3. Vectori şi valori proprii

Reamintim că dacă A este o matrice pătratică, atunci un vector $x \in \mathbb{R}^n$ se numeşte *vector propriu* în raport cu A, dacă $x \neq 0$ şi există un număr λ (real sau complex) astfel încât $Ax = \lambda x$. Numărul λ se mai numeşte şi *valoarea proprie*. Valorile proprii ale matricei A sunt rădăcinile *polinomului caracteristic* $P(\lambda) = \det(A - \lambda I)$ şi sunt invariante la transformările de similitudine ale lui A; acest lucru înseamnă că valorile proprii ale matricei A coincid cu valorile proprii ale matricei $C^{-1}AC$, oricare ar fi matricea nesingulară C.

Dacă matricea A este simetrică, atunci valorile sale proprii sunt reale şi există o bază ortonormală formată din vectori proprii, deci cu proprietatea $Av_i = \lambda_i v_i$, $i = \overline{1,n}$, în raport cu care matricea A se reduce la forma diagonală

$$D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & & \lambda_n \end{pmatrix} \tag{1}$$

Baza $v_1, \ldots, v_n$ se poate alege astfel încât $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \ldots \geq \lambda_n$. Dacă, în plus, A este şi pozitiv definită, atunci $\lambda_1 \geq \ldots \geq \lambda_n > 0$ şi

$$\lambda_1 = \|A\|_2 = \sup_{x \neq 0} \frac{\langle Ax, x \rangle}{\langle x, x \rangle}.$$

Fie V matricea de trecere de la baza canonică a spaţiului $\mathbb{R}^n$ la baza $v_1, v_2, \ldots, v_n$. Se verifică imediat că $V^T V = I$, deci V este ortogonală. Rezultă că $V^{-1} = V^T$ şi că $D = V^T \cdot AV$.

În practică, valorile proprii ale matricei A nu se determină rezolvând numeric ecuaţia caracteristică $\det(A - \lambda I) = 0$, deoarece, aşa cum vom arăta în continuare, rădăcinile unui polinom sunt foarte ”sensibile” la orice modificare a coeficienţilor polinomului.

Într-adevăr, fie polinomul

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0 \ ,$$

şi fie

$$h(x) = f(x) + \varepsilon g(x)$$

polinomul modificat, în care $\varepsilon > 0$ este arbitrar, iar

$$g(x) = b_n x^n + b_{n-1}x^{n-1} + ... + b_1 x + b_0$$

este un polinom oarecare. Cum g este arbitrar, putem considera că $b_i = a_i$, $i = \overline{1,n}$ sau $b_i = 0$ pentru $i \neq j$ şi $b_j = a_j$ etc. Aşadar, cazul considerat este practic cazul cel mai general. Fie $x_1, x_2, ..., x_n$ rădăcinile polinomului *f.* Pentru simplificare, vom presupune că aceste rădăcini sunt simple, deci că $f(x_k) = 0$ şi $f'(x_k) \neq 0$, $k = \overline{1,n}$.

Să presupunem că vrem să determinăm rădăcinile ecuației $h(x) = 0$ cu una din metodele numerice cunoscute, de exemplu metoda Newton - Raphson. Ne aşteptăm ca pentru $\varepsilon > 0$ foarte mic, rădăcinile ecuației $h(x) = 0$ să fie apropiate de rădăcinile ecuației inițiale $f(x) = 0$. Notăm cu z_k o rădăcină oarecare a ecuației $h(x) = 0$. Conform algoritmului Newton avem

$$z_k = x_k - \frac{h(x_k)}{h'(x_k)} = x_k - \frac{\varepsilon g(x_k)}{f'(x_k) + \varepsilon g'(x_k)} \tag{2}$$

Dacă notăm cu

$$q(\varepsilon) = \frac{g(x_k)}{f'(x_k) + \varepsilon g'(x_k)} \ ,$$

atunci

$$q'(\varepsilon) = -\frac{g(x_k) g'(x_k)}{\left[f'(x_k) + \varepsilon g'(x_k)\right]^2} \ . \tag{3}$$

Cum $q(\varepsilon) \approx q(0) + \varepsilon\, q'(0)$ pentru $\varepsilon > 0$ suficient de mic, din (2) şi (3) rezultă

$$z_k = x_k - \varepsilon \left(\frac{g(x_k)}{f'(x_k)} - \varepsilon \frac{g(x_k) g'(x_k)}{\left[f'(x_k)\right]^2} \right) \approx x_k - \varepsilon \frac{g(x_k)}{f'(x_k)} \ . \tag{4}$$

Să presupunem că $b_i = 0$ pentru $i \neq j$ şi $b_j = a_j$. Aşadar, modificarea polinomului f constă în faptul că se înlocuieşte coeficientul a_j cu coeficientul $\tilde{a}_j = (1+\varepsilon) a_j$, iar ceilalți coeficienți rămân neschimbați. Din (4) rezultă

$$z_k - x_k \approx \varepsilon \frac{a_j x_k^j}{f'(x_k)} \ . \tag{5}$$

Exemplul 1. Fie

$$f(x) = \prod_{k=1}^{12} (x - k) = (x-1)(x-2)...(x-12) \ .$$

Evident

$$x_k = k, \quad k = \overline{1,12} \quad \text{şi} \quad f'(x_k) = (-1)^k (12-k)!(k-1)!$$

Conform (5) avem

$$|z_k - x_k| = \varepsilon \frac{|a_j| k^j}{(12-k)!(k-1)!} \quad .$$

Se poate arăta că $a_7 = -\,6.926.634$.

Să presupunem că $\varepsilon = 10^{-11}$, ceea ce înseamnă că modificarea coeficientului a_7 se face cu cantitatea $\varepsilon \cdot a_7 = -0.00006926634 \approx -0.00007$. Acest lucru este oricând posibil datorită erorilor inerente la introducerea datelor. Să analizăm efectul acestei modificări asupra rădăcinii $x_9 = 9$ a ecuaţiei $f(x) = 0$. Un calcul direct ne arată că

$$|z_9 - x_9| = 0.00137 \approx 0.0014 \quad .$$

Aşadar, modificând un singur coeficient şi anume a_7 cu 0.00007, rădăcina x_9 se modifică cu 0.0014. Raportul dintre modificarea rădăcinii x_9 şi modificarea coeficientului a_7 este 20, ceea ce arată *sensibilitatea* rădăcinilor unui polinom la modificarea coeficienţilor.

Din cele de mai sus rezultă că nu se recomandă determinarea valorilor proprii ale unei matrice pe calea rezolvării numerice a ecuaţiei caracteristice.

Metoda recomandată este să se aducă, printr-un procedeu oarecare, matricea la forma diagonală şi atunci valorile proprii se determină global (toate odată), ele fiind, de fapt, elementele de pe diagonala principală. Se urmăreşte deci, ca prin transformări de similitudine, care nu modifică valorile proprii, să micşorăm, eventual până la dispariţie, elementele nediagonale ale matricei, astfel încât, în final, să obţinem practic matricea diagonală.

§3.1. Metoda rotaţiilor a lui Jacobi

Fie A o matrice simetrică. Metoda Jacobi constă în efectuarea unei suite de transformări de similitudine ale matricei A utilizând cele mai simple matrice ortogonale netriviale (matricele de rotaţie) de forma

$$
\begin{array}{ccc}
 & \begin{matrix} & & & p & & & & q & & & \\ & & & \downarrow & & & & \downarrow & & & \end{matrix} & \\
U = & \begin{pmatrix}
1 & 0 & 0 & . & & & & . & & & 0 \\
0 & 1 & 0 & . & & & & . & & & 0 \\
 & & \ddots & . & & & & . & & & \\
0 & . & . & \cos\varphi & . & . & . & \sin\varphi & . & . & 0 \\
 & & & . & 1 & & & . & & & \\
\vdots & & & . & & \ddots & & . & & & \vdots \\
 & & & . & & & 1 & . & & & \\
0 & . & . & -\sin\varphi & . & . & . & \cos\varphi & . & . & 0 \\
 & & & . & & & & . & \ddots & & \\
 & & & . & & & & . & 0 & 1 & 0 \\
0 & & & . & & & & . & 0 & 0 & 1
\end{pmatrix} & \begin{matrix} \\ \\ \\ \leftarrow p \\ \\ \\ \\ \leftarrow q \\ \\ \\ \\ \end{matrix}
\end{array}
\qquad (1)
$$

Aşadar, elementele matricei U sunt:

$$
\begin{cases}
u_{ii} = 1 \quad \text{dacă} \quad i \neq p \quad \text{şi} \quad i \neq q \\
u_{pp} = \cos\varphi, \quad u_{pq} = \sin\varphi \\
u_{qp} = -\sin\varphi, \quad u_{qq} = \cos\varphi \\
u_{ij} = 0 \quad \text{în rest}
\end{cases}
\qquad (2)
$$

O asemenea matrice este ortogonală $(U^T U = I$ şi deci $U^{-1} = U^T)$ şi reprezintă din punct de vedere geometric o rotaţie de unghi φ în planul determinat de direcţiile e_p şi e_q. Notăm cu $A' = U^T A$ şi cu $A'' = A'U = U^T AU$. În cazul particular $n = 5$, $p = 2$ şi $q = 4$, matricea A'' arată astfel

a_{11}	$a_{12}\cos\varphi - a_{14}\sin\varphi$	a_{13}	$a_{12}\sin\varphi + a_{14}\cos\varphi$	a_{15}
$a_{21}\cos\varphi -$ $a_{41}\sin\varphi$	$a_{22}\cos^2\varphi - 2a_{24}\sin\varphi$ $\cos\varphi + a_{44}\sin^2\varphi$	$a_{23}\cos\varphi -$ $a_{43}\sin\varphi$	$(a_{22} - a_{44})\sin\varphi\cos\varphi +$ $a_{24}\cos 2\varphi$	$a_{25}\cos\varphi -$ $a_{45}\sin\varphi$
a_{31}	$a_{32}\cos\varphi - a_{34}\sin\varphi$	a_{33}	$a_{32}\sin\varphi + a_{34}\cos\varphi$	a_{35}
$a_{21}\sin\varphi +$ $a_{41}\cos\varphi$	$(a_{22} - a_{44})\sin\varphi$ $\cos\varphi + a_{24}\cos 2\varphi$	$a_{23}\sin\varphi +$ $a_{43}\cos\varphi$	$a_{22}\sin^2\varphi + 2a_{24}\sin\varphi$ $\cos\varphi + a_{44}\cos^2\varphi$	$a_{25}\sin\varphi +$ $a_{45}\cos\varphi$
a_{51}	$a_{52}\cos\varphi - a_{54}\sin\varphi$	a_{53}	$a_{52}\sin\varphi + a_{54}\cos\varphi$	a_{55}

În general, elementele matricei A' sunt

$$
\begin{cases}
a'_{ij} = a_{ij} \quad \text{dacă} \quad i \neq p \quad \text{şi} \quad i \neq q \\
a'_{pj} = a_{pj}\cos\varphi - a_{qj}\sin\varphi \qquad j = \overline{1, n} \\
a'_{qj} = a_{pj}\sin\varphi + a_{qj}\cos\varphi \qquad ,
\end{cases}
\qquad (3)
$$

iar cele ale matricei A″ sunt

$$\begin{cases} a''_{ij} = a'_{ij} & \text{dacă} \quad j \neq p \quad \text{şi} \quad j \neq q \\ a''_{ip} = a'_{ip} \cos\varphi - a'_{iq} \sin\varphi & \\ a''_{iq} = a'_{ip} \sin\varphi + a'_{iq} \cos\varphi & \end{cases} \quad , \ i = \overline{1,n} \ . \tag{4}$$

Din (3) şi (4) rezultă

$$\begin{cases} a''_{pp} = a_{pp} \cos^2\varphi - 2a_{pq} \cos\varphi \sin\varphi + a_{qq} \sin^2\varphi \\ a''_{qq} = a_{pp} \sin^2\varphi + 2a_{pq} \cos\varphi \sin\varphi + a_{qq} \cos^2\varphi \\ a''_{pq} = (a_{pp} - a_{qq}) \sin\varphi \cos\varphi + a_{pq} \cos 2\varphi \\ a''_{qp} = a''_{pq} \end{cases} . \tag{5}$$

Cum intenţia noastră este ca elementul nediagonal cel mai mare (în valoare absolută) să se anuleze în urma rotaţiei, vom alege liniile p şi q astfel încât a_{pq} să fie cel mai mare element (în valoare absolută) de deasupra diagonalei principale şi vom pune condiţia ca $a''_{pq} = 0$. Ţinând seama de (5) rezultă

$$\frac{1}{2}(a_{pp} - a_{qq}) \sin 2\varphi + a_{pq} \cos 2\varphi = 0$$

şi mai departe

$$ctg 2\varphi = \frac{a_{qq} - a_{pp}}{2a_{pq}} \ . \tag{6}$$

Aşadar, unghiul de rotaţie se află din relaţia (6). Introducem notaţiile

$$\theta = \frac{a_{qq} - a_{pp}}{2a_{pq}} \quad \text{şi} \quad tg\varphi = t \ . \tag{7}$$

Cum $ctg 2\varphi = \dfrac{1 - tg^2\varphi}{2tg\varphi}$, din (6) şi (7) rezultă $t^2 + 2\theta \cdot t - 1 = 0$. Rezolvând această ecuaţie obţinem

$$t_{1,2} = -\theta \pm \sqrt{\theta^2 + 1} = \frac{1}{\theta \pm \sqrt{\theta^2 + 1}} \ .$$

Pentru a evita ca numitorul să fie mic, luăm

$$t = \begin{cases} \dfrac{1}{\theta + \operatorname{sgn}(\theta)\sqrt{\theta^2 + 1}} & \text{dacă} \quad \theta \neq 0 \\ 1 & \text{dacă} \quad \theta = 0 \end{cases} . \tag{8}$$

Conform unor formule elementare de trigonometrie avem

$$\begin{cases} c = \cos\varphi = \dfrac{1}{\sqrt{1+t^2}} \\ s = \sin\varphi = \dfrac{t}{\sqrt{1+t^2}} \end{cases} . \tag{9}$$

Din (8) şi (9) rezultă că $|t| \le 1$, $c \ge \frac{1}{\sqrt{2}}$, $|s| \le \frac{1}{\sqrt{2}}$ şi deci că

$$\varphi \in \left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right] .$$

Dacă notăm cu $S(B)$ suma pătratelor elementelor nediagonale ale unei matrice B oarecare, atunci din (3) şi (4), un calcul direct ne conduce la

$$S(A'') = \left\lfloor S(A) - 2a_{pq}^2 \right\rfloor + 2a''^2_{pq} .$$

Aşadar, dacă alegem unghiul rotaţie φ conform (8) şi (9) rezultă

$$a''_{pq} = 0 \quad \text{şi deci} \quad S(A'') = S(A) - 2a_{pq}^2 . \tag{10}$$

Deoarece $a_{ij}^2 \le a_{pq}^2$ pentru $i \ne j$, vom avea

$$S(A) \le n(n-1)a_{pq}^2 \quad \text{sau} \quad -\frac{2}{n(n-1)} S(A) \ge -2a_{pq}^2 . \tag{11}$$

Din (10) şi (11) rezultă

$$S(A'') \le S(A)\left(1 - \frac{2}{n(n-1)}\right) < S(A) \quad \text{pentru} \quad n \ge 2 . \tag{12}$$

Să considerăm acum un şir de rotaţii în urma cărora se obţin matricele A_0 , A_1, A_2, ... , A_k, ... unde $A_0 = A$, $A_1 = A''$, $A_2 = A_1''$, etc.
Din (12) rezultă

$$S(A_k) \le \left(1 - \frac{2}{n(n-1)}\right)^k S(A) . \tag{13}$$

Cum $1 - \frac{2}{n(n-1)} \in (0,1)$ pentru $n > 2$, din (13) rezultă $\lim\limits_{k\to\infty} S(A_k) = 0$.

Aşadar, la limită şirul $\{A_k\}$ tinde la matricea diagonală.
Se poate demonstra următoarea teoremă

Teorema 1. *Fie* λ_i *valorile proprii ale matricei* A *şi fie* $a_{jj}^{(k)}$ *elementele diagonale ale matricei* A_k. *Atunci*

$$\left| a_{jj}^{(k)} - \lambda_j \right| \le \sqrt{S(A_k)} .$$

Deoarece $a_{pq}^{(k)}$ este cel mai mare (în valoare absolută) element nediagonal al matricei A_k, rezultă

$$S(A_k) \le (n^2 - n)(a_{pq}^{(k)})^2 < n^2 (a_{pq}^{(k)})^2 \quad .$$

Din Teorema 1 obţinem

$$\left| a_{jj}^{(k)} - \lambda_j \right| < n \left| a_{pq}^{(k)} \right| \quad . \tag{14}$$

Inegalitatea (14) poate fi luată drept *criteriu de oprire*. Din inegalitatea $n\left| a_{pq}^{(k)} \right| < \varepsilon$, va rezulta numărul k al rotaţiilor necesare pentru a aproxima valorile proprii λ_j ale matricei A cu elementele diagonale $a_{jj}^{(k)}$ ale matricei A_k. Şirul de matrice A_k se calculează recursiv

$$\begin{cases} A_k = U_k^T A_{k-1} U_k \ , & k \ge 1 \\ A_0 = A \end{cases} \quad . \tag{15}$$

Algoritm pentru determinarea valorilor proprii prin metoda rotaţiilor a lui Jacobi
Intrare A , ε ;
Repetă
    Determină : max := elementul maxim în valoare absolută de deasupra diagonalei principale a matricei A ;
        Fie (p , q) poziţia acestui element ;
    Calculează cu formulele (7) , (8) , (9) respectiv θ , t , c , s ;
    Determină U prin înlocuirea în I_n a elementelor i_{pp} şi i_{qq} cu c şi i_{pq} cu s, iar i_{qp} cu $-s$;
    Calculează $A := U^T \cdot A \cdot U$; calculează $S := \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \sum_{\substack{j=1 \\ j \ne i}}^{n} a_{ij}^2}$

până când $S<\varepsilon$.

Exemplul 1. Pentru matricea

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \quad a_{12} = 1; \quad p = 1; \quad q = 2; \quad \theta = 0; \quad t = 1; \quad c = s = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$U_1 = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}; \quad A_1 = U_1^T A U_1 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & \sqrt{2} \\ 0 & \sqrt{2} & 3 \end{pmatrix}; \quad a_{23} = \sqrt{2}\,; \quad p = 2\,; \quad q = 3$$

$$\theta = \frac{3-4}{2\sqrt{2}} = -\frac{1}{2\sqrt{2}}; \quad 1 + \theta^2 = \frac{9}{8}; \quad t = -\frac{\sqrt{2}}{2}; \quad 1 + t^2 = \frac{3}{2}; \quad c = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}; \quad s = -\frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$U_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} & -\dfrac{1}{\sqrt{3}} \\ 0 & \dfrac{1}{\sqrt{3}} & \dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}; \quad A_2 = U_2^T A_1 U_2 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Rezultă: $\lambda_1 = 2$; $\lambda_2 = 5$; $\lambda_3 = 2$.

§3.2. Metoda Householder pentru tridiagonalizarea matricelor simetrice

Pentru matricele simetrice tridiagonale există o metodă specială de determinare a valorilor proprii, bazată pe conceptul algebric de *şir Sturm*; această metodă va fi prezentată în paragraful următor.
Prezintă deci interes cunoaşterea unor metode de tridiagonalizare a matricelor simetrice. Cele mai cunoscute metode din această categorie sunt *metoda Givens* şi *metoda Householder*.

Aşa cum am văzut în Capitolul I, §4, pentru orice vector $x \in \mathbb{R}^n$, $x \neq 0$, există o matrice Householder H, astfel încât $Hx = \sigma e_1$, unde σ este un număr real. Algoritmul pentru determinarea matricei H este prezentat în (3), respectiv (4). Fie $A \in M_n(\mathbb{R})$ o matrice simetrică şi fie $a_i = (a_{1i}, a_{2i}, ..., a_{ni})^T$, $i = \overline{1,n}$, vectorii săi coloană.

Căutăm o matrice Householder H_1 astfel încât

$$H_1 a_1 = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21}^{(1)} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

Pentru aceasta, alegem H_1 de forma $H_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \widetilde{H}_1 \end{pmatrix}$, unde $\widetilde{H}_1$ este matricea Householder de ordinul $(n$-$1)$ cu proprietatea că

$$\widetilde{H}_1 \cdot \begin{pmatrix} a_{21} \\ \cdot \\ \cdot \\ a_{n1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{21}^{(1)} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Conform algoritmului (4) descris în Capitolul I §4 avem:

$s = (a_{21}^2 + ... + a_{n1}^2)^{1/2}$, $\beta = (s(|a_{21}| + s))^{-1}$, $u = (a_{21} + s \cdot \operatorname{sgn}(a_{21}), a_{31}, ..., a_{n1})^T$, $\operatorname{sgn}(a_{21}) = 1$ dacă $a_{21} = 0$, $\widetilde{H}_1 = I_{n-1} - \beta uu^T$.

Dacă notăm cu $\widetilde{a}_1 = (a_{21}, ..., a_{n1})^T$, atunci

$$\widetilde{H}_1 \widetilde{a}_1 = \begin{pmatrix} -s \cdot \operatorname{sgn}(a_{21}) \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

Mai departe avem $H_1 a_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \widetilde{H}_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} \\ \widetilde{a}_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} \\ \widetilde{H}_1 \cdot \widetilde{a}_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} \\ -s \cdot \operatorname{sgn}(a_{21}) \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$.

Fie $A_1 = H_1 A H^T{}_1$. Atunci

$$A_1 = \begin{pmatrix} a_{11} & -s \cdot \operatorname{sgn}(a_{21}) & 0 & \dots & 0 \\ -s \cdot \operatorname{sgn}(a_{21}) & a_{22}^{(1)} & a_{23}^{(1)} & \dots & a_{2n}^{(1)} \\ 0 & a_{32}^{(1)} & a_{33}^{(1)} & \dots & a_{3n}^{(1)} \\ \cdot & & & & \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \cdot & & & & \\ 0 & a_{n2}^{(1)} & a_{n3}^{(1)} & \dots & a_{nn}^{(1)} \end{pmatrix}.$$

În continuare se caută o matrice Householder H_2 cu proprietatea că elementele $a_{i2}^{(2)}$ $(i = \overline{4, n})$ din matricea $A_2 = H_2 A_1 H_2^T$ sunt nule, etc.

Algoritm pentru tridiagonalizarea matricei A

$A_0 := A$;

Pentru i:=1,n-1 calculează

$$s := \left(\sum_{j=i+1}^{n} a_{ij}^2 \right)^{1/2} ; \quad \beta := \left(s(|a_{i+1,i}| + s) \right)^{-1} ;$$

$u = \left(a_{i+1,i} + s \cdot \mathrm{sgn}(a_{i+1,i}),\ a_{i+2,i}, ..., a_{n\,i}\right)^T$;

dacă $a_{i,i+1} \geq 0$ atunci $\mathrm{sgn}(a_{i,i+1}) := 1$ altfel $\mathrm{sgn}(a_{i,i+1}) := -1$;

$\widetilde{H}_i := I_{n-1} - \beta \cdot u \cdot u^T$;

$H_i := \begin{pmatrix} I_i & 0 \\ 0 & \widetilde{H}_i \end{pmatrix}$;

$A_i := H_i A_{i-1} H_i^T$;

sfârşit pentru i.

§3.3. Determinarea valorilor proprii ale matricelor simetrice tridiagonale

Următoarea teoremă precizează mulţimea din planul complex (respectiv intervalul din R) în care se află valorile proprii ale unei matrice.

***Teorema 1* . (Gerschgorin)**. *Fie A o matrice pătratică de ordinul n,*

$$r_i = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} \left| a_{ij} \right| \quad \text{şi} \quad D_i = \left\{ z \in \mathbb{C};\ \left| z - a_{ii} \right| < r_i \right\} \quad ; \quad i = \overline{1,n}.$$

Dacă λ este valoarea proprie a matricei A, atunci $\lambda \in \bigcup_{i=1}^{n} D_i$.

Demonstraţie. Fie λ o valoare proprie a matricei A şi fie $x = (x_1, ..., x_n)^T$ un vector propriu corespunzător lui λ. Atunci $x \neq 0$ şi $Ax = \lambda x$. Rezultă

$$a_{i1} x_1 + ... + a_{ii} x_i + ... + a_{in} x_n = \lambda x_i$$

sau

$$\sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} a_{ij} x_j = (\lambda - a_{ii}) x_i, \quad i = \overline{1,n} \tag{1}$$

Fie $p \in \{1,2,...,n\}$ astfel încât $\left| x_p \right| = \|x\|_\infty > 0$.

Din (1) rezultă

$$\left| \lambda - a_{pp} \right| \leq \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq p}}^{n} \left| a_{pj} \right| \left| \frac{x_j}{x_p} \right| \leq \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq p}}^{n} \left| a_{pj} \right| = r_p \quad .$$

Aşadar, $\lambda \in D_p \subset \bigcup_{i=1}^{n} D_i$.

În cazul particular când $A \in M_n$ (R) şi are toate valorile proprii reale, rezultă că

$$\lambda \in \bigcup_{i=1}^{n} [a_{ii} - r_i, a_{ii} + r_i] \subset \mathrm{R}\ . \quad \square$$

Exemplul 1. Fie $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & -3 & -2 \\ 1 & -2 & 2 \end{pmatrix}$, r_1=3; r_2=4; r_3=3.

$$\lambda \in [-2, 4] \cup [-7, 1] \cup [-1, 5] = [-7, 5].$$

O matrice simetrică tridiagonală este de forma

$$J = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & 0 & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ b_1 & a_2 & b_2 & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ 0 & b_2 & a_3 & b_3 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & b_{n-2} & a_{n-1} & b_{n-1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & b_{n-1} & a_n \end{pmatrix} . \qquad (2)$$

Pentru o astfel de matrice avem

$$a_{ii} = a_i\ ;\ \ r_1 = |b_1|;\ \ r_n = |b_{n-1}|;\ \ r_i = |b_{i-1}| + |b_i|, \quad i = \overline{2, n-1}\ .$$

Fie $a = \min\limits_{1 \le i \le n} (a_i - r_i)$ şi $b = \max\limits_{1 \le i \le n} (a_i + r_i)$.

Valorile proprii ale matricei A vor aparține intervalului $[a,b]$.

Definiția 1. *Un şir ordonat şi finit de polinoame reale* $f_n, f_{n-1}, ..., f_1, f_0$ *se numeşte şir Sturm, dacă:*

1. *Polinoamele vecine nu au rădăcini comune;*
2. f_0 *nu are rădăcini reale;*
3. *Dacă* $x = \alpha$ *este o rădăcină a unuia din polinoamele intermediare*

$$f_i,\ \ i = \overline{1, n-1}, \quad \text{atunci} \quad f_{i-1}(\alpha) f_{i+1}(\alpha) < 0\ \ ;$$

4. *Dacă* $f_n(\alpha) = 0$, *atunci pentru* $h > 0$, *suficient de mic, avem*

$$\operatorname{sgn} \frac{f_n(\alpha - h)}{f_{n-1}(\alpha - h)} = -1 \ \text{ şi } \ \operatorname{sgn} \frac{f_n(\alpha + h)}{f_{n-1}(\alpha + h)} = +1\, .$$

În continuare, pentru orice $x \in$ R, notăm cu $S(x)$ numărul schimbărilor de semn din şirul

$$f_n(x),\ f_{n-1}(x),\ \dots\ , f_1(x),\ f_0(x),$$

după ce am eliminat elementele nule.

Teorema 2. (Sturm) *Fie* $f_n, f_{n-1}, ..., f_1, f_0$ *un şir Sturm de polinoame. Dacă numerele reale* a *şi* b, $a < b$, *nu sunt rădăcini ale polinomului* f_n *şi* *dacă polinomul f_n nu are rădăcini multiple, atunci S(a) ≥ S(b) şi diferenţa S(a)−S(b) este egală cu numărul rădăcinilor reale ale polinomului f_n din intervalul (a, b).*

Demonstraţie. Deoarece polinoamele sunt funcţii continue, atât timp cât x crescând, nu întâlneşte nici o rădăcină a vreunuia din polinoamele din şir, semnele polinoamelor din şir nu se schimbă şi deci $S(x)$ rămâne neschimbat. Rămâne să analizăm următoarele cazuri posibile:

a) $x = \alpha$ este rădăcină pentru unul din polinoamele intermediare. Fie $i \in \{1,2,...,(n-1)\}$ astfel încât $f_i(\alpha) = 0$. Din Definiţia 1 rezultă $f_{i-1}(\alpha) f_{i+1}(\alpha) < 0$. Să presupunem că $f_{i-1}(\alpha) < 0$ şi $f_{i+1}(\alpha) > 0$. Din continuitate rezultă că există $h > 0$ astfel încât $f_{i-1}(x) < 0$ şi $f_{i+1}(x) > 0$ pentru orice $x \in [\alpha - h, \alpha + h]$. Avem următoarea situaţie

x	$f_{i-1}(x)$	$f_i(x)$	$f_{i+1}(x)$
$\alpha-h$	-	$\pm$	+
α	-	0	+
$\alpha+h$	-	$\mp$	+

Rezultă $S(\alpha + h) = S(\alpha - h)$.

În mod analog, dacă $f_{i-1}(\alpha) > 0$ şi $f_{i+1}(\alpha) < 0$ avem următorul tabel ale semnelor

x	$f_{i-1}(x)$	$f_i(x)$	$f_{i+1}(x)$
$\alpha - h$	+	$\pm$	-
α	+	0	-
$\alpha + h$	+	$\mp$	-

Rezultă, de asemenea $S(\alpha + h) = S(\alpha - h)$.

b) $x = \alpha$ este o rădăcină a polinomului f_n. Evident, în acest caz $f_{n-1}(\alpha) \neq 0$ (Definiţia 1, proprietatea 1).

Din continuitate şi din proprietatea 4 a Definiţiei 1, rezultă că nu putem avea decât următoarele situaţii

x	$f_{n-1}(x)$	$f_n(x)$
$\alpha-h$	-	+
α	-	0
$\alpha+h$	-	-

x	$f_{n-1}(x)$	$f_n(x)$
$\alpha-h$	+	-
α	+	0
$\alpha+h$	+	+

Aşadar, la trecerea printr-o rădăcină a polinomului f_n, S scade cu o unitate ($S(\alpha + h) = S(\alpha - h) - 1$).

În definitiv, am demonstrat că numărul rădăcinilor reale ale polinoamelor f_n, cuprinse în intervalul (a,b) este egal cu

$S(a)$ -$S(b)$. ❑

Exemplul 2.

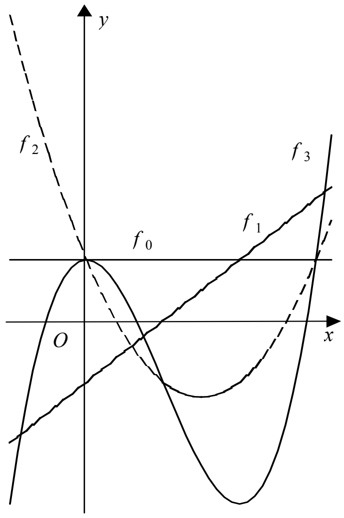
Fie polinoamele:

$f_3(x) = x^3 - 3x^2 + 1$;

$f_2(x) = x^2 - 3x + 1$;

$f_1(x) = x - 1$;

$f_0(x) = 1$



Din reprezentarea grafică a polinoamelor se observă că ele formează un şir Sturm. Alegem $a = -1$ şi $b = 3$.

$f_3(-1) = -3$; $f_2(-1) = 5$; $f_1(-1) = -2$; $f_0(-1) = 1$

$f_3(3) = 1$; $f_2(3) = 1$; $f_1(3) = 2$; $f_0(3) = 1$; $S(-1) = 3$; $S(3) = 0$;

Numărul rădăcinilor reale ale polinomului f_3 cuprinse în intervalul $(-1, 3)$ este 3.

Fie J matricea simetrică tridiagonală dată de (2) şi fie

$$P(\lambda) = \det(\lambda I - J) = \begin{vmatrix} \lambda - a_1 & -b_1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ -b_1 & \lambda - a_2 & -b_2 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & -b_2 & \lambda - a_3 & -b_3 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & -b_{n-1} & \lambda - a_n \end{vmatrix}$$

Introducem următoarele notații

$$\begin{cases} f_0(\lambda) = 1 \\ f_1(\lambda) = \lambda - a_1 \\ f_2(\lambda) = (\lambda - a_2) f_1(\lambda) - b_1^2 f_0(\lambda) \\ f_3(\lambda) = (\lambda - a_3) f_2(\lambda) - b_2^2 f_1(\lambda) \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ f_n(\lambda) = (\lambda - a_n) f_{n-1}(\lambda) - b_{n-1}^2 f_{n-2}(\lambda) \end{cases} \qquad (3)$$

Se observă imediat că $f_n(\lambda) \equiv P(\lambda)$ este polinomul caracteristic ataşat matricei A.

Teorema 3. *Dacă* $b_i \neq 0$, $i = \overline{1, n-1}$, *atunci fiecare polinom* f_k , $k = \overline{0, n}$, *are exact* k *rădăcini reale simple. Mai mult, pentru orice* $1 \le k \le n - 1$, *rădăcinile polinomului* f_k *separă rădăcinile polinomului* f_{k+1}.

Demonstrație. Polinomul f_1 admite rădăcina $\lambda_1^{(1)} = a_1$. Din (3) şi din ipoteza $b_1 \neq 0$ rezultă $f_2(\lambda_1^{(1)}) = -b_1^2 < 0$.

Pe de altă parte, deoarece $f_2(\lambda) = \lambda^2 + ...$ şi deci $\lim\limits_{\lambda \to \pm\infty} f_2(\lambda) = +\infty$, rezultă că există $\lambda_1^{(2)}$, $\lambda_2^{(2)}$ rădăcini reale ale lui f_2, astfel încât

$$\lambda_1^{(2)} < \lambda_1^{(1)} < \lambda_2^{(2)}.$$

Ținând din nou seama de (3) şi de ipoteza $b_2 \neq 0$, rezultă

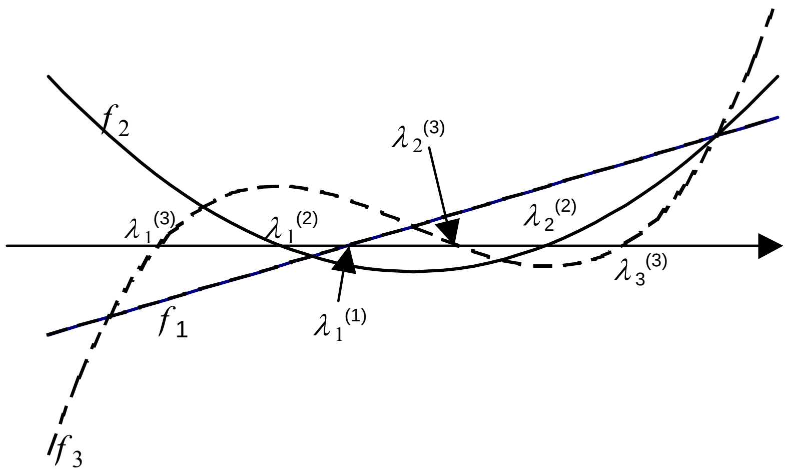
$$f_3(\lambda_1^{(2)}) = -b_2^2 f_1(\lambda_1^{(2)}) > 0 \quad \text{şi} \quad f_3(\lambda_2^{(2)}) = -b_2^2 f_1(\lambda_2^{(2)}) < 0$$

Cum $f_3(\lambda) = \lambda^3 + ...$ avem $\lim\limits_{\lambda \to -\infty} f_3(\lambda) = -\infty$ şi $\lim\limits_{\lambda \to \infty} f_3(\lambda) = +\infty$.

Aşadar, polinomul f_3 admite 3 rădăcini reale simple

$$\lambda_1^{(3)} \in (-\infty, \lambda_1^{(2)}) \ , \ \lambda_2^{(3)} \in (\lambda_1^{(2)}, \lambda_2^{(3)}) \quad \text{şi} \quad \lambda_3^{(3)} \in (\lambda_2^{(2)}, \infty).$$

Prin inducție matematică se poate arăta că f_k are k rădăcini reale simple şi separă rădăcinile polinomului f_{k+1}. ❑



Corolarul 1. *Orice matrice simetrică tridiagonală ireductibilă are* n *valori proprii reale distincte.*

Într-adevăr, conform Definiției 2, Capitolul I, §2, dacă matricea J este ireductibilă, atunci $b_i \neq 0$, $i = \overline{1, n-1}$. Afirmația rezultă acum din Teorema 3 şi din observația că $f_n(\lambda) \equiv P(\lambda)$ este polinomul caracteristic al matricei J.

Teorema 4. *Dacă J este o matrice simetrică tridiagonală ireductibilă şi*

$f_0(\lambda)=1;\ \ f_1(\lambda)=\lambda-a_1;\ f_k(\lambda)=(\lambda-a_k)f_{k-1}(\lambda)-b_{k-1}^2 f_{k-2}(\lambda),\quad k=\overline{2,n},$

atunci $f_n, f_{n-1},\dots,f_1, f_0$ *este un şir Sturm.*

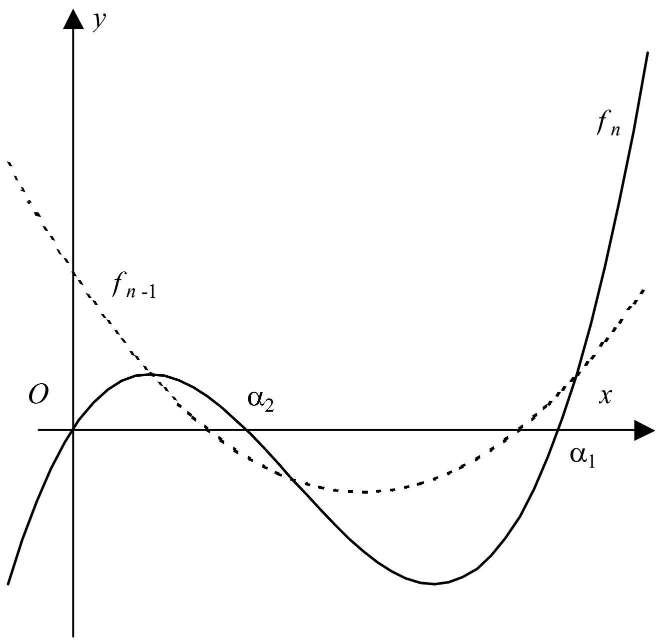
Demonstraţie. Evident $f_0(\lambda)\neq 0$, pentru orice $\lambda\in\mathbb{R}$. Fie $k\in\{1,2,\dots,n-1\}$ şi $\alpha\in\mathbb{R}$ astfel încât $f_k(\alpha)=0$. Atunci $f_{k+1}(\alpha)=-b_k^2 f_{k-1}(\alpha)$. Din Teorema 3 rezultă $f_{k+1}(\alpha)\neq 0$ şi $f_{k-1}(\alpha)\neq 0$, iar din egalitatea precedentă rezultă $f_{k+1}(\alpha)f_{k-1}(\alpha)<0$.

Fie $x=\alpha_1$ cea mai mare rădăcină a polinomului f_n. Din Teorema 3 şi din faptul că $\lim\limits_{x\to\infty} f_n(x)=\lim\limits_{x\to\infty} f_{n-1}(x)=+\infty$ rezultă $f_{n-1}(\alpha_1)>0$ şi mai departe că

$$\operatorname{sgn}\frac{f_n(\alpha_1+h)}{f_{n-1}(\alpha_1+h)}=1 \quad \text{şi} \quad \operatorname{sgn}\frac{f_n(\alpha_1-h)}{f_{n-1}(\alpha_1-h)}=-1$$

pentru $h>0$ suficient de mic. Dacă $x=\alpha_2$ este următoarea rădăcină a polinomului f_n, vom avea $f_{n-1}(\alpha_2)<0$ şi deci, pentru $h>0$ suficient de mic

$$\operatorname{sgn}\frac{f_n(\alpha_2+h)}{f_{n-1}(\alpha_2+h)}=1 \quad \text{şi} \quad \operatorname{sgn}\frac{f_n(\alpha_2-h)}{f_{n-1}(\alpha_2-h)}=-1 \quad \text{ş. a. m.d.} \ \square$$



Teorema 5. *Fie J o matrice simetrică tridiagonală ireductibilă şi fie $a \in \mathbb{R}$ oarecare. Atunci numărul valorilor proprii ale matricei J, mai mari ca a, este egal cu $S(a)$.*

Afirmația rezultă din Teorema 4, Teorema 2 şi din observația că dacă $b>\alpha_1$, unde α_1 este cea mai mare rădăcină a polinomului f_n, atunci $S(b)=0$, deoarece $f_i(b) > 0,\ i = \overline{0,n}$.

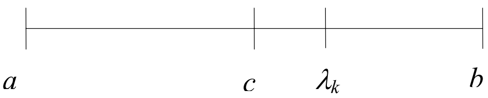
Teorema 5 ne permite să determinăm valorile proprii ale unei matrice simetrice tridiagonale ireductibilă cu metoda înjumătățirii.

Fie $a, b \in \mathbb{R}$ astfel încât

$$a < \lambda_n < \ldots < \lambda_2 < \lambda_1 < b \quad .$$

Evident $S(a) = n$ şi $S(b) = 0$. Fie c mijlocul intervalului $[a, b]$.

Dorim să localizăm valoarea proprie λ_k



Dacă $S(c) \geq k$, atunci la dreapta lui c se află k valori proprii, deci inclusiv λ_k. În acest caz notăm $a_1 = c$, $b_1 = b$. Dacă dimpotrivă $S(c) < k$, atunci $\lambda_k \in (a,c)$ şi notăm $a_1 = a$, $b_1 = c$.

Să presupunem că $\lambda_k \in (c,b)$. Fie $c_1 = \dfrac{a_1 + b_1}{2}$. Dacă $S(c_1) \geq k$, atunci notăm $a_2 = c_1$, $b_2 = b_1$, iar dacă $S(c_1) < k$, atunci $a_2 = a_1$, $b_2 = c_1$ etc.

Rezultă că $\lambda_k \in (a_p, b_p)$, unde $b_p - a_p = \dfrac{b-a}{2^p}$. Putem alege $\lambda_k \approx \dfrac{a_p + b_p}{2}$ şi eroarea care se face va fi mai mică decât $\dfrac{b-a}{2^p}$.

Exemplul 3. Fie $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$. Atunci $r_1 = 1, r_2 = 2, r_3 = 1$,

$a = \min(2-1, 2-2, 2-1) = 0$; $b = \max(2 + 1, 2 + 2, 2 + 1) = 4$.

Din Teorema Gershgorin rezultă că valorile proprii se află în intervalul $[0,4]$.

Fie $\lambda_3 < \lambda_2 < \lambda_1$ aceste valori proprii. Să presupunem că vrem să determinăm valoarea proprie λ_1. Notăm cu

$$c = \frac{a+b}{2} = 2.$$

$$f_0(\lambda) = 1\ ;\ f_1(\lambda) = \lambda-2\ ;\ f_2(\lambda) = (\lambda-2)^2 - 1\ ;\ f_3(\lambda) = (\lambda-2)^3 - 2(\lambda-2)$$

$$f_0(2) = 1\ ;\ f_1(2) = 0\ ;\ f_2(2) = -1\ ;\ f_3(2) = 0\ ;\ S(2) = 1.$$

Rezultă că în intervalul $[2,4]$ se află o singură valoare proprie, deci

$$\lambda_1 \in [2,4]. \quad \text{Fie} \quad c_1 = \frac{2+4}{2} = 3 \ ,$$

$$f_0(3) = 1; \quad f_1(3) = 1; \quad f_2(3) = 0; \quad f_3(3) = -1; \quad S(3) = 1.$$

Rezultă $\lambda_1 \in [3,4]$. Fie $c_2 = \dfrac{3+4}{2} = \dfrac{7}{2}$.

$$f_0\left(\frac{7}{2}\right) = 1 \ ; \ f_1\left(\frac{7}{2}\right) = \frac{3}{2} \ ; \ f_2\left(\frac{7}{2}\right) = \frac{5}{4} \ ; \ f_3\left(\frac{7}{2}\right) = \frac{3}{8} \ ; \ S(\frac{7}{2}) = 0 \ .$$

Aşadar, la dreapta lui $\dfrac{7}{2}$ nu se află nici o valoare proprie. Rezultă $\lambda_1 \in (3, \dfrac{7}{2})$ etc.

Exerciții

1. Folosind metoda rotațiilor a lui Jacobi să se calculeze valorile şi vectorii proprii pentru matricea $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

R. $\max\limits_{i<j} |a_{ij}| = 3 = a_{13}$, $p = 1$, $q = 3$. Rezultă că

$$\theta = \frac{a_{qq} - a_{pp}}{2a_{pq}} = \frac{a_{33} - a_{11}}{2a_{13}} = \frac{1-1}{6} = 0 \ \text{ şi } \ t = 1 \ ,$$

$$\cos\varphi = \frac{1}{\sqrt{1+t^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \ ; \ \sin\varphi = \frac{t}{\sqrt{1+t^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \quad , \ \text{iar}$$

$$U_1=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}}\\ 0 & 1 & 0\\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}.$$

$$A^{(1)}=U_1^T\cdot A\cdot U_1=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}}\\ 0 & 1 & 0\\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & 1 & 3\\ 1 & 3 & 1\\ 3 & 1 & 1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}}\\ 0 & 1 & 0\\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}-2 & 0 & 0\\ 0 & 5 & \sqrt{2}\\ 0 & \sqrt{2} & 4\end{pmatrix}$$

$\max\limits_{i<j}\left|a_{ij}^{(1)}\right|=\sqrt{2}=a_{23}^{(1)}$, $p=2$, $q=3$. Rezultă că

$$\theta=\frac{a_{qq}-a_{pp}}{2a_{pq}}=\frac{a_{33}^{(1)}-a_{22}^{(1)}}{2a_{23}^{(1)}}=\frac{4-5}{2\sqrt{2}}=-\frac{1}{2\sqrt{2}}\quad \text{şi} \quad , \quad t=\frac{1}{\theta+\operatorname{sgn}\theta\sqrt{1+\theta^2}}=-\frac{1}{2\sqrt{2}}$$

$$\cos\varphi=\frac{1}{\sqrt{1+t^2}}=\sqrt{\frac{2}{3}}\quad ; \quad \sin\varphi=\frac{t}{\sqrt{1+t^2}}=-\frac{1}{\sqrt{3}}\quad , \text{ iar}$$

$$U_2=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & \sqrt{\frac{2}{3}} & -\frac{1}{\sqrt{3}}\\ 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} & \sqrt{\frac{2}{3}}\end{pmatrix}.$$

$$A^{(2)} = U_2^T \cdot A^{(1)} \cdot U_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{\frac{2}{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ 0 & -\frac{1}{\sqrt{3}} & \sqrt{\frac{2}{3}} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & \sqrt{2} \\ 0 & \sqrt{2} & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{\frac{2}{3}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} & \sqrt{\frac{2}{3}} \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Deoarece $S(A^{(2)}) = 0$ am obținut chiar valorile proprii exacte pentru matricea A.

$$V = U_1 \cdot U_2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ 0 & \sqrt{\frac{2}{3}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}$$ reprezintă matricea de trecere de la baza în care matricea A este dată (canonică) la baza în care A are forma diagonală. Se știe de la cursul de Algebră liniară că această bază este dată de coloanele matricei de trecere . Deci vectorii proprii se obțin ca fiind coloanele matricei de trecere, astfel:

$$\lambda_1 = -2 \ , \ v_1 = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} , \ \lambda_2 = 6 \ , \ v_2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \sqrt{\frac{2}{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} \end{pmatrix} , \ \lambda_3 = 3 \ , \ v_3 = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \\ -\frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix} .$$

2. Folosind metoda Jacobi să se determine valorile proprii aproximative ale matricei $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & 3 \\ 2 & 1 & 3 & 5 \\ 4 & 3 & 1 & 4 \\ 3 & 5 & 4 & 1 \end{pmatrix}$.

R. Procedând ca în exercițiul de mai sus se obțin succesiv:

$$U_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.70711 & 0 & 0.70711 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -0.70711 & 0 & 0.70711 \end{pmatrix},$$

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & -0.70711 & 4 & 3.53553 \\ -0.70711 & -4 & -0.70711 & 0 \\ 4 & -0.70711 & 1 & 4.94975 \\ 3.53553 & 0 & 4.94975 & 6 \end{pmatrix},$$

$$U_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.85171 & 0.52401 \\ 0 & 0 & -0.52401 & 0.85171 \end{pmatrix},$$

$$A_2 = \begin{pmatrix} 1 & -0.70711 & 1.55422 & 5.10729 \\ -0.70711 & -4 & -0.60225 & -0.37053 \\ 1.55422 & -0.60225 & -2.04527 & 0 \\ 5.10729 & -0.37053 & 0 & 9.04527 \end{pmatrix},$$

$$U_3 = \begin{pmatrix} 0.89965 & 0 & 0 & 0.43661 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0.52401 \\ -0.43661 & 0 & 0 & 0.89965 \end{pmatrix},$$

$$A_3 = \begin{pmatrix} -1.4786 & -0.47438 & 1.39825 & 0 \\ -0.47438 & -4 & -0.60225 & -0.64207 \\ 1.39825 & -0.60225 & -2.04527 & 0.67858 \\ 0 & -0.64207 & 0.67858 & 11.52386 \end{pmatrix},$$

$$U_4 = \begin{pmatrix} 0.63301 & 0 & 0.77414 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -0.77414 & 0 & 0.63301 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$A_4 = \begin{pmatrix} -3.1886 & 0.16595 & 0 & -0.52532 \\ 0.16595 & -4 & -0.74847 & -0.64207 \\ 0 & -0.74847 & -3.3526 & 0.42955 \\ -0.52532 & -0.64207 & 0.42955 & 11.52386 \end{pmatrix} ,$$

şi aşa mai departe se obţine la iteraţia a noua

$$U_9 = \begin{pmatrix} 0.1458 & 0 & 0 & 0.98931 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -0.98931 & 0 & 0 & 0.1458 \end{pmatrix} ,$$

$$A_9 = \begin{pmatrix} -4.18733 & 0.01986 & -0.00427 & 0 \\ 0.01986 & -0.21355 & 0.00026 & 0.00452 \\ -0.00452 & 0.00026 & 11.58733 & 0.00062 \\ 0 & 0.00452 & 0.00062 & -3.18645 \end{pmatrix} , \qquad S(A_9)=0.02944 \quad ,$$

valorile proprii exacte fiind:

$$\lambda_1=-3.18646 \ , \lambda_2=-4.18743 \ , \lambda_3=-0.21344 \ , \ \lambda_4=11.58733 \ .$$

3. Să se determine valorile proprii aproximative ale matricei

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 4 \\ 1 & 1 & 0 & 5 \\ 1 & 0 & 1 & 4 \\ 4 & 5 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

folosind metoda Jacobi .

R. Procedând ca în exerciţiul de mai sus se obţine succesiv:

$$U_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.70711 & 0 & 0.70711 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -0.70711 & 0 & 0.70711 \end{pmatrix},$$

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & -2.12132 & 1 & 3.53553 \\ -2.12132 & -4 & -2.82843 & 0 \\ 1 & -2.82843 & 1 & 2.82843 \\ 3.53553 & 0 & 2.82843 & 6 \end{pmatrix},$$

$$U_2 = \begin{pmatrix} 0.88807 & 0 & 0 & 0.4597 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -0.4597 & 0 & 0 & 0.88807 \end{pmatrix},$$

$$A_2 = \begin{pmatrix} -0.83013 & -1.88389 & -0.41216 & 0 \\ -1.88389 & -4 & -2.82843 & -0.97517 \\ -0.41216 & -2.82843 & 1 & 2.97155 \\ 0 & -0.97517 & 2.97155 & 7.83013 \end{pmatrix},$$

$$U_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.93659 & 0.35043 \\ 0 & 0 & -0.35043 & 0.93659 \end{pmatrix},$$

$$A_3 = \begin{pmatrix} -0.83013 & -1.88389 & -0.38602 & -0.14443 \\ -1.88389 & -4 & -2.30734 & -1.90451 \\ -0.38602 & -2.30734 & -0.11183 & 0 \\ -0.14443 & -1.90451 & 0 & 8.94196 \end{pmatrix},$$

$$U_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.4217 & 0.90674 & 0 \\ 0 & -0.90674 & 0.4217 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$A_4 = \begin{pmatrix} -0.83013 & -0.44441 & -1.87097 & -0.14443 \\ -0.44441 & 0.96123 & 0 & -0.83313 \\ -1.87097 & 0 & -5.07308 & -1.72689 \\ -0.14443 & -0.83313 & -1.72689 & 8..94196 \end{pmatrix},$$

şi aşa mai departe se obține la iterația a zecea

$$U_{10} = \begin{pmatrix} 0.99999 & 0.005 & 0 & \\ -0.005 & 0.99999 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} ,$$

$$A_{10} = \begin{pmatrix} 9.22995 & -0.02005 & -0.00611 & 0.02598 \\ -0.02005 & 1.01318 & 0.00089 & 0 \\ -0.00611 & 0.00089 & -0.26839 & -0.0252 \\ 0.02598 & 0 & -0.0252 & -5.97535 \end{pmatrix} , \qquad S(A_{10})=0.05855 ,$$

valorile proprii exacte fiind:

$$\lambda_1=1.01373 \;, \lambda_2=-0.26828 \;, \lambda_3=-5.9755 \;, \; \lambda_4=9.23005 \;.$$

Să se aducă la forma tridiagonală matricele următoare folosind metoda Householder.

4. $$A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 5 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 6 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 7 \end{pmatrix}$$

R. $$s = \sqrt{\sum_{j=2}^{4} a_{1,j}^2} = 1.73205 \;, \quad \beta = \frac{1}{s(|a_{1,2}| + s)} = 0.21132 \;,$$

$$u = \begin{pmatrix} a_{2,1} + s \\ a_{3,2} \\ a_{4,2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 + 1.73205 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} ,$$

$$\widetilde{H}_1 = I_3 - \beta \cdot u \cdot u^T = \begin{pmatrix} -0.57735 & 0.57735 & -0.57735 \\ 0.57735 & 0.78867 & 0.21132 \\ -0.57735 & 0.21132 & 0.78867 \end{pmatrix} ,$$

$$H_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -0.57735 & 0.57735 & -0.57735 \\ 0 & 0.57735 & 0.78867 & 0.21132 \\ 0 & -0.57735 & 0.21132 & 0.78867 \end{pmatrix} ,$$

$$A_1 = H_1 \cdot A \cdot H_1^T = \begin{pmatrix} 4 & -0.57735 & 0 & 0 \\ -0.57735 & -5.33333 & 2.13076 & 4.79743 \\ 0 & 2.13076 & 5.95534 & 0.83333 \\ 0 & 4.79743 & 0.83333 & 5.37799 \end{pmatrix} ;$$

$$s = \sqrt{\sum_{j=3}^{4} a_{2,j}^2} = 0.52493 \quad , \quad \beta = \frac{1}{s(|a_{1,2}| + s)} = 0.02581 \quad ,$$

$$u = \begin{pmatrix} a_{3,2}^1 + s \\ a_{4,2}^1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2.13076 + 0.52493 \\ 4.79743 \end{pmatrix} \quad ,$$

$$\widetilde{H}_2 = I_2 - \beta \cdot u \cdot u^T = \begin{pmatrix} -0.40591 & -0.91391 \\ -0.91391 & 0.40591 \end{pmatrix} \quad ,$$

$$H_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -0.40591 & -0.91391 \\ 0 & 0 & -0.91391 & 0.40591 \end{pmatrix} \quad ,$$

$$A_2 = H_2 \cdot A_1 \cdot H_2^T = \begin{pmatrix} 4 & -0.57735 & 0 & 0 \\ -0.57735 & -5.33333 & -5.24933 & 0 \\ 0 & -5.24933 & 6.09139 & 0.77290 \\ 0 & 0 & 0.77290 & 5.24193 \end{pmatrix} .$$

5. $$A = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 7 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 6 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 8 \end{pmatrix}$$

R. $$s = \sqrt{\sum_{j=2}^{4} a_{1,j}^2} = 2.44948 \quad , \quad \beta = \frac{1}{s(|a_{1,2}| + s)} = 0.11835 \quad ,$$

$$u = \begin{pmatrix} a_{2,1} + s \\ a_{3,2} \\ a_{4,2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 + 1.73205 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix},$$

$$\widetilde{H}_1 = I_3 - \beta \cdot u \cdot u^T = \begin{pmatrix} -0.40824 & -0.40824 & -0.81649 \\ -0.40824 & 0.88164 & -0.23670 \\ -0.81649 & -0.23670 & 0.52659 \end{pmatrix},$$

$$H_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -0.57735 & 0.57735 & -0.57735 \\ 0 & 0.57735 & 0.78867 & 0.21132 \\ 0 & -0.57735 & 0.21132 & 0.78867 \end{pmatrix},$$

$$A_1 = H_1 \cdot A \cdot H_1^T = \begin{pmatrix} 5 & 0.81649 & 0 & 0 \\ -0.57735 & 5.83333 & -1.76598 & 4.63299 \\ 0 & -1.76598 & 6.77447 & 1.20585 \\ 0 & 4.63299 & 1.20585 & 5.72552 \end{pmatrix};$$

$$s = \sqrt{\sum_{j=3}^{4} a_{2,j}^2} = 4.95815 \quad , \quad \beta = \frac{1}{s(|a_{1,2}| + s)} = 0.02999 \; ,$$

$$u = \begin{pmatrix} a_{3,2}^1 + s \\ a_{4,2}^1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1.76598 - 4.95815 \\ 4.63299 \end{pmatrix},$$

$$\widetilde{H}_2 = I_2 - \beta \cdot u \cdot u^T = \begin{pmatrix} -0.35617 & 0.93441 \\ 0.93441 & 0.35617 \end{pmatrix},$$

$$H_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -0.35617 & 0.93441 \\ 0 & 0 & 0.93441 & 0.35617 \end{pmatrix},$$

$$A_2 = H_2 \cdot A_1 \cdot H_2^T = \begin{pmatrix} 5 & 0.81649 & 0 & 0 \\ 0.81649 & 5.83333 & 4.95815 & 0 \\ 0 & 4.95815 & 5.05593 & 0.55078 \\ 0 & 0 & 0.55078 & 7.44406 \end{pmatrix}.$$

6. Să se găsească cea mai mare valoare proprie în valoare absolută, pentru matricea

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 5 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 6 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 7 \end{pmatrix}$$

folosind polinoamele Sturm.

R. $r_1 = 2$, $r_2 = 2$, $r_3 = 2$, $r_4 = 1$, iar rădăcinile polinomului caracteristic se află în intervalul $[a, b]$, unde :

$$a = \min_{1 \le i \le 4} (a_{ii} - r_i) = \min\{ 4-2, 5-2, 6-2, 7-1 \} = 3 \quad \text{şi}$$

$$b = \max_{1 \le i \le 4} (a_{ii} + r_i) = \max\{ 4+2, 5+2, 6+2, 7+1 \} = 8 \ .$$

Polinoamele Sturm pentru această matrice sunt:

$f_0(\lambda) = 1$, $f_1(\lambda) = \lambda - a_{11} = \lambda - 4$,

$f_2(\lambda) = (\lambda - a_{22}) f_1(\lambda) - a_{12}^2 f_0(\lambda) = (\lambda - 5)(\lambda - 4) - 1$,

$f_3(\lambda) = (\lambda - a_{33}) f_2(\lambda) - a_{23}^2 f_1(\lambda) = (\lambda - 6) f_2(\lambda) - f_1(\lambda)$,

$f_4(\lambda) = (\lambda - a_{44}) f_3(\lambda) - a_{34}^2 f_2(\lambda) = (\lambda - 7) f_3(\lambda) - f_2(\lambda)$.

Schimbările de semn în şirul Sturm de mai sus :

$$f_0(a) = 1 \ , \ f_1(a) = -1 \ , \ f_2(a) = 1 \ , \ f_3(a) = -2 \ , \ f_4(a) = 7 \ ,$$

arată că la dreapta lui a se află 4 rădăcini ale ecuației caracteristice,

$$f_0(b) = 1 \ , \ f_1(b) = 4 \ , \ f_2(b) = 11 \ , \ f_3(b) = 18 \ , \ f_4(b) = 7 \ ,$$

iar la dreapta lui b nu se află nici o rădăcină a ecuației caracteristice.

Luând $c = \dfrac{a+b}{2}$, $f_0(c) = 1$, $f_1(c) = 1.5$, $f_2(c) = -0.25$, $f_3(c) = -1.375$,

$$f_4(c) = 2.3125 \ ,$$

la dreapta lui c se află 2 rădăcini ale ecuației caracteristice şi atunci $a := c;$

$$c=\frac{a+b}{2}\ ,\ f_0(c)=1,\ f_1(c)=2.75\ ,\ f_2(c)=3.8125,\ f_3(c)=0.10938,$$

$$f_4(c)=-3.83984\ ,$$

la dreapta lui c se află o rădăcină a ecuației caracteristice , $a := c$;

$$c=\frac{a+b}{2}\ ,\ f_0(c)=1,\ f_1(c)=3.375\ ,\ f_2(c)=7.01563,\ f_3(c)=6.27148,$$

$$f_4(c)=-4.66382\ ,$$

la dreapta lui c se află o rădăcină a ecuației caracteristice , $a := c$;

$$c=\frac{a+b}{2}\ ,\ f_0(c)=1,\ f_1(c)=3.6875\ ,\ f_2(c)=8.91016,\ f_3(c)=11.3439,$$

$$f_4(c)=-1.10814\ ,$$

la dreapta lui c se află o rădăcină a ecuației caracteristice , $a := c$;

$$c=\frac{a+b}{2}\ ,\ f_0(c)=1,\ f_1(c)=3.84375\ ,\ f_2(c)=9.93066,\ f_3(c)=14.46591,$$

$$f_4(c)=2.27495,$$

la dreapta lui c nu se află nici o rădăcină a ecuației caracteristice , $b := c$;

$$c=\frac{a+b}{2}\ ,\ f_0(c)=1,\ f_1(c)=3.76563\ ,\ f_2(c)=9.41431,\ f_3(c)=12.85651,$$

$$f_4(c)=0.42896,$$

la dreapta lui c nu se află nici o rădăcină a ecuației caracteristice, ş. a. m. d.
La iterația a 16–a se obține aproximația $c = 7.74529$, iar $P(c) = 0.00023$, $P(\lambda)$ fiind polinomul caracteristic.

7. Să se găsească cea de–a doua valoare proprie pentru matricea

($|\lambda_1|>|\lambda_2|>|\lambda_3|>|\lambda_4|$)

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 6 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 6 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 8 \end{pmatrix}$$

folosind polinoamele Sturm.

R. $r_1 = 2$, $r_2 = 3$, $r_3 = 3$, $r_4 = 2$, iar rădăcinile polinomului caracteristic se află în intervalul $[a, b]$, unde :

$$a = \min_{1\le i\le 4}\left(a_{ii} - r_i\right) = \min\{\ 5–2,\ 6–3,\ 6–3,\ 8–2\ \} = 3 \quad \text{şi}$$

$$b = \max_{1\le i\le 4}\left(a_{ii} + r_i\right) = \max\{\ 5+2,\ 6+3,\ 6+3,\ 8+2\ \} = 10\ .$$

Polinoamele Sturm pentru această matrice sunt:

$$f_0(\lambda) = 1\ ,\ \ f_1(\lambda) = \lambda - a_{11} = \lambda - 5\ ,$$

$$f_2(\lambda) = (\lambda - a_{22})\, f_1(\lambda) - a_{12}^2 f_0(\lambda) = (\lambda - 6)\ (\lambda - 5) - 4\ ,$$

$$f_3(\lambda) = (\lambda - a_{33})\, f_2(\lambda) - a_{23}^2 f_1(\lambda) = (\lambda - 6) f_2(\lambda) - f_1(\lambda)\ ,$$

$$f_4(\lambda) = (\lambda - a_{44})\, f_3(\lambda) - a_{34}^2 f_2(\lambda) = (\lambda - 8) f_3(\lambda) - 4 f_2(\lambda)\ .$$

Schimbările de semn în şirul Sturm de mai sus :

$$f_0(a) = 1\ ,\ \ f_1(a) = -2\ ,\ f_2(a) = 2\ ,\ f_3(a) = -4\ ,\ f_4(a) = 12\ ,$$

arată că la dreapta lui a se află 4 rădăcini ale ecuației caracteristice,

$$f_0(b) = 1\ ,\ \ f_1(b) = 5\ ,\ f_2(b) = 16\ ,\ f_3(b) = 59\ ,\ f_4(b) = 54\ ,$$

iar la dreapta lui b nu se află nici o rădăcină a ecuației caracteristice.
Luând

$$c = \frac{a+b}{2}\ ,\ f_0(c) = 1,\ f_1(c) = 1.5\ ,\ f_2(c) = -3.25,\ f_3(c) = 17.6875,$$

$$f_4(c) = 2.3125\ ,$$

la dreapta lui c se află 2 rădăcini ale ecuației caracteristice şi atunci $a := c;$

$$c = \frac{a+b}{2}\ ,\ f_0(c) = 1,\ f_1(c) = 3.25\ ,\ f_2(c) = 3.3125,\ f_3(c) = 4.20312,$$

$$f_4(c) = -12.19921\ ,$$

la dreapta lui c se află o rădăcină a ecuației caracteristice , $b := c\ ;$

$$c = \frac{a+b}{2}\ ,\ f_0(c) = 1,\ f_1(c) = 2.375\ ,\ f_2(c) = -0.73437,\ f_3(c) = -3.38476,$$

$$f_4(c) = 5.05297\ ,$$

la dreapta lui c se află o rădăcină a ecuației caracteristice , $a := c\ ;$

$$c = \frac{a+b}{2}\ ,\ f_0(c) = 1,\ f_1(c) = 2.8125\ ,\ f_2(c) = 1.09765,\ f_3(c) = -\ 0.82299,$$

$$f_4(c) = -\ 4.23631,$$

la dreapta lui c se află o rădăcină a ecuației caracteristice , $b := c\ ;$

$$c = \frac{a+b}{2}\ ,\ f_0(c) = 1,\ f_1(c) = 2.59375\ ,\ f_2(c) = 0.13378\ ,\ f_3(c) = -\ 2.38052,$$

$$f_4(c) = 0.43193,$$

la dreapta lui c se află două rădăcini ale ecuației caracteristice , $a := c\ ;$

$$c = \frac{a+b}{2}\ ,\ f_0(c) = 1,\ f_1(c) = 2.70312\ ,\ f_2(c) = 0.60375\ ,\ f_3(c) = -\ 1.67484,$$

$$f_4(c) = -1.91781,$$

la dreapta lui c se află o rădăcină a ecuației caracteristice, ş. a. m. d.
La iterația a 20–a se obține aproximația $c = 7.61384$, iar $P(c) = 0.00001$, $P(\lambda)$ fiind polinomul caracteristic.