INEGALITATEA CAUCHY-BUNIAKOWSKI-SCHWARZ
ÎN REZOLVAREA PROBLEMELOR DE MINIM GEOMETRIC

BÂRSAN DOINA-LIVIA

Inegalitatea Cauchy-Buniakowski-Schwarz este una dintre inegalitățile remarcabile, ea fiind utilizată deseori în demonstrarea altor inegalități. În lucrarea de față sunt prezentate demonstrația sa, precum si aspecte interesante privind aplicarea ei in rezolvarea câtorva probleme de minim geometric, atât în plan, cât şi în spațiu.

1. Inegalitatea Cauchy-Buniakowski-Schwarz

Oricare ar fi numerele reale $a_1, a_2, ..., a_n, b_1, b_2, ..., b_n$ *avem:*

$$(a_1b_1 + a_2b_2 + ... + a_nb_n)^2 \le (a_1^2 + a_2^2 + ... + a_n^2)(b_1^2 + b_2^2 + ... + b_n^2)$$

Demonstrație:

Demonstrăm mai întâi inegalitatea pentru n=2

În egalitatea $(a_1^2 + a_2^2)(b_1^2 + b_2^2) = a_1^2b_1^2 + a_1^2b_2^2 + a_2^2b_1^2 + a_2^2b_2^2$ folosim inegalitatea evidentă $(a_1b_2)^2 + (a_2b_1)^2 \ge 2a_1b_1a_2b_2$ şi obținem că

$$(a_1^2 + a_2^2)(b_1^2 + b_2^2) \ge a_1^2b_1^2 + 2a_1b_1a_2b_2 + a_2^2b_2^2 = (a_1b_1 + a_2b_2)^2$$

Demonstrăm inegalitatea pentru n cu ajutorul inducției matematice.

Considerăm adevărată inegalitatea pentru k numere

$$(a_1^2 + a_2^2 + ... + a_k^2)(b_1^2 + b_2^2 + ... + b_k^2) \ge (a_1b_1 + a_2b_2 + ... + a_kb_k)^2 \qquad (1)$$

Notând $\begin{cases} x = a_1^2 + a_2^2 + ... + a_k^2 \\ y = b_1^2 + b_2^2 + ... + b_k^2 \\ z = a_1b_1 + a_2b_2 + ... + a_kb_k \end{cases}$ (2)

Din relațiile (1) şi (2) obținem $x \cdot y \ge z^2$ (3)

Pentru k+1 numere, folosind notațiile (2) , putem scrie

$$(x + a_{k+1}^2)(y + b_{k+1}^2) = xy + x \cdot b_{k+1}^2 + y \cdot a_{k+1}^2 + a_{k+1}^2b_{k+1}^2$$

Din inegalitatea mediilor $m_p \ge m_g$ pentru $\sqrt{x}b_{k+1}$ *şi* $\sqrt{y}a_{k+1}$ avem

$$xb_{k+1}^2 + y \cdot a_{k+1}^2 \ge 2\sqrt{xy} \cdot a_{k+1}b_{k+1} \quad (4)$$

Din (3) şi (4) obținem că

$(x + a_{k+1}^2)(y + b_{k+1}^2) \ge z^2 + 2z \cdot a_{k+1}b_{k+1} + a_{k+1}^2b_{k+1}^2 = (z + a_{k+1}b_{k+1})^2$ de unde,

utilizând (2), rezultă $(a_1^2 + a_2^2 + ... + a_{k+1}^2)(b_1^2 + b_2^2 + ... + b_{k+1}^2) \ge (a_1b_1 + a_2b_2 + ... + a_{k+1}b_{k+1})^2$

Deci, $(a_1^2 + a_2^2 + ... + a_n^2)(b_1^2 + b_2^2 + ... + b_n^2) \ge (a_1b_1 + a_2b_2 + ... + a_nb_n)^2$

pentru orice număr natural n.

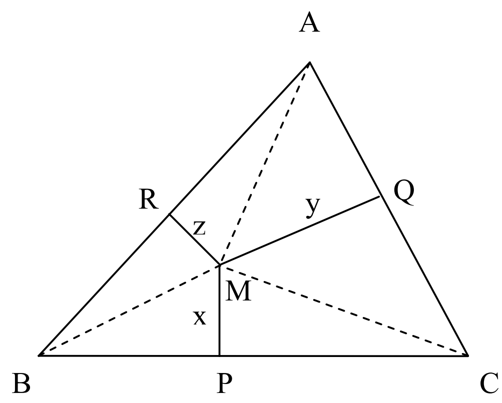
Egalitatea are loc dacă $\dfrac{a_1}{b_1} = \dfrac{a_2}{b_2} = ... = \dfrac{a_n}{b_n}$

2. Aplicații

2.1. In plan

Problema 2.1.1. În interiorul unui triunghi oarecare ABC se consideră un punct M care se proiectează pe dreptele BC, CA, AB respectiv în P, Q, R. Să se precizeze poziția punctului M pentru care suma

$$\frac{BC}{MP}+\frac{CA}{MQ}+\frac{AB}{MR} \quad \textit{este minimă}$$



Rezolvare:

$BC=a, AC=b, AB=c$

Notând $a+b+c=2p \quad (1)$

$MP=x, PQ=y, MR=z$

obținem $\dfrac{BC}{MP}+\dfrac{CA}{MQ}+\dfrac{AB}{MR}=\dfrac{a}{x}+\dfrac{b}{y}+\dfrac{c}{z}$

Din

$$S=S_{\Delta ABC}=S_{\Delta BMC}+S_{\Delta CMA}+S_{\Delta AMB}=$$
$$=\frac{ax}{2}+\frac{by}{2}+\frac{cz}{2}\Rightarrow ax+by+cz=2S \quad (2)$$

Folosim inegalitatea *Cauchy-Buniakowski-Schwarz* pentru $\sqrt{ax},\sqrt{by},\sqrt{cz}$ *și* $\sqrt{\dfrac{a}{x}},\sqrt{\dfrac{b}{y}},\sqrt{\dfrac{c}{z}}$ și avem

$$\left(\sqrt{ax}\cdot\sqrt{\frac{a}{x}}+\sqrt{by}\cdot\sqrt{\frac{b}{y}}+\sqrt{cz}\cdot\sqrt{\frac{c}{z}}\right)^2\le(ax+by+cz)\left(\frac{a}{x}+\frac{b}{y}+\frac{c}{z}\right)$$ de unde obținem inegalitatea

$$\frac{a}{x}+\frac{b}{y}+\frac{c}{z}\ge\frac{(a+b+c)^2}{ax+by+cz}\overset{(1)+(2)}{\Rightarrow}\frac{a}{x}+\frac{b}{y}+\frac{c}{z}\ge\frac{4p^2}{2S}$$

Având în vedere că $S=p\cdot r \Rightarrow \dfrac{a}{x}+\dfrac{b}{y}+\dfrac{c}{z}\ge\dfrac{2p}{r}$

Prin urmare, $min\left(\dfrac{a}{x}+\dfrac{b}{y}+\dfrac{c}{z}\right)=\dfrac{2p}{r}$ *când* $\dfrac{\sqrt{ax}}{\sqrt{\frac{a}{x}}}=\dfrac{\sqrt{by}}{\sqrt{\frac{b}{y}}}=\dfrac{\sqrt{cz}}{\sqrt{\frac{c}{z}}}$, *adică* $x=y=z=r$ deoarece dacă

înlocuim $x=y=z$ *în* $(2)\Rightarrow\dfrac{(a+b+c)\cdot x}{2}=S\Rightarrow p\cdot x=S\Rightarrow x=\dfrac{S}{p}=r$

Concluzie: M este centrul cercului înscris în triunghiul ABC

Problema 2.1.2. Se consideră triunghiul ascuțitunghic *ABC*. Să se determine poziția punctului $M\in Int(ABC)$ pentru care suma $BP^2+CQ^2+AR^2$ *este minimă*, unde *P, Q, R* sunt proiecțiile lui *M* respectiv pe *BC, AC, AB.*

Rezolvare:

Notând *BC=a, AC=b, AB=c*

$BP=x, CQ=y, AR=z\Rightarrow BP^2+CQ^2+AR^2=x^2+y^2+z^2$

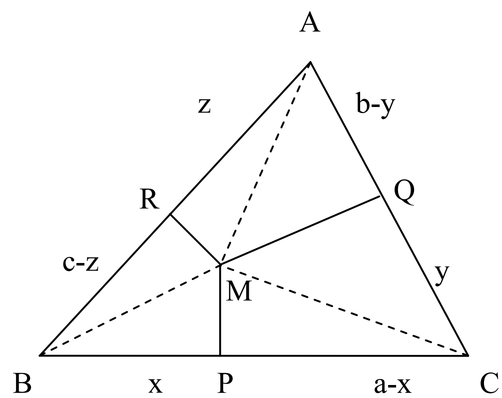
Avem succesiv următoarele egalități

$BM^2-BP^2=CM^2-CP^2$

$CM^2-CQ^2=AM^2-AQ^2$

$AM^2-AR^2=BM^2-BR^2$

și prin adunarea lor obținem



$BP^2 + CQ^2 + AR^2 = CP^2 + AQ^2 + BR^2$, ceea ce înseamnă
$x^2 + y^2 + z^2 = (a-x)^2 + (b-y)^2 + (c-z)^2$, de unde

$$ax + by + cz = \frac{a^2 + b^2 + c^2}{2} \quad (1)$$

Căutăm $\min(x^2 + y^2 + z^2)$ cu inegalitatea *Cauchy-Buniakowski-Schwarz* pentru *a, b, c și x, y, z.*

$$(a^2 + b^2 + c^2)(x^2 + y^2 + z^2) \geq (ax + by + cz)^2 \overset{(1)}{=} \frac{(a^2 + b^2 + c^2)^2}{4} \Rightarrow x^2 + y^2 + z^2 \geq \frac{a^2 + b^2 + c^2}{4}$$

Prin urmare, $min(x^2 + y^2 + z^2) = \dfrac{a^2 + b^2 + c^2}{4}$ *când* $\dfrac{a}{x} = \dfrac{b}{y} = \dfrac{c}{z} = k$

Înlocuind $x = \dfrac{a}{k}, y = \dfrac{b}{k}, z = \dfrac{c}{k}$ *în* (1) $\Rightarrow a \cdot \dfrac{a}{k} + b \cdot \dfrac{b}{k} + c \cdot \dfrac{c}{k} = \dfrac{a^2 + b^2 + c^2}{2} \Rightarrow k = 2 \Rightarrow \begin{cases} x = \dfrac{a}{2} \\ y = \dfrac{b}{2} \\ z = \dfrac{c}{2} \end{cases}$

ceea ce înseamnă că *P, Q, R* sunt mijloacele laturilor triunghiului *ABC* iar *MP, MQ, MR* sunt mediatoare în triunghiul *ABC.*

Concluzie: M este centrul cercului circumscris triunghiului ABC

2.2. In spatiu

Problema 2.2.1.. Fie *[ABCD]* un tetraedru și *M* un punct interior tetraedrului, ale cărui distanțe la fețele tetraedrului sunt *x, y, z, w.* Determinați poziția punctului *M* pentru care $x^2 + y^2 + z^2 + w^2$ *este minimă* și evaluați acest *minim.*

Rezolvare:

Notăm *a, b, c, d* ariile fețelor opuse vârfurilor *A, B, C, D*

și *x, y, z, w* distanțele de la *M* la fețele opuse vârfurilor *A, B, C, D.*

Din $V = \dfrac{xa}{3} + \dfrac{yb}{3} + \dfrac{zc}{3} + \dfrac{wd}{3} \Rightarrow xa + yb + zc + wd = 3V \quad (1)$

Aplicăm inegalitatea *Cauchy-Buniakowski-Schwarz* pentru

x, y, z, w *și* a, b, c, d și obținem

$$(xa + yb + zc + wd)^2 \leq (x^2 + y^2 + z^2 + w^2)(a^2 + b^2 + c^2 + d^2) \quad (2)$$

egalitatea având loc pentru $\dfrac{x}{a} = \dfrac{y}{b} = \dfrac{z}{c} = \dfrac{w}{d} = k$, de unde $x = ak, y = bk, z = ck, w = dk \quad (3)$

Înlocuim (3) în (1) și obținem $ka^2 + kb^2 + kc^2 + kd^2 = 3V$, deci $k = \dfrac{3V}{a^2 + b^2 + c^2 + d^2}$ și

$$x = \frac{3aV}{a^2 + b^2 + c^2 + d^2}, y = \frac{3bV}{a^2 + b^2 + c^2 + d^2}, z = \frac{3cV}{a^2 + b^2 + c^2 + d^2}, w = \frac{3dV}{a^2 + b^2 + c^2 + d^2}$$

Din (1) și (2) rezultă că

$$9V^2 \leq (x^2 + y^2 + z^2 + w^2)(a^2 + b^2 + c^2 + d^2) \Leftrightarrow x^2 + y^2 + z^2 + w^2 \geq \frac{9V^2}{a^2 + b^2 + c^2 + d^2}$$

Concluzie: $min(x^2 + y^2 + z^2 + w^2) = \dfrac{9V^2}{a^2 + b^2 + c^2 + d^2}$ pentru *x, y, z, w* calculate mai sus.

Problema 2.2.2.. Fie tetraedrul *[ABCD]* în care notăm $\sigma_a, \sigma_b, \sigma_c, \sigma_d$ ariile fețelor opuse vârfurilor *A, B*, *C* şi respectiv *D*. Dacă *a, b, c, d* sunt distanțele unui punct interior tetraedrului la fețele *[BCD], [ACD*], *[ABD]* şi respectiv *[ABC]*, determinați poziția punctului pentru care suma $\frac{\sigma_a}{a}+\frac{\sigma_b}{b}+\frac{\sigma_c}{c}+\frac{\sigma_d}{d}$ *este minimă* şi evaluați acest *minim.*

Rezolvare:

Notăm $\sigma_a+\sigma_b+\sigma_c+\sigma_d=\sigma$ (1)

Din $V=\frac{a\sigma_a}{3}+\frac{b\sigma_b}{3}+\frac{c\sigma_c}{3}+\frac{d\sigma_d}{3}\Rightarrow a\sigma_a+b\sigma_b+c\sigma_c+d\sigma_d=3V$ (2)

Aplicăm inegalitatea *Cauchy-Buniakowski-Schwarz* pentru

$$\sqrt{a\sigma_a},\sqrt{b\sigma_b},\sqrt{c\sigma_c},\sqrt{d\sigma_d} \text{ și } \sqrt{\frac{\sigma_a}{a}},\sqrt{\frac{\sigma_b}{b}},\sqrt{\frac{\sigma_c}{c}},\sqrt{\frac{\sigma_d}{d}}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\left(\sqrt{a\sigma_a}\cdot\sqrt{\frac{\sigma_a}{a}}+\sqrt{b\sigma_b}\cdot\sqrt{\frac{\sigma_b}{b}}+\sqrt{c\sigma_c}\cdot\sqrt{\frac{\sigma_c}{c}}+\sqrt{d\sigma_d}\cdot\sqrt{\frac{\sigma_d}{d}}\right)^2\le$$

$$\le\left(a\sigma_a+b\sigma_b+c\sigma_c+d\sigma_d\right)\left(\frac{\sigma_a}{a}+\frac{\sigma_b}{b}+\frac{\sigma_c}{c}+\frac{\sigma_d}{d}\right)\overset{(2)}{\Rightarrow}$$

$$\overset{(2)}{\Rightarrow}(\sigma_a+\sigma_b+\sigma_c+\sigma_d)^2\le 3V\left(\frac{\sigma_a}{a}+\frac{\sigma_b}{b}+\frac{\sigma_c}{c}+\frac{\sigma_d}{d}\right)\overset{(1)}{\Rightarrow}$$

$$\overset{(1)}{\Rightarrow}\left(\frac{\sigma_a}{a}+\frac{\sigma_b}{b}+\frac{\sigma_c}{c}+\frac{\sigma_d}{d}\right)\ge\frac{\sigma^2}{3V}\qquad(3)$$

egalitatea având loc pentru $\frac{\sqrt{a\sigma_a}}{\sqrt{\frac{\sigma_a}{a}}}=\frac{\sqrt{b\sigma_b}}{\sqrt{\frac{\sigma_b}{b}}}=\frac{\sqrt{c\sigma_c}}{\sqrt{\frac{\sigma_c}{c}}}=\frac{\sqrt{d\sigma_d}}{\sqrt{\frac{\sigma_d}{d}}}$ *deci pentru* $a=b=c=d$,

ceea ce înseamnă că *M este egal depărtat de fețele tetraedrului*, *deci M este centrul sferei înscrisă în tetraedru.*

Din (2), pentru $a = b = c = r$ obținem

$$r(\sigma_a+\sigma_b+\sigma_c+\sigma_d)=3V\overset{(1)}{\Rightarrow}r\cdot\sigma=3V\overset{(3)}{\Rightarrow}min\left(\frac{\sigma_a}{a}+\frac{\sigma_b}{b}+\frac{\sigma_c}{c}+\frac{\sigma_d}{d}\right)=\frac{\sigma^2}{3V}=\frac{\sigma^2}{r\sigma}=\frac{\sigma}{r}.$$

BIBLIOGRAFIE

- Buşneag, D., Leonte, A., Vladimirescu, I. – Culegere de probleme pentru admiterea in învățământul superior şi perfecționarea profesorilor de matematică din învățământul preuniversitar, Editura Sitech, Craiova, 1993
- Nicolescu, L., Bumbăcea, A., Niculescu, Gh., Catană, A., Oprea, N., Horja, P., Zara, C. – Metode de rezolvare a problemelor de geometrie, Editura Universității din Bucureşti, 2005
- Panaitopol, L., Bandilă, V., Lascu, M. – Inegalități, Editura GIL, 2004.
- Vîrtopeanu, I., Leonte, A.- Geometrie în spațiu pentru gimnaziu si liceu. Tipuri de probleme, metode şi tehnici de rezolvare, Editura Sibila, Craiova, 1994