}^n m_k d^2(M_k, Q) & I_{\Delta}(S) &= \sum_{k=1}^n m_k d^2(M_k, \Delta) \\ I_{\Pi_1}(S) &= \sum_{k=1}^n m_k d^2(M_k, \Pi_1) & I_{\Pi_1\Pi_2}(S) &= - \sum_{k=1}^n m_k d(M_k, \Pi_1)d(M_k, \Pi_2) \end{aligned}$$

pentru a desemna aceste momente. Ori, punctele, dreptele, planele și distanțele sunt mărimi *geometrice* (cf. [57], propozițiile 2, 4, p. 109, propoziția 10, p. 111), adică independente de alegerea reperului cartezian \mathcal{R}' .

Se cuvine insistat însă asupra unei subtile diferențe. Axa Δ fiind fixată, mărimea $I_\Delta(S)$ este scalară (cf. [76], p. 577), adică independentă de *modificarea* coeficienților I_{ij} din formula Euler-Cauchy. Cu alte cuvinte, alegând un nou reper cartezian $\mathcal{R}''' = (O, \vec{\mathcal{E}})$, unde $\mathcal{E} = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$, și reluând calculul formulei Euler-Cauchy, obținem

$$I_\Delta(S) = I_{11}^* \alpha^{*2} + I_{22}^* \beta^{*2} + I_{33}^* \gamma^{*2} + 2I_{12}^* \alpha^* \beta^* + 2I_{13}^* \alpha^* \gamma^* + 2I_{23}^* \beta^* \gamma^*.$$

Aici, I_{11}^* , I_{22}^* , I_{33}^* sunt momentele de inerție axiale ale sistemului mecanic S față de axele de coordonate ale reperului \mathcal{R}''' . Afirmatia analoagă este valabilă și pentru momentele de inerție planare și centrifugale. Așadar, apar în discuție atât momentele de inerție I_Q , I_Δ , I_{Π_1} , $I_{\Pi_1\Pi_2}$ cât și elementele I_{ij} ale matricei de reprezentare $[I_O(S)]$, care sunt *interpretate* ca momente de inerție.

3.1.7 Elipsoidul de inerție al unui sistem mecanic. Axe principale de inerție

Afirmațiile anterioare pot fi reluate într-un cadru mai general. Mai precis, fiind dați un tensor simetric \vec{X} și un vector \vec{u} , reprezentați în reperul cartezian \mathcal{R}' de matricea (simetrică) $[X]$, respectiv de coordonatele u_1 , u_2 , u_3 ale vectorului $\vec{u} \in T_B\mathbb{R}^3$, $\vec{u} \in \vec{u}$, mărimea

$$C = \sum_{i,j=1}^3 X_{ij} u_i u_j$$

este scalară.

Într-adevăr, conform calculului formal, avem

$$C = \begin{pmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \end{pmatrix} \cdot [X] \cdot \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix},$$

de unde

$$C^* = \begin{pmatrix} u_1^* & u_2^* & u_3^* \end{pmatrix} \cdot [X^*] \cdot \begin{pmatrix} u_1^* \\ u_2^* \\ u_3^* \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned}
&= \left[A \cdot \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} \right]^t \cdot (A \cdot [X] \cdot A^t) \cdot \left[A \cdot \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} \right] \\
&= \begin{pmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \end{pmatrix} \cdot (A^t A) \cdot [X] \cdot (A^t A) \cdot \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} \\
&= C.
\end{aligned}$$

Revenind la formula Euler-Cauchy, cum, în general, $I_\Delta(S) > 0$, are loc egalitatea

$$\begin{aligned}
1 &= I_{11} \left(\frac{\alpha}{\sqrt{I_\Delta}} \right)^2 + I_{22} \left(\frac{\beta}{\sqrt{I_\Delta}} \right)^2 + I_{33} \left(\frac{\gamma}{\sqrt{I_\Delta}} \right)^2 + 2I_{12} \frac{\alpha}{\sqrt{I_\Delta}} \cdot \frac{\beta}{\sqrt{I_\Delta}} \\
&\quad + 2I_{13} \frac{\alpha}{\sqrt{I_\Delta}} \cdot \frac{\gamma}{\sqrt{I_\Delta}} + 2I_{23} \frac{\beta}{\sqrt{I_\Delta}} \cdot \frac{\gamma}{\sqrt{I_\Delta}}.
\end{aligned}$$

Cazul $I_\Delta(S) = 0$ poate surveni atunci când toate punctele sistemului mecanic S sunt coliniare (cf. [76], p. 580).

Înfățișarea specială a relației precedente ne dă ”ideea” de a o interpreta din punctul de vedere al geometriei *analitice*. Astfel, considerând vectorul $\vec{r} = x \cdot \vec{i} + y \cdot \vec{j} + z \cdot \vec{k}$, putem introduce

$$\Phi(\vec{r}) = I_{11}x^2 + I_{22}y^2 + I_{33}z^2 + 2I_{12}xy + 2I_{13}xz + 2I_{23}yz.$$

Apelând la teoria formelor pătratice în spații euclidiene (cf. [67], p. 303-306), afirmăm că există baza ortonormată \mathcal{E} a spațiului $T\mathbb{R}^3$ cu proprietatea că forma pătratică Φ poate fi pusă sub *forma canonică*

$$\Phi(\vec{r}) = I_1x^{*2} + I_2y^{*2} + I_3z^{*2}$$

în reperul $\mathcal{R}''' = (O, \vec{\mathcal{E}})$. Mai mult, mărimile I_1, I_2, I_3 sunt valorile proprii (reale) ale matricei $[I]$ a coeficienților formei pătratice Φ și sunt independente de modificarea bazei \mathcal{E} . Un alt rezultat al teoriei formelor pătratice privește *valorile staționare* ale acestora pe sfera-unitate a spațiului $T\mathbb{R}^3$. Astfel, mărimile

$$\inf_{|\vec{r}|=1} \Phi(\vec{r}) \quad \sup_{|\vec{r}|=1} \Phi(\vec{r})$$

sunt atinse pentru vectori proprii ai matricei $[I]$ și sunt egale cu cea mai mică, respectiv cea mai mare dintre valorile proprii I_1, I_2, I_3 (cf. [67], p. 307-308).

Să considerăm acum locul geometric al punctelor M , de coordonate x , y , z în sistemul de referință \mathcal{R} , pentru care

$$\Phi(\overline{OM}) = 1.$$

Această mulțime nu este vidă, căci putem alege $x = \frac{\alpha}{\sqrt{I_\Delta}}$, $y = \frac{\beta}{\sqrt{I_\Delta}}$, $z = \frac{\gamma}{\sqrt{I_\Delta}}$. Calculul relativ la mărimea C ca și existența unei forme canonice a formei pătratice Φ arată că mulțimea punctelor M este descrisă de relația

$$I_1 x^{*2} + I_2 y^{*2} + I_3 z^{*2} = 1$$

în reperul \mathcal{R}''' . Firește, matricea asociată formei pătratice Φ se schimbă, odată cu modificarea bazei, în același fel cu matricea de inerție $[I_O(S)]$ (cf. [67], p. 211). Observăm că punctul M se găsește pe o *cvadrică cu centru* (cf. [76], p. 579).

Deoarece $I_1 = I_{11}^*$, $I_2 = I_{22}^*$, $I_3 = I_{33}^*$ și punctele sistemului mecanic S nu sunt toate coliniare, deducem că $I_1, I_2, I_3 > 0$ (cf. [14], p. 171), adică locul geometric al punctelor M constituie un elipsoid, numit *elipsoid de inerție* (L. Poinsot, cf. [34], p. 449) relativ la punctul O . Dacă punctele sistemului mecanic S ar fi coliniare, atunci cvadrica s-ar reduce la un cilindru având ca axă dreaptă comună punctelor sistemului mecanic (cf. [76], nota de subsol, p. 580, [34], p. 449). Un asemenea sistem este numit *rotativ* (cf. [41], p. 143). Axele reperului cartezian \mathcal{R}''' poartă denumirea de *axe principale de inerție*, planele sale de coordonate se numesc *plane principale de inerție*, iar mărimile I_1, I_2, I_3 constituie *momentele principale de inerție* (cf. [14], p. 171, [63], p. 359, [76], p. 580) în raport cu punctul O .

Revenind la formula Euler-Cauchy, are loc relația

$$I_\Delta(S) = I_1 \alpha^{*2} + I_2 \beta^{*2} + I_3 \gamma^{*2} \quad (3.10)$$

(cf. [76], p. 580, [32], p. 119, [63], p. 359).

Rezultatul privind valorile staționare ale formei pătratice Φ are o importanță deosebită în mecanica teoretică. Astfel, în cazul unui solid rigid S cu distribuție spațială (punctele sistemului mecanic S nu sunt coplanare), fiind cunoscută matricea de inerție $[I]$ în sistemul de referință \mathcal{R} , momentul său de inerție în raport cu o axă oarecare Δ trecând prin originea O se va găsi mereu între cea mai mică și cea mai mare dintre valorile proprii ale matricei $[I]$. Acest fapt este în concordanță cu (3.10), căci $\alpha^{*2} + \beta^{*2} + \gamma^{*2} = 1$.

Introducând notațiile $I_1 = \frac{1}{a^2}$, $I_2 = \frac{1}{b^2}$, $I_3 = \frac{1}{c^2}$, deducem că *momentele principale de inerție sunt invers proporționale cu pătratul semiaxelor elipsoidului de inerție și că momentelor de inerție maxim respectiv minim le corespund axa mică, respectiv axa mare a elipsoidului de inerție* (cf. [76], p. 581).

Să considerăm un sistem mecanic omogen S ($m_k = m$, $1 \leq k \leq n$). O serie de proprietăți *geometrice* ale configurației punctelor acestuia ajută la stabilirea elipsoizilor de inerție. Următoarea observație se dovedește esențială. Astfel, dacă matricea $[I]$, calculată în sistemul de referință \mathcal{R} , are forma

$$[I] = \begin{pmatrix} I_{11} & 0 & 0 \\ 0 & I_{22} & I_{23} \\ 0 & I_{32} & I_{33} \end{pmatrix},$$

atunci ecuația caracteristică $\det([I] - \lambda \cdot I_3) = 0$ poate fi scrisă ca

$$(I_{11} - \lambda) \cdot \begin{vmatrix} I_{22} - \lambda & I_{23} \\ I_{32} & I_{33} - \lambda \end{vmatrix} = 0,$$

de unde deducem că axa Ox a reperului \mathcal{R} este o *axă principală de inerție* a elipsoidului de inerție având centrul în O . Căutarea celorlalte două axe principale de inerție se reduce la planul Oyz , ceea ce constituie o *predeterminare* extrem de avantajoasă a planului lor principal de inerție.

Dacă planul Oyz constituie un plan de simetrie al configurației punctelor din sistemul mecanic S , atunci axa Ox va fi o axă principală de inerție a elipsoidului centrat în O . Într-adevăr, dacă un punct al sistemului mecanic are coordonatele a, y, z , unde $a > 0$, va exista un alt punct de coordonate $-a, y, z$ în cadrul sistemului mecanic. Atunci,

$$-\sum_{M \in S} m_M \cdot x(M) \cdot y(M) = 0 \quad -\sum_{M \in S} m_M \cdot x(M) \cdot z(M) = 0,$$

adică $I_{12} = I_{13} = 0$. Același rezultat are loc atunci când pentru fiecare punct de coordonate x, a, b al sistemului mecanic S va exista un alt punct de coordonate $x, -a, -b$ în configurația sistemului, deci când sistemul mecanic are drept axă de simetrie dreapta Ox . În concluzie, *dacă un sistem mecanic omogen admite un plan de simetrie, respectiv o axă de simetrie, atunci mulțimea în cauză va fi un plan principal de inerție, respectiv o axă principală de inerție pentru elipsoizii de inerție centrați în punctele ei* (cf. [76], p. 583, [34], p. 451, [41], p. 142).

Să presupunem acum că axa Ox a sistemului de referință \mathcal{R} este axă principală de inerție pentru elipsoidul centrat în originea O . Aici, $I_{12} = I_{13} = 0$. Să considerăm, de asemeni, că elipsoidul de inerție cu centrul în punctul O' , de coordonate $h, 0, 0$, admite dreapta Ox ca axă principală de inerție. Atunci, în reperul $\mathcal{R}''' = (O', \vec{B})$ avem

$$\begin{aligned} I'_{12} &= -\sum_{k=1}^n m_k x'_k y'_k = -\sum_{k=1}^n m_k (x_k - h) y_k \\ &= I_{12} + h \cdot \sum_{k=1}^n m_k y_k = I_{12} + h \cdot m y(G), \end{aligned}$$

respectiv

$$I'_{13} = I_{13} + h \cdot m z(G).$$

Am folosit teorema momentelor statice. Relațiile $y(G) = 0$, $z(G) = 0$ arată că, în mod necesar, $G \in Ox$. Calculul anterior este valabil pentru orice număr h . Atunci, *pentru ca o dreaptă să fie axă principală de inerție pentru elipsoizii de inerție centrați în două puncte ale sale, aceasta trebuie să conțină centrul de masă G al sistemului mecanic. De asemeni, o dreaptă ce trece prin G și este axă principală de inerție a elipsoidului centrat într-un punct al său (diferit de G) va fi axă principală de inerție pentru elipsoizii centrați în toate punctele ei* (cf. [34], p. 451). Elipsoidul centrat în G poartă denumirea de *elipsoid central de inerție* al sistemului mecanic S . Axele și planele sale principale de inerție se numesc *axe principale centrale de inerție (libere)*, respectiv *plane principale centrale de inerție* ale sistemului mecanic (cf. [14], p. 171, 174, [32], p. 120). Formula Huygens-Steiner arată că *momentul axial de inerție al sistemului mecanic S față de axa mare a elipsoidului central de inerție este cel mai mic cu putință* (cf. [76], p. 581). Axele principale centrale de inerție ale corpului solid rigid joacă un rol important în dinamica acestuia (cf. [32], p. 130-131).

3.2 Cinematica

3.2.1 Formula lui L. Euler. Translația și rotația solidului rigid. Teorema lui Rivals

Mișcările corpurilor materiale întâlnite în viața de zi cu zi sunt extrem de diferite iar descrierea lor implică dificultăți considerabile. Există însă,

în cinematică, posibilitatea de a "vizualiza" mișcarea spațiului "rigid" care aproximează corpul material. Astfel, o serie de teoreme din geometrie (Euler, Chasles, Mozzi) (cf. [34], p. 201, [69], p. 70, 161-162, [56], p. 27-28) arată că, atât în planul cât și în spațiul euclidian, *trecerea* de la o poziție S_1 a unei figuri geometrice la poziția S_2 a aceleiași figuri geometrice se poate realiza prin compunerea unor *translații* și *rotații* ale planului, respectiv spațiului. Un asemenea proces constituie, așadar, o *representare* (imaginare) a "mișcării" figurii geometrice. Apare ca naturală, în aceste condiții, ideea de a reprezenta mișcarea unui solid rigid (echivalentul "mecanic" al unei figuri geometrice) cu ajutorul rotațiilor și translațiilor *instantanee* (cf. [56], p. 26). Subliniem faptul că o *representare* a mișcării mecanice nu constituie *descrierea* acesteia, ci modul cum ne-am putea *imagina* mișcarea respectivă (cf. [76], p. 318).

Pentru a evidenția asemănările dintre cazul "static" al mișcărilor *geometrice* și cel "dinamic" al mișcărilor *mecanice*, să considerăm trei puncte necoliniare ale solidului rigid S . Atunci, cum

$$\begin{aligned} |\overline{M_1M_3}|^2 &= (\overline{M_1M_2} + \overline{M_2M_3})^2 = |\overline{M_1M_2}|^2 + |\overline{M_2M_3}|^2 \\ &\quad + 2|\overline{M_1M_2}| \cdot |\overline{M_2M_3}| \cdot \cos(\overline{M_1M_2}, \overline{M_2M_3}), \end{aligned}$$

deducem că *mișcarea solidului rigid conservă unghiul a două drepte coplanare din constituția sa*. Mai general chiar, deoarece

$$\begin{aligned} \overline{M_1M_2} \cdot \overline{M_3M_4} &= \overline{M_1M_2} \cdot (\overline{M_3M_2} + \overline{M_2M_4}) \\ &= \overline{M_1M_2} \cdot \overline{M_2M_4} - \overline{M_1M_2} \cdot \overline{M_2M_3}, \end{aligned}$$

observăm că *unghiul a două drepte oarecare se conservă în mișcarea solidului rigid* (cf. [34], p. 163). Această proprietate este specifică izometriilor planului și spațiului euclidian (cf. [69], teorema 4, p. 16, teorema 3, p. 129-130).

Ținând seama de cele discutate în cadrul subsecțiunii privind mișcarea relativă a punctului material (aici, reperul $\mathcal{R}' = (A, \vec{C})$ este presupus solidar legat de corpul solid rigid), putem scrie că

$$\bar{v}_B(t) = \bar{v}_A(t) + \bar{\omega} \times \overline{AB}, \quad (3.11)$$

unde B reprezintă o particulă oarecare din constituția corpului material. Am aplicat formula (2.26) în care

$$\left(\frac{\partial \overline{AB}}{\partial t} \right)_{\mathcal{R}'} = 0$$

deoarece B se află în repaus față de reperul mobil \mathcal{R}' . Egalitatea (3.11) desemnează *distribuția vitezelor* în corpul rigid (cf. [76], p. 301), arătând modul în care fiecărei particule B din constituția acestuia i se *atribuie* (distribuie) viteza $\vec{v}_B \in T_B\mathbb{R}^3$, $\vec{v}_B \in \bar{v}_B$. Obținem astfel *câmpul vectorial* al vitezelor corpului solid rigid (cf. [63], p. 175). Relația (3.11) este cunoscută sub numele de **formula lui L. Euler** (cf. [32], p. 98, [76], p. 349). Se recomandă cititorului eleganta prezentare făcută acestor chestiuni în [14], p. 101-102.

Cazul particular $\bar{\omega} = 0$ corespunde *mișcării de translație* a solidului rigid. Câmpul vitezelor este, la momentul t , uniform, iar traiectoriile tuturor particulelor solidului rigid sunt identice ca formă. Cu alte cuvinte, *o dreaptă solidar legată de corpul material se va deplasa paralel cu ea-însăși* (cf. [63], p. 180). În aceste condiții, putem considera că solidul rigid are o *viteză de translație*, aceasta fiind un vector *liber* (cf. [32], p. 94, [63], p. 181) care, legat în poziția unei particule oarecare a solidului, ne dă viteza ei.

Dacă două din punctele solidului rigid, A și B , rămân în repaus în timpul mișcării sale, atunci avem de a face cu o *mișcare de rotație* (cf. [63], p. 182). Relația (3.11) arată că $\bar{\omega} \times \overline{AB} = 0$. Astfel, sau $\bar{\omega} = 0$ sau vectorii $\bar{\omega}$ și \overline{AB} sunt coliniari. În cazul unei particule C , nesituate pe dreapta AB , egalitatea $\bar{v}_C = \bar{\omega} \times \overline{AC} \neq 0$ ne conduce, în particular, la $\bar{\omega} \neq 0$.

Notăm cu P piciorul perpendicularei duse din punctul C pe dreapta AB . Atunci, cum

$$|\overline{AP}| = \left| \overline{AC} \cdot \frac{\overline{AB}}{|\overline{AB}|} \right| \quad |\overline{BP}| = \left| \overline{BC} \cdot \frac{\overline{BA}}{|\overline{BA}|} \right|,$$

deducem că mărimile $|\overline{AP}|$, $|\overline{BP}|$ sunt constante. Astfel, punctul P se va găsi la intersecția sferelor centrate în A , B , de raze $|\overline{AP}|$, respectiv $|\overline{BP}|$, care sunt tangente. Deci, *punctul P este fix* (cf. [34], p. 164). Putem scrie că

$$\bar{v}_C = \bar{\omega} \times \overline{AC} = \bar{\omega} \times (\overline{AP} + \overline{PC}) = \bar{\omega} \times \overline{PC} \quad (3.12)$$

(cf. [32], p. 95).

În concluzie, mișcarea particulei C se desfășoară în planul Π perpendicular pe dreapta AB în P . De asemenea, $\overline{AC}^2 = (\overline{AP} + \overline{PC})^2 = \overline{AP}^2 + \overline{PC}^2$, de unde

$$|\overline{PC}| = \sqrt{|\overline{AC}|^2 - |\overline{AP}|^2} = \text{constant.}$$

Particula C execută, aşadar, o mişcare circulară în planul Π şi regăsim formula vitezei ca produs vectorial (cf. [76], p. 303).

Independenţa formulei (3.12) de poziţia lui P ne permite să introducem vectorul glisant $\vec{\omega}(t)$ definit de dreapta AB (numită axă de rotaţie a solidului rigid S) şi de vectorul $\vec{\omega}$ (cf. [63], p. 183-184). El constituie vectorul-viteză unghiulară al corpului material. Viteza particulei C se bucură de o reprezentare remarcabilă, şi anume

$$\vec{v}_C = \vec{\mathcal{M}}_C(\vec{\omega}) \in T_C\mathbb{R}^3$$

(cf. [34], p. 166).

Revenind la cazul general, să considerăm dreapta $\Delta(A, \vec{\omega})$ care trece prin A şi are vectorul director $\vec{\omega}(t)$. Ea va juca "rolul" unei axe de rotaţie "instantanee" în interpretarea mişcării corpului material solid rigid.

Cum

$$\left(\frac{\partial^2 \overline{AB}}{\partial t^2}\right)_{\mathcal{R}'} = 0,$$

distribuţia acceleraţiilor în solidul rigid este dată de

$$\vec{a}_B(t) = \vec{a}_A(t) + \vec{\varepsilon} \times \overline{AB} + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \overline{AB})$$

(cf. [76], p. 301). Notând cu P piciorul perpendicularei duse din punctul B pe dreapta $\Delta(A, \vec{\omega})$, deducem că

$$\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \overline{AB}) = \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \overline{PB}) = -\omega^2(t) \cdot \overline{PB}.$$

Aici, $|\vec{\omega}| \stackrel{\text{not}}{=} \omega$. Relaţia $\vec{a}_B(t) = \vec{a}_A(t) + \vec{\varepsilon} \times \overline{AB} - \omega^2(t) \cdot \overline{PB}$ este cunoscută sub numele de **teorema lui Rivals** (cf. [34], p. 178, [32], p. 102). Mărimile $\vec{a}_\varepsilon \in T_B\mathbb{R}^3$, $\vec{a}_\varepsilon \in \vec{a}_\varepsilon$ şi $\vec{a}_\omega \in T_B\mathbb{R}^3$, $\vec{a}_\omega \in \vec{a}_\omega$, unde

$$\vec{a}_\varepsilon = \vec{\varepsilon} \times \overline{AB} \quad \vec{a}_\omega = -\omega^2 \cdot \overline{PB},$$

poartă denumirea de *acceleraţie rotitoare*, respectiv *axipetă* (cf. [32], p. 101, [59], p. 33). Acceleraţia axipetă \vec{a}_ω , deşi are direcţia normalei principale în poziţia curentă a particulei la traiectoria circulară "instantanee" a acesteia, nu trebuie confundată cu acceleraţia normală \vec{a}_ν (cf. [32], p. 102).

3.2.2 Interpretarea cinematică a mișcării solidului rigid. Invarianții mișcării. Teorema lui Chasles. Mișcarea pseudoelicoidală a solidului rigid. Teorema lui I. Mozzi

Formula lui Euler privind distribuția vitezelor în solidul rigid arată că viteza \vec{v}_B a unei particule B oarecare din constituția acestuia se compune din două "ingrediente": o viteză de "translație" $\vec{v}_A \in T_B\mathbb{R}^3$, $\vec{v}_A \in \bar{v}_A$, obținută prin echipolență dintr-un vector *liber* și o viteză de "rotație" $\vec{M}_B(\vec{\omega})$, unde $\vec{\omega}$ este vectorul glisant definit de dreapta $\Delta(A, \vec{\omega})$ și de vectorul-viteză unghiulară instantanee $\bar{\omega}$ (cf. [34], p. 170, [32], p. 98). Reprezentarea unei componente a vitezei particulei ca *moment* ne dă "ideea" unei *analogii* cu problema reducerii sistemelor de vectori alunecători. Astfel, vectorul \bar{v}_A (*liber*) poate fi considerat ca momentul unui cuplu de "viteze unghiulare" $\{\vec{\omega}', -\vec{\omega}'\}$ (cf. [34], p. 182), de unde

$$\vec{v}_B = \vec{M}_B \left(\left\{ \vec{\omega}, \vec{\omega}', -\vec{\omega}' \right\} \right).$$

Mișcarea generală a solidului rigid, *interpretată pe baza câmpului vitezelor sale* (cf. [76], p. 318), poate fi considerată ca provenind din trei rotații (instantanee) simultane având vectorii-viteză unghiulară $\vec{\omega}, \vec{\omega}', -\vec{\omega}'$.

Invarianții sistemului de vectori $\{\vec{\omega}, \vec{\omega}', -\vec{\omega}'\}$, numiți *invarianții (absoluți) ai mișcării*, sunt $\bar{\mathcal{R}}_A = \bar{\omega}$ și $\bar{\mathcal{M}}_A \cdot \bar{\mathcal{R}}_A = \bar{v}_A \cdot \bar{\omega}$ (cf. [32], teoremele 1, 2, p. 99, [76], p. 318). Axa centrală a sistemului este

$$\overline{AB} = \frac{\bar{\omega} \times \bar{v}_A}{\omega^2} + \lambda \cdot \bar{\omega}, \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

(cf. [34], p. 171).

Sunt valabile următoarele situații (*analogia statică-cinematică*) (cf. [34], p. 182-183, [76], p. 333, [63], p. 258).

1) $\bar{v}_A \cdot \bar{\omega} \neq 0$. Sistemul de vectori este echivalent cu vectorul $\vec{\omega}$ glisant pe axa centrală Δ și cu un cuplu de moment \bar{v}_A , aflat într-un plan perpendicular pe axa Δ . *Mișcarea solidului rigid poate fi imaginată în fiecare moment t ca fiind compusă dintr-o rotație instantanee (infinitesimală) în jurul unei axe variabile $\Delta(t)$ și o translație instantanee (infinitesimală) în lungul acestei axe.* Interpretată astfel, mișcarea corpului material solid rigid se mai numește și *pseudoelicoidală* sau *elicoidală momentană (instantanee)*

sau *rototranslație* (cf. [32], p. 100, [76], p. 319, [34], p. 170). Reprezentarea precedentă a mișcării generale ca pseudoelicoidală este cunoscută drept **teorema lui Chasles** (cf. [32], p. 100). Axa centrală Δ poartă denumirea de *axă instantanee* a mișcării (cf. [63], p. 238).

În analogie cu existența tursorului minimal, *axa instantanee a mișcării este locul geometric al punctelor solidului rigid cu viteza minimă în momentul considerat* (I. Mozzi, 1766) (cf. [32], p. 100, [76], observația de la p. 319, [63], p. 238).

2) $\bar{\omega} \neq 0, \bar{v}_A = 0$. Sistemul de vectori este echivalent cu un vector unic $\vec{\omega}$ glisant pe axa instantanee Δ . Astfel, la momentul t considerat, mișcarea poate fi imaginată ca o rotație în jurul axei Δ .

3) $\bar{\omega} = 0, \bar{v}_A \neq 0$. Mișcarea se reprezintă la momentul t , din punctul de "vedere" al vitezelor, printr-o translație.

4) $\bar{\omega} = 0, \bar{v}_A = 0$. Corpul material solid rigid se găsește în repaus la momentul considerat.

3.2.3 Interpretarea geometrică a mișcării solidului rigid. Axoide. Contactul simplu a două corpuri solide rigide

Chestiunile care urmează pot fi justificate în mod intuitiv (neriguros) plecând de la descrierea unor situații "ciudate" din viața de zi cu zi. Astfel, un schior începător care *alunecă* pe porțiunea de final (în apropierea cabanei) a părții de schi de la Predeal se bazează frecvent pe *înălțimea* clăparilor pentru a nu cădea. Schiurile sale au "prins" viteză și el, ținându-și corpul drept, "supraviețuiește" printr-o "sprijinire" de partea din spate a clăparilor. Am putea spune că el *se lipește* de corpul în mișcare (ansamblul schiurilor). Un alt fenomen este trăit de cineva care traversează un pod mobil sau încearcă "să-și facă echilibru", stând în picioare, într-o barcă aflată *în derivă* pe lacul din parcul central al Craiovei. În acest caz, protagonistul întâmplării caută să se pună "în armonie" (echilibru) față de *sol* (pământ, marginea lacului), adică să *se dezlipească* de mișcările de balans ale podului ori bărcii. Aceste fenomene ne conduc la "ideea" din *interpretarea geometrică* a mișcării solidului rigid.

Este evident că, în general, axa instantanee Δ își schimbă poziția la fiecare moment atât față de sistemul de referință \mathcal{R} cât și față de reperul $\mathcal{R}' = (A, \vec{C})$ solidar legat de corpul rigid. Dacă $B \in \Delta$, atunci $\bar{v}_B = \lambda \bar{\omega}$, unde

$\lambda \in \mathbb{R}$, și, conform (3.11), putem scrie că

$$\lambda \bar{\omega} = \bar{v}_A + \bar{\omega} \times \overline{AB}. \quad (3.13)$$

Prin proiectarea relației (3.13) pe axele de coordonate ale reperului mobil \mathcal{R}' , respectiv fix \mathcal{R} și prin eliminarea parametrului λ din formulele acestor proiecții găsim ecuațiile scalare *relative* și *absolute* ale axei instantanee Δ (cf. [34], p. 171-172, [76], p. 318, [63], p. 238).

Atunci când t variază, dreptele $\Delta(t)$ generează în raport cu reperul mobil \mathcal{R}' , respectiv cu sistemul de referință \mathcal{R} câte o suprafață *riglată*. Prima dintre suprafețe se numește *axoidă mobilă* iar cea de-a doua *axoidă fixă* (cf. [63], p. 239, [14], p. 120). Legea fundamentală de compunere a vitezelor, aplicată punctului B , ne conduce la

$$\begin{aligned} \bar{v}(t) &= \bar{v}_{transp} + \bar{v}_{rel} = \bar{v}_A + \bar{\omega} \times \overline{AB} + \bar{v}_{rel} \\ &= \lambda \bar{\omega} + \bar{v}_{rel}. \end{aligned} \quad (3.14)$$

Se cuvine făcut următorul comentariu. La un moment t fixat, dreapta Δ are o *anumită* poziție față de reperul mobil \mathcal{R}' . Aceasta se va schimba, desigur, la momentul de timp *următor*. Însă, la momentul t , dreapta Δ nu se "mișcă" față de \mathcal{R}' (timpul *staționează*, este *suspendat*), ceea ce ne permite să folosim formula lui Euler (utilizabilă doar pentru punctele care stau *mereu* pe loc față de \mathcal{R}') în cazul punctului B . Aplicarea legii de compunere a vitezelor, în schimb, se realizează pentru un punct B *fixat* pe dreapta Δ , deci *mobil* în raport cu \mathcal{R}' . Acest tip de raționament va fi reluat ulterior. Se întâlnește formularea: "punct *mobil* B a cărui poziție la momentul t coincide cu poziția unei *particule* a solidului rigid".

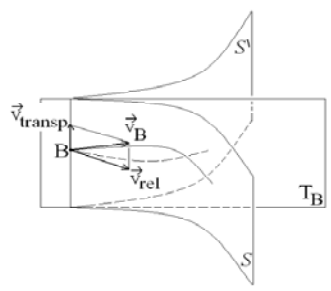


Figura 3.17

În mișcarea față de reperul cartezian \mathcal{R}' , punctul B se deplasează pe traiectoria (relativă) Γ' . Direcția tangentei la Γ' în poziția curentă a "particulei" B este chiar \bar{v}_{rel} . De asemeni, $\bar{\omega}$ este vector (director) al generatoarei

Δ a axoidei mobile S' . Astfel, vectorii \bar{v}_{rel} , $\bar{\omega}$ constituie o bază a spațiului $T_B S'$. În mod analog, vectorii \bar{v}_B , $\bar{\omega}$ vor reprezenta o bază a spațiului director al planului tangent în poziția curentă a "particulei" B la axoida fixă S . În concluzie, din (3.14) rezultă că *cele două suprafețe S și S' admit în fiecare moment t un plan tangent comun* (cf. [34], p. 183) (vezi Figura 3.17).

Revenind la situațiile descrise la începutul acestei subsecțiuni, în loc să "privim" mișcarea axei Δ față de corp (reperul \mathcal{R}'), am putea să ne imaginăm că *lipim* corpul solid rigid de dreaptă (axa Δ). Astfel, *deplasarea generală a solidului rigid poate fi considerată ca o "rostogolire" a axoidei mobile peste axoida fixă (mișcare de rotație înfăptuită în jurul axei Δ , cf. [76], p. 181) concomitent cu o "alunecare" (translație) a axoidei mobile peste axoida fixă în lungul dreptei Δ (L. Poinsot (1834), Poncelet) (cf. [32], p. 101, [34], p. 184, [76], p. 320, [15], p. 77).*

Două elemente noi intervin în această interpretare. Mai întâi, axoidele joacă "rolul" frontierelor a două "corpuri" implicate într-o mișcare complexă (rostogolire și alunecare). Se pune astfel problema definirii *contactului* a două corpuri solide rigide. Un al doilea element privește chiar mișcările complexe ale solidului rigid. Ce înseamnă, așadar, că un corp material solid rigid este *supus* simultan mai multor mișcări?

Începem cu chestiunea contactului dintre corpurile materiale. Astfel, considerând două solide rigide S_1 , S_2 care ocupă în SF domeniile G_1 , G_2 mărginite de suprafețele $Fr(G_1)$, $Fr(G_2)$, vom spune că acestea realizează un *contact simplu (teoretic)* dacă $Fr(G_1)$ și $Fr(G_2)$ admit la fiecare moment t un *același* plan tangent T_X (cf. [34], p. 184). Punctul (geometric) comun X este numit *punct de contact (teoretic)* (cf. [76], p. 179). Privit ca o "particulă" mobilă, $X(t)$ descrie câte o curbă pe suprafețele $Fr(G_1)$, $Fr(G_2)$ (cf. [2], p. 78, [15], p. 101). Astfel,

$$\bar{v}_{abs} = \bar{v}_{transp} + \bar{v}_{rel},$$

unde \bar{v}_{abs} , \bar{v}_{rel} constituie vitezele particulei de contact $X(t)$ față de reperele \mathcal{R} , \mathcal{R}' presupuse solidar legate de corpul S_1 , respectiv S_2 . Vectorul \bar{v}_{transp} ne conduce la vectorul $\vec{v}_{transp} \in T_X \mathbb{R}^3$, $\vec{v}_{transp} \in \bar{v}_{transp}$, care desemnează *viteza* unui punct M al solidului rigid S_2 a cărui poziție coincide la momentul t cu punctul de contact $X(t)$. Aplicând formula lui Euler, avem

$$\bar{v}_N = \bar{v}_M + \bar{\omega} \times \overline{MN} = \bar{v}_{transp} + \bar{\omega} \times \overline{MN}$$

pentru o particulă N oarecare din constituția corpului S_2 . Cu alte cuvinte, toate particulele acestui solid rigid primesc, la momentul t , ca "ingredient" al

vitezelor lor, un vector echipolent cu \vec{v}_{transp} . Are sens să afirmăm că \vec{v}_{transp} definește *alunecarea* (translația) corpului S_2 pe corpul S_1 .

Să considerăm vectorul glisant $\vec{\omega}$ situat pe dreapta-suport $\Delta(X, \vec{\omega})$. Descompunându-i direcția $\vec{\omega}$ după două direcții ortogonale, $\vec{\omega} = \vec{\omega}^\perp + \vec{\omega}^\parallel$, astfel încât $\vec{\omega}^\parallel \in T_X Fr(G_1)$, putem introduce vectorii alunecători $\vec{\omega}_n, \vec{\omega}_\tau$ cu ajutorul dreptelor-suport $\Delta(X, \vec{\omega}^\perp), \Delta(X, \vec{\omega}^\parallel)$: $\vec{\omega}_n = \vec{\omega}^\perp, \vec{\omega}_\tau = \vec{\omega}^\parallel$.

Pe baza formulei lui Euler

$$\begin{aligned}\vec{v}_N &= \vec{v}_{transp} + \vec{\omega} \times \overline{MN} \\ &= \vec{v}_{transp} + \vec{\omega}^\perp \times \overline{MN} + \vec{\omega}^\parallel \times \overline{MN},\end{aligned}$$

putem afirma că vectorii glisanți $\vec{\omega}_n, \vec{\omega}_\tau$ definesc două rotații instantanee ale solidului rigid S_2 în jurul axelor $\Delta(X, \vec{\omega}^\perp), \Delta(X, \vec{\omega}^\parallel)$. Aceste mișcări desemnează *pivotarea*, respectiv *rostogolirea (instantanee)* a corpului S_2 pe corpul S_1 (cf. [34], p. 185). Aici, $\vec{\omega}_n, \vec{\omega}_\tau$ reprezintă *vectorii-viteză unghiulară de pivotare*, respectiv *rostogolire* ai solidului S_2 față de S_1 (cf. [15], p. 106).

O interpretare interesantă a relației (3.14) poate fi citită în [15], p. 79. Astfel, în reperul \mathcal{R}' axoida mobilă are parametrizarea dată de

$$\overline{AB} = \frac{\vec{\omega} \times \vec{v}_A}{\omega^2} + \lambda \cdot \vec{\omega} = \sigma_m(t, \lambda).$$

Aici, $q^1 = t, q^2 = \lambda$, de unde

$$\frac{\partial \sigma_m}{\partial q^1} \times \frac{\partial \sigma_m}{\partial q^2} = \left(\frac{\partial \overline{AB}}{\partial t} \right)_{\mathcal{R}'} \times \vec{\omega} = \vec{v}_{rel} \times \vec{\omega}.$$

Apoi, în sistemul de referință \mathcal{R} , axoida fixă are parametrizarea dată de

$$\overline{OB} = \overline{OA} + \overline{AB} = \overline{OA} + \frac{\vec{\omega} \times \vec{v}_A}{\omega^2} + \lambda \cdot \vec{\omega} = \sigma_f(t, \lambda),$$

de unde

$$\frac{\partial \sigma_f}{\partial q^1} \times \frac{\partial \sigma_f}{\partial q^2} = \dot{\overline{OB}} \times \vec{\omega} = \vec{v}_B \times \vec{\omega}.$$

În sfârșit, conform (3.14), avem

$$\vec{v}_B \times \vec{\omega} = \vec{v}_{rel} \times \vec{\omega},$$

egalitate care desemnează *direcția* normalei la planul tangent comun T_B al axoidelor.

3.2.4 Mișcarea relativă a două corpuri solide rigide supuse unui contact simplu. Teorema Aronhold-Kennedy

Corpurile rigide S_1, S_2 se mișcă față de sistemul de referință \mathcal{R} păstrând punctul de contact $X(t)$. Repererele carteziene $\mathcal{R}' = (A, \vec{C})$, $\mathcal{R}'' = (B, \vec{D})$ sunt presupuse solidar legate de S_1 , respectiv S_2 . Vom impune în plus ca, la un anumit moment t^* , pozițiile particulelor A și B în sistemul de referință \mathcal{R} să coincidă cu $X(t^*)$. Folosind notațiile de la subsecțiunea dedicată mișcării relative a punctului material, putem scrie că, la momentul t^* ,

$$\bar{v}_{rel,A}(X) + \bar{v}_{rel,B}(X) = 0 \quad \bar{\omega}_{12} + \bar{\omega}_{21} = 0$$

și

$$\bar{\omega}_{12}^\perp + \bar{\omega}_{21}^\perp = 0 \quad \bar{\omega}_{12}^\parallel + \bar{\omega}_{21}^\parallel = 0.$$

Am folosit relația (2.30) pentru $A = B = X(t^*)$. Formula vitezelor relative ale punctului de contact $X(t)$ este ilustrată elocvent de următoarea situație din viața de zi cu zi. Doi călători, aflați în trenuri de pasageri care se deplasează în direcții opuse pe linii de cale ferată paralele, se privesc și "simt" că se depărtează unul de celălalt *cu viteze egale dar de sensuri opuse*, indiferent de vitezele trenurilor.

Același fenomen apare și în mișcările relative de pivotare, respectiv rostogolire, care se desfășoară *în oglindă* (cf. [15], p. 100) una față de cealaltă.

Axele instantanee relative Δ_{12}, Δ_{21} au ecuațiile

$$\begin{aligned} \overline{AM} &= \overline{X(t^*)M} = \frac{\bar{\omega}_{12} \times \bar{v}_{rel,A}}{\omega_{12}^2} + \lambda \cdot \bar{\omega}_{12} \\ \overline{BN} &= \overline{X(t^*)N} = \frac{\bar{\omega}_{21} \times \bar{v}_{rel,B}}{\omega_{21}^2} + \mu \cdot \bar{\omega}_{21} \\ &= \frac{\bar{\omega}_{12} \times \bar{v}_{rel,A}}{\omega_{12}^2} + (-\mu) \cdot \bar{\omega}_{12}. \end{aligned}$$

Deci, $\Delta_{12} = \Delta_{21}$. Este ușor de remarcat, în baza considerațiilor precedente privind *dubla* calitate a "particulei" B care intervine în (3.13), (3.14), că rezultatele referitoare la momentul t^* *fixat* au loc în *orice* moment t .

Așadar, *axele instantanee ale mișcărilor pseudoelicoidale relative realizate de corpurile solide rigide S_1, S_2 aflate în contact simplu coincid* (cf. [15], p. 101, [34], p. 189). În practică, putem studia mișcarea corpurilor S_1, S_2 *raportându-ne* în mod convenabil la unul dintre ele.

Introducem acum axele instantanee $\Delta_{10}(t)$, $\Delta_{21}(t)$ și $\Delta_{20}(t)$. Punctele C_{ij} situate pe aceste drepte sunt caracterizate prin

$$\begin{aligned}\overline{AC}_{10} &= \frac{\overline{\omega}_{10} \times \overline{v}_A}{\omega_{10}^2}, \quad C_{10} \in \Delta_{10} & \overline{BC}_{20} &= \frac{\overline{\omega}_{20} \times \overline{v}_B}{\omega_{20}^2}, \quad C_{20} \in \Delta_{20} \\ \overline{BC}_{21} &= \frac{\overline{\omega}_{21} \times \overline{v}_{rel,B}}{\omega_{21}^2}, \quad C_{21} \in \Delta_{21}.\end{aligned}$$

Vom arăta că *dreptele* $\Delta_{10}(t^*)$, $\Delta_{21}(t^*)$ și $\Delta_{20}(t^*)$ admit o perpendiculară comună dacă $\overline{\omega}_{10}(t^*) \times \overline{\omega}_{20}(t^*) \neq 0$. Într-adevăr, fie $Y \in \Delta_{10}(t^*)$ și $Z \in \Delta_{20}(t^*)$. Impunem ca $YZ \perp \Delta_{10}(t^*)$, $\Delta_{20}(t^*)$, adică

$$\overline{YZ} \cdot \overline{\omega}_{10} = 0 \quad \overline{YZ} \cdot \overline{\omega}_{20} = 0.$$

Atunci,

$$\begin{aligned}0 &= \overline{YZ} \cdot \overline{\omega}_{10} = \overline{\omega}_{10} \cdot \left(\overline{X(t^*)Z} - \overline{X(t^*)Y} \right) \\ &= \overline{\omega}_{10} \cdot (\overline{BZ} - \overline{AY}) \\ &= \overline{\omega}_{10} \cdot (\overline{BC}_{20} + \lambda_{20}^Z \cdot \overline{\omega}_{20} - \overline{AC}_{10} - \lambda_{10}^Y \cdot \overline{\omega}_{10}) \\ &= \overline{\omega}_{10} \cdot \overline{BC}_{20} + (\overline{\omega}_{10} \cdot \overline{\omega}_{20}) \cdot \lambda_{20}^Z - \omega_{10}^2 \cdot \lambda_{10}^Y\end{aligned}$$

și

$$0 = \omega_{20}^2 \cdot \lambda_{20}^Z - \overline{\omega}_{20} \cdot \overline{AC}_{10} - (\overline{\omega}_{20} \cdot \overline{\omega}_{10}) \cdot \lambda_{10}^Y.$$

Sistemul *cramerian*

$$\begin{cases} \omega_{10}^2 \cdot \lambda_{10}^Y - (\overline{\omega}_{20} \cdot \overline{\omega}_{10}) \cdot \lambda_{20}^Z = \overline{BC}_{20} \cdot \overline{\omega}_{10} \\ (\overline{\omega}_{10} \cdot \overline{\omega}_{20}) \cdot \lambda_{10}^Y - \omega_{20}^2 \cdot \lambda_{20}^Z = -\overline{AC}_{10} \cdot \overline{\omega}_{20} \end{cases}$$

are soluțiile

$$\begin{cases} \lambda_{10}^Y = \frac{(\overline{BC}_{20} \cdot \overline{\omega}_{10}) \cdot \omega_{20}^2 + (\overline{AC}_{10} \cdot \overline{\omega}_{20}) \cdot (\overline{\omega}_{10} \cdot \overline{\omega}_{20})}{\omega_{10}^2 \cdot \omega_{20}^2 - (\overline{\omega}_{10} \cdot \overline{\omega}_{20})^2} \\ \lambda_{20}^Z = \frac{(\overline{AC}_{10} \cdot \overline{\omega}_{20}) \cdot \omega_{10}^2 + (\overline{BC}_{20} \cdot \overline{\omega}_{10}) \cdot (\overline{\omega}_{20} \cdot \overline{\omega}_{10})}{\omega_{20}^2 \cdot \omega_{10}^2 - (\overline{\omega}_{20} \cdot \overline{\omega}_{10})^2} \end{cases}$$

(cf. [15], p. 102-103).

Evident,

$$\omega_{10}^2 \cdot \omega_{20}^2 - (\overline{\omega}_{10} \cdot \overline{\omega}_{20})^2 = |\overline{\omega}_{10} \times \overline{\omega}_{20}|^2 \neq 0.$$

Fie acum $V \in \Delta_{10}(t^*)$, $W \in \Delta_{21}(t^*)$ pentru care $\overline{VW} \cdot \overline{\omega}_{10} = \overline{VW} \cdot \overline{\omega}_{21} = 0$.

În mod analog,

$$\begin{cases} \omega_{10}^2 \cdot \lambda_{10}^V - (\overline{\omega}_{21} \cdot \overline{\omega}_{10}) \cdot \lambda_{21}^W = \overline{BC}_{21} \cdot \overline{\omega}_{10} \\ (\overline{\omega}_{10} \cdot \overline{\omega}_{21}) \cdot \lambda_{10}^V - \omega_{21}^2 \cdot \lambda_{21}^W = -\overline{AC}_{10} \cdot \overline{\omega}_{21}, \end{cases}$$

de unde

$$\begin{cases} \lambda_{10}^V = \frac{(\overline{BC}_{21} \cdot \overline{\omega}_{10}) \cdot \omega_{21}^2 + (\overline{AC}_{10} \cdot \overline{\omega}_{21}) \cdot (\overline{\omega}_{10} \cdot \overline{\omega}_{21})}{\omega_{10}^2 \cdot \omega_{21}^2 - (\overline{\omega}_{10} \cdot \overline{\omega}_{21})^2} \\ \lambda_{21}^W = \frac{(\overline{AC}_{10} \cdot \overline{\omega}_{21}) \cdot \omega_{10}^2 + (\overline{BC}_{21} \cdot \overline{\omega}_{10}) \cdot (\overline{\omega}_{21} \cdot \overline{\omega}_{10})}{\omega_{21}^2 \cdot \omega_{10}^2 - (\overline{\omega}_{21} \cdot \overline{\omega}_{10})^2}. \end{cases}$$

Să dovedim că $\lambda_{10}^V = \lambda_{10}^Y$, adică $V = Y$. Mai întâi,

$$\begin{aligned} \omega_{10}^2 \cdot \omega_{21}^2 - (\overline{\omega}_{10} \cdot \overline{\omega}_{21})^2 &= |\overline{\omega}_{10} \times \overline{\omega}_{21}|^2 \stackrel{(2.31)}{=} |\overline{\omega}_{10} \times (\overline{\omega}_{20} - \overline{\omega}_{10})|^2 \\ &= |\overline{\omega}_{10} \times \overline{\omega}_{20}|^2, \end{aligned}$$

ceea ce probează egalitatea *numitorilor* fracțiilor $\lambda_{10}^V, \lambda_{10}^Y$.

Apoi,

$$\begin{aligned} (\overline{BC}_{21} \cdot \overline{\omega}_{10}) \cdot \omega_{21}^2 &= (\overline{\omega}_{21} \times \overline{v}_{rel,B}) \cdot \overline{\omega}_{10} \\ &\stackrel{(2.31), (2.28)}{=} [(\overline{\omega}_{20} - \overline{\omega}_{10}) \times (\overline{v}_B - \overline{v}_A)] \cdot \overline{\omega}_{10} \\ &= (\overline{\omega}_{20} - \overline{\omega}_{10}, \overline{v}_B - \overline{v}_A, \overline{\omega}_{10}) \\ &= (\overline{\omega}_{20}, \overline{v}_B - \overline{v}_A, \overline{\omega}_{10}) - (\overline{\omega}_{10}, \overline{v}_B - \overline{v}_A, \overline{\omega}_{10}) \\ &= (\overline{\omega}_{20}, \overline{v}_B - \overline{v}_A, \overline{\omega}_{10}) \\ &= (\overline{\omega}_{20}, \overline{v}_B, \overline{\omega}_{10}) - (\overline{\omega}_{20}, \overline{v}_A, \overline{\omega}_{10}) \\ &= (\overline{BC}_{20} \cdot \overline{\omega}_{10}) \cdot \omega_{20}^2 - (\overline{\omega}_{20}, \overline{v}_A, \overline{\omega}_{10}) \end{aligned}$$

și

$$\begin{aligned} (\overline{AC}_{10} \cdot \overline{\omega}_{21}) \cdot (\overline{\omega}_{10} \cdot \overline{\omega}_{21}) &= \left[\frac{\overline{\omega}_{10} \times \overline{v}_A}{\omega_{10}^2} \cdot (\overline{\omega}_{20} - \overline{\omega}_{10}) \right] \cdot (\overline{\omega}_{10} \cdot \overline{\omega}_{21}) \\ &= \frac{(\overline{\omega}_{10}, \overline{v}_A, \overline{\omega}_{20})}{\omega_{10}^2} \cdot (\overline{\omega}_{10} \cdot \overline{\omega}_{21}) \\ &\stackrel{(2.31)}{=} \frac{(\overline{\omega}_{10}, \overline{v}_A, \overline{\omega}_{20})}{\omega_{10}^2} \cdot (\overline{\omega}_{10} \cdot \overline{\omega}_{20} - \omega_{10}^2) \\ &= \frac{1}{\omega_{10}^2} \cdot (\overline{\omega}_{10}, \overline{v}_A, \overline{\omega}_{20}) \cdot (\overline{\omega}_{10} \cdot \overline{\omega}_{20}) \\ &\quad + (\overline{\omega}_{20}, \overline{v}_A, \overline{\omega}_{10}) \\ &= (\overline{AC}_{10} \cdot \overline{\omega}_{20}) \cdot (\overline{\omega}_{10} \cdot \overline{\omega}_{20}) + (\overline{\omega}_{20}, \overline{v}_A, \overline{\omega}_{10}). \end{aligned}$$

Prin sumare membru cu membru a acestor relații se stabilește egalitatea *numărătorilor* fracțiilor $\lambda_{10}^V, \lambda_{10}^Y$.

În concluzie, $YZ \perp \Delta_{10}(t^*)$, $\Delta_{20}(t^*)$ și $YW \perp \Delta_{10}(t^*)$, $\Delta_{21}(t^*)$. Considerând $U \in \Delta_{20}(t^*)$, $H \in \Delta_{21}(t^*)$ pentru care $\overline{UH} \cdot \overline{\omega}_{20} = \overline{UH} \cdot \overline{\omega}_{21} = 0$ se arată absolut analog că $U = Z$ și $H = W$ (cf. [15], p. 104). Astfel, $ZW \perp \Delta_{20}(t^*)$, $\Delta_{21}(t^*)$. Dacă punctele Y , Z , W nu sunt coliniare, atunci dreptele $\Delta_{10}(t^*)$, $\Delta_{20}(t^*)$, $\Delta_{21}(t^*)$ vor fi toate perpendiculare pe planul triunghiului YZW , deci *paralele*. Vectorii lor directori fiind $\overline{\omega}_{10}$, $\overline{\omega}_{20}$ și $\overline{\omega}_{21} = \overline{\omega}_{20} - \overline{\omega}_{10}$, deducem că direcțiile $\overline{\omega}_{10}(t^*)$, $\overline{\omega}_{20}(t^*)$ sunt coliniare, adică $\overline{\omega}_{10}(t^*) \times \overline{\omega}_{20}(t^*) = 0$, ceea ce contrazice ipoteza.

Dreapta d care trece prin punctele Y , Z , W este perpendiculara comună a axelor $\Delta_{10}(t^*)$, $\Delta_{21}(t^*)$ și $\Delta_{20}(t^*)$. Acest rezultat constituie **teorema Aronhold-Kennedy** (cf. [15], p. 102). Desigur, dacă într-o anumită problemă de mecanică teoretică două dintre axe au un punct comun, dreapta d poate degenera într-un punct.

3.2.5 Principiul independenței mișcărilor. Compunerea translațiilor și rotațiilor

Ne vom referi acum la cel de-al doilea element de noutate prezent în interpretările cinematică și geometrică ale mișcării generale a solidului rigid, și anume existența mișcărilor simultane.

Să presupunem că solidul rigid S_1 realizează o mișcare de rotație absolută, caracterizată de vectorul-viteză unghiulară $\overline{\omega}_{10}$ glisant pe axa fixă Δ_{10} , iar că solidul rigid S_2 se rotește în raport cu reperul \mathcal{R}' în jurul unei axe fixe Δ_{21} relative, având vectorul-viteză unghiulară $\overline{\omega}_{21}$. Cele două corpuri materiale nu se află neapărat în contact, deși, de obicei, mișcarea se *imprimă* (transmite) prin contact. În discuția de față, corpurile sunt folosite în calitatea lor de spații (triedre) ”rigide”. Viteza unui punct material X solidar legat de corpul rigid S_2 este ($A \in \Delta_{10}$, $B \in \Delta_{21}$)

$$\overline{v}_X = \overline{v}_{transp} + \overline{v}_{rel} = \overline{\omega}_{10} \times \overline{AX} + \overline{\omega}_{21} \times \overline{BX}$$

deoarece $\overline{v}_A = 0$, $\overline{v}_{rel,B} = 0$. Atunci, putem scrie că

$$\overline{v}_X = \overline{\mathcal{M}}_X(\overline{\omega}_{10}) + \overline{\mathcal{M}}_X(\overline{\omega}_{21}) = \overline{\mathcal{M}}_X(\{\overline{\omega}_{10}, \overline{\omega}_{21}\}) \in T_X \mathbb{R}^3$$

(cf. [34], p. 181). Formula obținută arată că, *interpretând viteza, punctul material X realizează la momentul t două rotații absolute (instantanee), simultane, de axe Δ_{10} , Δ_{21}* . De asemenea, ordinea celor două rotații anterioare

poate fi inversată fără a impieta asupra mișcării compuse (cf. [34], p. 182). În concluzie, *mișcările efectuate simultan de un mobil sunt independente una de alta*, fapt care constituie **principiul independenței mișcărilor** (Galilei) (cf. [32], p. 196).

Existența sistemului de vectori alunecători $\{\vec{\omega}_{10}, \vec{\omega}_{21}\}$ permite aplicarea *analogiei statică-cinematică*. Astfel, dacă axele Δ_{10} , Δ_{21} sunt concurente în punctul D , atunci sistemul va fi echivalent cu vectorul $\vec{\omega}$, unde $\vec{\omega} = \vec{\omega}_{10} + \vec{\omega}_{21}$, glisant pe dreapta Δ determinată de punctul D și de vectorul (director) $\vec{\omega}$. Cu alte cuvinte, compunerea a două rotații finite sau infinitezimale cu axele concurente se realizează după *regula paralelogramului* (G. Coriolis) (cf. [32], a), p. 196, [76], p. 329), fiind tot o rotație. În schimb, când axele Δ_{10} , Δ_{21} sunt paralele, sistemul de vectori-viteză unghiulară sau se reduce la un vector-viteză unghiulară rezultat care glisează pe axa centrală a sistemului de vectori paraleli sau constituie un cuplu de vectori-viteză unghiulară, ceea ce implică, interpretând viteza, o *mișcare de translație* (cf. [32], c), p. 196-197, [76], p. 331). Dacă axele Δ_{10} , Δ_{21} sunt necoplanare, rotațiile pot fi compuse reducând sistemul $\{\vec{\omega}_{10}, \vec{\omega}_{21}\}$ în mod convenabil prin introducerea de *translații compensatoare* (corespondentul cuplului compensator) (cf. [32], b), p. 196). Evident, aceeași discuție are loc și în cazul a mai mult de două mișcări de rotație simultane. În particular, compunerea mai multor mișcări de translație corespunde reducerii unui sistem de cupluri de vectori glisanți, deci constituie o mișcare având distribuția de viteze caracteristică translației. Și aici se utilizează *regula paralelogramului*, a cărei aplicare este simplificată de faptul că vectorii aduși în discuție sunt liberi (cf. [32], p. 196).

3.2.6 Mișcarea plană (plan-paralelă). Centrul instantaneu de rotație (centrul vitezelor). Centroide. Mișcarea epicycloidală. Centrul geometric al accelerațiilor. Cercurile lui Bresse. Centrul (polul) accelerațiilor. Teorema celor trei centre instantanee de rotație. Teorema asemănării (Burmester-Mehmke)

Să presupunem acum că trei dintre punctele materiale din constituția solidului rigid S , și anume M_1 , M_2 , M_3 , necoliniare, rămân pe tot parcursul mișcării acestuia într-un plan *fix*, de exemplu, unul din planele de coordonate

ale sistemului de referință \mathcal{R} ([63], p. 190). Plecând de la considerente geometrice discutate anterior, putem spune că *orice altă particulă M a solidului rigid va evolua sau în planul $(M_1M_2M_3)$ sau într-un plan Π paralel cu acesta (mișcare plan-paralelă)* (cf. [14], p. 108). Într-adevăr, cum

$$\begin{aligned}\mathcal{V}_{[MM_1M_2M_3]} &= \frac{1}{3}d \cdot \mathcal{S}_{\Delta M_1M_2M_3} = \frac{1}{6}d \cdot |\overline{M_1M_2} \times \overline{M_1M_3}| \\ &= \frac{1}{6} |(\overline{MM_1}, \overline{MM_2}, \overline{MM_3})|\end{aligned}$$

(cf. [65], p. 72), unde $d = \text{dist}(M, (M_1M_2M_3))$, justificarea afirmației de mai sus se reduce la a dovedi că

$$|\overline{M_1M_2} \times \overline{M_1M_3}|, |(\overline{MM_1}, \overline{MM_2}, \overline{MM_3})| = \text{constant.}$$

Conform identității lui Lagrange, avem

$$\begin{aligned}|\overline{M_1M_2} \times \overline{M_1M_3}|^2 &= |\overline{M_1M_2}|^2 \cdot |\overline{M_1M_3}|^2 - (\overline{M_1M_2} \cdot \overline{M_1M_3})^2 \\ &= \text{constant.}\end{aligned}$$

De asemeni,

$$\begin{aligned}|\overline{MM_1} \times (\overline{MM_2} \times \overline{MM_3})|^2 &= [\overline{MM_1} \times (\overline{MM_2} \times \overline{MM_3})]^2 \\ &= [(\overline{MM_1} \cdot \overline{MM_3}) \cdot \overline{MM_2} \\ &\quad - (\overline{MM_1} \cdot \overline{MM_2}) \cdot \overline{MM_3}]^2 \\ &= (\overline{MM_1} \cdot \overline{MM_3})^2 \cdot |\overline{MM_2}|^2 \\ &\quad + (\overline{MM_1} \cdot \overline{MM_2})^2 \cdot |\overline{MM_3}|^2 \\ &\quad - 2 \cdot (\overline{MM_1} \cdot \overline{MM_3}) \cdot (\overline{MM_1} \cdot \overline{MM_2}) \\ &\quad \cdot (\overline{MM_2} \cdot \overline{MM_3}) \\ &= \text{constant.}\end{aligned}$$

Aplicând din nou identitatea lui Lagrange, putem scrie că

$$\begin{aligned}[\overline{MM_1} \times (\overline{MM_2} \times \overline{MM_3})]^2 &= |\overline{MM_1}|^2 \cdot |\overline{MM_2} \times \overline{MM_3}|^2 \\ &\quad - [\overline{MM_1} \cdot (\overline{MM_2} \times \overline{MM_3})]^2 \\ &= \text{constant,}\end{aligned}$$

respectiv

$$\begin{aligned} (\overline{MM_1}, \overline{MM_2}, \overline{MM_3})^2 &= |\overline{MM_1}|^2 \cdot |\overline{MM_2} \times \overline{MM_3}|^2 \\ &\quad - [\overline{MM_1} \times (\overline{MM_2} \times \overline{MM_3})]^2 \\ &= \text{constant.} \end{aligned}$$

Justificarea s-a încheiat. În particular, viteza și accelerația punctului material M rămân în planul Π pe tot parcursul mișcării solidului rigid (cf. [63], p. 190). Aceasta pentru că, în mod evident, traiectoria particulei M este o curbă plană iar planul său osculator coincide cu planul Π (cf. [48], p. 27). Luând drept plan fix al mișcării planul de coordonate Oxy (vezi Figura 3.18), au loc relațiile¹

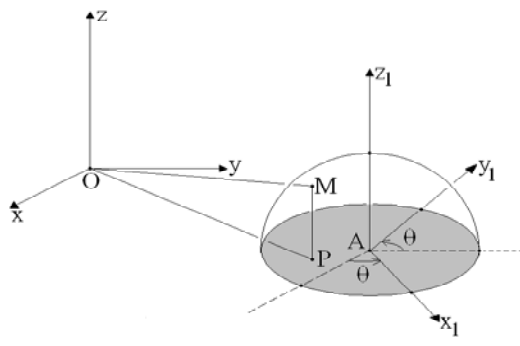


Figura 3.18

$$\overline{OM} = \overline{OP} + \overline{PM} = \overline{OP} \pm d \cdot \vec{k} \quad \vec{v}_P = \dot{\overline{OP}} = \dot{\overline{OM}} = \vec{v}_M.$$

Astfel, punctele situate pe o paralelă la axa Oz realizează traiectorii identice, în plane paralele (cf. [76], p. 309). Putem reduce, așadar, studiul mișcării punctului material M la acela al proiecției sale P (mișcare plană) (cf. [63], p. 191, [32], p. 103). În tehnică, planul Π se mai numește și *plan mobil* (cf. [63], p. 190).

Reperul $\mathcal{R}' = (A, \vec{C})$ solidar legat de corpul rigid S este ales în așa fel încât unul din planele sale de coordonate să coincidă cu planul fix al mișcării. Notând cu θ unghiul făcut de vectorii \vec{i}, \vec{i}_1 , obținem

$$\vec{i}_1 = \cos \theta \cdot \vec{i} + \sin \theta \cdot \vec{j} \quad \vec{j}_1 = -\sin \theta \cdot \vec{i} + \cos \theta \cdot \vec{j}$$

¹Semnul din prima formulă depinde de semispațiul ales.

(cf. [15], p. 85) și

$$\dot{\bar{i}}_1 = \dot{\theta} \cdot \bar{j}_1 \quad \dot{\bar{j}}_1 = -\dot{\theta} \cdot \bar{i}_1$$

(cf. [34], p. 177).

Introducând vectorul $\bar{\omega} \stackrel{def}{=} \omega \cdot \bar{k}$, unde $\omega \stackrel{not}{=} \dot{\theta}$, deducem că ($\bar{k} = \bar{k}_1$)

$$\dot{\bar{i}}_1 = \bar{\omega} \times \bar{i}_1 \quad \dot{\bar{j}}_1 = \bar{\omega} \times \bar{j}_1 \quad \dot{\bar{k}}_1 = \bar{\omega} \times \bar{k}_1 = 0.$$

Unicitatea *reprezentării* (2.21) ne permite să afirmăm că $\bar{\omega}$ este vectorul-viteză unghiulară instantanee al mișcării reperului \mathcal{R}' față de sistemul de referință \mathcal{R} . În particular, *axa instantanee Δ rămâne pe tot parcursul mișcării paralelă cu Oz iar poziția solidului rigid S este caracterizată complet de trei parametri: x_A, y_A, θ* (cf. [34], p. 176, [76], p. 309).

Notăm cu $I(t)$ punctul de intersecție al axei instantanee Δ cu planul fix Oxy (cf. [34], p. 199). Particula din constituția solidului S care are, la momentul t , poziția $I(t)$ va avea vectorul-viteză coliniar cu $\bar{\omega}$. Pe de altă parte, particula în cauză se mișcă pe o curbă situată în planul $(M_1M_2M_3)$, ceea ce implică faptul că vectorul său viteză se găsește în spațiul director al planului $(M_1M_2M_3)$, ortogonal pe $\bar{\omega}$. Astfel, *viteza particulei este nulă la momentul t* . Punctul $I(t)$ poartă denumirea de *centru instantaneu de rotație* (cf. [34], p. 199, [76], p. 309). La rândul său, punctul de intersecție al axei $\Delta(t)$ cu planul Π în care evoluează particula M se numește *centrul vitezelor* (cf. [32], p. 103). Evident, viteza particulei corespunzătoare este nulă la momentul t .

Aplicând formula lui Euler, avem $\bar{v}_M = \bar{v}_I + \bar{\omega} \times \overline{IP} = \bar{\omega} \times \overline{IP} = \bar{\omega} \times \overline{IM}$. Deci, *în interpretare cinematică, mișcarea solidului rigid poate fi imaginată fie ca o translație (momentană) (când $\omega = 0$) fie ca o rotație (momentană) în jurul axei Δ (Euler) (cf. [76], p. 309, [34], p. 199)*. Aceasta se numește *axă instantanee de rotație* (cf. [14], p. 108). În cazul rostogolirii fără alunecare a unui cilindru omogen pe planul orizontal, axa de rotație Δ este chiar *generatoarea* de contact cu planul a cilindrului (Descartes, 1638) (cf. [32], exemplul de la p. 100, [76], aplicația 2°, p. 312).

Păstrând analogia cu mișcarea *geometrică*, trebuie spus că trecerea din poziția A_1B_1 a unui segment AB , situat în planul fix al mișcării, în poziția A_2B_2 din același plan poate fi realizată fie printr-o rotație *unică* în jurul punctului de intersecție al mediatoarelor segmentelor A_1A_2, B_1B_2 (numit și *centrul rotațiilor finite*) fie printr-o translație *unică* (cazul segmentelor A_1B_1, A_2B_2 paralele) (cf. [63], p. 193, [34], p. 201).

În mișcarea sa față de sistemul de referință \mathcal{R} , centrul instantaneu de rotație $I(t)$ descrie o curbă plană numită *centroidă fixă* sau *bază* (cf. [76], p. 310, [34], p. 202, [14], p. 108). Curbă realizată de $I(t)$ în mișcarea sa față de reperul mobil \mathcal{R}' poartă denumirea de *centroidă mobilă (rulantă, rostogolitoare)* (cf. [63], p. 194, [32], p. 104).

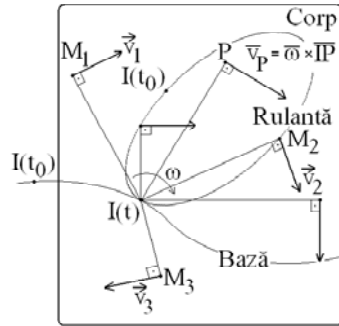


Figura 3.19

Notând cu $s(t)$, $s_1(t)$ coordonatele curbilinii ale centrului $I(t)$ pe bază, respectiv rulantă, începând de la momentul inițial t_0 (vezi Figura 3.19), putem aplica legea fundamentală de compunere a vitezelor

$$\bar{v}_{abs}(I) = \bar{v}_{transp}(I) + \bar{v}_{rel}(I) = \bar{v}_{rel}(I)$$

deoarece "particula" I , ca element al configurației punctelor materiale din componența solidului S , are la momentul t viteza de transport nulă (cf. [34], p. 202, [76], p. 311). De unde,

$$\dot{s}(t) \cdot \bar{\tau} = \dot{s}_1(t) \cdot \bar{\tau} \quad s(t_0) = s_1(t_0) = 0$$

și, prin integrare în raport cu timpul t , obținem $s(t) = s_1(t)$, $t \geq t_0$ (cf. [14], p. 109). Am ținut seama de faptul că *axoidele*, care sunt în acest caz *suprafețe cilindrice având drept directoare centroidele* (cf. [48], p. 41), admit planul tangent comun $T_{I(t)}$. Egalitatea coordonatelor curbilinii ale centrului $I(t)$ face posibilă următoarea *interpretare geometrică* a mișcării plane: *în fiecare moment t , mișcarea figurii plane (plăcii rigide) care conține proiecția P poate fi considerată ca o rostogolire fără alunecare a rulantei (presupusă solidar legată de placă) peste bază, punctul de contact al celor două curbe fiind centrul instantaneu de rotație $I(t)$* (cf. [32], p. 104).

Impunând ca $\lambda = 0$ în (3.13), obținem

$$0 = \bar{v}_A + \bar{\omega} \times \overline{AB},$$

formulă care, proiectată pe axele triedrelor \mathcal{R} , \mathcal{R}' , ne conduce la *ecuațiile parametrice* ale rostogolitoarei

$$\xi = -\frac{v_{A,y_1}}{\omega} \quad \eta = \frac{v_{A,x_1}}{\omega} \quad \zeta = 0$$

(cf. [76], p. 309, [14], p. 108, [63], p. 195), respectiv ecuațiile parametrice ale bazei

$$x = x_A + \xi \cdot \cos \theta - \eta \cdot \sin \theta \quad y = y_A + \xi \cdot \sin \theta + \eta \cdot \cos \theta \quad z = 0$$

(cf. [76], p. 310, [63], p. 195). Am folosit relațiile

$$\begin{aligned} \overline{OB} &= \overline{OA} + \overline{AB} = \bar{r}_A + \xi \cdot \bar{i}_1 + \eta \cdot \bar{j}_1 \\ &= \bar{r}_A + (\xi \cdot \cos \theta - \eta \cdot \sin \theta) \cdot \bar{i} + (\xi \cdot \sin \theta + \eta \cdot \cos \theta) \cdot \bar{j}. \end{aligned}$$

În interpretare geometrică, mișcarea plană (plan-paralelă) este, așadar, rostogolirea *fără alunecare* a unei curbe peste o altă curbă. De aceea, unii autori numesc această mișcare *epicicloidală* (cf. [32], p. 104, [59], p. 36). *Cicloida* este, s. s., curba descrisă de un anumit punct al roții unui automobil atunci când acesta execută o mișcare rectilinie uniformă, fără *patinare* (alunecare) (cf. [76], aplicația 2°, p. 312, [63], aplicația 1), p. 202-203, [59], problema 3.2.10, p. 41, [34], p. 204). La rândul său, *epicicloida* constituie curba realizată de un anumit punct al unui cerc care se rostogolește fără alunecare *peste* un cerc fix (cf. [34], p. 205). Epicicloida reprezintă un element esențial al mecanicilor celeste aparținând lui Ptolemeu și Copernic (cf. [11], p. 17). O altă curbă spectaculoasă, *hipocicloida*, obținută prin evoluția unui anumit punct al unui cerc care se rostogolește fără alunecare *într-un* cerc fix, este întâlnită în *problema lui Cardan* (cf. [76], aplicația 3°, p. 312-313, [63], p. 195, [59], problema 3.2.4, p. 38). Un exemplu uzual de hipocicloida îl oferă *astroida* (cf. [11], p. 56).

Ne vom referi în continuare la distribuția accelerațiilor în mișcarea plană. Urmând calculul făcut în [59], problema 3.2.7, p. 39, 197, putem scrie că

$$\bar{v}_P = \bar{\omega} \times \overline{IP} = \bar{\omega} \times (\overline{OP} - \overline{OI}),$$

de unde

$$\begin{aligned}
 \bar{a}_P &= \dot{\bar{v}}_P = \bar{\varepsilon} \times \overline{IP} + \bar{\omega} \times (\bar{v}_P - \bar{v}_{abs}(I)) \\
 &= \bar{\varepsilon} \times \overline{IP} + \bar{\omega} \times (\bar{\omega} \times \overline{IP}) - \bar{\omega} \times \bar{v}_{abs}(I) \\
 &= \bar{\varepsilon} \times \overline{IP} + (\bar{\omega} \cdot \overline{IP}) \cdot \bar{\omega} - \omega^2 \cdot \overline{IP} - \bar{\omega} \times \bar{v}_{abs}(I) \\
 &= \bar{\varepsilon} \times \overline{IP} - \omega^2 \cdot \overline{IP} - \bar{\omega} \times \bar{v}_{abs}(I)
 \end{aligned}$$

deoarece vectorii $\bar{\omega}$, \overline{IP} sunt ortogonali. Aici, $\bar{v}_{abs}(I)$ desemnează viteza cu care centrul instantaneu $I(t)$ se deplasează pe bază iar P reprezintă un punct oarecare al plăcii rigide. Punctul material P care, la momentul t^* , are poziția centrului instantaneu de rotație, va avea accelerația $\vec{a}_P \in T_P \mathbb{R}^3$, $\vec{a}_P \in \bar{a}_P$, unde ($I = P$)

$$\bar{a}_P(t^*) = -\bar{\omega} \times \bar{v}_{abs}(I(t^*)).$$

Deoarece direcția vitezei centrului I pe bază este dată de vectorul director al tangentei comune a centroidelor la momentul t^* , vectorul $\bar{a}_P(t)$ devine coliniar cu direcția normalei comune a centroidelor la momentul t^* (cf. [32], p. 136).

Formula

$$\begin{aligned}
 \bar{a}_P &= \bar{\varepsilon} \times \overline{IP} - \omega^2 \cdot \overline{IP} - \bar{\omega} \times \bar{v}_{abs}(I) \\
 &= \bar{a}_I + \bar{\varepsilon} \times \overline{IP} - \omega^2 \cdot \overline{IP}
 \end{aligned}$$

reprezintă un caz particular al *teoremei lui Rivals*.

Ținând seama de (2.16), are loc relația

$$\bar{a}_P(t^*) = \bar{a}_{P,\tau}(t^*) + \bar{a}_{P,\nu}(t^*) = \bar{a}_{P,\tau}(t^*),$$

căci $\bar{v}_P(t^*) = 0$. Astfel, direcția accelerației mobilului P va coincide, la momentul $t = t^*$, cu direcția tangentei la traiectoria acestuia (vezi Figura 3.20). Cum $\bar{v}_P(t^*) = 0$, poziția respectivă desemnează un *punct de rebrusment* al traiectoriei particulei P .

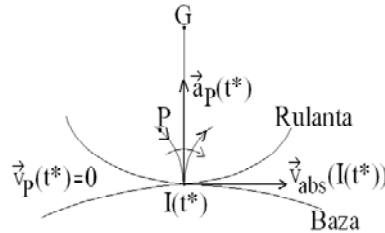


Figura 3.20

Două probleme pot fi puse în mod natural. Prima se referă la determinarea acelor puncte materiale P din constituția plăcii rigide care au, la momentul t , viteza și accelerația perpendiculare. Găsindu-se, în momentul respectiv, într-un punct de rebrusment al traiectoriei lor (absolute), acestea vor constitui *punctele de rebrusment* ale plăcii rigide (la momentul t). Cea de-a doua problemă privește existența particulelor P care au, la momentul t , viteza și accelerația coliniare. Evident, cum $\bar{v}_P(t^*) = 0$, centrul instantaneu de rotație ne procură asemenea puncte. Aflându-se, la momentul respectiv, într-un punct de inflexiune (cf. [48], p. 31) al traiectoriei lor (absolute), punctele respective desemnează *punctele de inflexiune* ale plăcii rigide (la momentul t).

Introducem punctul $G(t)$ (a nu se confunda cu *centrul de masă* G al unui sistem mecanic, utilizat în *dinamică*), numit *centrul geometric al accelerațiilor* (cf. [59], p. 39), cu ajutorul formulei

$$\overline{IG} = -\frac{\bar{\omega} \times \bar{v}_{abs}(I)}{\omega^2}.$$

Evident, $\bar{\omega} \times \overline{IG} = -\frac{1}{\omega^2} \cdot [(\bar{\omega} \cdot \bar{v}_{abs}(I)) \cdot \bar{\omega} - \omega^2 \cdot \bar{v}_{abs}(I)] = \bar{v}_{abs}(I)$, vectorii $\bar{\omega}$, $\bar{v}_{abs}(I)$ fiind ortogonali.

Atunci, conform calculelor din [59], problema 3.2.8, p. 40, 197-198, avem

$$\begin{aligned} \bar{a}_P &= \bar{\varepsilon} \times \overline{IP} - \omega^2 \cdot \overline{IP} - \bar{\omega} \times \bar{v}_{abs}(I) \\ &= \bar{\varepsilon} \times \overline{IP} - \omega^2 \cdot \overline{IP} + \omega^2 \cdot \overline{IG}. \end{aligned}$$

Impunând ca punctul P să fie punct de inflexiune al plăcii rigide, adică $\bar{a}_P \parallel \bar{v}_P$, ajungem la $\bar{a}_P \perp \overline{IP}$, căci $\bar{v}_P = \bar{\omega} \times \overline{IP}$. Atunci,

$$0 = \bar{a}_P \cdot \overline{IP} = -\omega^2 \cdot \overline{IP}^2 + \omega^2 \cdot (\overline{IP} \cdot \overline{IG}).$$

Egalitatea $\overline{IP}^2 = \overline{IP} \cdot \overline{IG}$ constituie reciproca *teoremei catetei* în triunghiul IPG . În concluzie, punctele de inflexiune ale plăcii rigide se găsesc pe cercul de diametru IG . Parcurgând în sens invers demonstrația precedentă, putem afirma că *locul geometric al punctelor de inflexiune ale plăcii rigide la momentul t este cercul de diametru IG , numit cercul inflexiunilor plăcii rigide* (cf. [76], observația 3°, p. 314).

Dacă P este un punct de rebrusment al plăcii, atunci $\bar{a}_P \parallel \overline{IP}$, astfel că

$$\begin{aligned} 0 &= \bar{a}_P \times \overline{IP} = (\bar{\varepsilon} \times \overline{IP}) \times \overline{IP} - (\bar{\omega} \times \bar{v}_{abs}(I)) \times \overline{IP} \\ &= -\overline{IP} \times (\bar{\varepsilon} \times \overline{IP}) + \overline{IP} \times (\bar{\omega} \times \bar{v}_{abs}(I)) \\ &= -\overline{IP}^2 \cdot \bar{\varepsilon} + (\bar{\varepsilon} \cdot \overline{IP}) \cdot \overline{IP} + (\overline{IP} \cdot \bar{v}_{abs}(I)) \cdot \bar{\omega} \end{aligned}$$

deoarece vectorii $\bar{\omega}$, \overline{IP} sunt ortogonali. În plus, cum $\bar{\varepsilon} = \dot{\bar{\omega}} = \dot{\omega} \cdot \bar{k} = \varepsilon \cdot \bar{k}$, deducem că și vectorii $\bar{\varepsilon}$, \overline{IP} sunt ortogonali, deci

$$\begin{aligned} |\overline{IP}|^2 \cdot \bar{\varepsilon} &= \varepsilon |\overline{IP}|^2 \cdot \bar{k} \\ &= (\overline{IP} \cdot \bar{v}_{abs}(I)) \cdot \bar{\omega} = \omega (\overline{IP} \cdot \bar{v}_{abs}(I)) \cdot \bar{k}. \end{aligned}$$

Din

$$|\overline{IP}|^2 = \overline{IP} \cdot \left(\frac{\omega}{\varepsilon} \bar{v}_{abs}(I) \right)$$

rezultă că, pe baza reciprocei teoremei catetei, punctul P se găsește pe cercul de diametru IT , unde

$$\overline{IT} = \frac{\omega}{\varepsilon} \bar{v}_{abs}(I).$$

La fel ca anterior, *locul geometric al punctelor de rebrusment ale plăcii rigide la momentul t este cercul de diametru IT , numit cercul de rebrusment al plăcii rigide* (cf. [76], p. 314-315). În mod evident, cercul inflexiunilor și cercul de rebrusment (întoarcerilor) sunt *ortogonale*. Ele sunt cunoscute și sub denumirea de *cercurile lui Bresse* (cf. [26], p. 186).

Cercurile lui Bresse au în comun centrul instantaneu $I(t^*)$. Pentru aceasta am speculat faptul că vectorul nul $\bar{v}_P(t^*)$ este *simultan* și coliniar și ortogonal cu vectorul $\bar{a}_P(t^*)$. În mod logic, ne punem întrebarea dacă o situație *duală* se întâlnește în cazul accelerației. Mai precis, există puncte P în constituția plăcii rigide care să aibă la un anumit moment t accelerația nulă?

Pe baza *distribuției accelerațiilor* în mișcarea generală a solidului rigid deducem că

$$\begin{aligned} 0 &= \bar{a}_P = \bar{a}_A(t) + \bar{\varepsilon} \times \overline{AP} + \bar{\omega} \times (\bar{\omega} \times \overline{AP}) \\ &= \bar{a}_A(t) + \bar{\varepsilon} \times \overline{AP} - \omega^2 \cdot \overline{AP}. \end{aligned}$$

Formula $\omega^2 \cdot \overline{AP} - \bar{\varepsilon} \times \overline{AP} = \bar{a}_A$, înmulțită vectorial la stânga cu $\bar{\varepsilon}$, ne conduce la ($\bar{\varepsilon} \cdot \overline{AP} = 0$)

$$\omega^2 \cdot (\bar{\varepsilon} \times \overline{AP}) + \varepsilon^2 \cdot \overline{AP} = \bar{\varepsilon} \times \bar{a}_A,$$

de unde

$$\omega^2 \cdot (\omega^2 \cdot \overline{AP} - \bar{a}_A) + \varepsilon^2 \cdot \overline{AP} = \bar{\varepsilon} \times \bar{a}_A$$

și

$$\overline{AP} = \frac{\omega^2 \cdot \bar{a}_A + \bar{\varepsilon} \times \bar{a}_A}{\varepsilon^2 + \omega^4} \quad (3.15)$$

(cf. [32], p. 104, [14], p. 111, [63], p. 213). Cum vectorii \bar{a}_A și $\bar{\varepsilon} \times \bar{a}_A$, respectiv $\bar{\varepsilon}$ și \bar{a}_A sunt ortogonali, avem

$$\begin{aligned}
 \overline{AP} \cdot \bar{a}_A &= \frac{\omega^2 \cdot \bar{a}_A^2}{\varepsilon^2 + \omega^4} \\
 &= |\overline{AP}| \cdot |\bar{a}_A| \cdot \cos \angle (\overline{AP}, \bar{a}_A) \\
 &= \sqrt{\overline{AP}^2} \cdot |\bar{a}_A| \cdot \cos \angle (\overline{AP}, \bar{a}_A) \\
 &= \frac{|\bar{a}_A|}{\varepsilon^2 + \omega^4} \cdot \sqrt{\omega^4 \cdot \bar{a}_A^2 + (\bar{\varepsilon} \times \bar{a}_A)^2} \cdot \cos \angle (\overline{AP}, \bar{a}_A) \\
 &= \frac{|\bar{a}_A|}{\varepsilon^2 + \omega^4} \cdot \sqrt{|\bar{a}_A|^2 (\omega^4 + \varepsilon^2)} \cdot \cos \angle (\overline{AP}, \bar{a}_A) \\
 &= \frac{|\bar{a}_A|^2}{\sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4}} \cdot \cos (\overline{AP}, \bar{a}_A),
 \end{aligned}$$

respectiv

$$\begin{aligned}
 |\overline{AP} \times \bar{a}_A| &= \frac{|(\bar{\varepsilon} \times \bar{a}_A) \times \bar{a}_A|}{\varepsilon^2 + \omega^4} = \frac{|\bar{a}_A|^2 \cdot |\bar{\varepsilon}|}{\varepsilon^2 + \omega^4} \\
 &= |\overline{AP}| \cdot |\bar{a}_A| \cdot \sin (\overline{AP}, \bar{a}_A) \\
 &= \frac{|\bar{a}_A|}{\varepsilon^2 + \omega^4} \cdot \sqrt{|\bar{a}_A|^2 (\omega^4 + \varepsilon^2)} \cdot \sin (\overline{AP}, \bar{a}_A) \\
 &= \frac{|\bar{a}_A|^2}{\sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4}} \cdot \sin (\overline{AP}, \bar{a}_A).
 \end{aligned}$$

Relațiile

$$\cos (\overline{AP}, \bar{a}_A) = \frac{\omega^2}{\sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4}} \quad \sin (\overline{AP}, \bar{a}_A) = \frac{|\varepsilon|}{\sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4}}$$

arată că, la momentul t , unghiul făcut de accelerația particulei A oarecare din constituția plăcii rigide cu dreapta AP , unde P reprezintă unicul punct al plăcii care are la momentul respectiv accelerația nulă, este constant. Punctul P introdus de (3.15), notat cu $W(t)$, poartă denumirea de *centrul (polul) accelerațiilor* plăcii rigide (cf. [32], p. 104, [14], p. 110, [63], p. 210).

În cazul mișcării *uniforme* ($\varepsilon = 0$), observăm că

$$\begin{aligned}
 \overline{IW} &= \frac{\omega^2 \cdot \bar{a}_I + \bar{\varepsilon} \times \bar{a}_I}{\varepsilon^2 + \omega^4} = \frac{\bar{a}_I}{\omega^2} = -\frac{\bar{\omega} \times \bar{v}_{abs}(I)}{\omega^2} \\
 &= \overline{IG},
 \end{aligned}$$

adică $W = G$ (cf. [59], p. 36).

Se cuvine făcută următoarea observație privind mărimea \bar{a}_I . Deși am utilizat, pentru simplitate, notația \bar{a}_I ca să desemnăm vectorul $\bar{a}_P(t^*)$, trebuie înțeles faptul că $I(t)$ este o "particulă" mobilă și că au loc relațiile

$$\begin{aligned}\bar{v}_{rel}(I(t)) &= \left(\frac{\partial \bar{AI}}{\partial t}\right)_{\mathcal{R}'} & \bar{v}_{transp}(I(t)) &= 0 \\ \bar{v}_{abs}(I(t)) &= \dot{\bar{OI}} \\ \bar{a}_{rel}(I(t)) &= \left(\frac{\partial^2 \bar{AI}}{\partial t^2}\right)_{\mathcal{R}'} & \bar{a}_{transp}(I(t)) &= -\bar{\omega} \times \bar{v}_{abs}(I) \\ \bar{a}_{abs}(I(t)) &= \ddot{\bar{OI}} \\ \bar{a}_{Cor}(I(t)) &= 2 \cdot \bar{\omega} \times \bar{v}_{rel}(I(t)) = -2 \cdot \bar{a}_{transp}(I(t)).\end{aligned}$$

Astfel, formula $\bar{a}_P(t^*) = -\bar{\omega} \times \bar{v}_{abs}(I(t^*))$ "leagă", într-un mod esențial, mișcarea *particulei* plăcii rigide care coincide cu $I(t)$ de mișcările (absolută și relativă) ale *poziției* sale, adică $I(t)$.

Egalitatea

$$\begin{aligned}\bar{a}_A &= \omega^2 \cdot \overline{AW} - \bar{\varepsilon} \times \overline{AW} \\ &= \bar{\varepsilon} \times \overline{WA} - \omega^2 \cdot \overline{WA} \\ &= \bar{a}_{A,\varepsilon} + \bar{a}_{A,\omega}\end{aligned}\tag{3.16}$$

exprimă faptul că *distribuția accelerațiilor în placa rigidă care efectuează o mișcare în propriul său plan este identică cu cea întâlnită în mișcarea circulară*. Cu alte cuvinte, *interpretând accelerația, putem imagina mișcarea plană ca o rotație (momentană) în jurul axei determinate de centrul accelerațiilor W și de vectorul director $\bar{\omega}$* (cf. [76], p. 314, [32], p. 105, [2], p. 177).

Revenind la cercurile lui Bresse, este clar că polul W desemnează cel de-al doilea punct comun al acestora (vezi Figurile 3.21, 3.22).

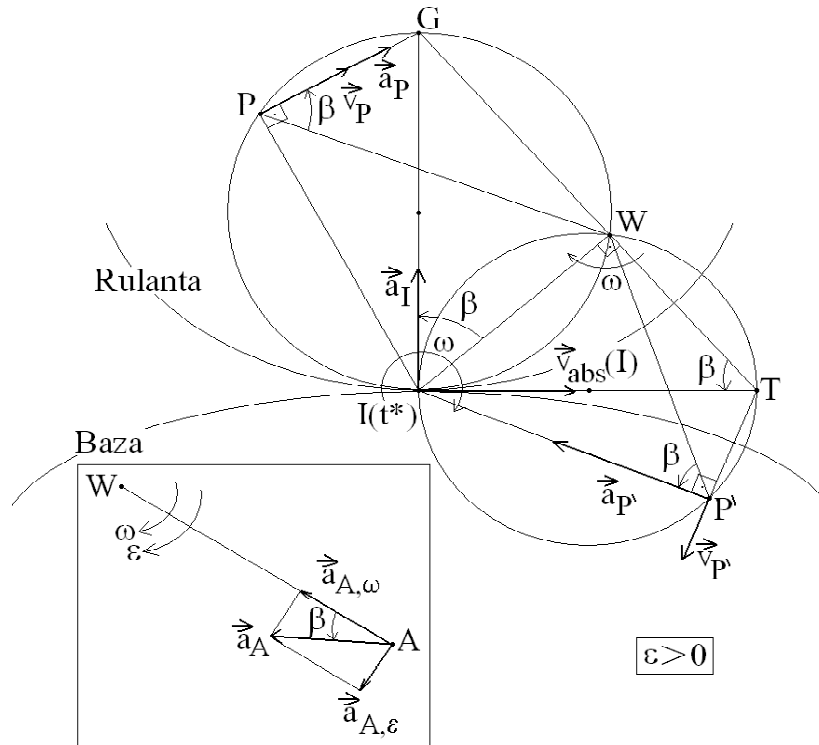


Figura 3.21

Notăm cu β unghiul făcut de vectorii \overline{AW} , $\overline{a_A}$. Atunci, $\tan \beta = \frac{|\epsilon|}{\omega^2}$ (cf. [2], p. 177). Relația (3.16) arată că *accelerațiile $\overline{a_A}$ ale punctelor plăcii rigide se găsesc la momentul t de aceeași parte a "razelor" WA , cu care fac unghiul β* (cf. [76], p. 314). Cu convenția ca $\beta > 0$ dacă $\overline{a_A}$ este în dreapta segmentului WA , respectiv $\beta < 0$ dacă $\overline{a_A}$ este în stânga segmentului WA , obținem

$$\tan \beta = \frac{\epsilon}{\omega^2}$$

(cf. [14], p. 115, [63], p. 213).

Cum, în general, $I \neq W$, caracterul de *interpretare* cinematică a mișcării plane (rotație momentană în jurul centrului I , respectiv rotație momentană în jurul polului W) al considerațiilor anterioare și *nu de descriere* a acestuia este pus în evidență într-un mod elocvent.

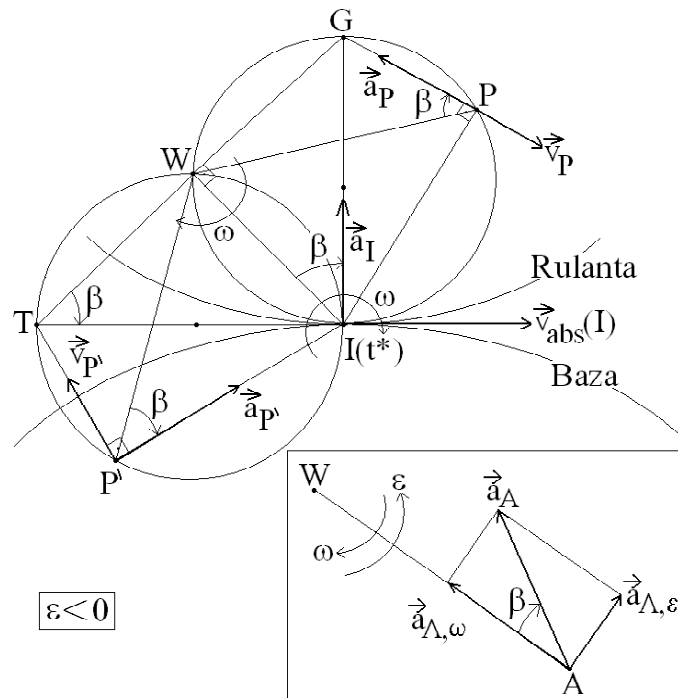


Figura 3.22

Ne vom referi în continuare la *mișcarea relativă* a două plăci rigide supuse unui contact *simplu* în planul fix Oxy . Păstrând notațiile de la subsecțiunea dedicată teoremei Aronhold-Kennedy, vom considera că reperele carteziene $\mathcal{R}', \mathcal{R}''$ solidar legate de plăci au unul din planele de coordonate în planul fix al mișcării. Frontierele celor două plăci rigide sunt curbele netede orientate Γ_1, Γ_2 care admit punctul comun de tangență $X(t)$. În plus, la momentul $t = t^*$, originile A, B ale reperelor $\mathcal{R}', \mathcal{R}''$ vor coincide cu $X(t^*)$. Este evident că putem "gonfla" plăcile rigide, transformându-le în *domenii* G_1, G_2 ale SF care au drept frontiere două suprafețe cilindrice tangente, de directoare Γ_1, Γ_2 , cu *generatoarele* date de dreptele de direcție \bar{k} . Planul tangent comun celor două suprafețe, și anume $T_{X(t)}$, va fi planul perpendicular pe planul mișcării care îl intersectează pe acesta după tangenta comună a curbelor Γ_1, Γ_2 .

Cum $\bar{\omega}_{10} = \omega_{10} \cdot \bar{k}$, $\bar{\omega}_{20} = \omega_{20} \cdot \bar{k}$, $\bar{\omega}_{21} = (\omega_{20} - \omega_{10}) \cdot \bar{k}$, adică $\bar{\omega}_{10} \times \bar{\omega}_{20} = 0$, teorema Aronhold-Kennedy nu poate fi aplicată aici. Mișcarea plăcilor rigide în contact are ca "ingrediente" *alunecarea*, respectiv *rostogolirea*. Mișcarea de pivotare, firește, nu este definită în plan. Notăm cu I_{10}, I_{21}, I_{20} cele

trei centre de rotație corespunzătoare mișcărilor absolute și relative. La fel ca în cazul general, *centrele instantanee ale mișcărilor epicycloidale relative realizate de plăcile rigide aflate în contact simplu coincid*. Dacă aplicăm legea fundamentală de compunere a vitezelor, considerându-ne solidar legați de prima dintre plăci, putem scrie că

$$\bar{v}_{abs}(X) = \bar{v}_{transp}(X) + \bar{v}_{rel}(X)$$

și $\bar{v}_{transp}(X(t^*)) = \bar{v}_{rel,B}(X)$. "Particula" de contact $X(t)$ deplasându-se atât pe Γ_1 cât și pe Γ_2 , vitezele sale absolută și relativă vor avea ca direcție chiar direcția tangentei comune a acestor curbe în poziția curentă de contact. Atunci, $\bar{v}_{rel,B}(X)$ va fi coliniar cu direcția respectivă. Însă $\bar{v}_{rel,B}(X) = \bar{\omega}_{21} \times \overline{I_{21}B}$ și, cum $\overline{I_{21}B} \perp \bar{v}_{rel,B}(X)$, deducem că *centrul instantaneu I_{21} se găsește pe normala (principală) comună în punctul curent de contact a frontierelor celor două plăci rigide* (cf. [34], p. 203). În particular, în cazul mișcării rectilinii a unui automobil, centrul instantaneu de rotație al uneia dintre roțile acestuia se va găsi, indiferent dacă avem roată *motoare* sau roată *trasă* (pasivă), pe perpendiculara pe sol în punctul curent de contact cu drumul al roții (vezi Figura 3.23) (cf. [76], aplicația 2°, p. 312, [63], aplicația 1), p. 202-203).

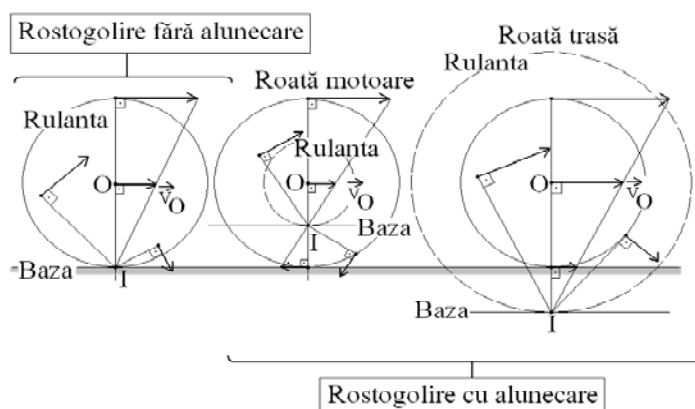


Figura 3.23

Punctele materiale A, B evoluând în planul fix al mișcării, punctele (geometrice) C_{ij} introduse la demonstrația teoremei Aronhold-Kennedy se vor găsi, la rândul lor, în acest plan. Mai precis,

$$C_{ij} = I_{ij}(t), \quad 0 \leq i, j \leq 2.$$

În plus, cum vectorii $\bar{\omega}_{10}$ și \bar{v}_A , $\bar{\omega}_{20}$ și \bar{v}_B , $\bar{\omega}_{21}$ și $\bar{v}_{rel,B}$ sunt ortogonali, deducem că

$$\bar{v}_A = -\bar{\omega}_{10} \times \overline{AC}_{10} \quad \bar{v}_B = -\bar{\omega}_{20} \times \overline{BC}_{20} \quad \bar{v}_{rel,B} = -\bar{\omega}_{21} \times \overline{BC}_{21}.$$

De asemeni, conform (2.28), putem scrie că

$$\begin{aligned} \bar{v}_B(t^*) &= \bar{v}_{rel,B} + \bar{v}_{transp,B} = \bar{v}_{rel,B} + \bar{v}_A + \bar{\omega}_{10} \times \overline{AB} \\ &= \bar{v}_{rel,B} + \bar{v}_A(t^*), \end{aligned}$$

pozițiile particulelor B și A coincidând cu $X(t^*)$ la momentul $t = t^*$.

În sfârșit, avem

$$\begin{aligned} \bar{v}_{rel,B}(t^*) &= -\bar{\omega}_{21} \times \overline{BC}_{21} \\ &= \bar{\omega}_{10} \times \overline{AC}_{10} - \bar{\omega}_{20} \times \overline{BC}_{20}. \end{aligned} \tag{3.17}$$

Cum $A(t^*) = B(t^*)$, ținând seama de (2.31), sunt valabile egalitățile

$$\begin{aligned} -\bar{\omega}_{21} \times \overline{BC}_{21} &= \bar{\omega}_{10} \times \overline{BC}_{21} - \bar{\omega}_{20} \times \overline{BC}_{21} \\ &\stackrel{(3.17)}{=} \bar{\omega}_{10} \times \overline{AC}_{10} - \bar{\omega}_{20} \times \overline{BC}_{20}, \end{aligned}$$

respectiv

$$\begin{aligned} \bar{\omega}_{20} \times \overline{C}_{21}C_{20} &= \bar{\omega}_{20} \times (\overline{C}_{21}B + \overline{BC}_{20}) \\ &= \bar{\omega}_{20} \times \overline{BC}_{20} - \bar{\omega}_{20} \times \overline{BC}_{21} \\ &= \bar{\omega}_{10} \times \overline{AC}_{10} - \bar{\omega}_{10} \times \overline{BC}_{21} \\ &= \bar{\omega}_{10} \times (\overline{AC}_{10} - \overline{AC}_{21}) \\ &= \bar{\omega}_{10} \times \overline{C}_{21}C_{10}. \end{aligned}$$

Evident,

$$\begin{aligned} 0 &= (\bar{\omega}_{10}, \overline{C}_{21}C_{10}, \overline{C}_{21}C_{10}) = (\bar{\omega}_{10} \times \overline{C}_{21}C_{10}) \cdot \overline{C}_{21}C_{10} \\ &= (\bar{\omega}_{20} \times \overline{C}_{21}C_{20}) \cdot \overline{C}_{21}C_{10} = (\bar{\omega}_{20}, \overline{C}_{21}C_{20}, \overline{C}_{21}C_{10}) \\ &= (\overline{C}_{21}C_{20}, \overline{C}_{21}C_{10}, \bar{\omega}_{20}) \\ &= (\overline{C}_{21}C_{20} \times \overline{C}_{21}C_{10}) \cdot \bar{\omega}_{20}. \end{aligned}$$

Presupunând că $\overline{C}_{21}C_{20} \times \overline{C}_{21}C_{10} \neq 0$, vectorii $\bar{\omega}_{20}$ și $\overline{C}_{21}C_{20} \times \overline{C}_{21}C_{10}$ vor fi coliniari. Fiind nenuli, produsul lor scalar nu poate fi egal cu zero. În concluzie,

$$\overline{C}_{21}C_{20} \times \overline{C}_{21}C_{10} = 0,$$

adică *centrele instantanee de rotație ale mișcărilor epicycloidale absolute și relative realizate de plăcile rigide supuse unui contact simplu sunt coliniare* (cf. [15], p. 104-105). Rezultatul anterior este cunoscut sub denumirea de **teorema celor trei centre instantanee de rotație** (cf. [76], p. 345). Recomandăm cititorului elegantele expuneri făcute acestor chestiuni în [26], problema 3.4.3, p. 253-255, [63], p. 201-202. Teorema celor trei centre instantanee de rotație se utilizează în cinemática *mecanismelor*.

Egalitatea $\overline{\omega}_{20} \times \overline{C}_{21} \overline{C}_{20} = \overline{\omega}_{10} \times \overline{C}_{21} \overline{C}_{10}$ ne conduce, prin înmulțire vectorială cu \overline{k} la stânga în ambii membri, la

$$\overline{C}_{20} \overline{C}_{21} = \frac{\omega_{10}}{\omega_{20}} \cdot \overline{C}_{10} \overline{C}_{21}$$

(cf. [63], p. 202).

Câteva proprietăți cu vizibilă relevanță *geometrică* ale câmpurilor de viteze și accelerații în mișcarea corpului material solid rigid se cuvin prezentate.

1) Dacă M_1, M_2, M_3 sunt particule coliniare din constituția solidului rigid S iar A_1, A_2, A_3 , respectiv B_1, B_2, B_3 sunt extremitățile vitezelor, respectiv accelerațiilor acestora, atunci punctele A_1, A_2, A_3 , respectiv B_1, B_2, B_3 sunt coliniare (cf. [15], p. 74).

2) Vitezele punctelor A, B din constituția solidului rigid S aflate pe o dreaptă paralelă cu axa instantanee a mișcării sunt egale (cf. [15], p. 75).

3) În aceleași condiții ca la 2), proiecțiile accelerațiilor punctelor A, B pe direcția dreptei AB sunt egale (cf. [15], p. 80).

4) Dacă M_1, M_2, M_3 sunt trei puncte necoliniare din constituția unei plăci rigide care se mișcă într-un plan fix iar A_1, A_2, A_3 , respectiv B_1, B_2, B_3 sunt extremitățile vitezelor, respectiv accelerațiilor acestora, atunci triunghiurile $M_1M_2M_3$, $A_1A_2A_3$ și $B_1B_2B_3$ sunt asemenea.

Proprietățile 4), împreună cu cazul lor degenerat 1), poartă numele de **teorema asemănării (Burmester-Mehmke)** (cf. [63], p. 207, 216, [76], p. 351, [15], p. 75, [14], p. 114, 116, [2], p. 175-176, 179-180, etc.). Justificarea lor se bazează pe formulele

$$\begin{aligned} \overline{OA}_i &= \overline{OM}_i + \overline{v}_{M_i} \\ &= \overline{OM}_i + \overline{v}_A + \overline{\omega} \times \overline{AM}_i \\ \overline{OB}_i &= \overline{OM}_i + \overline{a}_{M_i} \\ &= \overline{OM}_i + \overline{a}_A + \overline{\varepsilon} \times \overline{AM}_i + \overline{\omega} \times (\overline{\omega} \times \overline{AM}_i), \end{aligned}$$

unde $1 \leq i \leq 3$, care ne conduc la

$$\begin{aligned}\overline{A_i A_j} &= \overline{O A_j} - \overline{O A_i} \\ &= \overline{M_i M_j} + \overline{\omega} \times \overline{M_i M_j} \\ \overline{B_i B_j} &= \overline{M_i M_j} + \overline{\varepsilon} \times \overline{M_i M_j} + \overline{\omega} \times (\overline{\omega} \times \overline{M_i M_j}) \\ &= (1 - \omega^2) \cdot \overline{M_i M_j} + \overline{\varepsilon} \times \overline{M_i M_j}, \quad i \neq j.\end{aligned}$$

Vectorii $\overline{M_i M_j}$ și $\overline{\omega} \times \overline{M_i M_j}$, $\overline{M_i M_j}$ și $\overline{\varepsilon} \times \overline{M_i M_j}$ fiind ortogonali, avem

$$\begin{aligned}|\overline{A_i A_j}| &= \sqrt{|\overline{M_i M_j}|^2 + |\overline{\omega} \times \overline{M_i M_j}|^2} \\ &= \sqrt{1 + \omega^2} \cdot |\overline{M_i M_j}| \\ |\overline{B_i B_j}| &= \sqrt{(1 - \omega^2)^2 \cdot |\overline{M_i M_j}|^2 + |\overline{\varepsilon} \times \overline{M_i M_j}|^2} \\ &= \sqrt{(1 - \omega^2)^2 + \varepsilon^2} \cdot |\overline{M_i M_j}|,\end{aligned}$$

ceea ce dovedește asemănarea triunghiurilor $M_1 M_2 M_3$, $A_1 A_2 A_3$ și $B_1 B_2 B_3$. În schimb, dacă $\overline{M_1 M_3} = \lambda \cdot \overline{M_1 M_2}$, atunci $\overline{A_1 A_3} = \lambda \cdot \overline{A_1 A_2}$ și $\overline{B_1 B_3} = \lambda \cdot \overline{B_1 B_2}$. Justificarea s-a încheiat. Proprietatea 1) a fost utilizată în Figura 3.23. Generalizarea teoremei Burmester-Mehmke pentru mărimi cinematice de ordin $n \geq 3$ a fost realizată cu ajutorul teoriei numerelor complexe de către profesorul G. Theiller în 1930 (cf. [34], p. 200).

5) Cunoscând vitezele $\overline{v}_1, \overline{v}_2, \overline{v}_3$, de direcții necoplanare, a trei puncte ale solidului rigid S se poate determina axa instantanee a mișcării pseudoelicoideale (vezi Figura 3.24) (cf. [59], problema 3.1.5, p. 34).

Urmăm calculele din [59], p. 34, 193-194. Astfel, dacă notăm cu A_1, A_2, A_3 extremitățile vitezelor \overline{v}_i transportate prin echipolență într-un punct Q ales convenabil, direcția normală la planul $(A_1 A_2 A_3)$ va fi dată de vectorul

$$\begin{aligned}\overline{N} &= (\overline{v}_1 - \overline{v}_3) \times (\overline{v}_2 - \overline{v}_1) \\ &= \overline{v}_1 \times \overline{v}_2 - \overline{v}_3 \times \overline{v}_2 + \overline{v}_3 \times \overline{v}_1 \\ &= \overline{v}_1 \times \overline{v}_2 + \overline{v}_2 \times \overline{v}_3 + \overline{v}_3 \times \overline{v}_1.\end{aligned}$$

Deoarece $\overline{v}_i = \overline{v}_{M_i} = \overline{v}_{M_0} + \overline{\omega} \times \overline{M_0 M_i}$, unde M_0 este un punct de pe axa instantanee, putem scrie că ($\overline{M_0 M_i} \stackrel{not}{=} \overline{r}_i$)

$$\overline{v}_i \times \overline{v}_j = \overline{v}_{M_0} \times [\overline{\omega} \times (\overline{r}_j - \overline{r}_i)] + [(\overline{\omega} \times \overline{r}_i) \cdot \overline{r}_j] \cdot \overline{\omega}$$

$$\begin{aligned}
&= \bar{v}_{M_0} \times [\bar{\omega} \times (\bar{r}_j - \bar{r}_i)] + (\bar{\omega}, \bar{r}_i, \bar{r}_j) \cdot \bar{\omega} \\
&= \bar{v}_{M_0} \times [\bar{\omega} \times (\bar{r}_j - \bar{r}_i)] + (\bar{r}_i, \bar{r}_j, \bar{\omega}) \cdot \bar{\omega} \\
&= \bar{v}_{M_0} \times [\bar{\omega} \times (\bar{r}_j - \bar{r}_i)] + [(\bar{r}_i \times \bar{r}_j) \cdot \bar{\omega}] \cdot \bar{\omega}, \quad 1 \leq i, j \leq 3,
\end{aligned}$$

de unde

$$\bar{N} = [\bar{\omega} \cdot (\bar{r}_1 \times \bar{r}_2 + \bar{r}_2 \times \bar{r}_3 + \bar{r}_3 \times \bar{r}_1)] \cdot \bar{\omega} = \lambda \cdot \bar{\omega} \neq 0.$$

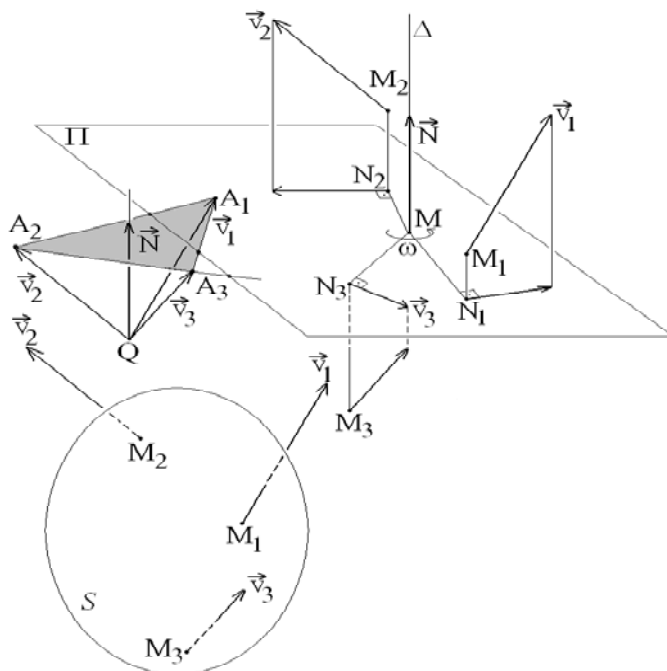


Figura 3.24

Proiectând vitezele $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3$ pe planul Π paralel cu $(A_1A_2A_3)$, avem

$$\begin{aligned}
\bar{v}_i &= \bar{v}_{M_0} + \bar{\omega} \times \overline{M_0M_i} = \bar{v}_{M_0} + \bar{\omega} \times (\overline{M_0N_i} + \overline{N_iM_i}) \\
&= \bar{v}_{M_0} + \bar{\omega} \times \overline{M_0N_i}.
\end{aligned}$$

Vectorii \bar{v}_{M_0} și $\bar{\omega}$ fiind coliniari, vectorii-proiecție ai vitezelor \vec{v}_i pe planul Π vor avea direcțiile $\bar{\omega} \times \overline{M_0N_i}$. Cum vectorii-viteză \bar{v}_i sunt necoplanari, vectorii $\bar{v}_i - \bar{v}_{M_0}$ nu sunt toți coliniari. Dacă, de exemplu, $(\bar{v}_1 - \bar{v}_{M_0}) \times (\bar{v}_2 - \bar{v}_{M_0}) \neq 0$, atunci perpendicularele din N_1, N_2 pe dreptele-suport ale vectorilor-proiecție, duse în planul Π , se vor intersecta într-un punct M de pe axa instantanee Δ (cf. [59], p. 194).

3.3 Statica și dinamica

3.3.1 Dinamica sistemului mecanic. Teorema impulsului. Teoremele centrului de masă. Teoremele lui V. Vâlcovici și S. Koenig. Teorema momentului cinetic. Teorema energiei cinetice. Reprezentarea momentului cinetic și a energiei cinetice cu ajutorul tensorului de inerție. Formula momentului cinetic față de o axă. Sisteme conservative

Să considerăm sistemul mecanic S ale cărui particule au, în raport cu sistemul de referință inerțial $\mathcal{R} = (O, \vec{\mathcal{B}})$, razele vectoriale

$$\overline{OM}_k \stackrel{\text{not}}{=} \vec{r}_k, \quad 1 \leq k \leq n.$$

Introducând un reper cartezian (mobil) cu *axele de coordonate de direcții fixe* (cf. [32], p. 81), și anume $\mathcal{R}' = (A, \vec{\mathcal{B}})$, au loc relațiile ($\vec{\omega} = 0$)

$$\vec{r}_k = \vec{r}_A + \vec{r}'_k \quad \vec{v}_k = \vec{v}_A + \vec{v}'_k,$$

unde $\vec{r}'_k = \overline{AM}_k$, $\vec{v}'_k = \left(\frac{\partial \vec{r}'_k}{\partial t}\right)_{\mathcal{R}'} = \dot{\vec{r}}'_k$. Dacă punctul G din SF reprezintă *centrul de masă* al sistemului mecanic S , adică

$$\vec{r}_G = \frac{1}{m} \cdot \sum_{k=1}^n m_k \cdot \vec{r}_k \quad \vec{v}_G = \frac{1}{m} \cdot \sum_{k=1}^n m_k \cdot \vec{v}_k, \quad m \stackrel{\text{not}}{=} \sum_{k=1}^n m_k$$

(cf. [32], p. 79-80), atunci putem scrie că

$$\sum_{k=1}^n m_k \cdot \vec{r}'_k = \sum_{k=1}^n m_k \cdot \vec{r}_k - m \cdot \vec{r}_A = m \cdot (\vec{r}_G - \vec{r}_A),$$

respectiv

$$\sum_{k=1}^n m_k \cdot \vec{v}'_k = m \cdot (\vec{v}_G - \vec{v}_A)$$

(cf. [34], p. 289).

Presupunem că *acțiunea* mediului înconjurător asupra particulei M_k din constituția sistemului S este dată de forța $\vec{F}_k \in T_{M_k} \mathbb{R}^3$, $\vec{F}_k \in \vec{F}_k$, numită

externă sau exterioară (cf. [32], p. 77, [34], p. 247). Interacțiunea particulei M_k cu celelalte puncte materiale ale sistemului mecanic se realizează prin intermediul forței $\vec{\mathcal{F}}_{kl} \in T_{M_k}\mathbb{R}^3$, $\vec{\mathcal{F}}_{kl} \in \bar{\mathcal{F}}_{kl}$, unde

$$\bar{\mathcal{F}}_{kl} + \bar{\mathcal{F}}_{lk} = 0 \quad \bar{\mathcal{F}}_{kk} = 0. \quad (3.18)$$

Forța $\vec{\mathcal{F}}_{kl}$ se numește *internă* sau *interioară* (cf. [32], p. 75).

Forța $\vec{\mathcal{F}}_k \in T_{M_k}\mathbb{R}^3$, $\vec{\mathcal{F}}_k \in \bar{\mathcal{F}}_k$, unde

$$\bar{\mathcal{F}}_k = \sum_{l=1}^n \bar{\mathcal{F}}_{kl},$$

desemnează *acțiunea* sistemului mecanic S asupra celei de-a k -a particule din componența sa.

Un calcul simplu,

$$\begin{aligned} \bar{\mathcal{R}}_O &= \sum_{k=1}^n (\bar{\mathcal{F}}_k + \bar{F}_k) = \sum_{1 \leq k \leq l \leq n} (\bar{\mathcal{F}}_{kl} + \bar{\mathcal{F}}_{lk}) + \sum_{i=1}^n \bar{F}_i \\ &= \sum_{i=1}^n \bar{F}_i = \bar{F} \end{aligned}$$

și

$$\begin{aligned} \bar{\mathcal{M}}_O &= \sum_{k=1}^n \bar{r}_k \times (\bar{\mathcal{F}}_k + \bar{F}_k) = \sum_{1 \leq k \leq l \leq n} (\bar{r}_k \times \bar{\mathcal{F}}_{kl} + \bar{r}_l \times \bar{\mathcal{F}}_{lk}) \\ &\quad + \sum_{i=1}^n \bar{r}_i \times \bar{F}_i \\ &= \sum_{1 \leq k \leq l \leq n} [\bar{r}_k \times \bar{\mathcal{F}}_{kl} + \bar{r}_l \times (-\bar{\mathcal{F}}_{kl})] + \sum_{i=1}^n \bar{r}_i \times \bar{F}_i \\ &= \sum_{1 \leq k \leq l \leq n} (\bar{r}_k - \bar{r}_l) \times \bar{\mathcal{F}}_{kl} + \sum_{i=1}^n \bar{r}_i \times \bar{F}_i \\ &= \sum_{i=1}^n \bar{r}_i \times \bar{F}_i \end{aligned}$$

deoarece vectorii $\bar{r}_k - \bar{r}_l = \overline{M_l M_k}$ și $\bar{\mathcal{F}}_{kl}$ sunt coliniari (principiul acțiunii și reacțiunii), arată că *forțele interne ale sistemului mecanic nu se reflectă asupra mărimilor* $\bar{\mathcal{R}}_O(S)$, $\bar{\mathcal{M}}_O(S)$ (cf. [34], p. 250, 253).

Dacă, în plus, sistemul mecanic S este *rigid*, atunci relația

$$\begin{aligned} 0 &= d\left(\frac{1}{2}|\overline{M_l M_k}|^2\right) = d\left(\frac{1}{2}\overline{M_l M_k}^2\right) \\ &= \overline{M_l M_k} \cdot d\overline{M_l M_k} \end{aligned}$$

ne conduce la

$$\begin{aligned} \overline{\mathcal{F}}_{kl} \cdot d\overline{r}_k + \overline{\mathcal{F}}_{lk} \cdot d\overline{r}_l &= \overline{\mathcal{F}}_{kl} \cdot [d\overline{r}_k + d(-\overline{r}_l)] \\ &= \overline{\mathcal{F}}_{kl} \cdot d\overline{M_l M_k} \\ &= \mathcal{F}_{kl} \cdot \overline{M_k M_l} \cdot d\overline{M_l M_k} \\ &= -\mathcal{F}_{kl} \cdot \overline{M_l M_k} \cdot d\overline{M_l M_k} \\ &= 0 \end{aligned}$$

(cf. [34], p. 264). Aici, $\mathcal{F}_{kl} = \frac{\overline{\mathcal{F}}_{kl} \cdot \overline{M_k M_l}}{|\overline{M_k M_l}|^2}$.

Astfel,

$$\begin{aligned} \delta W &= \sum_{k=1}^n (\overline{\mathcal{F}}_k + \overline{F}_k) \cdot d\overline{r}_k = \sum_{1 \leq k \leq l \leq n} (\overline{\mathcal{F}}_{kl} \cdot d\overline{r}_k + \overline{\mathcal{F}}_{lk} \cdot d\overline{r}_l) \\ &\quad + \sum_{i=1}^n \overline{F}_i \cdot d\overline{r}_i \\ &= \sum_{i=1}^n \overline{F}_i \cdot d\overline{r}_i = \delta W_{ext}. \end{aligned}$$

Absența forțelor interioare ale sistemului mecanic din formulele precedente este în concordanță cu faptul că modelul matematic al corpurilor materiale dat de *solidul rigid* face abstracție de structura *internă* a acestora. În general, forțele interioare produc un *lucru mecanic de deformare* (cf. [32], p. 77). De exemplu, o copertă din plastic, odată îndoită, nu își recapătă forma inițială după *încetarea* acțiunii exterioare, etc.

Vom stabili în cele ce urmează *legături* între mărimile care caracterizează mișcarea *mecanică* a solidului S (impuls, moment cinetic, energie cinetică, lucru mecanic elementar) în reperele \mathcal{R} , \mathcal{R}' .

Astfel,

$$\begin{aligned} \overline{p} &= \sum_{k=1}^n m_k \cdot \overline{v}_k = \sum_{k=1}^n m_k \cdot \overline{v}'_k + m \cdot \overline{v}_A \\ &= \overline{p}' + m \cdot \overline{v}_A, \end{aligned}$$

de unde, conform (2.80), prin derivare în raport cu timpul t , avem

$$\begin{aligned}\dot{\bar{p}} &= \sum_{k=1}^n \dot{\bar{p}}_k = \sum_{k=1}^n (\bar{\mathcal{F}}_k + \bar{F}_k) = \bar{F} \\ &= \dot{\bar{p}}' + m \cdot \bar{a}_A = \left(\frac{\partial \bar{p}'}{\partial t} \right)_{\mathcal{R}'} + m \cdot \bar{a}_A.\end{aligned}$$

Egalitatea

$$\left(\frac{\partial \bar{p}'}{\partial t} \right)_{\mathcal{R}'} = \bar{F} + m \cdot (-\bar{a}_A)$$

constituie **teorema impulsului** în reperul cartezian \mathcal{R}' . Așadar, *derivata relativă (locală) în raport cu timpul t a impulsului total \bar{p}' al sistemului mecanic S este egală cu rezultanta forțelor externe \bar{F} plus o forță inerțială (efect al mișcării reperului \mathcal{R}' în raport cu un sistem de referință inerțial).* Prin extrapolare, ne vom referi la mărimi vectoriale date ca vectori *liberi* (\bar{p} , \bar{F}) cu apelativul *impuls, forță rezultantă*, etc. Destinația finală a calculelor de față îngăduie o asemenea lipsă de rigurozitate în terminologie.

Formula

$$\begin{aligned}\bar{p}' &= \frac{d}{dt} \left(\sum_{k=1}^n m_k \cdot \bar{r}'_k \right) = m \cdot \frac{d}{dt} (\bar{r}_G - \bar{r}_A) \\ &= m \cdot \dot{\bar{A}G} = m \cdot \dot{\bar{v}}_G\end{aligned}\tag{3.19}$$

implică

$$m \cdot \dot{\bar{a}}'_G = m \cdot \left(\frac{\partial \dot{\bar{v}}'_G}{\partial t} \right)_{\mathcal{R}'} = \bar{F} + m \cdot (-\bar{a}_A).\tag{3.20}$$

Relațiile (3.19), (3.20) constituie **teoremele centrului de masă**. Ele conferă, în particular, o justificare modelului punctiform al corpurilor materiale (cf. [34], p. 252, [76], p. 526). Sistemul mecanic S se comportă, în concluzie, ca și cum ar fi *concentrat* în centrul său de masă G (cf. [76], p. 525, [34], p. 298). Astfel, *impulsul total al sistemului mecanic S legat în G ne dă impulsul particulei G a cărei masă este egală cu masa întregului sistem* și

$$m \cdot \vec{a}'_G = \vec{F} + \vec{F}_i \in T_G \mathbb{R}^3,$$

unde $\vec{F} \in \bar{F}$, $\vec{F}_i \in m \cdot (-\bar{a}_A)$. Terminologia adoptată pentru mărimile \bar{p}' , \bar{F} poate fi motivată și prin teoremele centrului de masă.

Impunând ca $A = O$ în (3.19), respectiv $A = G$ în (3.20), obținem

$$m \cdot \vec{v}_G \in \bar{p} \quad m \cdot \vec{a}_G \in \bar{F} \quad (3.21)$$

(cf. [32], teoremele 1, 2, p. 80). În lipsa forțelor exterioare ($\bar{F}_k = 0$), $m \cdot \vec{v}_G = \text{constant}$, deci *impulsul total al sistemului mecanic se conservă*. Fenomene ca *reculul* armelor de foc (izbitura în umăr produsă de patul puștii în momentul tragerii) ori *mișcarea* sistemului nostru solar (observația astronomică indică faptul că centrul de masă al sistemului solar se mișcă rectiliniu uniform cu aproximativ 20 km/s către un punct aflat în vecinătatea stelei Vega, numit Apex) pot fi explicate în acest mod (cf. [34], p. 252, [76], p. 525, [63], p. 376-377, [73], p. 390, [2], aplicația 1, p. 285-286).

Momentul cinetic total, notat $\bar{L}_O(S)$, al sistemului mecanic S verifică egalitățile

$$\begin{aligned} \bar{L}_O(S) &= \sum_{k=1}^n \vec{r}_k \times \bar{p}_k = \sum_{k=1}^n m_k \cdot (\vec{r}_A + \vec{r}'_k) \times (\vec{v}_A + \vec{v}'_k) \\ &= m \cdot \vec{r}_A \times \vec{v}_A + \vec{r}_A \times \left(\sum_{k=1}^n m_k \cdot \vec{v}'_k \right) + \left(\sum_{k=1}^n m_k \cdot \vec{r}'_k \right) \times \vec{v}_A \\ &\quad + \sum_{k=1}^n m_k \cdot \vec{r}'_k \times \vec{v}'_k \\ &= m \cdot \vec{r}_A \times \vec{v}_A + \vec{r}_A \times m \cdot (\vec{v}_G - \vec{v}_A) + m \cdot (\vec{r}_G - \vec{r}_A) \times \vec{v}_A \\ &\quad + \bar{L}'_A(S) \\ &= m \cdot [\vec{r}_A + (\vec{r}_G - \vec{r}_A)] \times \vec{v}_A + m \cdot \vec{r}_A \times (\vec{v}_G - \vec{v}_A) + \bar{L}'_A(S) \\ &= m \cdot \vec{r}_G \times \vec{v}_A + m \cdot \vec{r}_A \times (\vec{v}_G - \vec{v}_A) + \bar{L}'_A(S). \end{aligned}$$

Relația

$$\bar{L}_O(S) = m \cdot \vec{r}_G \times \vec{v}_A + m \cdot \vec{r}_A \times (\vec{v}_G - \vec{v}_A) + \bar{L}'_A(S) \quad (3.22)$$

constituie **prima teoremă a lui V. Vâlcovici** (1915) (cf. [34], p. 289).

De asemeni,

$$\begin{aligned} \bar{L}_A(S) &= \sum_{k=1}^n \vec{r}'_k \times \bar{p}_k = \sum_{k=1}^n (\vec{r}_k - \vec{r}_A) \times \bar{p}_k \\ &= \bar{L}_O(S) - \vec{r}_A \times \bar{p} \\ &= \bar{L}_O(S) - \vec{r}_A \times m \cdot \vec{v}_G \\ &= \bar{L}_O(S) - m \cdot \vec{r}_A \times \vec{v}_G \end{aligned}$$

și, din (3.22), deducem că

$$\begin{aligned}\bar{L}_A(S) &= m \cdot \bar{r}_G \times \bar{v}_A - m \cdot \bar{r}_A \times \bar{v}_A + \bar{L}'_A(S) \\ &= m \cdot \overline{AG} \times \bar{v}_A + \bar{L}'_A(S)\end{aligned}\quad (3.23)$$

(cf. [34], p. 289).

Pentru $A = G$, (3.22) devine

$$\bar{L}_O(S) = m \cdot \bar{r}_G \times \bar{v}_G + \bar{L}'_G(S), \quad (3.24)$$

adică *momentul cinetic total (absolut) față de punctul O al sistemului mecanic S este egal cu momentul cinetic al acestuia în mișcarea (relativă) în jurul centrului de masă G plus un vector liber care, odată legat în O , ne dă momentul cinetic al particulei G a cărei masă este egală cu masa întregului sistem* (cf. [76], p. 536, [63], p. 391). Acest rezultat constituie **prima teoremă a lui S. Koenig** (cf. [34], p. 260, [14], p. 177, [2], p. 265).

Conform (3.23), rezultă că ($A = G$)

$$\bar{L}_G(S) = \bar{L}'_G(S)$$

(cf. [76], p. 529-530, [34], p. 288). Mărimea $\bar{L}'_G(S)$ din (3.24) se mai numește și *moment cinetic propriu sau intern (de "spin")* al sistemului mecanic S (cf. [32], p. 83).

Energia cinetică totală, notată $E_c(S)$, a sistemului mecanic S are forma

$$\begin{aligned}E_c(S) &= \sum_{k=1}^n \frac{1}{2} m_k \cdot \bar{v}_k^2 = \sum_{k=1}^n \frac{1}{2} m_k \cdot (\bar{v}_A + \bar{v}'_k)^2 \\ &= \frac{1}{2} m \cdot \bar{v}_A^2 + \bar{v}_A \cdot \left(\sum_{k=1}^n m_k \cdot \bar{v}'_k \right) + \sum_{k=1}^n \frac{1}{2} m_k \cdot \bar{v}'_k^2 \\ &= \frac{1}{2} m \cdot \bar{v}_A^2 + \bar{v}_A \cdot [m \cdot (\bar{v}_G - \bar{v}_A)] + E'_c(S) \\ &= \frac{1}{2} m \cdot \bar{v}_A^2 + m \cdot \bar{v}_A \cdot (\bar{v}_G - \bar{v}_A) + E'_c(S).\end{aligned}$$

Relația

$$E_c(S) = \frac{1}{2} m \cdot \bar{v}_A^2 + m \cdot \bar{v}_A \cdot (\bar{v}_G - \bar{v}_A) + E'_c(S) \quad (3.25)$$

reprezintă **a doua teoremă a lui V. Vâlcovici** (1929) (cf. [34], p. 290).

Pentru $A = G$, din (3.25) se obține

$$E_c(S) = \frac{1}{2}m \cdot v_G^2 + E'_c(S), \quad (3.26)$$

adică *energia cinetică totală a sistemului mecanic S în sistemul de referință \mathcal{R} este egală cu energia cinetică a centrului de masă G înzestrat cu masa întregului sistem plus energia cinetică relativă (proprie sau internă) a sistemului în mișcarea sa în jurul lui G* (cf. [76], p. 544, [34], p. 268). Formula (3.26) desemnează **a doua teoremă a lui S. Koenig** (1751) (cf. [32], p. 84, [2], p. 270).

Pe baza (2.84) putem scrie că

$$\begin{aligned} \frac{d\bar{L}_A}{dt} &= \sum_{k=1}^n \frac{d}{dt} (\bar{r}'_k \times \bar{p}_k) = \sum_{k=1}^n [\bar{r}'_k \times (\bar{\mathcal{F}}_k + \bar{F}_k) - \bar{v}_A \times \bar{p}_k] \\ &= \left(\sum_{k=1}^n \bar{r}'_k \times \bar{\mathcal{F}}_k \right) + \sum_{k=1}^n \bar{r}'_k \times \bar{F}_k - \bar{v}_A \times \bar{p} \\ &= \bar{\mathcal{M}}_A \left(\left\{ \bar{F}_k : k = \overline{1, n} \right\} \right) - \bar{v}_A \times \bar{p} \end{aligned}$$

(cf. [34], p. 254). Atunci, conform (3.23), avem

$$\begin{aligned} &\bar{\mathcal{M}}_A \left(\left\{ \bar{F}_k : k = \overline{1, n} \right\} \right) - \bar{v}_A \times \bar{p} \\ &= \frac{d\bar{L}'_A}{dt} + m \cdot \overline{AG} \times \dot{\bar{v}}_A + m \cdot \overline{AG} \times \dot{\bar{v}}_A \\ &= \frac{d\bar{L}'_A}{dt} + m \cdot (\bar{v}_G - \bar{v}_A) \times \bar{v}_A + m \cdot \overline{AG} \times \dot{\bar{v}}_A \\ &= \frac{d\bar{L}'_A}{dt} + m \cdot \bar{v}_G \times \bar{v}_A + m \cdot \overline{AG} \times \dot{\bar{v}}_A \\ &= \frac{d\bar{L}'_A}{dt} + m \cdot \overline{AG} \times \dot{\bar{v}}_A - \bar{v}_A \times (m \cdot \bar{v}_G) \\ &\stackrel{(3.21)}{=} \frac{d\bar{L}'_A}{dt} + m \cdot \overline{AG} \times \dot{\bar{v}}_A - \bar{v}_A \times \bar{p} \end{aligned}$$

și

$$\frac{d\bar{L}'_A}{dt} + m \cdot \overline{AG} \times \dot{\bar{v}}_A = \bar{\mathcal{M}}_A \left(\left\{ \bar{F}_k : k = \overline{1, n} \right\} \right) \quad (3.27)$$

(cf. [34], p. 299). Pentru $A = G$, din (3.27) deducem că *teorema momentului cinetic*, $\frac{d\bar{L}'_G}{dt} = \bar{M}_G$, se aplică în mișcarea relativă a sistemului mecanic S în jurul lui G la fel ca în mișcarea absolută a acestuia față de un reper inerțial (ca și cum G ar fi fix în \mathcal{R}) (cf. [76], p. 537, [63], p. 392).

Relația (3.27) constituie **teorema momentului cinetic** în reperul cartezian \mathcal{R}' (cf. [34], p. 299).

În absența forțelor exterioare ($\bar{F}_k = 0$), are loc *conservarea* momentului cinetic \bar{L}'_G . Astfel pot fi explicate o serie de fenomene precum faptul că, în urma săriturii de la trambulină, schiorul ajunge pe pârtie în poziția dorită ori mișcările pe care le facem cu mâinile atunci când suntem în pericol de a cădea, etc. (cf. [34], p. 261-262).

La fel ca în dinamica punctului material, teorema momentului cinetic conduce la *teorema ariilor* (L. Euler, D. Bernoulli (1746), D'Arcy (1747), cf. [34], p. 257), în care sunt implicate *vitezele areolare* ale proiecțiilor pe un plan *fix* aparținând tuturor particulelor sistemului mecanic.

Vom considera, în continuare, că sistemul mecanic S este rigid iar punctul A face parte din constituția sa. Introducem un nou reper cartezian, $\mathcal{R}'' = (A, \bar{C})$, solidar legat de corpul S și notăm cu $\bar{\omega}$ vectorul său viteză unghiulară (momentană).

Centrul de masă G al solidului rigid S este solidar legat de acesta (cf. [34], p. 291). Într-adevăr, pe baza *formulei lui Euler* a distribuției de viteze, putem scrie că

$$\begin{aligned}\bar{v}_G &= \frac{1}{m} \cdot \sum_{k=1}^n m_k \cdot \bar{v}_k = \frac{1}{m} \cdot \sum_{k=1}^n m_k \cdot (\bar{v}_Q + \bar{\omega} \times \overline{QM}_k) \\ &= \bar{v}_Q + \bar{\omega} \times \left(\sum_{k=1}^n \frac{m_k}{m} \cdot \overline{QM}_k \right) \\ &= \bar{v}_Q + \bar{\omega} \times \overline{QG},\end{aligned}$$

unde Q reprezintă o particulă oarecare a solidului rigid. Am ținut seama de faptul că G constituie *baricentrul* mulțimii $\{M_k : k = \overline{1, n}\}$ din SF cu ponderile $\alpha_k = m_k \cdot m^{-1}$, adică

$$\overline{XG} = \sum_{k=1}^n \alpha_k \cdot \overline{XM}_k, \quad (\forall) X \in E_3.$$

Însă $\bar{v}_Q + \bar{\omega} \times \overline{QG}$ este chiar *viteza de transport* a "particulei" G în raport

cu solidul S , deci, cu alte cuvinte, centrul G este *în repaus* față de corpul material solid rigid.

Teorema impulsului (3.21) capătă forma

$$\begin{aligned}\bar{F} &= m \cdot \bar{a}_G = m \cdot \dot{\bar{v}}_G = m \cdot \frac{d}{dt} [\bar{v}_A + \bar{\omega} \times \overline{AG}] \\ &= m \cdot \left(\dot{\bar{v}}_A + \dot{\bar{\omega}} \times \overline{AG} + \bar{\omega} \times \overline{AG} \right) \\ &= m \cdot \left[\dot{\bar{v}}_A + \dot{\bar{\omega}} \times \overline{AG} + \bar{\omega} \times (\bar{\omega} \times \overline{AG}) \right]\end{aligned}$$

(cf. [34], p. 299, [76], p. 564).

În ceea ce privește *lucrul mecanic elementar*, avem

$$\begin{aligned}\delta W &= \sum_{k=1}^n (\bar{\mathcal{F}}_k + \bar{F}_k) \cdot (d\bar{r}_A + d\bar{r}'_k) \\ &= \left(\sum_{k=1}^n \bar{\mathcal{F}}_k \right) \cdot d\bar{r}_A + \left(\sum_{k=1}^n \bar{\mathcal{F}}_k \cdot d\bar{r}'_k \right) + \left(\sum_{k=1}^n \bar{F}_k \right) \cdot d\bar{r}_A \\ &\quad + \sum_{k=1}^n \bar{F}_k \cdot d\bar{r}'_k \\ &= \bar{F} \cdot d\bar{r}_A + \delta W'_{ext} = \bar{F} \cdot \bar{v}_A dt + \delta W'_{ext}\end{aligned}$$

(cf. [34], p. 302). Însă, cum $d\bar{r}'_k = \bar{v}'_k dt = (\bar{v}_k - \bar{v}_A) dt = (\bar{\omega} \times \bar{r}'_k) dt$, obținem

$$\begin{aligned}\delta W'_{ext} &= \sum_{k=1}^n \bar{F}_k \cdot d\bar{r}'_k = \sum_{k=1}^n \bar{F}_k \cdot (\bar{\omega} \times \bar{r}'_k) dt \\ &= \sum_{k=1}^n (\bar{\omega}, \bar{r}'_k, \bar{F}_k) dt = \sum_{k=1}^n (\bar{r}'_k, \bar{F}_k, \bar{\omega}) dt \\ &= \sum_{k=1}^n (\bar{r}'_k \times \bar{F}_k) \cdot \bar{\omega} dt = \overline{\mathcal{M}}_A \left(\left\{ \vec{F}_k : k = \overline{1, n} \right\} \right) \cdot \bar{\omega} dt \\ &= \overline{\mathcal{M}}_A(S) \cdot \bar{\omega} dt\end{aligned}$$

și $\delta W = \bar{F} \cdot \bar{v}_A dt + \overline{\mathcal{M}}_A(S) \cdot \bar{\omega} dt = \overline{\mathcal{R}}_A(S) \cdot \bar{v}_A dt + \overline{\mathcal{M}}_A(S) \cdot \bar{\omega} dt$ (cf. [34], p. 301, [32], p. 111, [76], p. 563, [63], p. 362-363). Am ținut seama în formula anterioară de faptul că atât rezultanta forțelor interioare cât și momentul

rezultant al sistemului alcătuit de aceste forțe față de un pol, fix sau mobil, sunt nule. Practic, spunând că *solidul rigid nu are structură internă* vom subînțelege că mărimile $\overline{\mathcal{R}}_A(S)$, $\overline{\mathcal{M}}_A(S)$ se referă numai la forțele care provin din *mediul înconjurător*.

Teorema energiei cinetice, aplicată punctelor materiale din constituția solidului rigid S , ne conduce la

$$\begin{aligned}
dE_c(S) &= \sum_{k=1}^n d\left(\frac{1}{2}m_k \cdot v_k^2\right) = \sum_{k=1}^n (\overline{\mathcal{F}}_k + \overline{F}_k) \cdot d\overline{r}_k = \delta W_{ext} \\
&= \overline{F} \cdot \overline{v}_A dt + \delta W'_{ext} \\
&\stackrel{(3.25)}{=} d\left(m \cdot \overline{v}_A \cdot \overline{v}_G - \frac{1}{2}m \cdot \overline{v}_A^2 + E'_c(S)\right) \\
&= m \cdot \dot{\overline{v}}_A \cdot \overline{v}_G dt + m \cdot \overline{v}_A \cdot \dot{\overline{v}}_G dt - m \cdot \overline{v}_A \cdot \dot{\overline{v}}_A dt + dE'_c(S) \\
&= (m \cdot \overline{a}_G) \cdot \overline{v}_A dt + m \cdot \dot{\overline{v}}_A \cdot (\overline{v}_G - \overline{v}_A) dt + dE'_c(S) \\
&\stackrel{(3.21)}{=} \overline{F} \cdot \overline{v}_A dt + m \cdot \dot{\overline{v}}_A \cdot (\overline{\omega} \times \overline{AG}) dt + dE'_c(S),
\end{aligned}$$

respectiv

$$dE'_c(S) = \delta W'_{ext} - m \cdot \dot{\overline{v}}_A \cdot (\overline{\omega} \times \overline{AG}) dt, \quad (3.28)$$

formulă care reprezintă **teorema energiei cinetice** în reperul cartezian \mathcal{R}' (cf. [34], p. 302). Pentru $A = G$, din (3.28) rezultă că *teorema energiei cinetice*, $dE'_c(S) = \delta W'_{ext}$, se aplică în mișcarea relativă a solidului rigid S în jurul centrului de masă G la fel ca în mișcarea absolută a acestuia (față de \mathcal{R}) (cf. [63], p. 396).

Revenind la momentul cinetic $\overline{L}'_A(S)$, au loc egalitățile

$$\begin{aligned}
\overline{L}'_A(S) &= \sum_{k=1}^n \overline{r}'_k \times \overline{p}'_k = \sum_{k=1}^n \overline{r}'_k \times [m_k \cdot (\overline{v}_k - \overline{v}_A)] \\
&= \sum_{k=1}^n m_k \cdot \overline{r}'_k \times (\overline{\omega} \times \overline{r}'_k) \\
&= \left(\sum_{k=1}^n m_k \cdot \overline{r}'_k{}^2\right) \cdot \overline{\omega} - \sum_{k=1}^n m_k \cdot (\overline{\omega} \cdot \overline{r}'_k) \cdot \overline{r}'_k.
\end{aligned}$$

Dacă $\overline{\omega} = p_1 \cdot \overline{i}_1 + p_2 \cdot \overline{j}_1 + p_3 \cdot \overline{k}_1$, atunci $\overline{L}'_A(S) = L'_1 \cdot \overline{i}_1 + L'_2 \cdot \overline{j}_1 + L'_3 \cdot \overline{k}_1$,

unde

$$L'_i = \sum_{j=1}^3 I_{ij} \cdot p_j, \quad 1 \leq i \leq 3, \quad (3.29)$$

iar $(I_{ij})_{i,j}$ este *matricea de reprezentare* a tensorului de inerție $\vec{I}_A(S)$ în \mathcal{R}'' (cf. [34], p. 292). Egalitățile (3.29) sunt scrise matriceal

$$\begin{pmatrix} L'_1 \\ L'_2 \\ L'_3 \end{pmatrix} = [I_A(S)] \cdot \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{pmatrix}$$

(cf. [34], p. 294, [76], p. 587, [32], p. 114, [41], p. 150).

Cu ajutorul *identității lui Lagrange* se realizează o reprezentare remarcabilă a energiei cinetice relative, și anume

$$\begin{aligned} E'_c(S) &= \sum_{k=1}^n \frac{1}{2} m_k \cdot (\bar{\omega} \times \bar{r}'_k)^2 = \sum_{k=1}^n \frac{1}{2} m_k \cdot [\bar{\omega}^2 \cdot \bar{r}'_k{}^2 - (\bar{\omega} \cdot \bar{r}'_k)^2] \\ &= \frac{1}{2} \cdot \bar{\omega} \cdot \left[\left(\sum_{k=1}^n m_k \cdot \bar{r}'_k{}^2 \right) \cdot \bar{\omega} - \sum_{k=1}^n m_k \cdot (\bar{\omega} \cdot \bar{r}'_k) \cdot \bar{r}'_k \right] \\ &= \frac{1}{2} \cdot \bar{L}'_A(S) \cdot \bar{\omega} = \frac{1}{2} \cdot \sum_{1 \leq i,j \leq 3} I_{ij} \cdot p_i \cdot p_j \end{aligned}$$

(cf. [34], p. 293, [32], p. 112, [76], p. 588, [63], p. 447, [14], p. 177). Dacă notăm cu $\Delta(A, \bar{\omega})$ dreapta care trece prin punctul A și are versorul director $\bar{u} = \frac{\bar{\omega}}{\omega}$, atunci, cum

$$I_{\Delta(A, \bar{\omega})}(S) = I_{11} \cdot \alpha^2 + I_{22} \cdot \beta^2 + I_{33} \cdot \gamma^2 + 2I_{12} \cdot \alpha\beta + 2I_{13} \cdot \alpha\gamma + 2I_{23} \cdot \beta\gamma,$$

unde $\alpha = \frac{p_1}{\omega}$, $\beta = \frac{p_2}{\omega}$, $\gamma = \frac{p_3}{\omega}$, deducem că

$$E'_c(S) = \frac{1}{2} \cdot I_{\Delta(A, \bar{\omega})}(S) \cdot \omega^2$$

(cf. [32], p. 109, [14], p. 180).

Formula $E'_c(S) = \frac{1}{2} \cdot \bar{L}'_A(S) \cdot \bar{\omega} = \frac{1}{2} \omega \cdot (\bar{L}'_A(S) \cdot \bar{u}) = \frac{1}{2} \omega \cdot L'_{\Delta(A, \bar{\omega})}(S)$ ne conduce la expresia *momentului cinetic relativ al solidului S față de axa $\Delta(A, \bar{\omega})$*

$$L'_{\Delta(A, \bar{\omega})}(S) = I_{\Delta(A, \bar{\omega})}(S) \cdot \omega$$

(cf. [32], p. 116).

Dacă renunțăm la ipoteza de rigiditate impusă sistemului mecanic S și o înlocuim cu cea de *conservativitate* dată de

$$\overline{\mathcal{F}}_{kl} = \mathcal{F}_{kl} \cdot \overline{M_k M_l} = \mathcal{F}_{kl} (|\overline{M_k M_l}|) \cdot \overline{M_k M_l}$$

(cf. [34], p. 264-265, [32], p. 79), se deduce imediat că

$$\begin{aligned} \overline{\mathcal{F}}_{kl} \cdot d\overline{r}_k + \overline{\mathcal{F}}_{lk} \cdot d\overline{r}_l &= \overline{\mathcal{F}}_{kl} \cdot d\overline{M_l M_k} \\ &= -\mathcal{F}_{kl} \cdot d\left(\frac{1}{2} \cdot \overline{M_k M_l}^2\right) = -\mathcal{F}_{kl} \cdot d\left(\frac{1}{2} \cdot |\overline{M_k M_l}|^2\right) \\ &= -\mathcal{F}_{kl} \cdot |\overline{M_k M_l}| \cdot d(|\overline{M_k M_l}|) \\ &\equiv d\left(\int \mathcal{F}_{kl} (|\overline{M_k M_l}|) \cdot |\overline{M_k M_l}| \cdot d(|\overline{M_k M_l}|)\right. \\ &\quad \left.+ \text{const.}\right) \\ &= dU_{kl}. \end{aligned}$$

Mărimea $V = -U = -\sum_{1 \leq k \leq l \leq n} U_{kl}$ va reprezenta *energia potențială* a sistemului conservativ S . Teorema energiei cinetice (aplicată particulelor sistemului) implică

$$dE_c = \delta W = dU + \delta W_{ext},$$

respectiv

$$d(E_c + V) = \delta W_{ext}. \quad (3.30)$$

Mărimea $E_c + V$ reprezintă *energia mecanică (totală)* a sistemului conservativ (cf. [34], p. 265, [32], p. 79). În particular, formula (3.30) arată că *energia mecanică a unui sistem conservativ izolat este constantă (se conservă)*.

Diferențiala energiei cinetice a unui sistem mecanic S este, așadar, egală cu lucrul mecanic elementar al forțelor *exterioare*, δW_{ext} , plus lucrul mecanic elementar al forțelor *interne*, $\delta W_{int} = \sum_{k=1}^n \overline{\mathcal{F}}_k \cdot d\overline{r}_k$. Această afirmație constituie **teorema energiei cinetice** a unui sistem mecanic oarecare (D. Bernoulli) (cf. [34], p. 263, [32], p. 78). Pe baza principiului acțiunii și reacțiunii, aplicat particulelor din componența sistemului S , la fel ca în dinamica punctului material, se poate arăta că *energia (mecanică) pierdută de sistem (adică, $\Delta(E_c + V)$) este egală cu lucrul mecanic produs de acesta asupra mediului înconjurător* (cf. [34], p. 266).

În tehnică, un sistem mecanic S este caracterizat d. p. d. v. al lucrului mecanic de mărimea numită *randament* (*meccanic*) (cf. [25], p. 83).

3.3.2 Teorema momentului cinetic față de o axă. O demonstrație a formulei Huygens-Steiner cu ajutorul teoremei lui V. Vâlcovici (1929). Raza de girație

Să presupunem că solidul rigid S se rotește în jurul unei axe fixe $\Delta(O, \vec{\omega})$, unde $\vec{\omega} = \omega \cdot \vec{u} = \dot{\theta} \cdot \vec{u}$. Atunci, din (3.27) rezultă ($A = O$)

$$\vec{L}'_O(S) = \overline{\mathcal{M}}_O(S).$$

Prin înmulțire scalară cu \vec{u} în ambii membri, deducem că

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left[L'_{\Delta(O, \vec{\omega})}(S) \right] &= \frac{d}{dt} \left[\vec{L}'_O(S) \cdot \vec{u} \right] = \overline{\mathcal{M}}_O(S) \cdot \dot{\vec{u}} \\ &= \mathcal{M}_{\Delta(O, \vec{\omega})}(S) \\ &= I_{\Delta(O, \vec{\omega})}(S) \cdot \dot{\omega}. \end{aligned}$$

Obținem astfel **teorema momentului cinetic față de axa $\Delta(O, \vec{\omega})$**

$$I_{\Delta(O, \vec{\omega})}(S) \cdot \ddot{\theta} = \mathcal{M}_{\Delta(O, \vec{\omega})}(S) \quad (3.31)$$

(cf. [34], p. 258, [76], p. 593, [32], p. 124), relație extrem de utilă în aplicații și care constituie analogul *unghiular* al legii fundamentale a lui Newton (2.74) (cf. [17], p. 123-124). Din (3.31) se deduce cu ușurință proprietatea momentului $I_{\Delta(O, \vec{\omega})}(S)$ de a fi o măsură a *inertției la rotație* manifestată de corpurile solide rigide (cf. [34], p. 259, [73], p. 369). Ca ilustrare elocventă a principiului (3.31), un glob pământesc de uz didactic gol pe dinăuntru se va roti mult mai "repede" și pe o perioadă de timp mai mare, odată ce a fost mișcat, comparativ cu un glob de dimensiuni identice dar plin (cu moment de inerție mai mare). O serie de probleme interesante (scaunul lui Jukovski, roata lui Prandtl, discul lui Picard, mașina lui Atwood) referitoare la teorema momentului cinetic față de axa de rotație (fixă) pot fi citite în [32], p. 125-126, [34], p. 275-276, [76], p. 532-533, [17], p. 121, etc.

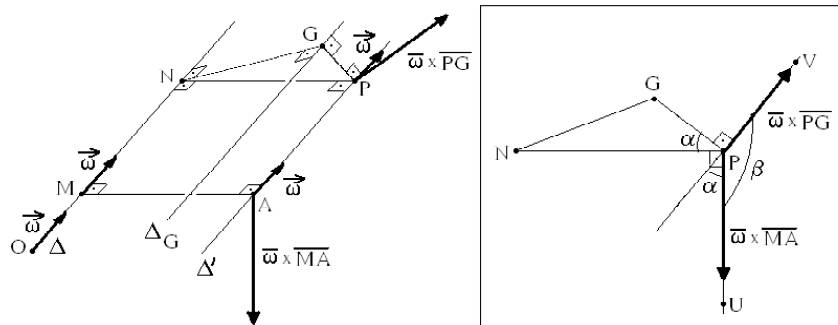


Figura 3.25 a

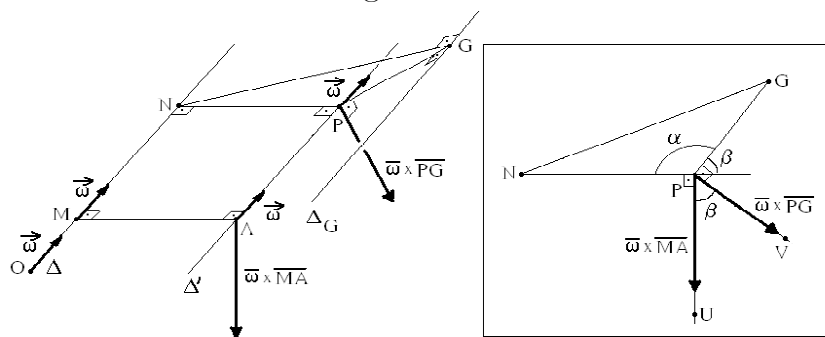


Figura 3.25 b

Se știe că formula Huygens-Steiner, aplicată sistemului mecanic S , ne conduce la egalitatea

$$I_{\Delta}(S) = I_{\Delta'}(S) + m \cdot [d^2(\Delta, \Delta_G) - d^2(\Delta', \Delta_G)], \quad (3.32)$$

unde $\Delta = \Delta(O, \vec{\omega})$, $\Delta' = \Delta(A, \vec{\omega})$ și $\Delta_G = \Delta(G, \vec{\omega})$. Însă relația anterioară poate fi obținută și în mod *direct*, din (3.25). Într-adevăr, folosind notațiile din Figura 3.25 (a, b, c), putem scrie că

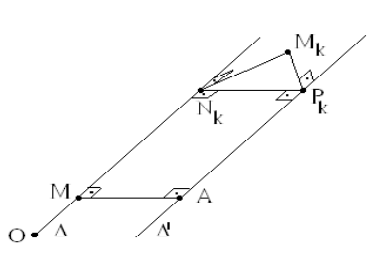


Figura 3.25 c

$$\begin{aligned}\bar{v}_A &= \bar{\omega} \times \overline{OA} = \bar{\omega} \times \overline{MA} & \bar{v}_G &= \bar{\omega} \times \overline{NG} \\ \bar{v}_k &= \bar{\omega} \times \overline{N_k M_k} & \bar{v}'_k &= \bar{\omega} \times \overline{P_k M_k}\end{aligned}$$

și

$$\begin{aligned}\bar{v}'_G &= \bar{\omega} \times \overline{PG} \\ &= \bar{\omega} \times (\overline{NG} - \overline{NP}) = \bar{\omega} \times (\overline{NG} - \overline{MA}) \\ &= \bar{v}_G - \bar{v}_A,\end{aligned}$$

respectiv

$$\begin{aligned}\bar{v}_A^2 &= |\bar{v}_A|^2 = \omega^2 \cdot |\overline{MA}|^2 = \omega^2 \cdot d^2(\Delta, \Delta') \\ \bar{v}_k^2 &= \omega^2 \cdot d^2(M_k, \Delta) & \bar{v}'_k{}^2 &= \omega^2 \cdot d^2(M_k, \Delta') \\ \bar{v}'_G{}^2 &= \omega^2 \cdot d^2(\Delta', \Delta_G)\end{aligned}$$

Atunci,

$$E_c(S) = \sum_{k=1}^n \frac{1}{2} m_k \cdot \bar{v}_k^2 = \frac{1}{2} \omega^2 \cdot \sum_{k=1}^n m_k \cdot d^2(M_k, \Delta) = \frac{1}{2} I_\Delta \cdot \omega^2$$

și

$$E'_c(S) = \sum_{k=1}^n \frac{1}{2} m_k \cdot \bar{v}'_k{}^2 = \frac{1}{2} \omega^2 \cdot \sum_{k=1}^n m_k \cdot d^2(M_k, \Delta') = \frac{1}{2} I_{\Delta'} \cdot \omega^2.$$

Mărima R_{gir} dată de $I_\Delta = m \cdot R_{gir}^2$ poartă denumirea de *rază de rotație* sau *de inerție* (cf. [32], p. 110, [63], p. 356, [73], p. 369).

De asemenea,

$$\begin{aligned}\bar{v}_A \cdot (\bar{v}_G - \bar{v}_A) &= (\bar{\omega} \times \overline{MA}) \cdot \bar{v}'_G \\ &= (\bar{\omega} \times \overline{MA}) \cdot (\bar{\omega} \times \overline{PG}) \\ &= \omega^2 \cdot d(\Delta, \Delta') \cdot d(\Delta_G, \Delta') \cdot \cos \angle VPU \\ &= \omega^2 \cdot d(\Delta, \Delta') \cdot d(\Delta_G, \Delta') \cdot \cos \beta.\end{aligned}$$

Teorema lui Pitagora generalizată, aplicată în triunghiul GNP , și anume

$$GN^2 = GP^2 + PN^2 - 2GP \cdot PN \cdot \cos \alpha,$$

unde $\alpha = \pi - \beta$, va implica

$$d^2(\Delta, \Delta_G) = d^2(\Delta', \Delta_G) + d^2(\Delta, \Delta') + \frac{2}{\omega^2} \cdot \bar{v}_A \cdot (\bar{v}_G - \bar{v}_A).$$

Formula (3.32) se obține prin înlocuirea mărimilor corespunzătoare în (3.25). Cazul $A = G$ este tratat în [34], p. 269-270.

3.3.3 Solidul rigid cu o axă fixă. Ecuația diferențială a mișcării. Echilibrarea solidului. Axe permanente și axe spontane de rotație (libere). Principiul inerției pentru corpul solid rigid. Pendulul fizic. Teoremele lui C. Huygens. Formula pendulului reversibil

Vom stabili în continuare ecuațiile de mișcare ale unui corp material solid rigid care admite o axă fixă. Asemenea situații se întâlnesc frecvent în viața de zi cu zi, un exemplu elocvent fiind oferit de către roata de bicicletă, prinsă în două locuri de cadrul acesteia. Păstrând notațiile penultimei subsecțiuni, alegem drept axă de rotație (fixă) dreapta Oz . În plus, $A = O$ iar planul $Ox''y''$ al reperului cartezian \mathcal{R}'' coincide cu Oxy (vezi Figura 3.26). Punctele de "prindere" ale solidului S pe axa Δ sunt O și Q . Cu ajutorul reacțiunilor (forțelor de legătură) \vec{R}_k este calculat efectul pe care mișcarea corpului material îl are asupra axei (solidul "apasă" axa, conform principiului acțiunii și reacțiunii, cu forțele $-\vec{R}_k$, cf. [34], p. 452). Aici, $\bar{\omega} = \omega(t) \cdot \bar{k} = \omega(t) \cdot \bar{k}_1$, $\omega = \dot{\theta}(t)$.

Teorema impulsului ($\bar{v}_A = 0$)

$$m \cdot \left[\dot{\bar{\omega}} \times \overline{OG} + \bar{\omega} \times (\bar{\omega} \times \overline{OG}) \right] = \bar{F} + \bar{R}_1 + \bar{R}_2,$$

unde $\dot{\bar{\omega}} = \left(\frac{\partial \bar{\omega}}{\partial t} \right)_{\mathcal{R}''} = \dot{\omega}(t) \cdot \bar{k}_1$, se proiectează pe axele triedrului $Ox''y''z''$ ($\dot{\omega} = \varepsilon$):

$$\begin{cases} -m \cdot (\xi_2'' \cdot \varepsilon + \xi_1'' \cdot \omega^2) = F_{x''} + R_{1,x''} + R_{2,x''} \\ m \cdot (\xi_1'' \cdot \varepsilon - \xi_2'' \cdot \omega^2) = F_{y''} + R_{1,y''} + R_{2,y''} \\ 0 = F_{z''} + R_{1,z''} + R_{2,z''} \end{cases} \quad (3.33)$$

(cf. [34], p. 453, [76], p. 594). Mărimile ξ_1'' , ξ_2'' , ξ_3'' reprezintă coordonatele centrului de masă G al solidului S (în \mathcal{R}'').

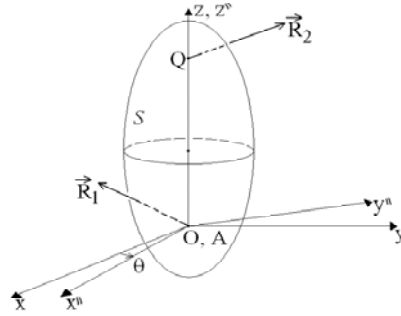


Figura 3.26

Teorema momentului cinetic (3.27), și anume

$$\begin{aligned} \frac{d\bar{L}'_O}{dt} &= \bar{\mathcal{M}}_O(\{\vec{F}, \vec{R}_1, \vec{R}_2\}) = \bar{\mathcal{M}}_O(\{\vec{F}, \vec{R}_2\}) \\ &= \left(\frac{\partial \bar{L}'_O}{\partial t} \right)_{\mathcal{R}''} + \bar{\omega} \times \bar{L}'_O(S) \end{aligned}$$

ne conduce la $(\overline{OQ} = h \cdot \bar{k}_1)$

$$\begin{cases} I_{13} \cdot \varepsilon - I_{23} \cdot \omega^2 = L - h \cdot R_{2,y''} \\ I_{23} \cdot \varepsilon + I_{13} \cdot \omega^2 = M + h \cdot R_{2,x''} \\ I_{33} \cdot \varepsilon = N, \end{cases} \quad (3.34)$$

unde $\bar{\mathcal{M}}_O(\{\vec{F}\}) = L \cdot \bar{i}_1 + M \cdot \bar{j}_1 + N \cdot \bar{k}_1$. Firește, $\bar{\mathcal{M}}_O(\{\vec{R}_1\}) = 0$, linia de acțiune a forței \vec{R}_1 trecând prin O .

Ecuatia diferențială care guvernează mișcarea solidului S este ultima ecuație din (3.34):

$$I_{33} \cdot \ddot{\theta} = N(t, \theta, \dot{\theta}), \quad t \geq t_0.$$

Ea putea fi obținută și în mod *direct*, prin aplicarea legii (3.31), observând că

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_\Delta(\{\vec{F}, \vec{R}_1, \vec{R}_2\}) &= \mathcal{M}_\Delta(\{\vec{F}\}) + \mathcal{M}_\Delta(\{\vec{R}_1\}) + \mathcal{M}_\Delta(\{\vec{R}_2\}) \\ &= N + \bar{\mathcal{M}}_O(\{\vec{R}_1\}) \cdot \bar{k} + \bar{\mathcal{M}}_Q(\{\vec{R}_2\}) \cdot \bar{k} \\ &= N. \end{aligned}$$

Odată cunoscută viteza unghiulară $\omega = \dot{\theta}$, mărimile $R_{2,x''}$, $R_{2,y''}$ și $R_{1,x''}$, $R_{1,y''}$ se determină din (3.34), respectiv (3.33). Mărimile $R_{1,z''}$, $R_{2,z''}$ nu pot fi însă calculate. Acest fenomen este în concordanță cu *principiul suprimării forțelor*. Astfel, dacă adăugăm la sistemul $\{\vec{F}, \vec{R}_1, \vec{R}_2\}$ un sistem mul $\{\vec{R}_3, \vec{R}_4\}$, unde $\vec{R}_3 \in T_O\mathbb{R}^3$, $\vec{R}_3 \in f \cdot \bar{k}_1$ și $\vec{R}_4 \in T_Q\mathbb{R}^3$, $\vec{R}_4 \in -f \cdot \bar{k}_1$, necunoscutele $R_{1,z''}$, $R_{2,z''}$ vor fi înlocuite cu cantitățile $R_{1,z''} + f$, $R_{2,z''} - f$ în (3.33), fără a influența mișcarea (cf. [76], p. 595, [34], p. 454), căci *legătura este indestructibilă*. În tehnică, sistemul (nedeterminat) de șase ecuații cu șapte necunoscute constituit din (3.33), (3.34) este denumit *hiperstatic* (cf. [14], p. 192). El devine rezolvabil (determinat, *izostatic*) dacă folosim, de exemplu, în locul a două articulații *sferice* O și Q o articulație sferică O și una *cilindrică* Q (cf. [63], p. 402, [14], p. 193).

În cazul *repausului* ($\omega = \varepsilon = 0$), reacțiunile \vec{R}_1, \vec{R}_2 se numesc *statice*. Ele verifică formulele

$$\begin{cases} 0 = F_{x''} + R_{1,x''}^{st} + R_{2,x''}^{st} \\ 0 = F_{y''} + R_{1,y''}^{st} + R_{2,y''}^{st} \\ 0 = F_{z''} + R_{1,z''}^{st} + R_{2,z''}^{st} \end{cases} \quad \begin{cases} 0 = L - h \cdot R_{2,y''}^{st} \\ 0 = M + h \cdot R_{2,x''}^{st} \end{cases} \quad (3.35)$$

În timpul mișcării, acestora² li se adaugă, în general, o serie de termeni nenuli (*reacțiuni sau solicitări suplimentare dinamice*, cf. [76], p. 902):

$$\begin{aligned} R_{i,x''}^{din} &= R_{i,x''}^{st} + \Delta R_{i,x''} & R_{i,y''}^{din} &= R_{i,y''}^{st} + \Delta R_{i,y''} \\ R_{i,z''}^{din} &= R_{i,z''}^{st} + \Delta R_{i,z''}, & i &= 1, 2. \end{aligned}$$

Din (3.33), (3.34), (3.35) obținem, prin scădere membru cu membru,

$$\begin{cases} -m \cdot (\xi_2'' \cdot \varepsilon + \xi_1'' \cdot \omega^2) = \Delta R_{1,x''} + \Delta R_{2,x''} \\ m \cdot (\xi_1'' \cdot \varepsilon - \xi_2'' \cdot \omega^2) = \Delta R_{1,y''} + \Delta R_{2,y''} \\ 0 = \Delta R_{1,z''} + \Delta R_{2,z''} \end{cases}$$

și

$$\begin{cases} I_{13} \cdot \varepsilon - I_{23} \cdot \omega^2 = -h \cdot \Delta R_{2,y''} \\ I_{23} \cdot \varepsilon + I_{13} \cdot \omega^2 = h \cdot \Delta R_{2,x''} \end{cases}$$

(cf. [63], p. 403). Termenii suplimentari descriși anterior (ca valori numerice absolute) constituie "răspunsul" trimis de solidul rigid *agentului* care

²Acum, mărimile $R_{i,x''}^{st}$, $R_{i,y''}^{st}$, $R_{i,z''}^{st}$, unde $1 \leq i \leq 3$, sunt definite chiar de relațiile (3.35) (cf. [63], p. 402, [34], p. 454, relația (18.14)).

provoacă *mișcarea de rotație* (axa rotoare Oz), adică expresia unor *forțe de inerție*. În același timp, ei desemnează un sistem de *forțe inerțiale* - dat printr-o forță *centrifugă* \vec{F}_i și un cuplu de moment \vec{M}_i (aici, torsorul forțelor inerțiale este calculat față de polul G , cf. [76], p. 890, 903) -, care se reduce în mod obișnuit (cf. [32], p. 156-157, [76], § 3, p. 890-894).

Insistăm pe faptul că asupra corpului material "interven" anumite efecte ale mișcării sale *neinerțiale*, sub forma unor forțe aparente, *inerțiale*. Acestea produc "forțarea" punctelor de legătură O, Q , în articulațiile cărora apar forțe reale, *de inerție*. Un exemplu simplu se cuvine adus în discuție. Pe o platformă orizontală (vezi Figura 3.27), perfect lucioasă, este așezat un corp punctiform legat de axul O al platformei printr-un fir "conținând" un *dinamometru* (resort gradat). Mișcarea circulară uniformă a platformei produce o anumită *întindere* (constantă) a resortului. Odată produsă această întindere, corpul punctiform se găsește în repaus față de platformă. În schimb, mișcarea circulară a particulei este datorată acțiunii forței *centripete* $\vec{F} \in T_M \mathbb{R}^3$, $\vec{F} \in \bar{F}$, unde

$$\vec{F} = m \cdot \vec{a}_{abs} = -m \cdot R\omega^2 \cdot \vec{\rho}.$$

Datorită inerției, corpul punctiform se împotrivesc *agentului* care tinde să-i schimbe starea mecanică, deci platformei. Cum *legătura* particulei cu platforma se realizează prin intermediul firului, acesta va "suporta" efectul inerției, fiind *întins* (tensionat) de forța \vec{F}' . Forța \vec{F}' , unde

$$\vec{F}' = -\vec{F},$$

glisează de-a lungul firului cu resort până în punctul fix O .

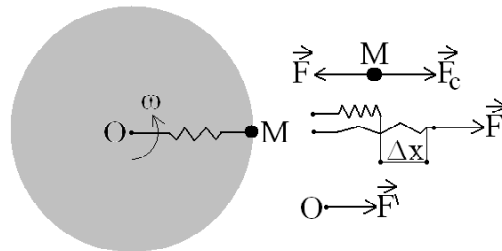


Figura 3.27

Platforma, văzută ca *reper cartezian*, este, evident, *neinerțială* (putem spune că, în acest sens, mișcarea circulară este o *mișcare neinerțială*). În raport cu platforma, corpul punctiform se găsește în repaus, deși de el "trage" forța \vec{F} . Aceasta

înseamnă că asupra sa trebuie să mai acționeze și o altă forță, necunoscută nouă. Situația a fost întâlnită deja în subsecțiunea referitoare la *principiul echivalenței*. Forța necunoscută, *fictivă*, ”echilibrează” acțiunea (vizibilă pe dinamometru) a forței centripete \vec{F} . Ea se numește *inercială*: $\vec{F}_c \in T_M\mathbb{R}^3$, $\vec{F}_c \in \overline{F}_c$, unde

$$\overline{F}_c = \overline{F}'$$

(cf. [32], p. 203). De aceea, în mod curent, efectul produs de rotația axei fixe asupra diferitelor părți (piese) ale ansamblului particulelor solidului rigid este *formalizat* prin forțe aparente, *inertiale*, pe când ”răspunsul” acestor părți, transmis în punctele de prindere O , Q , se constituie într-un sistem de forțe *reale*, ce trebuie luate în calcul de proiectant și care se numesc *forțe de inerție* (\vec{F}'). Recomandăm cititorului eleganta expunere a subiectului de față făcută în [32], p. 200 și următoarele.

Echilibrarea totală (generală) a solidului rigid S are loc atunci când

$$\Delta R_{i,x''} = 0 \quad \Delta R_{i,y''} = 0 \quad \Delta R_{i,z''} = 0, \quad i = 1, 2.$$

Dacă $\xi_1'' = \xi_2'' = 0$, adică $G \in \Delta$, atunci torsorul forțelor inerciale se reduce la cuplul de moment \overline{M}_i ($\overline{F}_i = 0$, $\overline{M}_i \neq 0$). Astfel, deși corpul material este *echilibrat static* (cf. [2], p. 281), prezența momentului inercial va provoca ”fortărea” axei de rotație Δ , corpul rigid având tendința *naturală* ca, în timpul mișcării, să-și *transforme* rotația într-o rotație în jurul uneia dintre *axele principale centrale de inerție* (cf. [76], p. 903). Pentru $I_{13} = I_{23} = 0$ (dreapta Δ este axă principală de inerție a elipsoidului de inerție centrat în O) are loc *echilibrarea dinamică* a solidului rigid S (cf. [63], p. 404). Echilibrarea unui corp material solid rigid se realizează fie prin îndepărtarea fie prin adăugarea anumitor *mase* (cf. [76], p. 904-905, [73], p. 482). În mod evident, *dacă axa de rotație Δ este o axă principală centrală de inerție, atunci solidul S va fi echilibrat total* (cf. [34], p. 454, [32], p. 129).

Suntem interesați acum de posibilitatea ca rotația rigidului să se realizeze fără ca acesta să ”apese” legătura Q . Din (3.33), (3.34) rezultă imediat că ($R_{2,x''} = R_{2,y''} = 0$)

$$I_{13} = I_{23} = 0 \quad L = M = 0.$$

Cu alte cuvinte, *dacă i se imprimă corpului material solid rigid o rotație ($\omega(t_0) \neq 0$) în jurul uneia dintre axele principale de inerție ale elipsoidului său de inerție centrat în ”punctul de sprijin” O iar momentul rezultant al*

forțelor exterioare este coliniar cu axa de rotație, atunci corpul se va roti în jurul acestei axe, care rămâne fixă în spațiu (cf. [76], p. 595, [34], p. 455). Un asemenea caz are loc atunci când linia de acțiune a rezultantei \vec{F} trece prin O . Dreapta Δ se numește *axă permanentă de rotație* (cf. [63], p. 405).

Ne punem, în mod logic, întrebarea: se poate ca, în timpul mișcării, corpul material să nu "apese" *nici* asupra legăturii O ? Răspunsul este afirmativ. Într-adevăr, dacă rigidul este acționat de un cuplu de forțe ($\vec{F} = 0$) având momentul \vec{M}_O coliniar cu axa de rotație (deci, forțele se găsesc într-un plan perpendicular pe aceasta) și

$$\xi_1'' = \xi_2'' = 0 \quad I_{13} = I_{23} = 0,$$

atunci reacțiunile *dispar*

$$R_{i,x''} = R_{i,y''} = 0 \quad \Delta R_{i,x''} = \Delta R_{i,y''} = 0$$

(cf. [76], p. 596). *Axa de rotație este fixă în spațiu, dar rigidul S nu acționează asupra ei.* Un caz particular esențial este cel dat de $\vec{F} = 0$, $\vec{M}_O = 0$. Astfel, *dacă unui corp material solid rigid liber i se imprimă o rotație în jurul uneia dintre axele sale principale centrale de inerție iar asupra sa nu mai acționează nici o forță (exterioară), corpul își va continua mișcarea de rotație (devenită uniformă) în jurul acelei axe, care rămâne fixă în spațiu* (cf. [34], p. 455). Dreapta Δ poartă denumirea de *axă spontană de rotație* sau *axă liberă* (cf. [32], p. 129).

Putem formula în această situație **principiul inerției** în mișcarea solidului rigid: *dacă un corp material solid rigid este izolat (sistemul forțelor externe este nul), atunci centrul său de masă G se află în repaus sau în mișcare rectilinie uniformă și, simultan, rigidul se poate roti uniform la nesfârșit în jurul unei axe principale centrale de inerție* (cf. [32], p. 131, [63], p. 405). Această rotație se mai numește și *mișcare Euler-Poinsot* (cf. [76], p. 686, [34], p. 508).

Dacă un corp material solid rigid se rotește în jurul unei axe principale centrale de inerție care corespunde unui moment principal de inerție *extremal* (minim sau maxim) în timp ce centrul său de masă (inerție) stă pe loc (cazul creionului legat cu ață de un vârf sau al farfurioarei ovale, cf. [32], p. 130) ori se deplasează rectiliniu uniform (*mișcarea obuzului* după A. Krâlov, cf. [76], p. 810-814), atunci mișcarea solidului rigid este *stabilă* (soluțiile corespunzătoare ale ecuațiilor diferențiale ce caracterizează mișcarea solidului rigid sunt *stabile* în sens Liapunov) (cf. [76], p. 640, 813, [34], p. 485).

Un caz particular esențial de solid rigid cu o axă fixă îl constituie *pendulul fizic*. Vom considera (în interiorul laboratorului) un sistem de referință \mathcal{R} având axa Ox pe direcția verticală, în sens descendent (vezi Figura 3.28), în timp ce axa Oz (axa rotației) este paralelă cu podeaua.

Solidul rigid este omogen, alcătuit simetric față de planul vertical Oxy (planul mobil $Ox''y''$ coincide cu Oxy). Astfel, centrul de masă G se va găsi în Oxy . Mai mult chiar, alegem dreapta OG ca axă Ox'' a reperului cartezian \mathcal{R}'' ($\xi_1'' > 0$). Planul Oxy se mai numește și *plan de oscilație* al pendulului fizic S . Simetria configurației particulelor lui S arată că axa rotației Oz este axă principală de inerție a elipsoidului de inerție centrat în O , deci $I_{13} = I_{23} = 0$ (cf. [34], p. 457).

Teorema impulsului (3.33) devine

$$\begin{cases} -m \cdot \xi_1'' \cdot \omega^2 = mg \cdot \cos \theta + R_{1,x''} + R_{2,x''} \\ m \cdot \xi_1'' \cdot \varepsilon = -mg \cdot \sin \theta + R_{1,y''} + R_{2,y''} \\ 0 = R_{1,z''} + R_{2,z''}. \end{cases}$$

Teorema momentului cinetic (3.34) este dată de

$$\begin{cases} 0 = -h \cdot R_{2,y''} \\ 0 = h \cdot R_{2,x''} \\ I_{33} \cdot \varepsilon = -mg \cdot \xi_1'' \cdot \sin \theta, \end{cases}$$

căci $L = M = 0$.

Ecuatia diferențială care descrie mișcarea pendulului fizic este, așadar,

$$\ddot{\theta} + \frac{mg \cdot \xi_1''}{I_{33}} \cdot \sin \theta = 0$$

(cf. [34], p. 456, [76], p. 596, [63], p. 406).

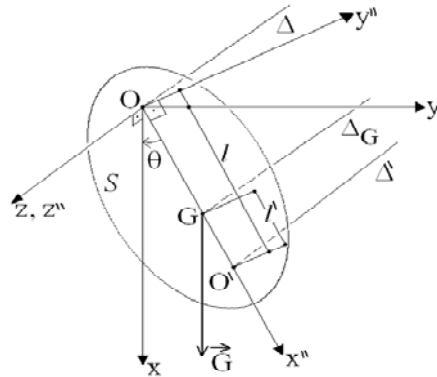


Figura 3.28

Pendulul matematic introdus de (2.154), unde $l = \frac{I_{33}}{m\xi_1''}$, poartă denumirea de *pendul simplu sincron* (de lungime l) cu pendulul fizic S (cf. [34], p. 457, [76], p. 597, [63], p. 406).

În ceea ce privește reacțiunile, $R_{2,x''} = R_{2,y''} = 0$ și

$$\begin{cases} R_{1,y''} = mg \cdot \sin \theta + m \cdot \xi_1'' \cdot \ddot{\theta} \\ R_{1,x''} = -mg \cdot \cos \theta - m \cdot \xi_1'' \cdot \dot{\theta}^2 \end{cases}$$

La fel ca în (2.155), avem

$$\dot{\theta}^2 = \theta_1^2 + \frac{2g}{l} \cdot (\cos \theta - \cos \theta_0),$$

unde $\theta(t_0) = \theta_0$, $\dot{\theta}(t_0) = \theta_1$ (datele Cauchy atașate ecuației diferențiale). Reacțiunile sunt în acest moment determinate (cf. [76], p. 600-601, [34], p. 457).

Perioada mișcării (în diverse grade de aproximație) se calculează cu formulele obținute pentru pendulul simplu, ținând seama, firește, de *sincronism* (cf. [76], p. 597, [63], p. 406).

Formula Huygens-Steiner se scrie în acest caz sub forma

$$I_{33} = I_{\Delta_G} + m \cdot \xi_1''^2.$$

Împărțind cu $m \cdot \xi_1''$, obținem

$$l = \frac{I_{\Delta_G}}{m \cdot \xi_1''} + \xi_1'' = \xi_1'' + l'. \quad (3.36)$$

Dreapta Δ' care trece prin punctul O' de abscisă $x'' = l$ și are vectorul director \bar{k} (paralelă, așadar, cu Δ_G) poartă denumirea de *axă de oscilație* a pendulului fizic S (axa fixă Δ constituie *axa de suspensie* a pendulului) (cf. [76], p. 597). Punctele O , O' sunt *centrul de suspensie*, respectiv *centrul de oscilație* al acestuia (cf. [63], p. 406).

Am stabilit, astfel, inegalitatea

$$l > \xi_1''. \quad (3.37)$$

Din (3.36) rezultă că

$$l' \cdot \xi_1'' = \frac{I_{\Delta_G}}{m},$$

ceea ce indică *posibilitatea ca mărimile* l' , ξ_1'' *să-și schimbe rolurile*. Mai precis, dacă Δ' ar fi axa de suspensie, atunci Δ ar desemna axa de oscilație (cf. [34], p. 458). Formula lui Galilei, și anume

$$T = 2\pi \cdot \sqrt{\frac{l}{g}} = 2\pi \cdot \sqrt{\frac{\xi_1'' + l'}{g}} \quad (3.38)$$

arată că, în urma inversării "rolurilor" acestor axe, nu se produce vreo modificare a perioadei mișcării (cf. [32], p. 128). De aceea, axele de suspensie și de oscilație se mai numesc și *reciproce* (cf. [34], p. 458). Acest fenomen poate fi abordat într-un cadru mai general. Dacă Δ_1 , Δ_2 sunt două (posibile) axe de suspensie paralele cu podeaua laboratorului (vezi Figura 3.29), atunci, ținând seama de formula Huygens-Steiner, putem scrie că

$$L_i = \frac{I_{\Delta_G}}{m \cdot l_i} + l_i,$$

unde l_i este distanța de la centrul de suspensie O_i la centrul de masă G al solidului ("fosta" abscisă ξ_1''), iar L_i reprezintă lungimea pendulului simplu sincron cu pendulul fizic suspendat în O_i , $i = 1, 2$.

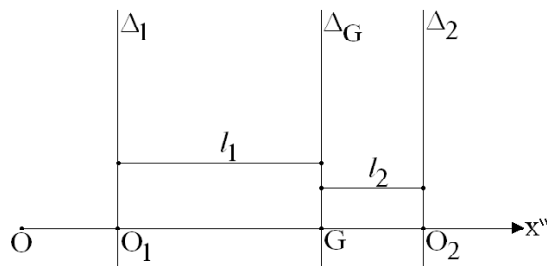


Figura 3.29

Se vede imediat că

$$L_i \cdot l_i - l_i^2 = \frac{I_{\Delta_G}}{m}, \quad i = 1, 2,$$

de unde, prin scădere, avem

$$L_1 \cdot l_1 - L_2 \cdot l_2 = l_1^2 - l_2^2. \quad (3.39)$$

Presupunând că lungimile L_i ar fi egale, adică $L_1 = L_2 \stackrel{\text{not}}{=} l$, avem ($l_1 \neq l_2$)

$$l \cdot (l_1 - l_2) = (l_1 - l_2) \cdot (l_1 + l_2),$$

deci

$$l = l_1 + l_2. \quad (3.40)$$

Cu alte cuvinte, *dacă două axe de suspensie paralele, coplanare cu centrul de masă G al solidului rigid, conduc la lungimi egale ale pendulelor simple sincrone corespunzătoare, atunci valoarea comună a acestor lungimi va coincide cu suma distanțelor de la G la axe* (cf. [76], p. 599). Formulele (3.37), (3.38) (reciprocitatea axelor), (3.40) desemnează **teoremele lui C. Huygens** (cf. [34], p. 459).

Conform (3.38), putem scrie că

$$g = \frac{4\pi^2}{T_i^2} \cdot L_i, \quad i = 1, 2,$$

de unde

$$\frac{g}{4\pi^2} = \frac{L_1}{T_1^2} = \frac{L_2}{T_2^2} \quad \frac{L_1 l_1}{l_1 T_1^2} = \frac{L_2 l_2}{l_2 T_2^2} = \frac{L_1 l_1 - L_2 l_2}{l_1 T_1^2 - l_2 T_2^2}.$$

În sfârșit, ținând seama de (3.39), obținem

$$g = 4\pi^2 \cdot \frac{l_1^2 - l_2^2}{l_1 T_1^2 - l_2 T_2^2}$$

(cf. [34], p. 459). Această formulă este utilizată în determinarea experimentală a mărimii g . Când T_1, T_2 iau valori apropiate, $T_1 \simeq T_2 \stackrel{\text{not}}{=} T$, găsim

$$g = 4\pi^2 \cdot \frac{l_1 + l_2}{T^2},$$

adică formula *pendulului reversibil* (M. Prony, 1792, H. Kater, 1817) (cf. [76], p. 600, [34], p. 459, [32], p. 128). Alte pendule fizice sunt pendulul de torsiune (Weber-Gauss), pendulul lui E. Mach, pendulul profesorului R. Woinaroski (inelar), etc. (cf. [32], p. 127, [34], p. 460-464).

3.3.4 Variația accelerației gravitaționale la suprafața Pământului (devierea firului cu plumb). Devierea spre est în cădere liberă (efectul Coriolis). Legea lui Baer. Pendulul lui L. Foucault

”Pot, prin urmare, să calculez ce se întâmplă în realitatea sensibilă, deși instrumentul cu care calculez este invenția mea. (Nae Ionescu, *Realitate și concept*, [36], p. 74)”

Subsecțiunea de față este dedicată prezentării succinte a unor *probe* mecanice clasice privind rotația Pământului în jurul axei polilor.

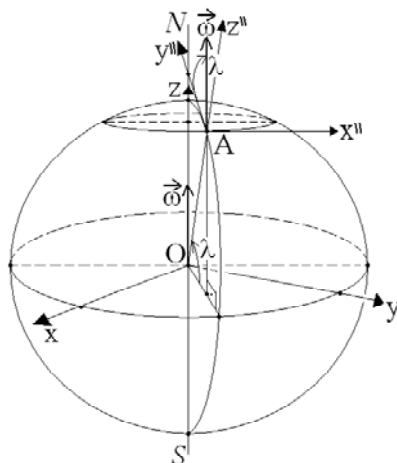


Figura 3.30

Pământul, imaginat ca un solid rigid sferic, omogen, se rotește în jurul axei fixe $S - N$ (vezi Figura 3.30) cu viteza unghiulară dată de relația

$$\omega = \frac{2\pi}{86.164}$$

(cf. [34], p. 433, [73], p. 329). Detalii de calcul privind mărimea ω pot fi citite în [63], p. 346.

Pendulul matematic din Figura 3.31 se află în repaus. Formula (2.132), și anume

$$m \cdot \bar{a}_{rel} = \bar{\mathcal{F}} + \bar{R} - m \cdot \bar{a}_{transp} - m \cdot \bar{a}_{Cor},$$

unde³

$$\begin{aligned} \bar{a}_{transp} &= \bar{\varepsilon} \times \bar{r} + \bar{\omega} \times (\bar{\omega} \times \bar{r}) \\ &= \bar{\omega} \times (\bar{\omega} \times \bar{r}) = \bar{\omega} \times [\bar{\omega} \times (\overline{OP} + \overline{PM})] \\ &= \bar{\omega} \times (\bar{\omega} \times \overline{PM}) = -\omega^2 \cdot \overline{PM} \end{aligned}$$

(cf. [34], p. 427) și $\bar{a}_{Cor} = 2 \cdot \bar{\omega} \times \bar{v}_{rel} = 0$, $\bar{a}_{rel} = 0$ (punctul material M este în repaus față de laborator, deci față de \mathcal{R}''), ne conduce la

$$0 = \bar{G}_0 + \bar{T} + m \cdot \omega^2 \cdot \overline{PM}.$$

³Se arată ușor că *vectorul-viteză unghiulară* al mișcării reperului \mathcal{R}'' în raport cu sistemul de referință \mathcal{R} este chiar $\bar{\omega} = \omega \cdot \bar{k}$.

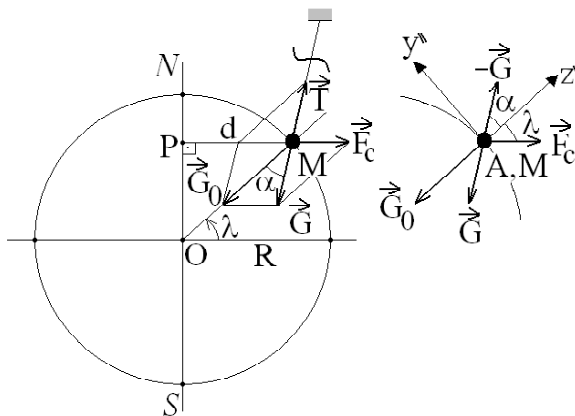


Figura 3.31

Forța $\vec{G}_0 \in T_M \mathbb{R}^3$, $\vec{G}_0 \in \vec{G}_0$, constituie forța de *atracție* (universală) constantă (datorită sfericității și omogenității terestre) manifestată în procesul interacțiunii gravitaționale Pământ-corp punctiform. Vectorul $\vec{F}_c \in T_M \mathbb{R}^3$, $\vec{F}_c \in \vec{F}_c$, unde

$$\vec{F}_c = m \cdot (-\vec{a}_{transp}),$$

desemnează o forță *inertțială*, numită *centrifugă* (cf. [34], p. 426, [41], p. 181).

Obținem egalitatea

$$\vec{T} + (\vec{G}_0 + \vec{F}_c) = 0. \quad (3.41)$$

Vectorul $\vec{G} \in T_M \mathbb{R}^3$, $\vec{G} \in \vec{G}$, unde $\vec{G} = \vec{G}_0 + \vec{F}_c = m \cdot \vec{g}$, este *greutatea (aparentă)* a particulei M la suprafața Pământului.

Introducând, generic, mărimea \vec{a}_{grav} prin $\vec{G}_0 = m \cdot \vec{a}_{grav} = -m \cdot a_{grav} \cdot \vec{OM}$ vers $\vec{OM} = -m \cdot a_{grav} \cdot \vec{k}_1$, proiectăm relația (3.41) pe axele triedrului \mathcal{R}'' :

$$\begin{cases} -m \cdot g \cdot \cos \alpha = -m \cdot a_{grav} + m \cdot \omega^2 d \cdot \cos \lambda \\ -m \cdot g \cdot \sin \alpha = -m \cdot \omega^2 d \cdot \sin \lambda. \end{cases}$$

Când $\lambda = \alpha = 0$ (la ecuator), prima dintre ecuațiile precedente devine

$$g(0) = a_{grav} - \omega^2 R = a_{grav} \left(1 - \frac{\omega^2 R}{a_{grav}} \right).$$

Se știe că $\frac{\omega^2 R}{a_{grav}} \simeq \left(\frac{1}{17}\right)^2 = \frac{1}{289}$ (cf. [76], p. 509, [63], p. 349), deci $g(0) = \frac{288}{289} \cdot a_{grav}$. Apoi,

$$\tan \alpha = \frac{\omega^2 d \cdot \sin \lambda}{a_{grav} - \omega^2 d \cdot \cos \lambda} = \frac{\omega^2 R \cdot \sin \lambda \cdot \cos \lambda}{a_{grav} \cdot \left(1 - \frac{1}{289} \cdot \cos^2 \lambda \right)}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{289} \cdot \frac{\sin \lambda \cdot \cos \lambda}{1 - \frac{1}{289} \cdot \cos^2 \lambda} \simeq \frac{1}{289} \cdot \sin \lambda \cdot \cos \lambda \\
&= \frac{1}{578} \cdot \sin 2\lambda.
\end{aligned}$$

Independența mărimii α (pentru λ fixat) de corpul material M , fapt ușor de stabilit experimental, justifică echivalența dintre masa gravifică și cea inerțială în mecanica teoretică (cf. [32], p. 183). În plus, pentru $\sin 2\lambda = 1$, adică $\lambda = 45^\circ$, obținem devierea *maximă* a verticalei locului (dată de *firul cu plumb*) față de raza Pământului \overline{OA} (cf. [34], p. 435, [32], p. 206). Ea este $\alpha_{\max} \simeq 6'$ (cf. [76], p. 508, [63], p. 349). Într-o exprimare spectaculoasă a acestui fenomen, se poate spune că zgârie-norii sunt așezați *strâmb* pe fundația lor!

Au loc egalitățile

$$\begin{aligned}
g(\lambda) &= \frac{1}{\cos \alpha} \cdot (a_{grav} - \omega^2 d \cdot \cos \lambda) \\
&= \frac{a_{grav}}{\cos \alpha} \cdot \left(1 - \frac{1}{289} \cdot \cos^2 \lambda\right) \\
&\simeq a_{grav} \cdot \left(1 - \frac{1}{289} \cdot \cos^2 \lambda\right) \\
&= a_{grav} \cdot \left(\frac{288}{289} + \frac{1}{289} \cdot \sin^2 \lambda\right) \\
&= g(0) + \frac{a_{grav}}{289} \cdot \sin^2 \lambda \\
&= g(0) \cdot \left(1 + \frac{1}{288} \cdot \sin^2 \lambda\right)
\end{aligned}$$

(cf. [34], p. 436). O formulă mai precisă este

$$g(\lambda) = g_0 \cdot \left(1 - \frac{1}{191} \cdot \cos^2 \lambda\right),$$

unde $g_0 = 9,832 \text{ m/s}^2$ (la Pol) (cf. [32], p. 206). A se vedea și [76], p. 509.

Să considerăm acum un alt punct material, notat tot cu M pentru simplitate, care cade *liber* de la înălțimea h ($z'' = h$) pe sol. Din nou,

$$m \cdot \bar{a}_{rel} = \bar{G}_0 + \bar{F}_c + m \cdot (-\bar{a}_{Cor}) = \bar{G} + m \cdot (-\bar{a}_{Cor}),$$

unde $\bar{\omega} = \omega \cdot (\cos \lambda \cdot \bar{j}_1 + \sin \lambda \cdot \bar{k}_1)$. Mărimea $\overrightarrow{F_{Cor}} \in T_M \mathbb{R}^3$, $\overline{F}_{Cor} = m \cdot (-\bar{a}_{Cor})$, având denumirea de *forță Coriolis (inertțială)*, afectează corpurile materiale treptat, odată cu creșterea vitezei lor (față de sol) (cf. [34], p. 426, [41], p. 181). Pentru a ușura calculul, realizăm aproximarea

$$\overline{G} = m \cdot \bar{g} \simeq -m \cdot g(0) \cdot \bar{k}_1$$

(cf. [34], p. 436). *Ecuatiile diferențiale ale mișcării în reperul cartezian \mathcal{R}''* devin, așadar,

$$\begin{cases} m \cdot \ddot{x}'' = -2m \cdot \omega \cdot \left(\dot{z}'' \cdot \cos \lambda - \dot{y}'' \cdot \sin \lambda \right) \\ m \cdot \ddot{y}'' = -2m \cdot \omega \cdot \dot{x}'' \cdot \sin \lambda \\ m \cdot \ddot{z}'' = -m \cdot g(0) + 2m \cdot \omega \cdot \dot{x}'' \cdot \cos \lambda \end{cases} \quad (3.42)$$

(cf. [63], p. 351). Lor le atașăm datele Cauchy

$$\begin{cases} x''(0) = 0 & y''(0) = 0 & z''(0) = h \\ \dot{x}''(0) = 0 & \dot{y}''(0) = 0 & \dot{z}''(0) = 0. \end{cases} \quad (3.43)$$

Integrând ultimele două ecuații (3.42) în raport cu timpul t , obținem, pe baza (3.43),

$$\begin{cases} \dot{y}'' = -2\omega \cdot x'' \cdot \sin \lambda \\ \dot{z}'' = -g(0) \cdot t + 2\omega \cdot x'' \cdot \cos \lambda. \end{cases}$$

Prin înlocuirea mărimilor \dot{y}'' , \dot{z}'' în (3.42) ajungem la ecuația diferențială liniară cu *perturbare afină*

$$\ddot{x}'' + 4\omega^2 \cdot x'' = 2\omega \cdot g(0) \cdot t \cdot \cos \lambda$$

(cf. [34], p. 437). Soluția sa este dată de

$$x''(t) = \frac{1}{4\omega^2} \cdot g(0) \cdot \cos \lambda \cdot (2\omega t - \sin 2\omega t).$$

Atunci,

$$\begin{aligned} y''(t) &= -\frac{1}{8\omega^2} \cdot g(0) \cdot \sin 2\lambda \cdot (2\omega^2 t^2 - 1 + \cos 2\omega t) \\ z''(t) &= h - \frac{1}{2} \cdot g(0) \cdot t^2 \cdot \sin^2 \lambda - \frac{1}{4\omega^2} \cdot g(0) \cdot \cos^2 \lambda (1 - \cos 2\omega t). \end{aligned}$$

Făcând aproximațiile $\sin q \simeq q - \frac{q^3}{6}$, $\cos q \simeq 1 - \frac{q^2}{2}$, obținem

$$x''(t) = \omega \cdot g(0) \cdot \frac{t^3}{3} \cdot \cos \lambda \quad y''(t) = 0 \quad z''(t) = h - \frac{1}{2} \cdot g(0) \cdot t^2 \quad (3.44)$$

(cf. [34], p. 438, [76], p. 511, [63], p. 352).

Timpul de cădere T al punctului material M este dat de relația ($z''(T) = 0$)

$$T = \sqrt{\frac{2h}{g(0)}},$$

deci

$$x''(T) = \frac{2}{3} \cdot \omega h \cdot \sqrt{\frac{2h}{g(0)}} \cdot \cos \lambda.$$

Formulele (3.44) corespund ordinului de aproximare $\omega^2 \simeq 0$ (De Sparre-Rudzki) (cf. [34], p. 438, [63], p. 352). Acest fenomen constituie **devierea spre est** a corpurilor materiale în cădere liberă pe sol (cf. [32], p. 208). Formula de calcul uzuală este

$$x''(T) = 0,022 \cdot h^{\frac{3}{2}} \cdot \cos \lambda$$

(cf. [76], p. 511). O prezentare extrem de interesantă a calculelor precedente se găsește în [41], problema 1, p. 182-183.

Mai departe, să studiem mișcarea unui corp punctiform M , de masă m , care se deplasează *fără frecare* pe podeaua laboratorului (planul $Ax''y''$). Atunci,

$$\begin{aligned} m \cdot \bar{a}_{rel} &= \bar{G} + \bar{N} + \bar{F}_{Cor} \\ &= [N - m \cdot g(0)] \cdot \bar{k}_1 + \bar{F}_{Cor} \end{aligned}$$

și, cum $z'' = 0$, ecuațiile de mișcare (3.42) capătă forma

$$\begin{cases} m \cdot \ddot{x}'' = 2m \cdot \omega \cdot \dot{y}'' \cdot \sin \lambda \\ m \cdot \ddot{y}'' = -2m \cdot \omega \cdot \dot{x}'' \cdot \sin \lambda \\ 0 = -m \cdot g(0) + N + 2m \cdot \omega \cdot \dot{x}'' \cdot \cos \lambda, \end{cases}$$

unde $\vec{N} \in T_M \mathbb{R}^3$, $\vec{N} \in \bar{N} = N \cdot \bar{k}_1$, desemnează *reacțiunea normală* a podelei.

De asemeni,

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial}{\partial t}\right)_{\mathcal{R}''} \left(\frac{1}{2}m \cdot \bar{v}_{rel}^2\right) &= m \cdot \bar{a}_{rel} \cdot \bar{v}_{rel} \\ &= (\bar{G} + \bar{N}) \cdot \bar{v}_{rel} = 0 \end{aligned}$$

(cf. [34], p. 443), căci vectorii \bar{v}_{rel} și \bar{a}_{Cor} , respectiv \bar{v}_{rel} și \bar{k}_1 sunt ortogonali. Astfel, $v_{rel}^2 = v_0^2$. În baza *metodei hodografice*, putem scrie că

$$v_{x''} = \dot{x}'' = v_0 \cdot \cos \beta \quad v_{y''} = \dot{y}'' = v_0 \cdot \sin \beta,$$

unde β reprezintă unghiul făcut de vectorii \bar{v}_{rel} și \bar{i}_1 , cu convenția ca unghiul β să fie *pozitiv* dacă dreapta-suport a vectorului \bar{v}_{rel} se obține printr-o rotație în sens trigonometric (în planul $Ax''y''$) din dreapta-suport a vectorului $\bar{i}_1 \in T_M\mathbb{R}^3$, $\bar{i}_1 \in \bar{i}_1$, și *negativ* în caz contrar. Atunci, au loc egalitățile

$$\begin{aligned} \ddot{x}'' &= -v_0 \cdot \sin \beta \cdot \dot{\beta} \\ &= 2\omega \cdot \dot{y}'' \cdot \sin \lambda = 2\omega \cdot v_0 \cdot \sin \beta \cdot \sin \lambda, \end{aligned}$$

deci $\dot{\beta} = -2\omega \cdot \sin \lambda$. Prin integrare în raport cu timpul t rezultă că

$$\beta = \beta_0 - 2\omega \cdot t \cdot \sin \lambda,$$

adică β *descrește* în emisfera nordică (deasupra planului ecuatorial Oxy), realizându-se o deviere spre dreapta a corpului material în timp ce, în emisfera sudică, va exista o deviere spre stânga, corpul punctiform tinzând să se apropie de ecuatorul pământesc (cf. [76], p. 509). Fenomenul anterior constituie **legea lui Baer** (cf. [34], p. 443, [63], p. 351). Se explică în acest fel uzura șinei drepte (respectiv stângi) la șinele de cale ferată care "merg" de la sud spre nord (respectiv de la nord către sud), săparea malurilor drepte în râuri (legea lui Baer a fost descoperită în râurile siberiene), devierea alizeelor și a curenților marini (cf. [76], p. 509, [32], p. 206-207, [63], p. 351). Ghețarii desprinși din calotele polare călătoresc spre sud (în emisfera nordică) și se topec, etc.

Putem scrie, conform teoremei de derivare a funcțiilor compuse,

$$\dot{x}'' = \frac{dx''}{d\beta} \cdot \dot{\beta} \quad \dot{y}'' = \frac{dy''}{d\beta} \cdot \dot{\beta},$$

de unde

$$\frac{dx''}{d\beta} = -\frac{v_0}{2\omega \cdot \sin \lambda} \cdot \cos \beta \quad \frac{dy''}{d\beta} = -\frac{v_0}{2\omega \cdot \sin \lambda} \cdot \sin \beta.$$

Prin integrare în raport cu β ($\beta_0 = 0$, $x''(\beta_0) = y''(\beta_0) = 0$), deducem că

$$[x''(\beta)]^2 + \left[y''(\beta) + \frac{v_0}{2\omega \cdot \sin \lambda} \right]^2 = \left(\frac{v_0}{2\omega \cdot |\sin \lambda|} \right)^2.$$

Așadar, *mișcarea se desfășoară pe un cerc* (vezi Figura 3.32) (cf. [32], problema 10.6, p. 213). Însă raza acestuia este atât de mare încât *traectoria poate fi confundată cu o dreaptă* (tangenta în poziția inițială la cerc) (cf. [34], p. 444).

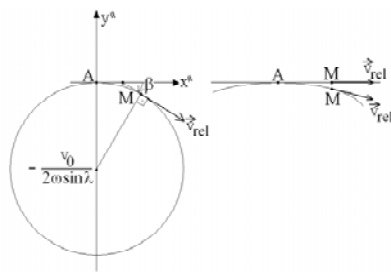


Figura 3.32

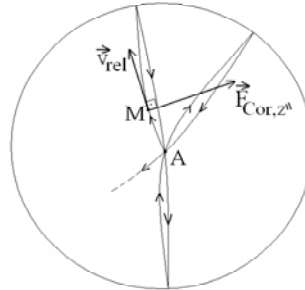


Figura 3.33

O experiență fascinantă a fost realizată în 1851 de către L. Foucault, la Paris. Un pendul cu lungime extrem de mare și masă apreciabilă este făcut să oscileze în jurul punctului său de suspensie. Forța Coriolis $\vec{F}_{Cor} = -2m \cdot \vec{\omega} \times \vec{v}_{rel}$ se face "simțită" datorită termenului m . Ea deviază spre dreapta corpul punctiform M , iar acesta descrie o rozetă (plecând din A cu viteză inițială, cf. [32], p. 208) (vezi Figura 3.33). Notând cu $\vec{F}_{Cor,z''}$ vectorul-proiecție al forței Coriolis pe planul $Ax''y''$ (practic, *planul mișcării*, datorită lungimii pendulului, cf. [41], problema 3, p. 183), avem relațiile

$$\begin{aligned} \vec{F}_{Cor} &= -2m \cdot (\vec{\omega} \times \vec{v}_{rel}) \\ &= -2m \cdot \omega \sin \lambda \cdot \vec{k}_1 \times \vec{v}_{rel} - 2m \cdot \omega \cos \lambda \cdot \vec{j}_1 \times \vec{v}_{rel} \\ &= \vec{F}_{Cor,z''} + \vec{F}_{Cor,y''}. \end{aligned}$$

Se poate arăta că *perioada mișcării* este

$$T_{z''} = \frac{2\pi}{\omega_{z''}} = \frac{2\pi}{\omega \sin \lambda} = \frac{86.164}{\sin \lambda}$$

(cf. [34], p. 442). Rotația aparentă, în timpul mișcării, are sens invers trigonometric (opus sensului de rotație al axelor planului $Ax''y''$ dat de $\bar{\omega}_z''$) (cf. [76], p. 512, [34], p. 442). Experiențe cu pendulul sferic au mai fost făcute de Viviani la Florența (1661) și de Bartholini (1833), nefiind însă cunoscute de Foucault (cf. [32], p. 209).

3.3.5 Solidul rigid cu punct fix. Unghiurile lui Euler. Parametrii Cayley-Klein. Matrice Pauli. Sistemul diferențial al lui L. Euler. Mișcarea Euler-Poinsot. Conul polodic și conul herpolodic. Precesia regulată. Conul de precesie. Interpretarea geometrică a mișcării (L. Poinsot). Polodia și herpolodia. Ciclul lui Euler. Sistemul diferențial al lui G. Darboux. Cazul Lagrange-Poisson. Giroscopul

Să presupunem că particula A din constituția solidului rigid S coincide, în timpul mișcării acestuia, cu originea O a sistemului de referință (vezi Figura 3.34).

Atunci, poziția solidului rigid S în sistemul de referință \mathcal{R} poate fi caracterizată cu ajutorul a trei parametri θ , φ , ψ , numiți **unghiurile lui Euler** (cf. [34], p. 468, [63], p. 412, [54], p. 112, [15], p. 69-70). Astfel, unghiul diedru al planelor de coordonate Oxy și $Ox''y''$ este *unghiul de nutație* θ . Dacă notăm cu U , U' punctele de intersecție ale cercurilor mari E , E_1 , atunci unghiul făcut de axa fixă Ox cu dreapta UU' reprezintă *unghiul de precesie* ψ . În sfârșit, unghiul făcut de dreapta UU' cu axa mobilă Ox'' constituie *unghiul de rotație proprie* φ . Deci, un punct oarecare al solidului rigid, situat, de exemplu, pe axa Ox la momentul inițial t_0 și a cărui poziție este dată, la momentul t , de un punct al axei Ox'' (defapt, punctul în cauză s-a aflat *mereu* pe axa Ox'' , dar, la momentul inițial, axele s-au suprapus), poate fi regăsit prin *trei rotații succesive în sens trigonometric* (cf. [54], p. 112):

- 1) o rotație în jurul axei Oz având matricea de reprezentare (în $Oxyz$)

$$D_\psi = \begin{pmatrix} \cos \psi & -\sin \psi & 0 \\ \sin \psi & \cos \psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix};$$

2) o rotație în jurul axei Ox'' (devenită, acum, dreapta OU , care se mai numește și *linia nodurilor (nodală)*, cf. [34], p. 465, [41], p. 155, [76], p. 628) având matricea de reprezentare (în triedrul dat de OU , OV și Oz)

$$D_\theta = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & -\sin \theta \\ 0 & \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix};$$

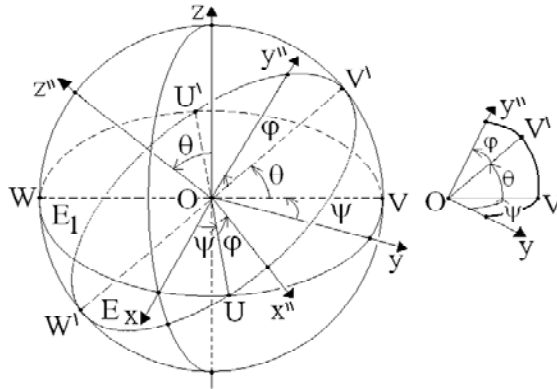


Figura 3.34

3) o rotație în jurul axei Oz'' având matricea de reprezentare (în triedrul dat de OU , OV' și Oz'')

$$D_\varphi = \begin{pmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi & 0 \\ \sin \varphi & \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(cf. [54], p. 114-115). Matricea $D = D_\varphi \cdot D_\theta \cdot D_\psi$ definește *rotația* solidului rigid S în jurul punctului fix O . Aceasta va fi, evident, o *rotație în jurul unei axe ce trece prin O* (cf. [76], p. 621-626, [25], p. 53-57). Detalii privind asemenea transformări pot fi citite în [16], [15], p. 66-69, etc.

Găsirea unui *set de parametri independenți* care să descrie poziția solidului rigid în sistemul de referință constituie, în mod evident, o problemă fundamentală a mecanicii sale. Din acest motiv, ne vom referi succint și la caracterizarea poziției reperului cartezian \mathcal{R}'' în raport cu \mathcal{R} pe baza *parametrilor Cayley-Klein* (cf. [54], p. 116-120). Să considerăm (vezi Figura 3.35) un punct M (extremitatea unui versor al axelor de coordonate aparținând lui \mathcal{R}'') situat pe sfera-unitate din E_3 centrată în O . Atunci, *proiecția sa stereografică* pe planul Oxy este punctul P , unde

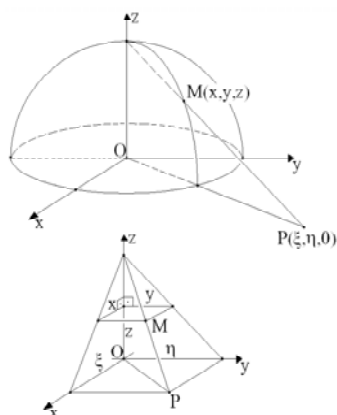


Figura 3.35

$$\overline{OP} = \xi \cdot \vec{i} + \eta \cdot \vec{j}.$$

Folosind asemănarea triunghiurilor, putem scrie că

$$\frac{x}{\xi} = \frac{y}{\eta} = \frac{1-z}{1},$$

de unde $\xi = \frac{x}{1-z}$, $\eta = \frac{y}{1-z}$. *Afixul* ζ al punctului P verifică relațiile

$$\zeta = \xi + i \cdot \eta = \frac{1+z}{x - i \cdot y}$$

(cf. [34], p. 192).

O rotație de unghi ε a solidului rigid S în jurul axei Oz este dată de ecuațiile scalare

$$\begin{cases} x' = x \cdot \cos \varepsilon - y \cdot \sin \varepsilon \\ y' = x \cdot \sin \varepsilon + y \cdot \cos \varepsilon \\ z' = z. \end{cases}$$

Atunci, $\zeta' = e^{i \cdot \varepsilon} \cdot \zeta$ (cf. [54], p. 118, [34], p. 198) și are loc egalitatea

$$\zeta' = \frac{e^{i \cdot \frac{\varepsilon}{2}} \cdot \zeta}{e^{-i \cdot \frac{\varepsilon}{2}}} = \frac{\delta \cdot \zeta + \gamma}{\beta \cdot \zeta + \alpha}. \quad (3.45)$$

Matricea

$$Q_\varepsilon = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{-i \cdot \frac{\varepsilon}{2}} & 0 \\ 0 & e^{i \cdot \frac{\varepsilon}{2}} \end{pmatrix}$$

este *asociată* transformării omografice (3.45).

O rotație de unghi ϑ a solidului rigid S în jurul axei Oy are ecuațiile scalare

$$\begin{cases} x' = x \cdot \cos \vartheta + z \cdot \sin \vartheta \\ y' = y \\ z' = z \cdot \cos \vartheta - x \cdot \sin \vartheta. \end{cases}$$

Astfel, matricea asociată transformării (3.45) este

$$Q_{\vartheta} = \begin{pmatrix} \cos \frac{\vartheta}{2} & \sin \frac{\vartheta}{2} \\ -\sin \frac{\vartheta}{2} & \cos \frac{\vartheta}{2} \end{pmatrix}.$$

În sfârșit, în cazul unei rotații de unghi μ în jurul axei Ox a corpului material S , folosind ecuațiile scalare

$$\begin{cases} x' = x \\ y' = y \cdot \cos \mu - z \cdot \sin \mu \\ z' = y \cdot \sin \mu + z \cdot \cos \mu, \end{cases}$$

deducem că

$$Q_{\mu} = \begin{pmatrix} \cos \frac{\mu}{2} & i \cdot \sin \frac{\mu}{2} \\ i \cdot \sin \frac{\mu}{2} & \cos \frac{\mu}{2} \end{pmatrix}.$$

Componentele $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ din (3.45) reprezintă **parametrii Cayley-Klein** (cf. [54], p. 119) ai rotației. Modalitatea de introducere a lor arată că aceștia sunt unici *modulo* o constantă multiplicativă. Putem impune, suplimentar, ca $\det Q = \alpha \cdot \delta - \beta \cdot \gamma = 1$. Astfel, doar trei din parametrii Cayley-Klein sunt independenți.

Matricele $Q_{\varepsilon}, Q_{\vartheta}, Q_{\mu}$ admit următoarea caracterizare:

$$\begin{aligned} Q_{\varepsilon} &= I_2 \cdot \cos \frac{\varepsilon}{2} + i \cdot \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \sin \frac{\varepsilon}{2} \\ &= I_2 \cdot \cos \frac{\varepsilon}{2} + i \cdot \sigma_z \cdot \sin \frac{\varepsilon}{2}; \\ Q_{\vartheta} &= I_2 \cdot \cos \frac{\vartheta}{2} + i \cdot \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \cdot \sin \frac{\vartheta}{2} \\ &= I_2 \cdot \cos \frac{\vartheta}{2} + i \cdot \sigma_y \cdot \sin \frac{\vartheta}{2}; \\ Q_{\mu} &= I_2 \cdot \cos \frac{\mu}{2} + i \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \sin \frac{\mu}{2} \\ &= I_2 \cdot \cos \frac{\mu}{2} + i \cdot \sigma_x \cdot \sin \frac{\mu}{2}. \end{aligned}$$

Matricele $\sigma_x, \sigma_y, -\sigma_z$, numite *matrice Pauli* (cf. [54], p. 123), îndeplinesc condițiile

$$\sigma_x \cdot \sigma_y = -i \cdot \sigma_z \quad \sigma_x^2 = \sigma_y^2 = \sigma_z^2 = I_2.$$

Astfel, folosind notația

$$e^A \stackrel{\text{not}}{=} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \cdot A^n, \quad A^0 = I_2, \quad A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C}),$$

putem scrie că

$$Q_\varepsilon = e^{i\varepsilon \cdot S_1} \quad Q_\vartheta = e^{i\vartheta \cdot S_2} \quad Q_\mu = e^{i\mu \cdot S_3},$$

unde

$$S_1 = \frac{1}{2} \cdot \sigma_z \quad S_2 = \frac{1}{2} \cdot \sigma_y \quad S_3 = \frac{1}{2} \cdot \sigma_x$$

(cf. [54], p. 124). Orice rotație (finită sau elementară) a solidului rigid S poate fi caracterizată cu ajutorul unei matrice de forma

$$Q = Q_\vartheta \cdot Q_\mu \cdot Q_\varepsilon$$

(cf. [54], p. 119), deci *imaginată* ca o compunere de rotații succesive în jurul axelor de coordonate (cf. [76], p. 627, [15], p. 68).

Revenind la caracterizarea poziției rigidului cu ajutorul unghiurilor lui Euler, au loc relațiile (vezi Figura 3.36, a, b)

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{vers } \overline{OU} = \cos \psi \cdot \bar{i} + \sin \psi \cdot \bar{j} \\ \text{vers } \overline{OV} = \cos \left(\psi + \frac{\pi}{2} \right) \cdot \bar{i} + \sin \left(\psi + \frac{\pi}{2} \right) \cdot \bar{j} \\ \quad = -\sin \psi \cdot \bar{i} + \cos \psi \cdot \bar{j}, \end{array} \right.$$

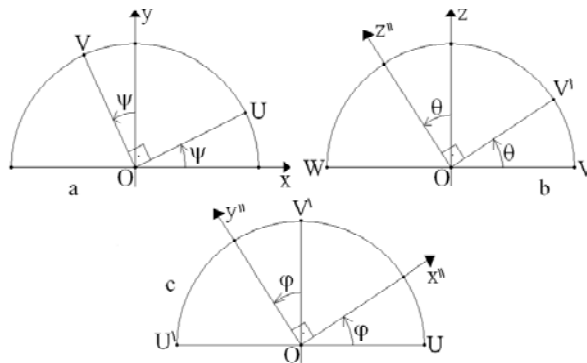


Figura 3.36

respectiv

$$\begin{cases} \text{vers } \overline{OV}' = \cos \theta \cdot \text{vers } \overline{OV} + \sin \theta \cdot \overline{k} \\ \overline{k}_1 = \cos \left(\theta + \frac{\pi}{2} \right) \cdot \text{vers } \overline{OV} + \sin \left(\theta + \frac{\pi}{2} \right) \cdot \overline{k} \\ \quad = -\sin \theta \cdot \text{vers } \overline{OV} + \cos \theta \cdot \overline{k} \end{cases}$$

(cf. [34], p. 468).

De aici, avem (vezi Figura 3.36, c)

$$\begin{cases} \overline{i}_1 = \cos \varphi \cdot \text{vers } \overline{OU} + \sin \varphi \cdot \text{vers } \overline{OV}' \\ \quad = (\cos \varphi \cdot \cos \psi - \sin \varphi \cdot \cos \theta \cdot \sin \psi) \cdot \overline{i} \\ \quad \quad + (\cos \varphi \cdot \sin \psi + \sin \varphi \cdot \cos \theta \cdot \cos \psi) \cdot \overline{j} \\ \quad \quad \quad + \sin \varphi \cdot \sin \theta \cdot \overline{k} \\ \overline{j}_1 = (-\sin \varphi \cdot \cos \psi - \cos \varphi \cdot \sin \psi \cdot \cos \theta) \cdot \overline{i} \\ \quad \quad + (-\sin \varphi \cdot \sin \psi + \cos \varphi \cdot \cos \psi \cdot \cos \theta) \cdot \overline{j} \\ \quad \quad \quad + \cos \varphi \cdot \sin \theta \cdot \overline{k} \\ \overline{k}_1 = \sin \theta \cdot \sin \psi \cdot \overline{i} - \sin \theta \cdot \cos \psi \cdot \overline{j} \\ \quad \quad \quad + \cos \theta \cdot \overline{k}. \end{cases} \quad (3.46)$$

Conform (2.23), obținem

$$\begin{cases} p(t) = \dot{\overline{j}}_1 \cdot \overline{k}_1 = \dot{\psi} \cdot \sin \theta \cdot \sin \varphi + \dot{\theta} \cdot \cos \varphi \\ q(t) = \dot{\overline{k}}_1 \cdot \overline{i}_1 = \dot{\psi} \cdot \sin \theta \cdot \cos \varphi - \dot{\theta} \cdot \sin \varphi \\ r(t) = \dot{\overline{i}}_1 \cdot \overline{j}_1 = \dot{\psi} \cdot \cos \theta + \dot{\varphi} \end{cases} \quad (3.47)$$

(cf. [34], p. 470, [41], p. 157, [76], p. 629). Relațiile (3.47) se mai numesc și *ecuațiile cinematice ale lui L. Euler* (cf. [25], p. 58, [73], p. 267).

Ca și în cazul solidului rigid cu o axă fixă, notăm cu \overline{R} reacțiunea introdusă de articulația (sferică) O (cf. [62], p. 412). Teorema impulsului

$$m \cdot \left[\dot{\overline{\omega}} \times \overline{OG} + \overline{\omega} \times (\overline{\omega} \times \overline{OG}) \right] = \overline{F} + \overline{R}$$

ne conduce la ecuațiile scalare

$$\begin{cases} m \cdot [\xi_3'' \cdot \dot{q} - \xi_2'' \cdot \dot{r} + p \cdot (p \cdot \xi_1'' + q \cdot \xi_2'' + r \cdot \xi_3'') - \xi_1'' \cdot \omega^2] = F_{x''} + R_{x''} \\ m \cdot [\xi_1'' \cdot \dot{r} - \xi_3'' \cdot \dot{p} + q \cdot (p \cdot \xi_1'' + q \cdot \xi_2'' + r \cdot \xi_3'') - \xi_2'' \cdot \omega^2] = F_{y''} + R_{y''} \\ m \cdot [\xi_2'' \cdot \dot{p} - \xi_1'' \cdot \dot{q} + r \cdot (p \cdot \xi_1'' + q \cdot \xi_2'' + r \cdot \xi_3'') - \xi_3'' \cdot \omega^2] = F_{z''} + R_{z''}. \end{cases}$$

Teorema momentului cinetic,

$$\begin{aligned} \frac{d\vec{L}'_O}{dt} &= \left(\frac{\partial \vec{L}'_O}{\partial t} \right)_{\mathcal{R}''} + \vec{\omega} \times \vec{L}'_O \\ &= \overline{\mathcal{M}}_O \left(\left\{ \vec{F}, \vec{R} \right\} \right) = \overline{\mathcal{M}}_O \left(\left\{ \vec{F} \right\} \right), \end{aligned}$$

se proiectează pe axele reperului \mathcal{R}'' sub forma ecuațiilor scalare

$$\left\{ \begin{array}{l} I_{11} \cdot \dot{p} + I_{12} \cdot \dot{q} + I_{13} \cdot \dot{r} + q \cdot (I_{13} \cdot p + I_{23} \cdot q + I_{33} \cdot r) \\ \quad - r \cdot (I_{12} \cdot p + I_{22} \cdot q + I_{23} \cdot r) = L \\ I_{12} \cdot \dot{p} + I_{22} \cdot \dot{q} + I_{23} \cdot \dot{r} - p \cdot (I_{13} \cdot p + I_{23} \cdot q + I_{33} \cdot r) \\ \quad + r \cdot (I_{11} \cdot p + I_{12} \cdot q + I_{13} \cdot r) = M \\ I_{13} \cdot \dot{p} + I_{23} \cdot \dot{q} + I_{33} \cdot \dot{r} + p \cdot (I_{12} \cdot p + I_{22} \cdot q + I_{23} \cdot r) \\ \quad - q \cdot (I_{11} \cdot p + I_{12} \cdot q + I_{13} \cdot r) = N. \end{array} \right.$$

Acest ultim set de ecuații nu conține componentele reacțiunii \vec{R} , deci reprezintă *sistemul de ecuații diferențiale care descrie mișcarea rigidului cu punct fix* (cf. [34], p. 471). Introducând mărimile $\dot{\varphi}$, $\dot{\theta}$, $\dot{\psi}$ din (3.47), obținem *caracterizarea mișcării solidului rigid prin trei ecuații diferențiale ordinare de ordinul al II-lea cu necunoscutele φ , θ , ψ* (cf. [34], p. 472). Dacă reperul \mathcal{R}'' are drept axe de coordonate chiar axele principale de inerție ale elipsoidului de inerție centrat în O (adică, $I_{ij} = 0$, unde $i \neq j$), atunci sistemul diferențial precedent devine **sistemul diferențial (dinamic) al lui L. Euler**

$$\left\{ \begin{array}{l} A \cdot \dot{p} + (C - B) \cdot qr = L \\ B \cdot \dot{q} + (A - C) \cdot rp = M \\ C \cdot \dot{r} + (B - A) \cdot pq = N \end{array} \right. \quad (3.48)$$

(cf. [34], p. 472, [76], p. 631, [41], p. 163, [73], p. 451, [63], p. 413), unde $I_{11} \stackrel{\text{not}}{=} A$, $I_{22} \stackrel{\text{not}}{=} B$, $I_{33} \stackrel{\text{not}}{=} C$ (*notațiile lui Euler*) (cf. [34], p. 451). În anumite situații, acest sistem poate fi rezolvat *direct*, apelând la teoria funcțiilor eliptice, deci fără a mai ține cont de (3.47) (cf. [34], p. 473).

Un caz particular al (3.48) apare în **mișcarea Euler-Poinsot**. Aceasta este mișcarea solidului rigid S asupra căruia acționează forța rezultantă $\vec{F} \in$

$T_O\mathbb{R}^3$, $\vec{F} \in \bar{F}$. Evident, $L, M, N = 0$, deci (3.48) devine

$$\begin{cases} A \cdot \dot{p} + (C - B) \cdot qr = 0 \\ B \cdot \dot{q} + (A - C) \cdot rp = 0 \\ C \cdot \dot{r} + (B - A) \cdot pq = 0. \end{cases} \quad (3.49)$$

Înmulțind ecuațiile (3.49) cu p, q, r , respectiv Ap, Bq, Cr și integrând apoi în raport cu timpul t suma ecuațiilor modificate, obținem

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} (A \cdot \frac{1}{2}p^2 + B \cdot \frac{1}{2}q^2 + C \cdot \frac{1}{2}r^2) = 0 \\ A \cdot p^2 + B \cdot q^2 + C \cdot r^2 = C_1 = \text{constant}, \end{cases} \quad (3.50)$$

respectiv

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} [\frac{1}{2}(A \cdot p)^2 + \frac{1}{2}(B \cdot q)^2 + \frac{1}{2}(C \cdot r)^2] = 0 \\ A^2 \cdot p^2 + B^2 \cdot q^2 + C^2 \cdot r^2 = C_2 = \text{constant}. \end{cases} \quad (3.51)$$

Constantele din integralele prime (3.50), (3.51) se determină din *condițiile inițiale*. Ele vor avea formulele

$$C_1 = H \cdot \mu^2 \quad C_2 = H^2 \cdot \mu^2$$

(cf. [76], p. 633), mărimile H, μ ($\mu > 0$) fiind, la rândul lor, calculate pe baza condițiilor inițiale. Se observă imediat că, dacă notăm cu $m_{1,2}$ cel mai mic, respectiv cel mai mare dintre momentele A, B, C , atunci

$$\begin{aligned} m_1 \cdot H\mu^2 &= m_1 \cdot \left(\sum A \cdot p^2 \right) \\ &\leq \sum A^2 \cdot p^2 = H^2\mu^2 \\ &\leq m_2 \cdot \left(\sum A \cdot p^2 \right) = m_2 \cdot H\mu^2, \end{aligned}$$

adică

$$m_1 \leq H \leq m_2.$$

Ținând seama de reprezentarea energiei cinetice relative ca o formă pătratică de coeficienți I_{ij} , avem

$$E'_c(S) = \frac{1}{2} \bar{L}'_O \cdot \bar{\omega} = \frac{1}{2} \cdot (A \cdot p^2 + B \cdot q^2 + C \cdot r^2)$$

(cf. [34], p. 472). Așadar,

$$C_1 = 2 \cdot E'_c(S)$$

(cf. [76], p. 634, [63], p. 416). La rândul său, teorema momentului cinetic (3.27),

$$\frac{d\overline{L}'_O}{dt} = \overline{\mathcal{M}}_O \left(\left\{ \overline{F}, \overline{R} \right\} \right) = \overline{\mathcal{M}}_O \left(\left\{ \overline{F} \right\} \right) = 0,$$

arată că momentul cinetic relativ \overline{L}'_O este o direcție *fixă* în SF , și anume

$$\overline{L}'_O = \overline{L} = \text{constant.}$$

Atunci,

$$|\overline{L}|^2 = \overline{L}'_O{}^2 = \sum L_i'^2 = A^2 p^2 + B^2 q^2 + C^2 r^2 \quad C_2 = |\overline{L}'_O|^2$$

(cf. [34], p. 472, [76], p. 634, [63], p. 416), deci $|\overline{L}| = H \cdot \mu$ și

$$\mu = \frac{H \cdot \mu^2}{H \cdot \mu} = \frac{\overline{L}'_O(S)}{|\overline{L}'_O(S)|} \cdot \overline{\omega} = \omega_{L'_O(S)}$$

(cf. [34], p. 474).

Se cuvin făcute, acum, câteva comentarii privind *cinematica* solidului rigid cu punct fix. Astfel, axa instantanee Δ a mișcării sale generale trece prin punctul O . Cum punctele de pe axă au o viteză de translație (transport) coliniară cu $\overline{\omega}$, unde $\overline{\omega} \in \overline{\omega}$, iar această viteză este *identică* în orice punct al dreptei Δ , deducem că

$$\overline{v}_{\text{translație}} = \overline{v}_O = 0.$$

Cu alte cuvinte, mișcarea generală a rigidului cu punct fix poate fi imaginată, interpretând formula distribuției de viteze, ca o *rotație instantanee* în jurul axei Δ , numită *axă de rotație (momentană)* (cf. [76], p. 315). La rândul lor, axoidele vor fi suprafețe *conice (conurile lui L. Poincot)* ce poartă denumirea de *con polodic* în cazul axoidei mobile, respectiv *con herpolodic* în cazul axoidei fixe. Viteza de translație fiind nulă, mișcarea generală a solidului rigid cu punct fix (mișcarea *sferică*) se interpretează geometric ca o *rostogolire fără alunecare a conului polodic peste conul herpolodic* (cf. [32], p. 105).

Ecuțiile scalare relative și absolute ale axei de rotație instantanee se obțin prin eliminarea parametrului λ fie *direct* din ecuația sa vectorială

$$\overline{OM} = \frac{\overline{\omega} \times \overline{v}_O}{\omega^2} + \lambda \cdot \overline{\omega} = \lambda \cdot \overline{\omega},$$

fie din (3.13) ($A = 0, B = M$) (cf. [63], p. 228). Astfel, ecuațiile scalare ale axei instantanee în reperul \mathcal{R}'' sunt

$$\frac{x''}{p} = \frac{y''}{q} = \frac{z''}{r} \quad (3.52)$$

(cf. [2], p. 181, [76], p. 629-630). Eliminând pe μ din (3.50), (3.51), avem

$$A(A - H) \cdot p^2 + B(B - H) \cdot q^2 + C(C - H) \cdot r^2 = 0, \quad (3.53)$$

de unde, conform (3.52), ajungem la *ecuația conului polodic*:

$$A(A - H) \cdot x''^2 + B(B - H) \cdot y''^2 + C(C - H) \cdot z''^2 = 0. \quad (3.54)$$

Stabilind o *ordine* a mărimilor A, B, C , cum ar fi, de exemplu,

$$A > B > C,$$

conul (3.54) este *real* doar dacă $H \in [A, C]$ (cf. [76], p. 635, [34], p. 474, [63], nota de subsol, p. 417).

Atunci, sistemul (3.48) se reduce la

$$\begin{cases} A \cdot p^2 + B \cdot q^2 + C \cdot r^2 = H \cdot \mu^2 \\ A^2 \cdot p^2 + B^2 \cdot q^2 + C^2 \cdot r^2 = H^2 \cdot \mu^2 \\ B \cdot \dot{q} + (A - C) \cdot rp = 0 \end{cases} \quad (3.55)$$

(cf. [76], p. 634). Primele două ecuații permit *reprezentarea* componentelor p, r ca funcții de q :

$$p^2 = \frac{B(B - C)}{A(A - C)} \cdot (f^2 - q^2) \quad r^2 = \frac{B(A - B)}{C(A - C)} \cdot (g^2 - q^2), \quad (3.56)$$

unde ($f, g > 0$)

$$f^2 \stackrel{\text{not}}{\equiv} \frac{H(H - C)}{B(B - C)} \cdot \mu^2 \quad g^2 \stackrel{\text{not}}{\equiv} \frac{H(A - H)}{B(A - B)} \cdot \mu^2$$

(cf. [34], p. 475, [76], p. 635). Prin scădere,

$$g^2 - f^2 = \mu^2 \cdot \frac{H(A - C)}{B(B - C)(A - B)} \cdot (B - H).$$

În concluzie,

$$q^2 \leq \min\{f^2, g^2\} \quad \text{sgn}(g^2 - f^2) = \text{sgn}(B - H).$$

Să presupunem că $B > H > C$. Cum $g^2 > f^2$, $q^2 \leq f^2$ și

$$\begin{aligned} r^2 &\geq \frac{B(A-B)}{C(A-C)} \cdot (g^2 - f^2) \\ &= \mu^2 \cdot \frac{H(B-H)}{C(B-C)} > 0, \end{aligned}$$

deducem că $r(t)$ nu își schimbă semnul în timpul mișcării (proprietatea lui Darboux).

Ultima ecuație din (3.55) devine

$$\frac{dq}{dt} = \pm \sqrt{\frac{(A-B)(B-C)}{AC}} \cdot \sqrt{(f^2 - q^2) \cdot (g^2 - q^2)}. \quad (3.57)$$

Semnul din fața radicalului se fixează la momentul inițial (cf. [34], p. 476). Într-adevăr, dacă $r_0 \stackrel{\text{not}}{=} r(t_0) > 0$, atunci $r(t) > 0$ în orice moment t . Deci $\text{sgn } rp = \text{sgn } p$. Din ecuația diferențială (3.55) rezultă că

$$\text{sgn } \dot{q} = -\text{sgn } pr = -\text{sgn } p.$$

Pentru $p_0 = p(t_0) < 0$, funcția $q(t)$ va crește odată cu creșterea lui t (adică, semnul este "+").

Prin separarea variabilelor în (3.57) obținem

$$t - t_0 = \pm \sqrt{\frac{AC}{(A-B)(B-C)}} \cdot \int_{q_0}^{q(t)} \frac{ds}{\sqrt{(f^2 - s^2) \cdot (g^2 - s^2)}},$$

unde $q_0 = q(t_0)$.

Reprezentarea lui p ca funcție de q (3.56) ne conduce la formula

$$p^2 + \frac{B(B-C)}{A(A-C)} \cdot q^2 = \frac{B(B-C)}{A(A-C)} \cdot f^2 = \text{constant},$$

ceea ce arată că "punctul" (p, q) se mișcă pe o elipsă (cf. [34], p. 475). În particular, funcția $q = q(t)$ este periodică, având perioada ($k > 0$)

$$\begin{aligned} T &= 2\sqrt{\frac{AC}{(A-B)(B-C)}} \cdot \int_{-f}^f \frac{ds}{\sqrt{(f^2 - s^2) \cdot (g^2 - s^2)}} \\ &= 2k \cdot \sqrt{\frac{AC}{(A-B)(B-C)}} \cdot \int_{-1}^1 \frac{d\alpha}{\sqrt{(1 - \alpha^2) \cdot (1 - k^2 \cdot \alpha^2)}} \\ &= \frac{4}{B-C} \cdot \sqrt{AC \cdot \frac{H-C}{A-H}} \cdot \int_0^1 \frac{d\alpha}{\sqrt{(1 - \alpha^2) \cdot (1 - k^2 \cdot \alpha^2)}}, \end{aligned}$$

unde $k^2 = \frac{f^2}{g^2}$ (cf. [34], p. 476, [76], p. 635-636, [63], p. 418, [41], p. 168). Așadar, conform (3.56), funcțiile p, q, r sunt periodice, având perioada comună T .

Odată determinate mărimile $p(t), q(t), r(t)$, ne întoarcem la sistemul (3.47). Mișcarea Euler-Poinsot fiind caracterizată prin conservarea momentului cinetic relativ, putem alege ca direcție a axei (fixe) Oz vectorul \bar{L} . Din (3.46) avem

$$\begin{aligned} \bar{k} &= \frac{\bar{L}}{|\bar{L}|} = \frac{L'_1}{H \cdot \mu} \cdot \bar{i}_1 + \frac{L'_2}{H \cdot \mu} \cdot \bar{j}_1 + \frac{L'_3}{H \cdot \mu} \cdot \bar{k}_1 \\ &= \frac{A \cdot p}{H \cdot \mu} \cdot \bar{i}_1 + \frac{B \cdot q}{H \cdot \mu} \cdot \bar{j}_1 + \frac{C \cdot r}{H \cdot \mu} \cdot \bar{k}_1 \\ &= (\bar{k} \cdot \bar{i}_1) \cdot \bar{i}_1 + (\bar{k} \cdot \bar{j}_1) \cdot \bar{j}_1 + (\bar{k} \cdot \bar{k}_1) \cdot \bar{k}_1 \\ &= \sin \varphi \cdot \sin \theta \cdot \bar{i}_1 + \cos \varphi \cdot \sin \theta \cdot \bar{j}_1 + \cos \theta \cdot \bar{k}_1 \end{aligned} \quad (3.58)$$

(cf. [34], p. 469). Deci,

$$\sin \varphi \cdot \sin \theta = \frac{A \cdot p}{H \cdot \mu} \quad \sin \theta \cdot \cos \varphi = \frac{B \cdot q}{H \cdot \mu} \quad \cos \theta = \frac{C \cdot r}{H \cdot \mu}. \quad (3.59)$$

Conform (3.47), putem scrie că

$$\begin{aligned} \dot{\psi} \cdot \sin \theta &= \dot{\psi} \cdot \sin \theta \cdot (\sin^2 \varphi + \cos^2 \varphi) \\ &= \left(p - \dot{\theta} \cdot \cos \varphi \right) \cdot \sin \varphi + \left(q + \dot{\theta} \cdot \sin \varphi \right) \cdot \cos \varphi \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= p \cdot \sin \varphi + q \cdot \cos \varphi \\
&= \frac{1}{H \cdot \mu} \cdot \frac{A \cdot p^2 + B \cdot q^2}{\sin \theta}.
\end{aligned}$$

De asemeni,

$$\begin{aligned}
(\sin \varphi \cdot \sin \theta)^2 + (\sin \theta \cdot \cos \varphi)^2 &= \sin^2 \theta \\
&= \frac{1}{H^2 \cdot \mu^2} \cdot (A^2 \cdot p^2 + B^2 \cdot q^2),
\end{aligned} \tag{3.60}$$

de unde

$$\dot{\psi} = H \cdot \mu \cdot \frac{A \cdot p^2 + B \cdot q^2}{A^2 \cdot p^2 + B^2 \cdot q^2} = H \cdot \mu \cdot \frac{H \cdot \mu^2 - C \cdot r^2}{H^2 \cdot \mu^2 - C^2 \cdot r^2} > 0.$$

La fel,

$$\begin{aligned}
\dot{\varphi} &= r - \dot{\psi} \cdot \cos \theta = r - C \cdot r \cdot \frac{H \cdot \mu^2 - C \cdot r^2}{H^2 \cdot \mu^2 - C^2 \cdot r^2} \\
&= \frac{H \cdot \mu^2 \cdot (H - C)}{H^2 \cdot \mu^2 - C^2 \cdot r^2} \cdot r.
\end{aligned}$$

În particular, $\dot{\psi}(t+T) = \dot{\psi}(t)$, $\dot{\varphi}(t+T) = \dot{\varphi}(t)$ și $\operatorname{sgn} \dot{\varphi}(t) = \operatorname{sgn} r(t) = \operatorname{sgn} r_0 = 1$ (cf. [34], p. 477). Prin integrare în raport cu timpul t , avem

$$\psi(t+T) = \psi(t) + \text{constant} \quad \varphi(t+T) = \varphi(t) + \text{constant}.$$

Din (3.59) reiese că funcția $\cos \theta(t)$ este *pozitivă* (considerăm $r_0 > 0$) și admite perioada T , adică $(\theta(t_0) \in [0, \pi))$

$$\theta(t) \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right), \quad \theta(t+T) = \theta(t) \quad \sin \theta(t+T) = \sin \theta(t).$$

Astfel, funcțiile $\sin \varphi(t)$, $\cos \varphi(t)$ admit perioada T , deci

$$\varphi(t+T) = \varphi(t) \pm 2n \cdot \pi, \tag{3.61}$$

unde $n \in \mathbb{N}^*$, și, cum $\varphi(t)$ este *crescătoare*, rezultă că $\varphi(t+T) = \varphi(t) + 2n\pi$.

De asemeni, $\dot{\psi} > 0$, deci

$$\psi(t+T) = \psi(t) + C_3,$$

unde $C_3 > 0$ (cf. [34], p. 477). Așadar, axa Oz'' execută în jurul axei fixe Oz o mișcare de precesie și o mișcare de nutație și, în același timp, solidul rigid se rotește în jurul axei Oz'' . Conform (3.61), revenirii axei instantanee în poziția inițială (în raport cu \mathcal{R}'') îi corespunde măcar o rotație completă a rigidului în jurul axei Oz'' . Cum $\text{sgn } \dot{\varphi} = \text{sgn } r_0$, rotația proprie a rigidului se realizează într-un singur sens pe parcursul mișcării (cf. [34], p. 478).

Să analizăm acum cazul $H \in \{A, B, C\}$. Astfel, dacă $H = C$, cum $A - H, B - H > 0$, deducem că

$$p(t) = q(t) = 0$$

și, conform celei de-a treia ecuații din (3.49), $r(t) = r_0$. Deci $\bar{\omega} = r_0 \cdot \bar{k}_1$. Deoarece

$$\frac{d\bar{\omega}}{dt} = \left(\frac{\partial \bar{\omega}}{\partial t} \right)_{\mathcal{R}''} + \bar{\omega} \times \bar{\omega} = r_0 \cdot \bar{k}_1 = 0,$$

deducem că axa de rotație instantanee are o direcție fixă în SF . Cum $A \cdot p_0^2 + B \cdot q_0^2 + C \cdot r_0^2 = C \cdot r_0^2 = H \cdot \mu^2$, $A^2 \cdot p_0^2 + B^2 \cdot q_0^2 + C^2 \cdot r_0^2 = C^2 \cdot r_0^2 = H^2 \cdot \mu^2$ și impunem ca $r_0 > 0$, vom avea $r_0 = \mu$, respectiv $\cos \theta = \frac{C \cdot r}{H \cdot \mu} = 1$. Dată fiind regularitatea funcției $\theta = \theta(t)$, din $\theta(t) \in \{2k\pi : k \in \mathbb{Z}\}$ rezultă că, pe baza proprietății lui Darboux, $\theta(t) = \text{constant} = 2k_0\pi$. Așadar, axa Oz'' , care este chiar axa de rotație (momentană) a rigidului și, în același timp, axă principală de inerție a elipsoidului de inerție centrat în O , va coincide cu axa fixă Oz . Solidul execută o rotație uniformă în jurul unei axe principale de inerție, care rămâne fixă în SF chiar dacă este fixată doar în punctul O .

Subcazul $H = A$ ($p_0 > 0$) conduce la o rotație uniformă în jurul axei Ox'' , fixă în SF (cf. [34], p. 479). În subcazul $H = B$ ($q_0 > 0$), de asemeni, se produce o rotație uniformă a solidului rigid S în jurul axei Oy'' , care rămâne fixă în SF . Singura deosebire față de primele două subcazuri constă în aceea că mișcarea de rotație este instabilă (cf. [34], p. 480, [41], problema 2, p. 172).

Să presupunem acum că $A = B \neq C$, $H \notin \{A, B, C\}$. Acest caz are loc, în particular, pentru solidul rigid omogen, cu axa de simetrie Oz'' , care este corp de rotație în jurul axei Oz'' (cf. [34], p. 486, [76], proprietatea ε), p. 583). Avem

$$\begin{cases} A \cdot (p^2 + q^2) + C \cdot r^2 = H \cdot \mu^2 \\ A^2 \cdot (p^2 + q^2) + C^2 \cdot r^2 = H^2 \cdot \mu^2 \end{cases}$$

și, prin rezolvarea sistemului *cramerian* cu necunoscutele $p^2 + q^2, r^2$, obținem

$$p^2 + q^2 = \frac{H \cdot \mu^2 \cdot (C - H)}{A \cdot (C - A)} \quad r^2 = \frac{H \cdot \mu^2 \cdot (H - A)}{C \cdot (C - A)}.$$

Regularitatea lui $r(t)$ implică, în baza proprietății lui Darboux,

$$r(t) = r_0, \quad t \geq t_0.$$

Atunci, din (3.59) rezultă că $\cos \theta(t) = \text{constant}$, deci $\theta(t) = \theta(t_0) \stackrel{\text{not}}{=} \theta_0$.
Apoi,

$$\begin{aligned} \dot{\psi} &= H \cdot \mu \cdot \frac{H \cdot \mu^2 - C \cdot r^2}{H^2 \cdot \mu^2 - C^2 \cdot r^2} = H \cdot \mu \cdot \frac{A \cdot (p^2 + q^2)}{A^2 \cdot (p^2 + q^2)} \\ &= \frac{H \cdot \mu}{A} \\ \dot{\varphi} &= r - \dot{\psi} \cdot \cos \theta = r_0 - \dot{\psi} \cdot \frac{C \cdot r_0}{H \cdot \mu} \\ &= \left(1 - \frac{C}{A}\right) \cdot r_0. \end{aligned}$$

În sfârșit, apelând iarăși la (3.59), avem

$$\begin{cases} p(t) = \frac{H \cdot \mu}{A} \cdot \sin \varphi \cdot \sin \theta = \frac{H \cdot \mu}{A} \cdot \sin \theta_0 \cdot \sin \varphi(t) \\ q(t) = \frac{H \cdot \mu}{A} \cdot \sin \theta \cdot \cos \varphi = \frac{H \cdot \mu}{A} \cdot \sin \theta_0 \cdot \cos \varphi(t) \end{cases}$$

și, prin integrare în raport cu timpul t , găsim formula

$$\varphi(t) = \left(1 - \frac{C}{A}\right) \cdot r_0 t + \varphi_0$$

(cf. [34], p. 487, [76], p. 670-671, [41], p. 163, [63], p. 430), corespunzătoare unei rotații proprii *uniforme*.

Axa de rotație instantanee Δ are direcția $\bar{\omega}$, unde

$$\begin{aligned} \bar{\omega} &= p(t) \cdot \bar{i}_1 + q(t) \cdot \bar{j}_1 + r(t) \cdot \bar{k}_1 \\ &\stackrel{(3.47)}{=} \dot{\psi} \cdot (\sin \theta \cdot \sin \varphi \cdot \bar{i}_1 + \sin \theta \cdot \cos \varphi \cdot \bar{j}_1 + \cos \theta \cdot \bar{k}_1) \\ &\quad + \dot{\theta} \cdot (\cos \varphi \cdot \bar{i}_1 - \sin \varphi \cdot \bar{j}_1) + \dot{\varphi} \cdot \bar{k}_1. \end{aligned}$$

Pe Figura 3.36 c) se vede că

$$\text{vers } \overline{OU} = \cos(2\pi - \varphi) \cdot \bar{i}_1 + \sin(2\pi - \varphi) \cdot \bar{j}_1 = \cos \varphi \cdot \bar{i}_1 - \sin \varphi \cdot \bar{j}_1.$$

Utilizând figurile 3.36 a), b), regăsim formula (3.58), și anume

$$\begin{aligned}
 \bar{k} &= \cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) \cdot \text{vers } \overline{OV'} + \sin\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) \cdot \bar{k}_1 \\
 &= \sin\theta \cdot \text{vers } \overline{OV'} + \cos\theta \cdot \bar{k}_1 \\
 &= \sin\theta \cdot \left[\cos\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right) \cdot \bar{i}_1 + \sin\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right) \cdot \bar{j}_1 \right] \\
 &\quad + \cos\theta \cdot \bar{k}_1 \\
 &= \sin\theta \cdot \sin\varphi \cdot \bar{i}_1 + \sin\theta \cdot \cos\varphi \cdot \bar{j}_1 + \cos\theta \cdot \bar{k}_1
 \end{aligned}$$

(cf. [34], p. 469), de unde

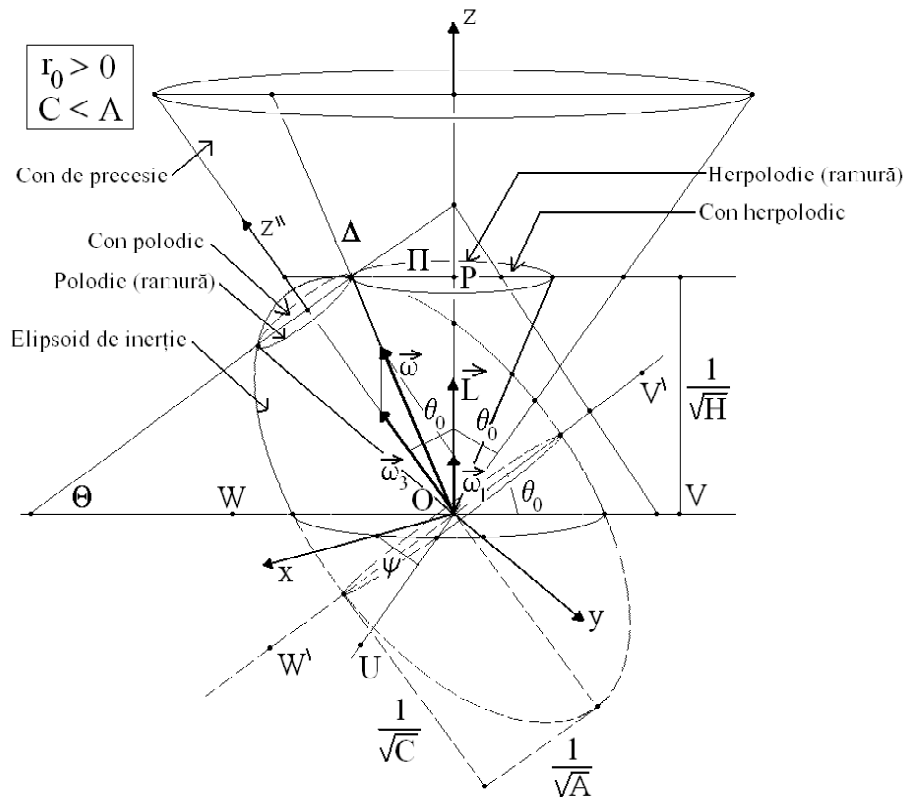


Figura 3.37

$$\begin{aligned}
 \bar{\omega} &= \dot{\psi} \cdot \bar{k} + \dot{\theta} \cdot \text{vers } \overline{OU} + \dot{\varphi} \cdot \bar{k}_1 \\
 &= \bar{\omega}_1 + \bar{\omega}_2 + \bar{\omega}_3
 \end{aligned}$$

(cf. [34], p. 470, [76], p. 628, [63], p. 229-231). Această *descompunere* a vectorului-viteză unghiulară instantanee este în acord cu imaginarea mișcării solidului rigid cu punct fix ca o compunere a trei rotații (în jurul axei fixe Oz - *precesia*, în jurul liniei nodurilor OU - *nutația*, în jurul axei mobile Oz'' - *rotația proprie*). Aici, $\bar{\omega} = \bar{\omega}_1 + \bar{\omega}_3$ (mișcarea de nutație nu se produce). În concluzie, are loc o *rotație* a axei mobile Oz'' în jurul axei fixe Oz (vezi Figurile 3.37, 3.38), viteza unghiulară a planului Θ fiind $\frac{d}{dt}(\psi - \frac{\pi}{2}) = \dot{\psi} = \text{constant}$ (cf. [34], p. 487), concomitent cu o rotație *proprie* uniformă ($\dot{\varphi} = \text{constant}$) a corpului material în jurul axei Oz'' . Spunem că solidul rigid S realizează o *mișcare de precesie regulată (uniformă)* (cf. [76], p. 641, [41], p. 151) în care axa mobilă Oz'' descrie o suprafață *conică* în jurul axei Oz , numită *con de precesie* (cf. [76], p. 646, [63], p. 431, [14], p. 203).

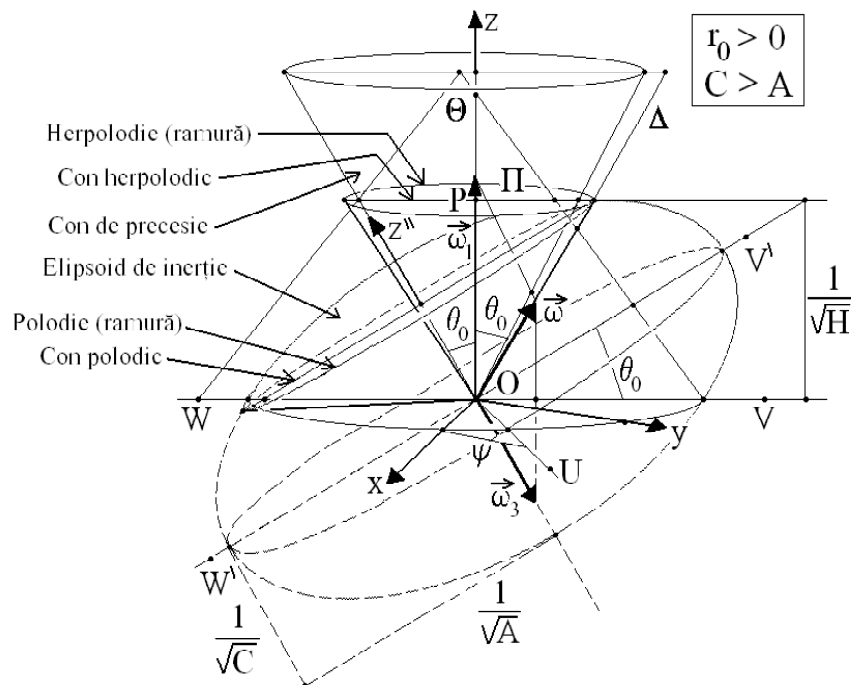


Figura 3.38

Elipsoidul de inerție centrat în punctul O al solidului rigid S are ecuația

$$A \cdot x'^2 + B \cdot y'^2 + C \cdot z'^2 = 1. \quad (3.62)$$

Am ținut cont de faptul că axele reperului \mathcal{R}'' sunt chiar axele sale principale de inerție. Cosinuzii directori ai versorului \bar{u} al axei instantanee Δ în raport cu baza \mathcal{C} sunt

$$\alpha = \frac{p(t)}{\omega} \quad \beta = \frac{q(t)}{\omega} \quad \gamma = \frac{r(t)}{\omega}.$$

Atunci, $I_{\Delta}(S) = I_{11} \cdot \alpha^2 + I_{22} \cdot \beta^2 + I_{33} \cdot \gamma^2 = \frac{1}{\omega^2} \cdot (A \cdot p^2 + B \cdot q^2 + C \cdot r^2)$.
De aici rezultă că, pe de o parte,

$$A \cdot \left(\frac{p}{\omega \cdot \sqrt{I_{\Delta}}} \right)^2 + B \cdot \left(\frac{q}{\omega \cdot \sqrt{I_{\Delta}}} \right)^2 + C \cdot \left(\frac{r}{\omega \cdot \sqrt{I_{\Delta}}} \right)^2 = 1,$$

ceea ce înseamnă că punctele $M_{1,2}$ având raza vectorie

$$\overline{OM}_{1,2} = \pm \frac{1}{\sqrt{I_{\Delta}}} \cdot \bar{\omega}$$

constituie punctele de intersecție ale axei instantanee $\Delta(t)$ cu elipsoidul (3.62).

Pe de altă parte, $I_{\Delta}(S) = \frac{1}{\omega^2} \cdot H \cdot \mu^2$, deci

$$\overline{OM}_{1,2} = \pm \frac{1}{\mu \cdot \sqrt{H}} \cdot \bar{\omega}$$

(cf. [34], p. 481).

Planul tangent la elipsoidul de inerție (3.62) în M_1 se obține *prin dedublare* (cf. [65], p. 171, [75], p. 69, [49], p. 146), adică are ecuația

$$A \cdot \frac{p(t)}{\mu \cdot \sqrt{H}} \cdot x'' + B \cdot \frac{q(t)}{\mu \cdot \sqrt{H}} \cdot y'' + C \cdot \frac{r(t)}{\mu \cdot \sqrt{H}} \cdot z'' = 1.$$

Direcția normală pe acest plan este

$$\bar{n} = A \cdot \frac{p}{\mu \sqrt{H}} \cdot \bar{i}_1 + B \cdot \frac{q}{\mu \sqrt{H}} \cdot \bar{j}_1 + C \cdot \frac{r}{\mu \sqrt{H}} \cdot \bar{k}_1 = \frac{1}{\mu \sqrt{H}} \cdot \bar{L},$$

deci o direcție fixă în SF . De asemeni, distanța de la punctul O la planul tangent respectiv are formula

$$d = \frac{1}{\sqrt{\sum \left(\frac{A \cdot p}{\mu \cdot \sqrt{H}} \right)^2}} = \frac{\mu \cdot \sqrt{H}}{\sqrt{\sum A^2 \cdot p^2}} = \frac{1}{\sqrt{H}}$$

(cf. [65], p. 74, [75], p. 39, [49], p. 90). Mărimile \bar{n} , d fiind constante, cum punctul O este fix, deducem că *planul tangent la elipsoidul de inerție al solidului rigid S într-unul din punctele de intersecție ale acestuia cu axa instantanee de rotație Δ este fix* (cf. [34], p. 481, [76], p. 637). Elipsoidul de inerție fiind "lipit" de corpul material, putem formula următoarea interpretare geometrică remarcabilă (L. Poinsot, 1834) a mișcării sale: *solidul rigid cu punct fix se mișcă în spațiu astfel încât, în timpul mișcării, elipsoidul său de inerție centrat în punctul fix să se rostogolească și să pivoteze pe un plan fix Π , de direcție normală \bar{L} , aflat la distanța $\frac{1}{\sqrt{H}}$ de punctul fix* (vezi Figura 3.39). Punctul de "contact" M_1 neavând viteză de *translație*, mișcarea se produce *fără alunecare* (cf. [76], p. 636-637, [34], p. 481, [63], p. 420).

Deoarece axa instantanee $\Delta(t)$ se mișcă, în general, în raport cu solidul S , punctele $M_{1,2}$ vor *trasa* două curbe pe elipsoidul de inerție (3.62). Acestea constituie *intersecția* conului polodic cu elipsoidul de inerție, fiind, așadar, *ramuri* ale unei curbe algebrice de ordinul al IV-lea, numită *polodie*. În timpul mișcării corpului material, elipsoidul de inerție va descrie o curbă în planul Π , "urmând" traiectoria punctului M_1 . Aceasta poartă denumirea de *herpolodie*. Luând în discuție și planul tangent în M_2 la elipsoidul de inerție (3.62) (simetricul lui Π față de O), pe care elipsoidul trasează o curbă identică herpolodiei, putem spune că *herpolodia (cu ambele ramuri) este intersecția elipsoidului de inerție al solidului S cu conul său herpolodic* (cf. [63], p. 420). Într-adevăr, dacă alegem ca direcție a axei fixe Oz vectorul \bar{L} , atunci planul Π este paralel cu planul de coordonate Oxy , deci traiectoria mobilului M_1 nu este nimic altceva decât intersecția planului Π cu o pânză a conului herpolodic. Detalii privind aceste curbe pot fi citite în [34], p. 482-487, [76], p. 637-639.

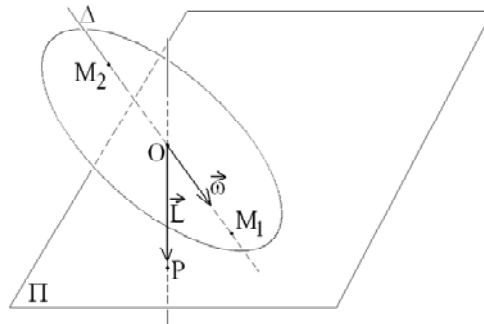


Figura 3.39

Relația $A \geq B > C$ ne conduce la

$$A \cdot (x''^2 + y''^2 + z''^2) \geq 1 \geq C \cdot (x''^2 + y''^2 + z''^2),$$

unde x'' , y'' , z'' sunt coordonatele punctului M_1 în \mathcal{R}'' . Astfel, cum

$$\inf d(O, M_1) \leq d \leq \sup d(O, M_1),$$

regăsim inegalitatea $A \geq H \geq C$ (cf. [34], p. 481, [76], p. 637).

Încheiem discuția privitoare la mișcarea Euler-Poinsot a solidului rigid referindu-ne la mișcarea Pământului în jurul Soarelui. Astfel, dacă Pământul ar fi un elipsoid de rotație omogen al cărui centru de masă O se deplasează în jurul Soarelui pe elipsa stabilită de legile lui J. Kepler (această traiectorie poartă numele de *ecliptică*) iar forțele exterioare (de atracție gravitațională) s-ar reduce la o forță rezultantă a cărei linie de acțiune trece prin centrul O , atunci mișcarea Pământului în jurul unui triedru de coordonate cu originea în O și axele de direcții *fixe* (îndreptate către trei stele considerate ca fixe, cf. [34], p. 429) va fi o mișcare de *precesie regulată*. Aici, $\theta_0 = 23^\circ, 27'$, $C > A$, $1 - \frac{A}{C} = \frac{1}{306}$ (cf. [76], p. 675). Cum

$$p(t) = P \cdot \sin(n \cdot t + \varphi_0) \quad q(t) = Q \cdot \cos(n \cdot t + \varphi_0) \quad r(t) = r_0,$$

unde $P = \frac{H \cdot \mu}{A} \cdot \sin \theta_0$, $Q = \frac{H \cdot \mu}{A} \cdot \cos \theta_0$, $n = (1 - \frac{C}{A}) \cdot r_0$, obținem că axa instantanee $\Delta(t)$ revine în poziția inițială (față de reperul \mathcal{R}'' , realizând o descriere completă a conului polodic, cf. [76], p. 676) după $T = \frac{2\pi}{|n|}$ momente. Mărimea T reprezintă 305 zile medii solare. În astronomie, ea este cunoscută drept *ciclul lui Euler* (cf. [76], p. 671).

Calcululele care urmează privesc mișcarea solidului rigid S cu punct fix *sub acțiunea greutății sale*. O asemenea situație a fost deja întâlnită la pendulul sferic. Astfel, ansamblul format din firul inextensibil și lipsit de masă și corpul punctiform se va comporta ca un solid rigid cu centrul de masă în poziția curentă a punctului material suspendat. Tensiunea în fir are drept corespondent forța de legătură (statică și dinamică), ”transmisă” de *punctul fix* al rigidului, și anume punctul de suspensie al pendulului. Am explicat anterior că firul funcționează în *ipoteza rigidității*, asigurând un caracter de vector *glisant* tensiunii \vec{T} . Vom presupune că axa fixă Oz desemnează *verticala ascendentă* a locului, adică $\vec{G} = m \cdot \vec{g} = -mg \cdot \vec{k}$. Atunci, conform (3.58), avem

$$\vec{G} = -mg \cdot (\gamma \cdot \vec{i}_1 + \gamma' \cdot \vec{j}_1 + \gamma'' \cdot \vec{k}_1),$$

unde $\gamma = \sin \theta \cdot \sin \varphi$, $\gamma' = \sin \theta \cdot \cos \varphi$, $\gamma'' = \cos \theta$ (cf. [34], p. 488), deci putem scrie că

$$\overline{\mathcal{M}}_O(\overline{\mathbf{G}}) = L \cdot \overline{i}_1 + M \cdot \overline{j}_1 + N \cdot \overline{k}_1,$$

unde

$$\begin{aligned} L &= mg \cdot (\xi_3'' \cdot \gamma' - \xi_2'' \cdot \gamma'') & M &= mg \cdot (\xi_1'' \cdot \gamma'' - \xi_3'' \cdot \gamma) \\ N &= mg \cdot (\xi_2'' \cdot \gamma - \xi_1'' \cdot \gamma'). \end{aligned}$$

Ecuatiile diferențiale ale mișcării sunt date de (3.48), (3.47). Teorema energiei cinetice (3.28) în reperul $\mathcal{R}' = (O, \overline{\mathbf{B}})$ (coincide cu sistemul de referință \mathcal{R}) are formula

$$\begin{aligned} dE'_c(S) &= d \left[\frac{1}{2} \cdot (A \cdot p^2 + B \cdot q^2 + C \cdot r^2) \right] \\ &= \delta W'_{ext} = \overline{\mathbf{G}} \cdot d \overline{\mathbf{OG}} \\ &= -mg \cdot \overline{k} \cdot d(\xi_1' \cdot \overline{i} + \xi_2' \cdot \overline{j} + \xi_3' \cdot \overline{k}) \\ &= -mg \cdot \overline{k} \cdot (d\xi_1 \cdot \overline{i} + d\xi_2 \cdot \overline{j} + d\xi_3 \cdot \overline{k}) \\ &= -mg \cdot d\xi_3. \end{aligned}$$

Am notat, sugestiv, cu ξ_i , ξ'_i , ξ''_i coordonatele centrului de masă G al solidului S în reperele \mathcal{R} , \mathcal{R}' , \mathcal{R}'' . Evident, $\xi_i = \xi'_i$, unde $1 \leq i \leq 3$. Cum $\xi_3 = \overline{\mathbf{OG}} \cdot \overline{k} = \overline{k} \cdot (\xi_1'' \cdot \overline{i}_1 + \xi_2'' \cdot \overline{j}_1 + \xi_3'' \cdot \overline{k}_1)$, avem

$$\xi_3 = \gamma \cdot \xi_1'' + \gamma' \cdot \xi_2'' + \gamma'' \cdot \xi_3''$$

(cf. [34], p. 489).

Integrând în raport cu timpul t ecuația

$$\frac{d}{dt} \left[\frac{1}{2} \cdot (A \cdot p^2 + B \cdot q^2 + C \cdot r^2) + mg \cdot (\gamma \cdot \xi_1'' + \gamma' \cdot \xi_2'' + \gamma'' \cdot \xi_3'') \right] = 0,$$

ajungem la cea dintâi *integrală primă* algebrică în p , q , r , γ , γ' , γ'' a problemei, și anume

$$A \cdot p^2 + B \cdot q^2 + C \cdot r^2 + 2 \cdot mg \cdot (\gamma \cdot \xi_1'' + \gamma' \cdot \xi_2'' + \gamma'' \cdot \xi_3'') = h_1,$$

unde h_1 este o constantă care depinde de *condițiile inițiale*.

Teorema momentului cinetic față de axa fixă Oz ne conduce la

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} [L'_z(S)] &= \mathcal{M}_z \left(\left\{ \vec{G}, \vec{R} \right\} \right) \\ &= \mathcal{M}_z \left(\left\{ \vec{G} \right\} \right) + \mathcal{M}_z \left(\left\{ \vec{R} \right\} \right) = 0 \end{aligned}$$

deoarece forțele \vec{G} , \vec{R} au liniile de acțiune coplanare cu dreapta Oz . Prin integrare în raport cu timpul t obținem o a doua *integrală primă* algebrică în $p, q, r, \gamma, \gamma', \gamma''$, căci

$$L'_z(S) = \vec{L}'_O(S) \cdot \vec{k} = Ap \cdot \gamma + Bq \cdot \gamma' + Cr \cdot \gamma''.$$

Mai precis,

$$A \cdot p \cdot \gamma + B \cdot q \cdot \gamma' + C \cdot r \cdot \gamma'' = h_2,$$

unde h_2 este o constantă depinzând de *condițiile inițiale ale problemei*, adică de

$$\begin{cases} \psi(t_0) = \psi_0 & \theta(t_0) = \theta_0 & \varphi(t_0) = \varphi_0 \\ \dot{\psi}(t_0) = \psi_1 & \dot{\theta}(t_0) = \theta_1 & \dot{\varphi}(t_0) = \varphi_1 \end{cases} \quad (3.63)$$

(cf. [34], p. 472).

O a treia integrală primă algebrică în $p, q, r, \gamma, \gamma', \gamma''$ este dată chiar de forma particulară a mărimilor $\gamma, \gamma', \gamma''$:

$$\gamma^2 + \gamma'^2 + \gamma''^2 = 1$$

(cf. [76], p. 653).

Problema determinării soluțiilor sistemului de ecuații diferențiale (3.48), (3.47) cu condițiile inițiale arbitrare (3.63) este complicată. Un caz particular al său îl constituie *mișcarea Euler-Poinsot*. Aici, $\xi_1'' = \xi_2'' = \xi_3'' = 0$, adică centrul de masă G coincide cu punctul fix O al solidului rigid. Un comentariu se cuvine făcut în acest moment. Rezolvarea, în mod independent, a sistemului diferențial al lui L. Euler (3.49) permite stabilirea direcției axei instantanee $\Delta(t)$

$$\vec{\omega} = p(t) \cdot \vec{i}_1 + q(t) \cdot \vec{j}_1 + r(t) \cdot \vec{k}_1$$

și obținerea anumitor informații privind mișcarea mecanică a rigidului. Totuși, în afara unor situații excepționale, *integrarea sistemului diferențial (3.47) nu poate fi înfăptuită*. Într-adevăr, un calcul simplu arată că au loc relațiile

$$\begin{cases} \frac{d\gamma}{dt} = r(t) \cdot \gamma' - q(t) \cdot \gamma'' \\ \frac{d\gamma'}{dt} = p(t) \cdot \gamma'' - r(t) \cdot \gamma \\ \frac{d\gamma''}{dt} = q(t) \cdot \gamma - p(t) \cdot \gamma' \end{cases} \quad (3.64)$$

(cf. [76], p. 652). Însă $\gamma, \gamma', \gamma''$ sunt coordonatele vectorului fix \bar{k} în reperul mobil \mathcal{R}'' , ceea ce permite scrierea vectorială a sistemului (3.64) sub forma

$$\left(\frac{\partial \bar{k}}{\partial t}\right)_{\mathcal{R}''} = -\bar{\omega}(t) \times \bar{k}.$$

Justificarea formulelor (3.64) plecând de la scrierea lor vectorială se bazează pe (2.31). Cum $\bar{\omega}$ este vectorul-viteză unghiulară instantanee al reperului \mathcal{R}'' în mișcarea sa față de reperul \mathcal{R} , avem $\bar{\omega}_{21} = \bar{\omega}$. Atunci, vectorul viteză-unghiulară instantanee al reperului \mathcal{R} în mișcarea față de reperul \mathcal{R}'' va fi $\bar{\omega}_{12} = -\bar{\omega}$. În sfârșit, derivata "absolută" a vectorului \bar{k} (în \mathcal{R}'') se scrie

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial \bar{k}}{\partial t}\right)_{\mathcal{R}''} &= \left(\frac{\partial \bar{k}}{\partial t}\right)_{\mathcal{R}} + \bar{\omega}_{12} \times \bar{k} \\ &= \frac{d\bar{k}}{dt} + \bar{\omega}_{12} \times \bar{k} \\ &= [-\bar{\omega}(t)] \times \bar{k} \end{aligned}$$

(cf. [76], p. 650).

Sistemul diferențial (3.64) este cunoscut sub numele de **sistemul diferențial al lui G. Darboux** (cf. [34], p. 498). S-a demonstrat că *integrarea sa presupune rezolvarea unei ecuații de tip Riccati*, ceea ce nu este posibil atunci când nu știm măcar o soluție particulară (cf. [34], p. 190-194). În concluzie, putem afirma că integrarea ecuațiilor de mișcare în cazul Euler-Poinsot nu se realizează complet (cf. [76], p. 655).

Reducerea la cvadraturi a rezolvării sistemului diferențial (3.48), (3.47) cu condițiile inițiale (3.63) are loc dacă, în afara celor trei integrale prime deja introduse, se mai cunoaște o a patra integrală primă algebrică în $p, q, r, \gamma, \gamma', \gamma''$ care să nu conțină timpul t în mod explicit. O justificare a acestui fapt, bazată pe forma simetrică a sistemelor diferențiale ordinare și pe teoria *factorului integrant*, poate fi citită în [76], p. 653-655. H. Poincaré a arătat că, în ipoteza existenței celei de-a patra integrale prime algebrice în $p, q, r, \gamma, \gamma', \gamma''$, vom avea, în mod necesar, sau $\xi_1'' = \xi_2'' = \xi_3'' = 0$ sau $A = B$. Astfel, dacă $A = B$, $\xi_1'' = \xi_2'' = 0$, $\xi_3'' \neq 0$ (cazul Lagrange-Poisson) ori $A = B = 2C$, $\xi_3'' = 0$ (cazul S. Kovalevskaia, 1888), ecuațiile de mișcare se integrează complet. În 1908, E. Husson demonstrează că aceste situații sunt singurele în care, *în condiții inițiale arbitrare*, există o a patra integrală primă algebrică în $p, q, r, \gamma, \gamma', \gamma''$ (cf. [34], p. 499, [76], p.

656). Impunând restricții condițiilor inițiale, s-au găsit și alte cazuri de integrabilitate completă: Hess, Goreacev-Ciaplâghin, Bobilev-Steklov, etc. (cf. [76], p. 656-658).

Revenind la sistemul diferențial al lui G. Darboux, a devenit clar de ce spuneam că, în cadrul cinematicii, vectorul-viteză unghiulară instantanee $\bar{\omega}(t)$ al mișcării unui reper oarecare \mathcal{R}' față de sistemul de referință \mathcal{R} caracterizează într-o anumită măsură mișcarea în cauză. Căci, pe baza sa putem realiza *interpretări* ale mișcării mecanice însă nu o *descriere* a acesteia, fapt echivalent cu rezolvarea unei ecuații Riccati fără cunoașterea vreunei soluții particulare.

Să presupunem că ne găsim în condițiile **cazului Lagrange-Poisson**. Corpul material solid rigid este omogen, elipsoidul său de inerție centrat în punctul fix O constituie o suprafață de rotație ($A = B$) iar centrul de masă G se găsește pe axa principală de inerție Oz'' .

Primele două integrale prime ale mișcării pot fi puse sub forma

$$\left\{ \begin{array}{l} p^2 + q^2 = \frac{h_1 - C \cdot r^2(t)}{A} - \frac{2 \cdot mg}{A} \cdot \xi_3'' \cdot \gamma'' \\ p \cdot \gamma + q \cdot \gamma' = \frac{h_2}{A} - \frac{C}{A} \cdot r(t) \cdot \gamma'' \\ \qquad \qquad \qquad = \beta - b \cdot r(t) \cdot \cos \theta(t). \end{array} \right.$$

Cea de-a treia ecuație diferențială (3.49) devine $\dot{r} = 0$, de unde

$$r(t) = r_0, \quad t \geq t_0. \quad (3.65)$$

Relația (3.65) constituie cea de-a patra *integrală primă* algebrică în $p, q, r, \gamma, \gamma', \gamma''$ de care avem nevoie (cf. [34], p. 490). Astfel,

$$\left\{ \begin{array}{l} p^2 + q^2 = \alpha - a \cdot \cos \theta \\ \sin \theta \cdot (p \cdot \sin \varphi + q \cdot \cos \varphi) = \beta - b \cdot r_0 \cdot \cos \theta. \end{array} \right. \quad (3.66)$$

Aici, constantele α, β depind de condițiile inițiale iar constantele $a, b > 0$ (considerăm $\xi_3'' > 0$) reflectă caracteristicile rigidului.

Înlocuind expresiile mărimilor p, q din (3.47) în (3.66), obținem că

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{\psi}^2 \cdot \sin^2 \theta + \dot{\theta}^2 = \alpha - a \cdot \cos \theta \\ \dot{\psi} \cdot \sin^2 \theta = \beta - b \cdot r_0 \cdot \cos \theta. \end{array} \right. \quad (3.67)$$

Apoi,

$$(\beta - b \cdot r_0 \cdot \cos \theta)^2 = \left(\dot{\psi}^2 \cdot \sin^2 \theta \right) \cdot \sin^2 \theta$$

$$\begin{aligned}
&= \left(\alpha - a \cdot \cos \theta - \dot{\theta}^2 \right) \cdot \sin^2 \theta \\
&= (\alpha - a \cdot \cos \theta) \cdot \sin^2 \theta - \dot{\theta}^2 \cdot \sin^2 \theta.
\end{aligned}$$

Introducând variabila $u = \cos \theta(t)$, formula precedentă devine

$$\begin{aligned}
\dot{u}^2 &= (\alpha - a \cdot u) \cdot (1 - u^2) - (\beta - br_0 \cdot u)^2 \\
&= f(u)
\end{aligned}$$

(cf. [34], p. 491, [76], p. 643, [63], p. 423).

Observăm că $f(\pm 1) = -(\beta \pm b \cdot r_0)^2$. În general, $|\beta| \neq b \cdot |r_0|$, deci $f(\pm 1) < 0$. În plus, $\lim_{u \rightarrow +\infty} f(u) = +\infty$, $\lim_{u \rightarrow -\infty} f(u) = -\infty$. La momentul inițial, $u_0 = \cos \theta_0$. Admițând că $f(u_0) > 0$, polinomul $f(u)$ va avea trei rădăcini (reale):

$$u_1 \in (-1, u_0) \quad u_2 \in (u_0, 1) \quad u_3 \in (1, +\infty)$$

(cf. [34], p. 492). Condiția $f(u_0) > 0$ nu este improbabilă. Într-adevăr, dacă investigăm o situație din viața de zi cu zi, este de așteptat ca mișcarea să se producă *deja* atunci când începem să-i stabilim *datele*. Așadar,

$$\begin{aligned}
&(\alpha - a \cdot u_0) \cdot (1 - u_0^2) - (\beta - br_0 \cdot u_0)^2 \\
&= (p^2(t_0) + q^2(t_0)) \cdot \sin^2 \theta(t_0) \\
&\quad - (p(t_0) \cdot \sin \varphi(t_0) + q(t_0) \cdot \cos \varphi(t_0))^2 \cdot \sin^2 \theta(t_0).
\end{aligned}$$

Inegalitatea Cauchy-Buniakovski-Schwarz (cf. [50], problema 37, p. 17) ne conduce la

$$\begin{aligned}
&p^2(t_0) + q^2(t_0) \\
&= (p^2(t_0) + q^2(t_0)) \cdot (\sin^2 \varphi(t_0) + \cos^2 \varphi(t_0)) \\
&\geq (p(t_0) \cdot \sin \varphi(t_0) + q(t_0) \cdot \cos \varphi(t_0))^2.
\end{aligned}$$

Egalitatea are loc în inegalitatea precedentă dacă și numai dacă $\frac{p(t_0)}{\sin \varphi(t_0)} = \frac{q(t_0)}{\cos \varphi(t_0)}$. Ori, o asemenea condiție este mult prea restrictivă pentru a "nimeri" într-o problemă obișnuită.

Fie θ^* , $\theta^{**} \in (0, \pi)$ dați de formulele $\cos \theta^* = u_1$, $\cos \theta^{**} = u_2$, $\theta^{**} < \theta^*$. Ca și până acum, se poate arăta că *soluția* $u(t)$ a *ecuației diferențiale* $\dot{u} =$

$\pm\sqrt{f(u)}$ (semnul din fața radicalului este stabilit în funcție de cel al mărimii $\dot{u}(t_0) = -\theta_1 \cdot \sin \theta_0$, cf. [76], p. 643) evoluează între valorile u_1, u_2 în mod repetat (periodic), având perioada

$$T = 2 \cdot \int_{u_1}^{u_2} \frac{d\tau}{\sqrt{f(\tau)}}$$

(cf. [34], p. 492, [76], p. 644, [63], p. 423). Cum $u(t+T) = u(t)$, adică $\cos \theta(t+T) = \cos \theta(t)$, deducem că

$$\theta(t+T) = \pm\theta(t) + 2k \cdot \pi \quad \pm\theta(t) \in (\theta^{**} + 2l \cdot \pi, \theta^* + 2l \cdot \pi),$$

unde $k = k(t)$, $l = l(t)$, $k, l \in \mathbb{Z}$. Regularitatea funcției $\theta(t)$ implică

$$\left\{ \begin{array}{l} \theta(t+T) = \theta(t) + 2k_0\pi \\ \theta(t+T) = -\theta(t) + 2k_1\pi \\ \theta(t) \in (\theta^{**} + 2l_0 \cdot \pi, \theta^* + 2l_0 \cdot \pi) \\ -\theta(t) \in (\theta^{**} + 2l_1 \cdot \pi, \theta^* + 2l_1 \cdot \pi), \end{array} \right. \quad t \geq t_0,$$

de unde, dat fiind că $\theta(t_0) = \theta_0 \in (\theta^{**}, \theta^*)$, obținem $\theta(t+T) = \theta(t) \in (\theta^{**}, \theta^*)$ pentru orice $t \geq t_0$.

Conform (3.67), (3.47), avem

$$\dot{\psi} = \frac{\beta - b \cdot r_0 \cdot \cos \theta}{\sin^2 \theta} \quad \dot{\varphi} = r_0 - \dot{\psi} \cdot \cos \theta, \quad (3.68)$$

relații care ne conduc, în particular, la

$$\dot{\psi}(t+T) = \dot{\psi}(t) \quad \dot{\varphi}(t+T) = \dot{\varphi}(t) \quad (3.69)$$

(cf. [63], p. 423).

Integrarea efectivă a ecuației diferențiale autonome $\dot{u} = \pm\sqrt{f(u)}$ și determinarea mărimilor ψ, φ se realizează prin separarea variabilelor, apelând la *teoria funcțiilor eliptice* (cf. [76], p. 645).

Folosind regula de derivare a funcției compuse $\psi = \psi(u(t))$, putem scrie că

$$\frac{d\psi}{du} = \frac{\dot{\psi}}{\dot{u}} = \pm \frac{\beta - br_0 \cdot u}{(1-u^2) \cdot \sqrt{f(u)}}$$

ceea ce ne permite estimarea $\psi = \psi(u)$.

În Figura 3.40 poate fi observat comportamentul punctului de intersecție (de coordonate $u, \psi(u)$) al axei mobile Oz'' cu sfera-unitate fixă. Notând cu u' soluția ecuației algebrice $\beta - br_0 \cdot u = 0$, sunt valabile următoarele situații (cf. [41], problema 1, p. 158-160, [34], p. 493-494, [63], p. 425):

1) $u' \notin [u_1, u_2]$. Curba descrisă de punctul de intersecție seamănă cu o sinusoidă sferică (cf. [63], p. 425), fiind tangentă cercurilor paralele $u = u_i$. Din (3.68) rezultă că semnul funcției $\dot{\psi}$ este constant, deci mișcarea se produce într-un singur sens (cf. [34], p. 494).

2) $u' \in (u_1, u_2)$. Curba descrisă de punctul de intersecție rămâne tangentă cercurilor paralele $u = u_i$, dar formează "bucle" datorită faptului că funcția $\dot{\psi}$ își schimbă semnul în $u = u'$. Integrând în raport cu timpul t relațiile (3.69), obținem $\psi(t + T) = \psi(t) + \text{constant}$ (cf. [34], p. 492), relație care justifică fenomenul de *deplasare* al axei mobile în raport cu meridianul inițial (pe sfera-unitate).

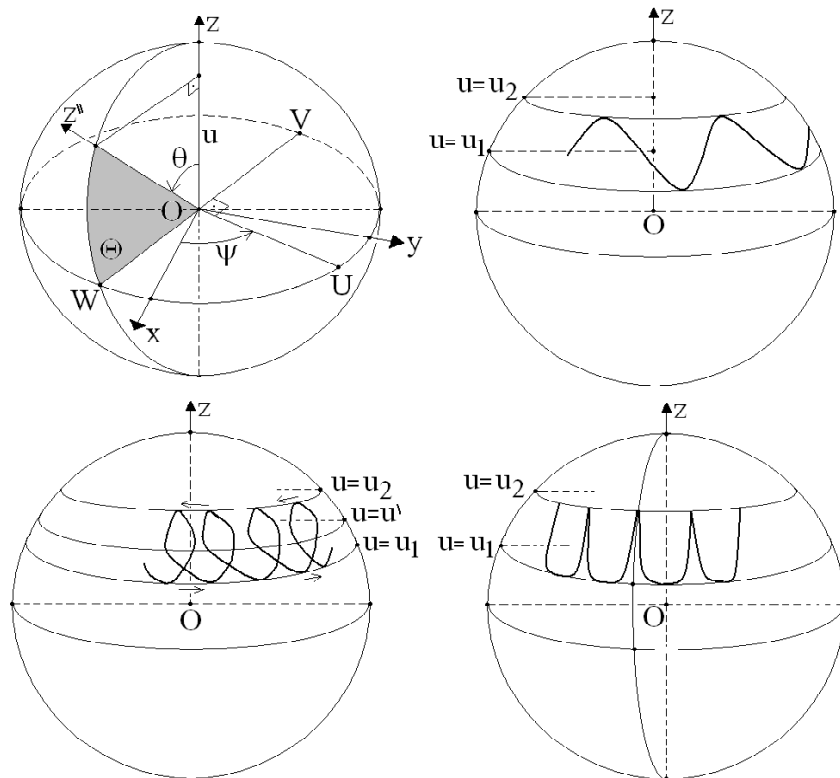


Figura 3.40

3) $u' = u_2$. Curba descrisă de punctul de intersecție devine semitangentă meridianului curent $\psi = \text{constant}$ în punctele de "contact" cu cercul $u = u_2$. Asemenea puncte sunt puncte de rebrusment ale curbei. Spunem că, în acest caz, curba are alură de tip cicloidal (cf. [63], p. 425). De asemeni, $\dot{\psi} \geq 0$, deci mișcarea se realizează într-un singur sens. Poate fi demonstrat că $u' \neq u_1$ întotdeauna (cf. [34], p. 494-495).

Am comentat înainte faptul că egalitatea $f(u_0) = 0$ nu se întâlnește "ușor". Mai precis, să presupunem că polinomul $f(u)$ admite în $(-1, 1)$ o rădăcină dublă. O asemenea situație are o semnificație *mecanică* deosebită, căci egalitatea $\theta^* = \theta^{**}$ desemnează *lipsa* mișcării de nutație. Ori, cum $f(u_0) \geq 0$, dacă $f(u_0) > 0$ și $u_0 > u_1 = u_2$, atunci în $(u_0, 1)$ ar exista o a patra rădăcină reală a polinomului; pentru $u_0 < u_1 = u_2$, fenomenul similar apare în intervalul $(-1, u_0)$. În concluzie, în mod necesar, $f(u_0) = 0$, deci $u_0 = u_1 = u_2$ și

$$f(u) = a \cdot (u - u_0)^2 \cdot (u - u_3) = -a \cdot (u - u_0)^2 \cdot (u_3 - u)$$

(cf. [76], p. 646). Formula $\dot{u}^2 = f(u) \geq 0$, unde $u(t) \in [-1, 1]$, ne conduce la $u(t) = u_0$, respectiv $\theta(t) = \theta_0$. Din (3.68) reiese că $\dot{\psi} = \dot{\varphi} = \text{constant}$, caz descris sub anterior sub numele de *mișcare de precesie regulată* (cf. [34], p. 495, [76], p. 646). Impunând ca polinomul $f(u)$ să admită o rădăcină dublă $u_0 = \cos \theta_0$ se obține o relație extrem de restrictivă privind condițiile inițiale (3.63), și anume:

$$C \cdot \psi_1 \cdot \varphi_1 + (C - A) \cdot \psi_1 \cdot \cos \theta_0 = mg \cdot \xi_3''$$

(cf. [76], relația (28.57), p. 646). Așadar, *precesia regulată în cazul Lagrange-Poisson constituie o situație absolut particulară spre deosebire de precesia regulată din mișcarea Euler-Poinsot, produsă atunci când elipsoidul de inerție constituie o suprafață de rotație*. În ambele cazuri a fost modelată matematic *precesia Pământului în mișcarea sa circumsolară*. Un calcul asemănător (cf. [76], p. 671-675), bazat pe dezvoltarea în serie de puteri cu coeficienții dați de polinoamele Legendre pe care am prezentat-o în cadrul cinematicii (cf. [76], p. 674), arată că Pământul realizează o precesie ($\dot{\psi}$) anuală de $50''$ ($16''$ datorită Soarelui, $34''$ datorită Lunii), ceea ce înseamnă o deplasare *in sens invers trigonometric (retrograd)* a axei nodale (a echinoctiilor, cf. [76], p. 670, 673) pe ecliptică. Perioada mișcării de precesie este de aproximativ 26.000 ani (cf. [76], p. 675, [32], p. 134). Tot datorită Lunii, mișcarea

Pământului în jurul Soarelui cuprinde și o *nutație*, cu perioada de aproximativ 19 ani (cf. [76], p. 675-681, [32], p. 134).

Rămânând în ipotezele cazului Lagrange-Poisson, vom considera că solidul rigid i se imprimă o rotație *rapidă* în jurul axei Oz'' *distinctă* de verticala ascendentă Oz ($0 < \theta_0 < \pi$). Cu alte cuvinte,

$$p(t_0) = q(t_0) = 0 \quad r(t_0) = r_0 \neq 0$$

iar $|r_0|$ este extrem de mare (raportat la 1) (cf. [34], p. 495).

Conform (3.66),

$$\begin{cases} \alpha - a \cdot \cos \theta_0 = \alpha - a \cdot u_0 = 0 \\ \beta - br_0 \cdot \cos \theta_0 = \beta - br_0 \cdot u_0 = 0, \end{cases}$$

adică $u_0 = u'$. Atunci,

$$\begin{aligned} f(u) &= (\alpha - a \cdot u) \cdot (1 - u^2) - (\beta - br_0 \cdot u)^2 \\ &= [a \cdot (u_0 - u)] \cdot (1 - u^2) - b^2 r_0^2 \cdot (u_0 - u)^2 \\ &= (u_0 - u) \cdot [a \cdot (1 - u^2) - b^2 r_0^2 \cdot (u_0 - u)]. \end{aligned}$$

Este clar că $f(u_0) = 0$, deci $u_0 \in \{u_1, u_2\}$. Cum $u_0 = u'$ și $u' \neq u_1$, concluzionăm că $u_0 = u_2$. Ne găsim în situația 3) (cf. [34], p. 496).

Putem evalua diferența $u_0 - u_1$ ținând seama de faptul că $f(u_1) = 0$ și $u_1 \neq u_0$. Astfel,

$$a \cdot (1 - u_1^2) - b^2 r_0^2 \cdot (u_0 - u_1) = 0.$$

Cum

$$0 < u_0 - u_1 = \frac{a \cdot (1 - u_1^2)}{b^2 r_0^2} \leq \frac{a}{b^2 r_0^2} = O\left(\frac{1}{r_0^2}\right)$$

și $u(t) \in [u_1, u_0]$, deducem că $u(t) \simeq u_0$. Funcția "cos" este bijectivă și continuă pe $[0, \pi]$, deci $\theta(t) \simeq \theta_0$. Calculul anterior arată că *solidul rigid tinde să-și păstreze înclinarea față de axa fixă Oz , fără a "ceda" atracției gravitaționale*. Mișcarea are caracter de *stabilitate* (cf. [34], p. 497).

De asemeni, din (3.68) rezultă că

$$\dot{\psi} = \frac{\beta - br_0 \cdot u}{1 - u^2} = b \cdot \frac{u_0 - u}{1 - u^2} \cdot r_0.$$

Mărimile $\dot{\psi}$ și r_0 având același semn, deducem că *rotația axei mobile Oz'' în jurul verticalei Oz se realizează în chiar sensul rotației imprimate inițial*

solidului rigid. În plus ($u_0 \neq \pm 1$),

$$\begin{aligned} \left| \dot{\psi} \right| &= b \cdot \frac{u_0 - u}{1 - u^2} \cdot |r_0| \leq b \cdot \frac{u_0 - u_1}{1 - \max\{u_1^2, u_0^2\}} \cdot |r_0| \\ &= \frac{b \cdot |r_0|}{1 - \max\{u_1^2, u_0^2\}} \cdot \frac{a(1 - u_1^2)}{b^2 \cdot r_0^2} = O\left(\frac{1}{|r_0|}\right), \end{aligned}$$

adică mișcarea de precesie este extrem de lentă. În sfârșit, cum

$$\left| \dot{\varphi} - r_0 \right| \stackrel{(3.68)}{=} \left| \dot{\psi} \cdot \cos \theta \right| \leq \left| \dot{\psi} \right|,$$

obținem că

$$\left| \dot{\varphi} - r_0 \right| = O\left(\frac{1}{|r_0|}\right)$$

(cf. [34], p. 497). *Solidul rigid se rotește, așadar, în jurul axei Oz'' cu o viteză unghiulară extrem de apropiată vitezei unghiulare inițiale.*

Continuăm calculul aproximațiilor, observând că

$$\begin{aligned} \dot{u}^2 &= (\alpha - a \cdot u) \cdot (1 - u^2) - (\beta - br_0 \cdot u)^2 \\ &\leq (\alpha - a \cdot u) \cdot (1 - u^2) \leq \alpha - a \cdot u \\ &= a \cdot (u_0 - u_1) = O\left(\frac{1}{r_0^2}\right), \end{aligned}$$

de unde $\left| \dot{u} \right| = O\left(\frac{1}{|r_0|}\right)$. Apoi, cum $\theta(t) = \arccos u(t)$, avem

$$\left| \dot{\theta} \right| \leq \frac{\left| \dot{u} \right|}{\sqrt{1 - \max\{u_1^2, u_0^2\}}} \quad \left| \dot{\theta} \right| = O\left(\frac{1}{|r_0|}\right).$$

În sfârșit, din (3.47) reiese că

$$|p(t)|, |q(t)| \leq \left| \dot{\psi} \right| + \left| \dot{\theta} \right| \quad |p(t)|, |q(t)| = O\left(\frac{1}{|r_0|}\right),$$

respectiv

$$|r(t) - r_0| \leq \left| \dot{\varphi} - r_0 \right| + \left| \dot{\psi} \right| \quad r(t) = r_0 + O\left(\frac{1}{|r_0|}\right).$$

Astfel, la momentul t , momentul cinetic $\bar{L}_O(S)$ ($\mathcal{R}' = \mathcal{R}$) este "aproximativ" coliniar cu direcția axei mobile Oz'' . Solidul rigid se comportă ca un giroscop (cf. [76], p. 660, [63], p. 426, [32], p. 131, [14], p. 199, etc.). Aplicațiile tehnice ale giroscopului sunt excepționale (giroscopul tinde să-și păstreze axa de rotație *fixă* în SF) (cf. [76], p. 661-669, [73], p. 443-448): stabilizarea antirului a vapoarelor, compasul giroscopic, orizontul artificial, ș. a. m. d. Giroscopul a fost inventat de L. Foucault în 1852 (cf. [32], p. 131).

Detalii privind cel de-al doilea caz de integrare completă a ecuațiilor (3.48), (3.47) în condiții inițiale arbitrare (S. Kovalevskaia) pot fi citite în [76], p. 648 și următoarele, [34], p. 498-499, [25], p. 154-156, etc.

Bibliografie

- [1] V. Arnold, Ecuatii diferențiale ordinare, Editura Științifică și Enciclopedică, București, 1978
- [2] I. Aștefanei, D. Ilincioiu, Mecanica și rezistența materialelor. Mecanica, teorie și aplicații, Reprografia Universității din Craiova, 1992
- [3] I. Aștefanei, O. Mustafa, Mecanica fluidelor și mașini hidraulice. Mecanica fluidelor reale, Reprografia Universității din Craiova, 1996
- [4] C. Avramescu, Ecuatii diferențiale și integrale, Reprografia Universității din Craiova, 1973
- [5] C. Avramescu, Méthodes topologiques dans la théorie des équations différentielles, Reprografia Universității din Craiova, 1998
- [6] V. Barbu, Ecuatii diferențiale, Editura Junimea, Iași, 1985
- [7] V. Barbu, Probleme la limită pentru ecuații cu derivate parțiale, Editura Academiei, București, 1993
- [8] S. Bălan, Probleme de mecanică, Editura Didactică și Pedagogică, București, 1977
- [9] C. Belea, Automatică neliniară. Teorie, exemple și aplicații, Editura Tehnică, București, 1983
- [10] R. Bellman, Stability theory of differential equations, McGraw-Hill, Londra, 1953
- [11] G. Berman, Cicloida, Editura Tehnică, București, 1956

- [12] L. Blaga, *Experimentul și spiritul matematic*, Editura Humanitas, București, 1998
- [13] H. Brézis, *Analyse fonctionnelle. Théorie et applications*, Masson, Paris, 1992
- [14] D. Boiangiu, E. Caragheorghe, M. Radeș, L. Ghermănescu Ionescu, E. Hașeganu Zamfirescu, S. Murgulescu, M. Savu, *Mecanică și rezistența materialelor*, Editura Didactică și Pedagogică, București, 1982
- [15] D. Bolcu, S. Rizescu, *Mecanică*, vol. I, II, Editura Didactică și Pedagogică, București, 2001
- [16] M. Buculei, M. Marin, *Elemente de mecanică teoretică. Teorie și aplicații*, Editura Universitaria, Craiova, 1994
- [17] I. Bunget, L. Burlacu, D. Ciobotaru, A. Costescu, V. Florescu, I. Munteanu, M. Rusu, S. Spânulescu, *Compendiu de fizică*, Editura Științifică și Enciclopedică, București, 1988
- [18] D. Bușneag, A. Dincă, D. Ebâncă, C. Niculescu, M. Popescu, I. Vladimirescu, G. Vraciu, *Concursul de matematică "Gheorghe Țițeica" 1979-1998*, Editura Gil, Zalău, 1999
- [19] G. Buzdugan, L. Fetcu, M. Radeș, *Vibrații mecanice*, Editura Didactică și Pedagogică, București, 1979
- [20] E. Carafoli, V. Constantinescu, *Dinamica fluidelor compresibile*, Editura Academiei, București, 1984
- [21] G. Cartianu, M. Săvescu, I. Constantin, D. Stanomir, *Semnale, circuite și sisteme*, Editura Didactică și Pedagogică, București, 1980
- [22] L. Cesari, *Asymptotic behavior and stability problems in ordinary differential equations*, Springer Verlag, Berlin, 1959
- [23] A. Corduneanu, *Ecuatii diferențiale cu aplicații în electrotehnică*, Editura Facla, Timișoara, 1981
- [24] B. Démidovich (coord.), *Recueil d'exercices et de problèmes d'analyse mathématique*, Editura Mir, Moscova, 1972

- [25] D. Drăghicescu, Curs de mecanică teoretică, Reprografia Universității din Craiova, 1977
- [26] D. Drăghicescu, C. Pescăruș, Mecanică teoretică. Culegere de probleme, Reprografia Universității din Craiova, 1985
- [27] A. Einstein, Cum văd eu lumea. O antologie, Editura Humanitas, București, 1992
- [28] P. Flondor, O. Stănășilă, Lecții de analiză matematică, Editura All, București, 1993
- [29] A. Haimovici, Ecuațiile fizicii matematice și elemente de calcul variațional, Editura Didactică și Pedagogică, București, 1966
- [30] A. Halanay, Teoria calitativă a ecuațiilor diferențiale, Editura Academiei R.P.R., București, 1963
- [31] P. Hartman, Ordinary differential equations, John Wiley & Sons, New York, 1964
- [32] A. Hristev, Mecanică și acustică, Editura Didactică și Pedagogică, București, 1984
- [33] E. Husserl, Meditații carteziene. O introducere în fenomenologie, Editura Humanitas, București, 1994
- [34] C. Iacob, Mecanică teoretică, Editura Didactică și Pedagogică, București, 1980
- [35] C. Iacob, Matematică aplicată și mecanică, Editura Academiei, București, 1989
- [36] N. Ionescu, Curs de logică (1934 - 1935), Editura Humanitas, București, 1993
- [37] I. Kant, Critica rațiunii pure, Editura IRI, București, 1994
- [38] J. Kelley, General topology, D. Van Nostrand Company, Limited, New York, 1955
- [39] P. Kessler, Elemente de teoria mulțimilor și topologie generală. Culegere de exerciții și probleme, Editura Secolul XXI, Craiova, 1996

- [40] P. Korovkin, *Inequalities*, Little Mathematics Library, Editura Mir, Moscova, 1986
- [41] L. Landau, E. Lifchitz, *Mécanique*, Editura Mir, Moscova, 1966
- [42] L. Landau, E. Lifchitz, *Teoria câmpului*, Editura Tehnică, București, 1963
- [43] M. Laue, *Istoria fizicii*, Editura Științifică, București, 1963
- [44] C. Meghea, I. Meghea, *Tratat de calcul diferențial și integral pentru învățământul politehnic. Calcul diferențial*, Editura Tehnică, București, 1997
- [45] G. Marinescu, *Matematici superioare*, Editura Didactică și Pedagogică, București, 1970
- [46] G. Marinescu, *Teoria ecuațiilor diferențiale și integrale*, Editura Didactică și Pedagogică, București, 1963
- [47] G. Moroșanu, *Ecuații diferențiale. Aplicații*, Editura Academiei, București, 1989
- [48] G. Murărescu, *Geometrie diferențială*, Reprografia Universității din Craiova, 1998
- [49] G. Murărescu, M. Popescu, *Curs de geometrie*, Reprografia Universității din Craiova, 1976
- [50] C. Năstăsescu, C. Niță, M. Brandiburu, D. Joița, *Exerciții și probleme de algebră pentru clasele IX-XII*, Editura Didactică și Pedagogică, București, 1983
- [51] L. Nicolescu, V. Boskoff, *Probleme practice de geometrie*, Editura Tehnică, București, 1990
- [52] C. Niculescu, *Analiză matematică și teoria funcțiilor*, Reprografia Universității din Craiova, 1988
- [53] C. Niculescu, *Fundamentele analizei matematice. Analiza pe dreapta reală*, Editura Academiei, București, 1996
- [54] V. Novacu, *Bazele teoretice ale fizicii. Vol. I: Mecanica clasică*, Editura Tehnică, București, 1990

- [55] V. Novacu, Bazele teoretice ale fizicii. Vol. II: Electrodinamica, Editura Tehnică, București, 1993
- [56] O. Onicescu, Mecanica, Editura Tehnică, București, 1969
- [57] D. Papuc, Geometrie diferențială, Editura Didactică și Pedagogică, București, 1982
- [58] F. Peters, Termenii filozofiei grecești, Editura Humanitas, București, 1993
- [59] C. Plăvițu, A. Hristev, L. Georgescu, D. Borșan, V. Dima, C. Stănescu, L. Ionescu, R. Moldovan, Culegere de probleme de mecanică fizică și acustică, Editura Didactică și Pedagogică, București, 1981
- [60] H. Pollard, Mathematical introduction to celestial mechanics, Prentice-Hall, New Jersey, 1966
- [61] A. Precupanu, Analiză matematică. Funcții reale, Editura Didactică și Pedagogică, București, 1976
- [62] M. Predoi, Analiză matematică pentru ingineri. Teorie și aplicații, Editura Universitaria, Craiova, 1994
- [63] M. Rădoi, E. Deciu, Mecanica, Editura Didactică și Pedagogică, București, 1981
- [64] S. Rădulescu, M. Rădulescu, Teoreme și probleme de analiză matematică, Editura Didactică și Pedagogică, București, 1982
- [65] M. Roșculeț, Algebră liniară, geometrie analitică și geometrie diferențială, Editura Tehnică, București, 1987
- [66] I. Șabac, Matematici speciale, Editura Didactică și Pedagogică, București, 1981
- [67] G. Șilov, Analiză matematică. Spații finit dimensionale, Editura Științifică și Enciclopedică, București, 1983
- [68] G. Șilov, Analyse mathématique (fonctions de plusieurs variables réelles), Editura Mir, Moscova, 1974
- [69] D. Smaranda, N. Soare, Transformări geometrice, Editura Academiei, București, 1988

- [70] V. Smirnov, Cours de mathématiques supérieures, vol. IV, Editura Mir, Moscova, 1975
- [71] E. Soós, Elemente de calcul variațional, p. 307-365, în C. Iacob (coord.), Matematici clasice și moderne , vol. III, Editura Tehnică, București, 1981
- [72] V. Stepanov, Curs de ecuații diferențiale, Editura Tehnică, București, 1955
- [73] S. Targ, Theoretical mechanics. A short course, Editura Mir, Moscova, 1976
- [74] G. Țițeica, Culegere de probleme de geometrie, Editura Tehnică, București, 1965
- [75] C. Udriște, Aplicații de algebră, geometrie și ecuații diferențiale, Editura Didactică și Pedagogică, București, 1993
- [76] V. Vâlcovici, S. Bălan, R. Voinea (red.), Mecanica teoretică, Editura Tehnică, București, 1963
- [77] I. Vladimirescu, M. Popescu, Algebră liniară și geometrie analitică. Teorie și aplicații, Editura Universitaria, Craiova, 1994
- [78] V. Vladimirov, Ecuațiile fizicii matematice, Editura Științifică și Enciclopedică, București, 1980
- [79] G. Vrânceanu, N. Mihăileanu, Introducere în teoria relativității, Editura Tehnică, București, 1978
- [80] B. Vulikh, A brief course in the theory of functions of a real variable (An introduction to the theory of the integral), Editura Mir, Moscova, 1976
- [81] B. Waerden, Group theory and quantum mechanics, Springer-Verlag, Berlin, 1974
- [82] J. Wermer, Potential theory, Springer-Verlag, Berlin, 1981