CAPITOLUL III

DINAMICA

Dinamica punctului material liber

Principiile dinamicii

Experimental s-a demonstrat cã un corp aflat în repaus fatã de Pãmânt rãmâne tot în repaus atâta timp cât asupra sa nu actioneazã alte corpuri care sã-i modifice aceastã stare.

Aceastã proprietate a corpului de a-si mentine starea de repaus sau de miscare rectilinie uniformã , fãrã actiunea fortelor exterioare poartã denumirea de **inertie**.

Corpurile ***inerte*** sunt corpurile care nu-si pot modifica de la sine starea lor de repaus sau de miscare rectilinie uniformã. În *virtutea inertiei* corpurile se miscã rectiliniu uniform fãrã actiuni exterioare , iar *datoritã inertiei* corpurile tind sã-si mentinã aceastã stare de miscare reactionând la actiunile exterioare.

Cu aceste considerente asupra corpurilor aflate în repaus sau în miscare rectilinie uniformã se poate formula ***principiul inertiei*** sau **legea I a dinamicii**.

Un punct material (corp) îsi pãstreazã starea de repaus sau de miscare rectilinie uniformã atâta timp cât asupra sa nu actioneazã alte corpuri care sã-I modifice aceastã stare.

Pentru legea a II-a a dinamicii se pleacã de la urmãtorul experiment:

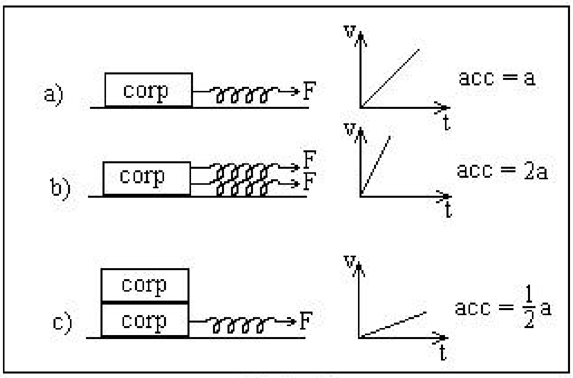


Fig.III.1

Observatii

a) Viteza variazã liniar cu timpul. Acceleratia este proportionalã cu forta F si este constantã

b) Viteza creste mai repede . Acceleratia se dubleazã dar si forta se multiplicã, astfel cã în final acceleratia **a** este proportionalã cu forta totalã. Spunem cã F = ka.

c) Viteza scade cu timpul .aceeasi fortã F care actioneazã asupra suprafetei a douã corpuri dã nastere la o acceleratie **a/2**.

Din experientele de mai sus rezultã cã $F = ma = m\frac{dv}{dt}$ sau vectorial $\vec{F} = m\vec{a} = m\frac{d\vec{v}}{dt}$, unde m este un parametru pozitiv, caracteristic punctului material denumit ***masã inertã*** sau ***inertialã.***

Legea a II - a a dinamicii este datã de relatia $\vec{F} = m\vec{a}$ (III.1), adicã : **acceleratia care imprimã corpului miscarea este direct proportionalã cu forta aplicatã când masa este constantã.**

Expresia $\vec{F} = m\bar{a}$ reprezintã o definitie dinamicã a fortei si manifestã caracterul activ al masei.

Greutatea si masa

Greutatea unui corp reprezintã forta cu care corpul este atras de Pãmânt.

Dinamic , greutatea se manifestã prin cãderea corpului lãsat liber.

Static, greutatea se manifestã prin forta cu care corpul apasã pe un plan orizontal. Experimental s-a constatat cã în vid , unde nu actioneazã forta de greutate , toate corpurile cad cu aceeasi acceleratie **g** independentã de masa , natura, dimensiunile sau forma corpurilor.

Analog cu legea a II - a , $\vec{F} = m\bar{a}$, pentru greutate $\vec{G} = m\vec{g}$.

Deosebirea dintre greutatea si masa unui corp

Greutatea este o fortã de atractie exercitatã de Pãmânt ; variazã cu altitudinea, latitudinea, fiind dependentã de câmpul gravitational. Ea se mãsoarã cu dinamometrul si este o mãrime vectorialã.

Masa este o mãrime scalarã, o caracteristicã internã a corpului,independentã de altitudine si latitudine. Masa se mãsoarã cu balanta. Alãturi de inertie , o altã proprietate a masei este aceea cã poate atrage alte corpuri sau sã fie atrasã de alte corpuri. Aceastã proprietate conferã masei calitatea de masã grea, *gravificã* (gravitationalã) si reprezintã o mãsurã a interactiunii corpului cu câmpul gravitational.

Deci masa, mãrime unicã prezintã douã proprietãti: inertia si gravitatia, adicã masa inertã este egalã cu masa gravificã. Adicã *static* ,se manifestã masa gravificã iar *dinamic* masa inertã. Ambele mase se mãsoarã cu balanta.

Legea a III - a . ***Principiul actiunii si reactiunii***

Experimental, s-a constat cã actiunea unui corp asupra altuia dã nastere simultan la o reactiune a celui din urmã asupra primului.

Enunt:

actiunile reciproce dintre douã corpuri sunt totdeauna egale în modul si dirijate în sensuri contrare.

Legea a IV - a . ***Principiul independentei actiunii fortei***

Sã considerãm douã forte $\vec{F}_1$ si $\vec{F}_2$ care actioneazã simultan asupra aceluiasi punct A de masã **m**. Aceste forte produc acceleratiile a_1 si a_2 dupã relatiile $\vec{F}_1 = m\vec{a}_1$ si $\vec{F}_2 = m\vec{a}_2$. Putem scrie $\vec{a} = \vec{a}_1 + \vec{a}_2$ cu $\vec{a}$ acceleratia rezultantã. Se multiplicã ambii membrii ai ecuatiei cu numãrul **m** si rezultã : $m\vec{a} = m\vec{a}_1 + m\vec{a}_2$ care reprezintã $\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2$, adicã asupra punctului material actioneazã forta rezultantã $\vec{F}$ care rezultã din însumarea geometricã a vectorilor $\vec{F}_1$ si $\vec{F}_2$ si care produc separat efectele lor, independent de existenta celeilalte forte.

Teoreme generale ale punctului material

Teorema impulsului

Din legea a II - a a dinamicii (III.1) $\vec{F} = m\vec{a} = \frac{d}{dt}(m\vec{v}) = \frac{d\vec{p}}{dt}$ (III.2), unde $\vec{p} = m\vec{v}$ reprezintã impulsul .Relatia aratã cã forta aplicatã punctului material este egalã cu derivata impulsului punctului material în raport cu timpul. Se mai poate scrie $\vec{F}dt = d\vec{p}$ sau prin integrare rezultã :

$$\vec{p} = \int_{t_1}^{t_2} \vec{F}dt = \int_{p_1}^{p_2} d\vec{p} = \vec{p}_2 - \vec{p}_1 = \Delta\vec{p} = m_2\vec{v}_2 - m_1\vec{v}_1$$

unde $\vec{p}$ reprezintã impulsul fortei $\vec{F}$. Cum în mecanica clasicã masa rãmâne constantã rezultã $m_1 = m_2 = m$ rezultã ***teorema impulsului*** de forma:

$$\vec{p} = \int_{t_1}^{t_2} \vec{F}dt = m\vec{v}_2 - m\vec{v}_1 \quad \text{(III.3)}$$

adicã ***impulsul fortei rezultante aplicate punctului material este egal cu variatia impulsului punctului material***.

Caz particular:

Dacã F = 0 rezultã $m_2\vec{v}_2 = m_1\vec{v}_1$, adicã impulsul punctului material se conservã. Deci teorema impulsului exprimã o lege de conservare a miscãrii materiei. Existenta impulsului si a legii fizice de conservare a impulsului este legatã de proprietatea de *omogenitate* a spatiului (simetria la translatie).

Teorema momentului cinetic

Momentul cinetic în raport cu punctul O al unui punct material care se deplaseazã cu viteza $\vec{v}$ (deci cu impulsul $m\vec{v}$) este definit prin produsul vectorial (Fig.III2):

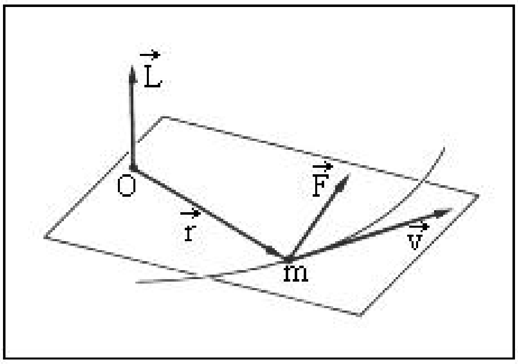


Fig.III.2

$$\vec{L} = \vec{r} \times m\vec{v} = \vec{r} \times \vec{p} \quad \textbf{(III.4)}$$

Deci momentul cinetic este un vector perpendicular pe planul format de cãtre $\vec{r}$ si $\vec{v}$. Momentul cinetic variazã în mãrime si directie la deplasarea punctului material. Analitic :

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x & y & z \\ p_x & p_y & p_z \end{vmatrix} = \vec{i}\left(yp_z - zp_y\right) + \vec{j}\left(zp_x - xp_z\right) + \vec{k}\left(xp_y - yp_x\right)$$

$$L_x = yp_z - zp_y \quad ; \quad L_y = zp_x - xp_z \quad ; \quad L_z = xp_y - yp_x$$

Prin derivarea momentului cinetic rezultã :

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\vec{r} \times \vec{p}\right) = \frac{d\vec{r}}{dt} \times \vec{p} + \vec{r} \times \frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{r} \times \frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{r} \times \vec{F} = \vec{M} \quad \text{(III.5) unde}$$

$$\frac{d\vec{r}}{dt} \times \vec{p} = \vec{v} \times \vec{p} = \vec{v} \times m\vec{v} = 0 \ \text{ deoarece } \vec{v} \parallel m\vec{v}.$$

Deci derivata momentului cinetic în raport cu timpul , a unui punct material, este egalã cu momentul fortei care i se aplicã. Fãcând analogie cu teorema impulsului, rezultã :

$$\vec{p} = \int_{t_1}^{t_2} \vec{F}dt \quad \text{iar cum } \vec{M} = \vec{r} \times \vec{F} \text{ se multiplicã cu dt si rezultã :}$$

$$\int_{t_1}^{t_2} \vec{M}\, dt = \int_{t_1}^{t_2} \vec{r} \times \vec{F} dt = \vec{r} \times \vec{p} = \Delta\vec{L} = \vec{L}_2 - \vec{L}_1 \quad \text{(III.6)}$$

Deci <u>teorema momentului cinetic</u> este : ***impulsul momentului fortei aplicate punctului material este egalã cu variatia momentului cinetic al punctului material***.

Teorema momentului cinetic exprimã o lege de conservare a miscãrii mecanice transmise de la un corp la altul prin intermediul fortei în procesul interactiunii. Existenta momentului cinetic si a legii fizice de conservare a momentului este legatã de proprietatea de *izotropie* a spatiului (simetria la rotatii).

Forte centrale

În paragraful precedent am gãsit relatia $\vec{M} = \frac{d\vec{L}}{dt}$. Sã analizãm aceastã relatie.

Dacã momentul fortei aplicat punctului material este nul ($\vec{M}$ =0) , atunci $\frac{d\vec{L}}{dt} = 0$ si $\vec{L} = ct.$, adicã momentul cinetic este un vector constant. Cum $\vec{M} = 0$ si $\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}$ putem spune cã $\vec{F} = 0$, adicã punctul material nu este supus la nicio actiune exterioarã si deci este un punct material liber. Dar $\vec{M} = 0$ implicã faptul cã $\vec{r} \parallel \vec{F}$, adicã directia vectorului fortã $\vec{F}$ trece prin punctul O al punctului material.(Fig.III.3)

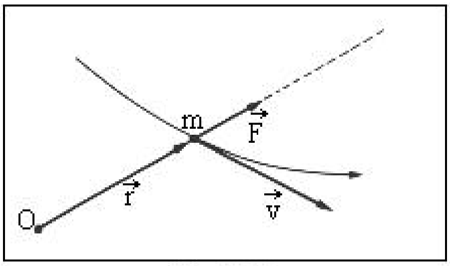


Fig.III.3

O fortã a cãrei directie trece totdeauna printr-un punct fix este denumitã ***fortã centralã.***

Deci ,când un punct material se deplaseazã sub actiunea unei forte centrale, momentul sãu cinetic rãmâne constant.

<u>Exemplu</u>.Pãmântul se roteste în jurul Soarelui sub influenta unei forte centrale a cãrei directie este mereu îndreptatã spre centrul Soarelui. Momentul cinetic al Pãmântului în raport cu Soarele este constant.

Deoarece $\vec{L} = ct$, miscarea produsã de cãtre o fortã centralã este mereu într-un plan.
În miscarea circularã existã relatia:

$L = mrv = mr^2\omega = mr^2 \frac{d\theta}{dt}$ **(III.7)** Dar cum pentru fortele centrale L = ct. rezultã $r^2 \frac{d\theta}{dt} = ct$.

Când punctul material se deplaseazã din P în P' raza vectoare $\vec{r}$ baleiazã aria hasuratã, care corespunde unui triunghi OP'P. În consecintã dA=aria triunghiului OP'P=$\frac{1}{2}r^2d\theta$ iar aria mãturatã în unitatea de timp este:

$$\frac{dA}{dt} = \frac{1}{2}r^2\frac{d\theta}{dt} = ct. \Rightarrow \frac{dA}{dt} = ct.$$ **(III.8)** care ne aratã cã în miscarea sub actiunea fortelor centrale, raza vectoare a punctului material mãturã arii egale în intervale de timp egale.

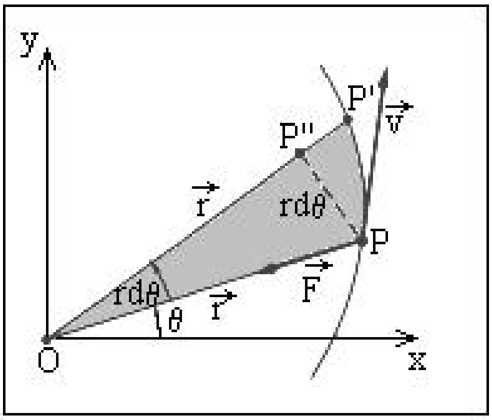


Fig.III.4

Acest rezultat a dus la descoperirea legilor de miscare a planetelor, cunoscutã sub denumirea de **legea a II-a a lui Képler**.

Lucru mecanic

Considerãm un punct material A care se deplaseazã în lungul unei curbe C sub actiunea unei forte $\vec{F}$ (Fig.III.5) . Într-un timp scurt dt, punctul material se va deplasa din A în A' unde AA' = $d\vec{r}$. Lucru mecanic efectuat de forta $\vec{F}$ în timpul acestei deplasãri este produsul scalar

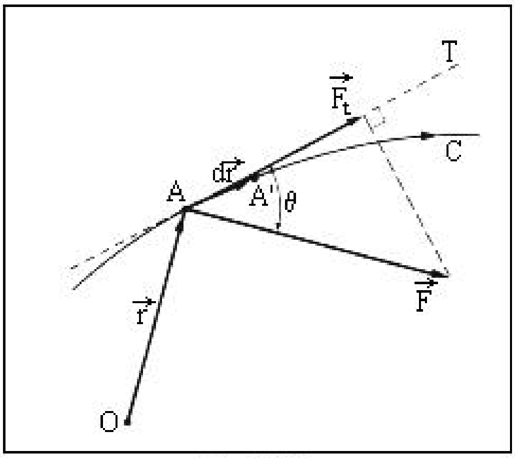


Fig.III.5

$dW = \vec{F}\cdot d\vec{r}$ sau dW = Fds cosθ unde θ este unghiul format de $\vec{F}$ cu deplasare $d\vec{r}$. Dar cum F_t = Fcosθ rezultã dW = $F_t$ds.

Deci lucru mecanic este egal cu deplasarea multiplicatã prin componenta fortei orientatã dupã deplasare. Lucru mecanic total efectuat de cãtre punctul material care se deplaseazã între punctele A si B este dat de suma tuturor lucrurilor mecanice infinitezimale, adicã;

$$W = \vec{F}_1 d\vec{r}_1 + \vec{F}_2 d\vec{r}_2 + \cdots$$

Analitic rezultã:

$$W = \int \vec{F}d\vec{r} = \int \left(F_x dx + F_y dy + F_z dz\right)$$

sau

$$W = \int_A^B \vec{F}d\vec{r} = \int_A^B F_t ds$$

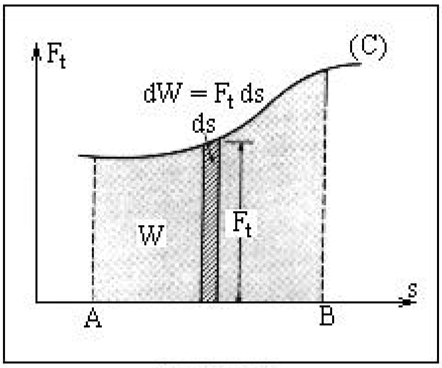


Fig.III.6

Reprezentarea graficã aratã cã lucru mecanic total W este dat de cãtre aria hasuratã cuprinsã între A, B si curba C (Fig.III.6) .

Unitãtile de mãsurã

1j - este lucru mecanic efectuat de cãtre 1N când punctul material se deplaseazã cu 1m în directia fortei.

1kwh = 10^3w·3600s = 36· 10^5j

Puterea

Putera este lucru mecanic raportat la timp.

$dP = \frac{dW}{dt}$ - este puterea instantanee, iar în functie de vitezã $P = \vec{F}\frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{F}\vec{v}$ (III.9) iar puterea medie Pm este datã de expresia :

$$P_m = \frac{W}{t}$$

Unitãti: **1w** = 1j/s - este puterea unei masini care efectuiazã un lucru mecanic de 1j timp de 1s.

Energia cineticã

Cunoscând expresia lucrului mecanic $dW = \vec{F}d\vec{r}$ unde putem considera $\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt}$ rezultã :

$dW = \frac{d(m\vec{v})}{dt}dr = m\frac{dv}{dt}dr = mvdv$ iar prin integrare rezultã :

$$W = \int_1^2 mvdv = \frac{mv_2^2}{2} - \frac{mv_1^2}{2} \quad \textbf{(III.10)}$$

cu v_1 si v_2 vitezele particulelor în punctele 1 si 2 . Expresia de mai sus aratã cã oricare ar fi functia care reprezintã forta $\vec{F}$ si traiectoria urmatã de particulã , valoarea lucrului mecanic W efectuat de fortã este mereu egalã cu diferenta cantitãtii $\frac{1}{2}mv^2$ la începutul sau la sfârsitul traiectoriei. Aceastã mãrime $\frac{1}{2}mv^2$ poartã denumirea de energie cineticã E_c , adicã $E_c = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}\frac{p^2}{m}$ iar relatia de mai sus (III.10) devine de forma :

$$W = E_{c1} - E_{c2} = \Delta E_c \quad \textbf{(III.11)}$$

adicã ***lucru mecanic efectuat de cãtre forta rezultantã aplicatã punctului material este egal cu variatia energiei sale cinetice*** care reprezintã **teorema energiei cinetice.**

Caz particular. Dacã rezultanta fortelor aplicate este nulã, rezultã energia cineticã a punctului material se conservã ($E_{c1} = E_{c2}$) , adicã un punct material nu-si poate modifica energia sa cineticã numai sub actiunea unei forte aplicate asupra lui.

În acest caz spunem cã energia cineticã este egalã cu lucrul mecanic cheltuit pentru a aduce punctul material din repaus pânã la viteza $\vec{v}$, sau altfel formulat,lucrul mecanic necesar pentru a opri punctul material. Existenta mãrimii fizice scalare energie cineticã si a legii sale fizice de conservare este legatã de proprietatea de omogenitate a timpului (simetria la translatii temporale).

Energia potentialã

Sã considerãm un punct material **m** care se deplaseazã sub actiunea unei forte constante $\vec{F}$ în mãrime si directie. Când punctul material se deplaseazã de la A la B urmând traiectoria (1) lucru mecanic al fortei $\vec{F}$ este (Fig.III.7):

$$W = \int_A^B \vec{F} d\vec{r} = \vec{F}\int_A^B d\vec{r} = \vec{F}\left(\vec{r}_B - \vec{r}_A\right)$$

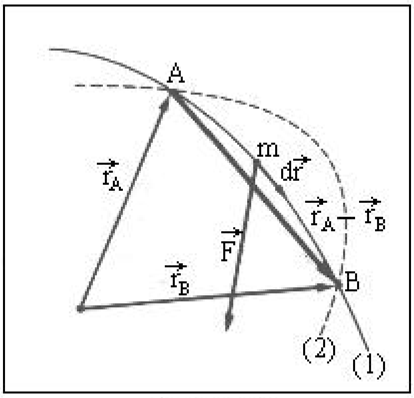


Fig.III.7

Se vede clar, cã dacã drumul urmat este traiectoria (2), expresia lucrului mecanic este aceeasi. Deci lucru mecanic nu depinde de drumul urmat între punctele A si B ci numai de pozitiile extreme, initialã si finalã. De aceea lucru mecanic efectuat de punctul material pe o traiectorie închisã este nul, adicã :

$W_{A1B} = W_{A2B}$, deoarece pozitiile initialã si finalã coincid sau :

$W_{A1B} - W_{A2B} = W_{A1B} + W_{B2A} = 0$

Deci într-un câmp conservativ de forte (câmpul gravitational sau electrostatic) lucrul mecanic efectuat de cãtre fortele câmpului asupra punctului material nu depinde de traiectoria sau de viteza punctului material ci numai de pozitiile initialã si finalã iar expresia matematicã generalã este de forma :

$$W_0 = \oint \vec{F} d\vec{r} = 0$$

Definitia câmpului conservativ de forte : ***se spune cã un câmp de forte este conservativ dacã lucru mecanic efectuat de cãtre fortele câmpului asupra punctului material este nul pe o curbã închisã .***

Din relatia :

$W = \int \vec{F} d\vec{r} = \vec{F}\left(\vec{r}_A - \vec{r}_B\right) = -\Delta E_p$ se poate defini energia potentialã .

Definitie

Se numeste energia potentialã E_p a punctului material ca fiind lucru mecanic cu semn schimbat, efectuat de fortele câmpului asupra punctului material pentru a-l deplasa din pozitia initialã în pozitia sa finalã.

Invers, dacã cunoastem energia potentialã E_p se pot calcula fortele prin derivare si anume:

$-dE_p = \vec{F} d\vec{r}$ unde $\vec{F} d\vec{r} = F_x dx + F_y dy + F_z dz$

iar

$$dE_p = \frac{\partial E_p}{\partial x} dx + \frac{\partial E_p}{\partial y} dy + \frac{\partial E_p}{\partial z} dz$$

prin analogie:

$$F_x = -\frac{\partial E_p}{\partial x} \;;\; F_y = -\frac{\partial E_p}{\partial y} \;;\; F_z = -\frac{\partial E_p}{\partial z}$$

sau în general :

$$\vec{F} = -\mathrm{grad}\; E_p = -\frac{\partial E_p}{\partial \vec{r}}$$

Introducând operatorul ∇ ca fiind :

$$\nabla = \vec{i}\frac{\partial}{\partial x} + \vec{j}\frac{\partial}{\partial y} + \vec{k}\frac{\partial}{\partial z}$$

se poate scrie cã :

$$-\ \mathrm{grad}\ E_p = -\nabla E_p = +\vec{F} \quad \textbf{(III.13)}$$

adicã forta reprezintã gradientul cu semn schimbat al energiei potentiale .

Suprafete echipotentiale

Reprezintã suprafetele pentru care energia potentialã este constantã (E_p = ct.)

Dacã un punct material se deplaseazã pe o astfel de suprafatã atunci (Fig.III.8) putem scrie :

$dE_p = 0 = -dW = -\vec{F}d\vec{r}$ cu $\vec{F} \perp d\vec{r}$, adicã forta $\vec{F}$ este perpendicularã pe suprafetele echipotentiale si îndreptatã în sensul descresterii energiei potentiale.

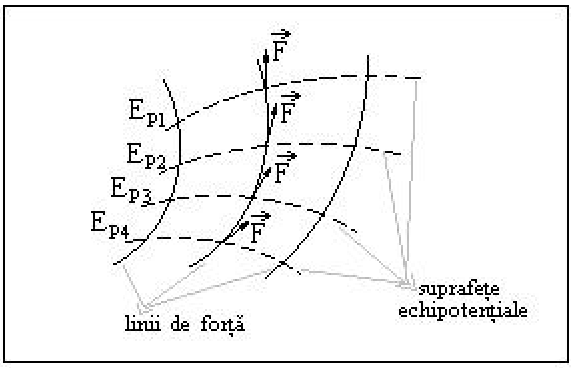


Fig.III.8

Liniile de fortã sunt curbe de-a lungul cãrora vectorul fortã este tangent; ele sunt normale pe suprafetele echipotentiale.

Conservarea energiei punctului material

Într-un câmp de forte conservativ , miscarea punctului material este datã , dupã cum am vãzut, de cãtre :

$$W = \int \vec{F}d\vec{r} = \Delta E_c = -\Delta E_p$$

sau altfel scrisã :

$$\Delta E_c + \Delta E_p = \Delta\left(E_c + E_p\right) = 0 \quad \text{adicã} \quad E_c + E_p = \text{ct.}$$

Pentru pozitiile A si B rezultã :

$$E_{cA} + E_{pA} = E_{cB} + E_{pB} = E \quad \textbf{(III.14)}$$

adicã energia mecanicã constituitã din energiile cineticã si potentialã se conservã. Rezultã ***teorema de conservare a energiei mecanice*** , al cãrui enunt este: ***într-un câmp de forte conservativ are loc în timpul miscãrii o transformare reciprocã a energiei cinetice si potentiale , suma lor rãmânând constantã***. De aceea aceste forte conservative mai poartã denumirea de forte care derivã dintr-un potential.

Caz particular

În cãdera liberã energia potentialã are expresia : $E_p = mgy = mgh$ iar energia mecanicã :

$$E = \frac{mv^2}{2} + E_p(x, y, z) = E_c + E_p$$

Fortele de frecare

Când douã corpuri sunt în contact existã totdeauna o rezistentã care se opune miscãrii relative a celor douã corpuri (ex. : un corp aflat în repaus). Dacã împingem corpul pe masã , el capãtã o miscare cu o anumitã vitezã. Dupã încetarea fortei aplicate, corpul încetineste pânã se opreste. Aceastã pierdere a cantitãtii de miscare (impuls) indicã cã o fortã se opune (înaintãrii) miscãrii; acestã fortã este denumitã ***fortã de frecare***. Ea apare ca o interactiune între moleculele celor douã corpuri în contact, numitã ***aderentã***. Aceastã interactiune este complicatã si depinde de numerosi factori ca starea si natura suprafetelor , viteza relativã ,etc.… Experimental , s-a constatat cã în multe cazuri forta de frecare $\vec{F}_f$ este o mãrime care este proportionalã cu o fortã normalã $\vec{N}$ aplicatã de la un corp la altul. Constanta de proportionalitate este denumitã ***coeficient de frecare*** si se noteazã cu **m** . Deci mãrimea fortei de frecare la lunecare este:

$$\vec{F} = \mu\vec{N}$$

Forta de frecare de alunecare se opune mereu miscãrii corpurilor si ca urmare are o directie opusã înaintãrii (vitezei corpurilor)

Exemplu:

Dacã $\vec{F}$ este forta aplicatã care deplaseazã corpul spre dreapta, forta rezultantã este dirijatã spre dreapta si are acceleratia $\vec{a}$ cu $m\vec{a} = \vec{F} - \vec{F}_f$. În general, existã doi coeficienti de frecare . ***Coeficientul de aderentã*** sau static ($\mathbf{m_s}$) este acela care multiplicat cu forta $\vec{N}$, dã nastere la forta minimã necesarã pentru a pune în miscare relativã douã corpuri care initial sunt în contact si în repaus. În acest caz este denumitã ***forta de frecare staticã***

$$\vec{F}_{fs} = \mu_s\vec{N}$$

Coeficientul de frecare cinetic ($\mathbf{m_c}$) este acela care multiplicat cu forta normalã dã nastere la forta necesarã mentinerii corpurilor într-o miscare relativã uniformã. Apare în acest caz ***forta de frecare la lunecare***.

$$\vec{F}_{fc} = \mu_c\vec{N}$$

Legile frecãrii

Experimental s-a constatat cã :

- forta maximã de aderentã (staticã) si forta de frecare la lunecare (cineticã) dintre douã corpuri nu depind de aria suprafetei de contact dintre corpuri;

- forta maximã de aderentã si forta de frecare la lunecare sunt direct proportionale cu forta normalã $\vec{N}$ (apãsarea) care se exercitã între corpuri la suprafata lor de contact.

$\vec{F}_{fs} = \mu_s \vec{N}$, $\vec{F}_{fc} = \mu_c \vec{N}$, cu $\mu_s > \mu_c$

Când un corp se gãseste în repaus pe un plan înclinat , unghiul maxim de echilibru φ_s este dat de **$tg\,\varphi_s = \mu_s$** si se numeste ***unghi de aderentã.***

Când un corp se deplaseazã pe un plan înclinat (lunecã uniform) unghiul planului φ_c este dat de relatia **$tg\,\varphi_c = \mu_c$** si se numeste ***unghi de frecare la lunecare***.

Frecarea este o notiune staticã deoarece forta $\vec{F}_f$ reprezintã suma unui numãr mare de interactiuni între moleculele celor douã corpuri în contact.

Dinamica sistemului de puncte materiale

Se considerã un sistem de puncte materiale (i = 1…n) unde fiecãrui punct material i se atribuie o masã $\mathbf{m_i}$. Asupra fiecãrui punct material din acest sistem actioneazã douã tipuri de forte si anume: *forte interioare* $\vec{F}^{(i)}$ si *forte exterioare* $\vec{F}^{(e)}$

Fie un punct material de masã m_k asupra cãruia se exercitã fortele interioare $\vec{F}^{(i)}_{kl}$ din partea celorlalte puncte materiale m_l ale sistemului si fortele exterioare sistemului $\vec{F}^{(e)}_k$ care actioneazã asupra acestui punct material de masã m_k. Deoarece fortele interioare sunt forte de interactiune dintre punctele materiale ale sistemului, atunci conform principiului III al Dinamicii, forta $\vec{F}^{(i)}_{kl}$ exercitatã de punctul material de masã m_l asupra punctului material de masã m_k (care reprezintã actiunea) este egalã cu forta reciprocã de reactiune $\vec{F}^{(i)}_{lk}$ a punctului material m_k asupra punctului material de masã m_l. Matematic se scrie :

$\vec{F}^{(i)}_{kl} = - \vec{F}^{(i)}_{lk}$ sau $\vec{F}^{(i)}_{kl} + \vec{F}^{(i)}_{lk} = 0$ unde $\vec{F}^{(i)}_{kk} = 0$

Aceste relatii exprimã cã : *totdeauna fortele interioare pot interactiona numai ca perechi douã câte douã egale în modul dar de sens contrar.*

Pentru întreg sistemul de puncte materiale, însumând douã câte douã aceste forte de interactiune, se obtine în final o rezultantã nulã :

$$\vec{F}^{(i)} = \sum_{k,l} \vec{F}_{kl}^{(i)} = 0$$

Forta interioarã rezultantã asupra punctului material de masã m_k este :

$$\vec{F}_k^{(i)} = \sum_{l=1}^{n} \vec{F}_{kl}^{i} \qquad (\text{ n - nr. total de puncte materiale ale sistemului })$$

Prin însumarea acestor forte interioare pentru punctul material m_k se obtine :

$$\vec{F}^{(i)} = \sum \vec{F}_k^{i} = \sum_{k,l} \vec{F}_{kl}^{(i)} = 0 \qquad \textbf{(III.15)}$$

Deci, fortele interioare unui sistem de puncte materiale dau o rezultantã nulã.

Sã vedem ce se întâmplã cu *momentul fortelor interioare.*

Fie douã puncte materiale de masã m_1 si m_2 si polul O în raport cu care se considerã momentul iar $\vec{r}_1$ si $\vec{r}_2$, vectorii de pozitie. Momentul fortelor interioare este dat de relatia (Fig.III9):

$$\vec{M} = \sum_k \left(\vec{r}_k \times \vec{F}_k^{(i)}\right) = \sum \left(\vec{r}_k \times \vec{F}_{kl}^{(i)}\right) \quad \text{sau}$$

$$\vec{M}_{12} = \vec{r}_1 \times \vec{F}_{12}^{(i)} + \vec{r}_2 \times \vec{F}_{21}^{(i)} = \vec{r}_1 \times \vec{F}_{12}^{(i)} - \vec{r}_2 \times \vec{F}_{12}^{(i)} = \left(\vec{r}_1 - \vec{r}_2\right) \times \vec{F}_{12}^{(i)} = \vec{r}_{12} \times \vec{F}_{12}^{(i)} = 0$$

Deoarece $\left|\vec{M}\right| = \left|\vec{r}_{12}\right| \cdot \left|\vec{F}_{12}^{(i)}\right| \sin\alpha = 0, \ \alpha = 0, \ \vec{r}_{12} \| \vec{F}_{12}^{(i)}$

Deci $\vec{M} = \sum_k \vec{r}_k \times \vec{F}_k^{(i)} = \sum_{k,l} \vec{r}_k \times \vec{F}_{kl}^{(i)} = 0 \qquad \textbf{(III.16)}$

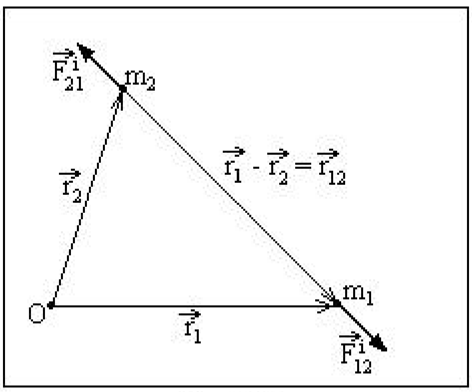


Fig.III.9

Teoremã

Rezultanta fortelor interioare si momentul rezultant al fortelor interioare fatã de orice pol O sunt nule.

Lucru mecanic al fortelor interioare

Putem scrie :

$$W = \vec{F}_{kl}^{(i)} d\vec{r}_k + \vec{F}_{lk}^{(i)} d\vec{r}_l = \vec{F}_{kl}^{(i)} d\vec{r}_k - \vec{F}_{kl}^{(i)} d\vec{r}_l = \vec{F}_{kl}^{(i)} \left(d\vec{r}_k - d\vec{r}_l \right) = \vec{F}_{kl}^{(i)} d\vec{r}_{kl}$$

Pentru corpurile rigide (nedeformabile) $\vec{r}_{kl}$ = ct. sau $\vec{r}_{kl}^{\,2}$ = ct. de unde $2\,\vec{r}_{kl}\, d\,\vec{r}_{kl} = 0$ deci $d\,\vec{r}_{kl} = 0$ si

$$W = \sum \vec{F}_{kl}^{(i)} d\vec{r}_{kl} = 0 \quad \textbf{(III.17)}$$

Concluzie : pentru corpurile rigide, lucrul mecanic al fortelor interioare este nul.

Miscarea centrului de masã al unui sistem de puncte materiale

Fie un sistem format din puncte materiale de mase m_1, m_2, … si de viteze v_1, v_2, … în raport cu un sistem de referintã inertial(R.I). Definim viteza centrului de masã ca fiind :

$$v_{cM} = \frac{m_1 \vec{v}_1 + m_2 \vec{v}_2 + \cdots}{m_1 + m_2 + \cdots} = \frac{\sum m_i \vec{v}_i}{\sum_i m_i} = \frac{\sum m_i \vec{v}_i}{M}$$

La staticã am definit vectorul de pozitie al centrului de masã (C.M) astfel:

$$\vec{r}_{cM} = \frac{m_1 \vec{r}_1 + m_2 \vec{r}_2 + \cdots}{m_1 + m_2 + \cdots} = \frac{\sum_i m_i \vec{r}_i}{M}$$;apoi derivãm în raport cu timpul si se obtine:

$$\frac{d\vec{r}_{cM}}{dt} = \frac{1}{M} \sum_i m_i \frac{d\vec{r}_i}{dt} = \frac{1}{M} \sum m_i \vec{v}_i = \vec{v}_{cM}$$

Cum impulsul $\vec{p}_i = m_i \vec{v}_i$ rezultã :

$$\vec{v}_{cM} = \frac{1}{M} \sum_i \vec{p}_i = \frac{\vec{p}}{M} \quad \text{sau} \quad \vec{p} = M \cdot \vec{v}_{cM} \quad \textbf{(III.18)}$$

unde $\vec{p} = \sum \vec{p}_i$ este impulsul total al sistemului. Relatia $\vec{p} = M \cdot \vec{v}_{cM}$ aratã cã impulsul sistemului este acelasi ca si cum toate masele punctelor materiale se gãsesc situate in centrul de masã care se deplaseazã cu viteza $\vec{v}_{cM}$ (se mai numeste viteza sistemului).

Deoarece un corp solid este alcãtuit dintr-un sistem de puncte materiale se poate spune cã deplasarea corpului solid se face cu viteza centrului de masã, $\vec{v}_{cM}$, adicã viteza corpului.

Într-un sistem izolat ($\vec{p}$ = ct.) , conform principiului de conservare al impulsului, iar referitor la centrul de masã se spune cã:*centrul de masã al unui sistem izolat se deplaseazã cu o vitezã constantã în tot sistemul.*

<u>Sistemul neizolat</u>. Se considerã un sistem S compus din puncte materiale care sunt în interactiune cu toate punctele materiale care sunt în interiorul sistemului S si care formeazã sistemul S'. (Ex. S - sitemul solar si S' - restul universului)

<u>Notatii</u>:

- punctele materiale ale sistemului S $\rightarrow$i
- punctele materiale ale sistemului S'$\rightarrow$ j

Principiul conservãrii impulsului pentru un sistem izolat (S + S') este:

$$\vec{p} = \underbrace{\sum \vec{p}_i}_{sist.S} + \underbrace{\sum \vec{p}_j}_{sist.S'} = ct. \quad \text{sau} \quad \vec{p} = \vec{p}_S + \vec{p}_{S'} = ct.$$

Aceasta înseamnã cã orice variatie a impulsului din sistemul S este însotitã de o variatie egalã si opusã în sistemul S' a impulsului. Matematic , $\Delta\vec{p}_S = -\Delta\vec{p}_{S'}$. Deci interactiunea dintre cele douã sisteme S si S' este descrisã ca o variatie de impuls. Prin derivare se obtine :

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \frac{d\vec{p}_S}{dt} + \frac{d\vec{p}_{S'}}{dt} = 0 \quad \text{sau} \quad \frac{d\vec{p}_S}{dt} = -\frac{d\vec{p}_{S'}}{dt}$$

unde $\frac{d\vec{p}_{S'}}{dt} = \vec{F}^{(e)}$ care reprezintã forta exterioarã cu care sistemul S' actioneazã asupra sistemului S. Cum viteza centrului de masã al sistemului S este $\vec{v}_{cM} = \frac{\vec{p}_S}{M}$ rezultã

$$\vec{F}^{(e)} = M\frac{d\vec{v}_{cM}}{dt} = M \cdot \vec{a}_{cM} \quad \textbf{(III.19)}$$

<u>Adicã</u>: *Centrul de masã al unui sistem de puncte materiale se deplaseazã ca si un singur punct material de masã egalã cu masa totalã a sistemului si supus unei forte exterioare sistemului.*

<u>Determinarea impulsului si a fortei rezultante în cazul fortelor interioare si exterioare</u>

În sistemul S se considerã douã puncte materiale de mase m_1 si m_2 cu forte interioare $\vec{F}_{12}$ ca fiind actiunea lui m_1 asupra lui m_2 si $\vec{F}_{21}$ ca fiind actiunea lui m_2 asupra lui m_1 iar $\vec{F}_1$ si $\vec{F}_2$ sunt forte exterioare. Conform principiului III al actiunii si reactiunii rezultã :

$$\vec{F}_{12} = - \vec{F}_{21}$$

Dacã fortele interioare si exterioare, adicã totale, actioneazã asupra maselor m_1 si m_2 rezultã (Fig.III.10):

$$\frac{d\vec{p}_1}{dt} = \vec{F}_{12} + \vec{F}_1 \quad \text{(pentru } m_1\text{)}$$

$$\frac{d\vec{p}_2}{dt} = \vec{F}_{21} + \vec{F}_2 \quad \text{(pentru } m_2\text{)} \text{ dar cum}$$

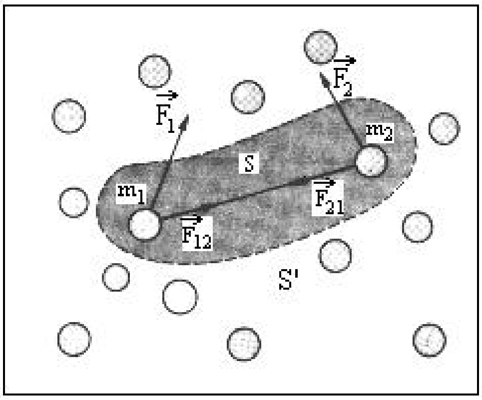
$$\vec{F}_{12} + \vec{F}_{21} = 0$$

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \frac{d\vec{p}_1}{dt} + \frac{d\vec{p}_2}{dt} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2$$

sau în general

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \sum_i \vec{F}_i^{(e)} \quad \textbf{(III.20)}$$

unde $\vec{F}_i^{(e)}$ reprezintã forta exterioarã care actioneazã asupra punctului material de masã m_i .



F ig.III.10

Forta exterioarã asupra unui sistem de puncte materiale este egalã cu suma fortelor exterioare care actioneazã asupra fiecãrui punct material care alcãtuieste sistemul.

Masa redusã

Considerãm douã puncte materiale care sunt supuse numai interactiunii lor mutuale; adicã numai fortele interioare $\vec{F}^{(i)}$, iar fortele exterioare nu actioneazã. Cele douã puncte materiale au masele m_1 si m_2 si vectorii de pozitie $\vec{r}_1$ si $\vec{r}_2$ fatã de un observator O dintr-un sistem de referintã inertial (SRI) si sunt supuse fortelor interioare $\vec{F}_{12}$ si $\vec{F}_{21}$ (Fig.III.11).

Dupã ecuatia de miscare (impuls) rezultã pentru fiecare punct material:

$$\frac{d\vec{p}_1}{dt} = \vec{F}_{12} \quad \text{si} \quad \frac{d\vec{p}_2}{dt} = \vec{F}_{21}$$

sau

$$m_1\frac{d\vec{v}_1}{dt} = \vec{F}_{12} \quad \text{si} \quad m_2\frac{d\vec{v}_2}{dt} = \vec{F}_{21}$$

Rezultã :

$$\frac{d\vec{v}_1}{dt} = \frac{\vec{F}_{12}}{m_1} \quad \text{si} \quad \frac{d\vec{v}_2}{dt} = \frac{\vec{F}_{21}}{m_2}$$

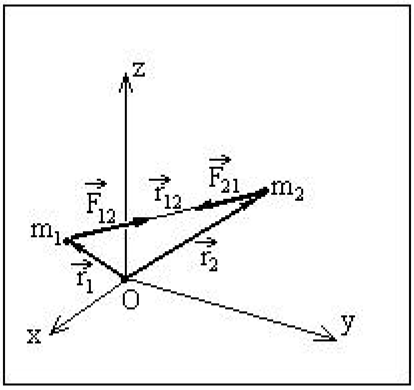


Fig.III.11

Scãzând cele douã expresii se obtine:

$$\frac{d\vec{v}_1}{dt} - \frac{d\vec{v}_2}{dt} = \frac{\vec{F}_{12}}{m_1} - \frac{\vec{F}_{21}}{m_2} = \left(\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2}\right)\vec{F}_{12} \quad \text{deoarece } \vec{F}_{12} = -\ \vec{F}_{21}$$

sau

$$\frac{d}{dt}\left(\vec{v}_1 - \vec{v}_2\right) = \frac{d}{dt}\vec{v}_{12} = \vec{a}_{12}$$

si prin identificare rezultã cã:

$$\vec{a}_{12} = \left(\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2}\right)\vec{F}_{12} \ ; \ \vec{a}_{12} = \frac{m_1 + m_2}{m_1 m_2}\vec{F}_{12}$$

ca în final

$$\vec{F}_{12} = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}\cdot\vec{a}_{12} = \mu\vec{a}_{12} \quad \textbf{(III.21)}$$

unde $\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$ - este masa redusã a sistemului de douã puncte materiale. Acest rezultat aratã cã : *miscarea relativã a celor douã puncte materiale supuse numai interactiunii lor mutuale* ($\vec{F}^{(i)} \neq 0$, $\vec{F}^{(e)} = 0$) *este echivalentã cu miscarea în raport cu observator inertial a unui punct material de masã egalã cu masa redusã sub actiunea unei forte egalã cu interactiunea lor.*

Momentul cinetic al unui sistem de puncte materiale

Am vãzut cã momentul cinetic al unui punct material este: $\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p} = m(\vec{r} \times \vec{v})$ iar relatia dintre momentul cinetic $\vec{L}$ si momentul fortei $\vec{M}$ este:

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M}$$

Fie douã puncte ca în Fig.III.12 si fortele interioare si exterioare asupra punctului material si momentele cineticsi al fortei fatã de punctul O.

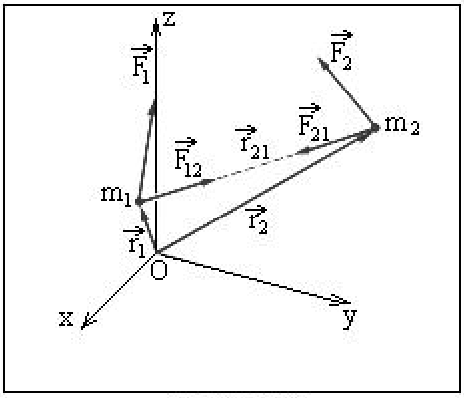


Fig.III.12

$$\vec{M} = \frac{d\vec{L}_1}{dt} \; ; \; \vec{M} = \frac{d\vec{L}_2}{dt}$$

Prin însumare rezultã :

$$\frac{d}{dt}\left(\vec{L}_1 + \vec{L}_2\right) = \vec{M}_1 + \vec{M}_2$$

Presupunem cã interactioneazã atât fortele interioare cât si fortele exterioare atunci avem:

$$\vec{M}_1 = \vec{r}_1 \times \left(\vec{F}_1 + \vec{F}_{12}\right) = \vec{r}_1 \times \vec{F}_1 + \vec{r}_1 \times \vec{F}_{12}$$

$$\vec{M}_2 = \vec{r}_2 \times \left(\vec{F}_2 + \vec{F}_{21}\right) = \vec{r}_2 \times \vec{F}_2 + \vec{r}_2 \times \vec{F}_{21}$$

dar cum $\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21}$ (forte interioare) rezultã :

$$\vec{M}_1 + \vec{M}_2 = \vec{r}_1 \times \vec{F}_1 + \vec{r}_2 \times \vec{F}_2 + \left(\vec{r}_2 - \vec{r}_1\right) \times \vec{F}_{12} = \vec{r}_1 \times \vec{F}_1 + \vec{r}_2 \times \vec{F}_2$$

Pentru cã $\left(\vec{r}_2 - \vec{r}_1\right) \times \vec{F}_{12} = \vec{r}_{21} \times \vec{F}_{12} = 0$, $\left(\vec{r}_{21} \parallel \vec{F}_{12}\right)$

Deci

$$\frac{d}{dt}\left(\vec{L}_1 + \vec{L}_2\right) = \vec{r}_1 \times \vec{F}_1 + \vec{r}_2 \times \vec{F}_2 = \vec{M}_1^{(e)} + \vec{M}_2^{(e)}$$

sau

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M}^{ex} \quad \textbf{(III.22)}$$

Derivata în functie de timp a momentului cinetic total al unui sistem de puncte materiale în raport cu un punct oarecare este egalã cu momentul total în raport cu acelasi punct al fortelor exterioare $\vec{F}^{(e)}$ *care actioneazã asupra sistemului de puncte materiale.*

Dacã $\sum \vec{F}^{(e)} = 0 \Rightarrow \vec{M}^{(e)} = 0$

si $\frac{d\vec{L}}{dt} = 0 \Rightarrow \vec{L} = ct. = \vec{L}_1 + \vec{L}_2 + \vec{L}_3 = ct.$

Legea conservãrii momentului cinetic: *momentul cinetic total al unui sistem izolat sau pentru care momentul fortei este nul (* $\vec{M}^{(e)} = 0$ *) este constant în mãrime si directie.*

Energia cineticã a unui sistem de puncte materiale

Fie un sistem alcãtuit din douã puncte materiale de mase m_1 si m_2 supuse la fortele exterioare $\vec{F}_1$ si $\vec{F}_2$ si la fortele interioare $\vec{F}_{12}$ si $\vec{F}_{21}$. La un moment dat, aceste puncte materiale se gãsesc situate în pozitiile din Figura III.13 si se pot deplasa cu vitezele $\vec{v}_1$ si $\vec{v}_2$ dupã traiectoriile C_1 si C_2.

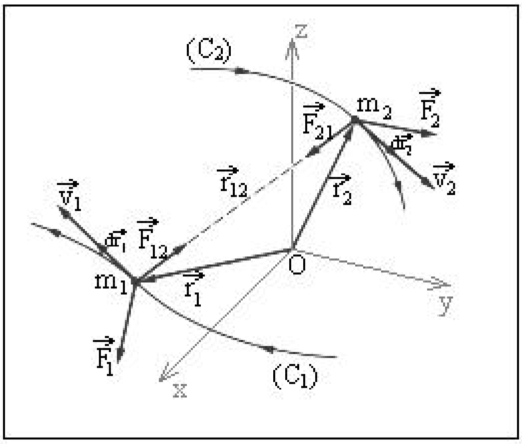


Fig.III. 13

Ecuatiile de miscare pentru fiecare punct material sunt :

$$m_1\vec{a}_1 = \vec{F}_1 + \vec{F}_{12}$$
$$m_2\vec{a}_2 = \vec{F}_2 + \vec{F}_{21}$$

Într-un interval mic dt, presupunem cã punctul material se deplaseazã cu $d\vec{r}$ si de aceea se înmulteste scalar fiecare ecuatie de miscare cu $d\vec{r}$ si se obtine:

$$m_1\vec{a}_1 d\vec{r}_1 = \vec{F}_1 d\vec{r}_1 + \vec{F}_{12} d\vec{r}_1$$
$$m_2\vec{a}_2 d\vec{r}_2 = \vec{F}_2 d\vec{r}_2 + \vec{F}_{21} d\vec{r}_2$$

si stiind cã $\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21}$, prin adunare ecuatiilor se obtine :

$$m_1\vec{a}_1 d\vec{r}_1 + m_2\vec{a}_2 d\vec{r}_2 = \vec{F}_1 d\vec{r}_1 + \vec{F}_2 d\vec{r}_2 + \vec{F}_{12}\left(d\vec{r}_1 - d\vec{r}_2\right)$$

Dar $\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt}$ si $\vec{a} \cdot d\vec{r} = \frac{d\vec{v}}{dt} d\vec{r} = d\vec{v}\frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{v} \cdot d\vec{v} = v \cdot dv$ iar $d\vec{r}_1 - d\vec{r}_2 = d\left(\vec{r}_1 - \vec{r}_2\right) = d\vec{r}_{12}$. Aplicate la expresia de mai sus , se obtine:

$$m_1 v_1 dv_1 + m_2 v_2 dv_2 = \vec{F}_1 d\vec{r}_1 + \vec{F}_2 d\vec{r}_2 + \vec{F}_{12} d\vec{r}_{12}$$

Prin integrare rezultã:

$$\underbrace{m_1 \int_{v_{10}}^{v_1} v_1 dv_1 + m_2 \int_{v_{20}}^{v_2} v_2 dv_2}_{I} = \underbrace{\int_A^B \left(\vec{F}_1 d\vec{r}_1 + \vec{F}_2 d\vec{r}_2\right) + \int \vec{F}_{12} d\vec{r}_{12}}_{II}$$

Partea din stãnga a egalitatii(I) se scrie :

$$\text{I :}\quad \frac{1}{2}m_1 v_1^2 - \frac{1}{2}m_1 v_{10}^2 + \left(\frac{1}{2}m_2 v_2^2 - \frac{1}{2}m_2 v_{20}^2\right) = \left(\frac{1}{2}m_1 v_1^2 + \frac{1}{2}m_2 v_2^2\right) - \left(\frac{1}{2}m_1 v_{10}^2 + \frac{1}{2}m_2 v_{20}^2\right) = E_c - E_{c0}$$

iar partea din dreapta a egalitãtii (II) se scrie :

II :

$W_{ext} = \int_A^B \vec{F}_1 d\vec{r}_1 + \vec{F}_2 d\vec{r}_2$ este lucru mecanic efectuat de cãtre fortele exterioare.

$W_{int} = \int_A^B \vec{F}_{12} d\vec{r}_{12}$ este lucru mecanic efectuat de cãtre fortele interioare.

Deci ,in final :

E_c - E_{c0} = W_{ext} + W_{int} **(III.23)**

Variatia energiei cinetice a unui sistem de puncte materiale este egalã cu lucru mecanic efectuat asupra sistemului de forte exterioare si forte interioare.

Conservarea energiei sistemului de puncte materiale

Presupunem cã fortele interioare derivã dintr-un potential si deci existã o functie $E_{p.12}$, dependentã de coordonatele celor douã puncte materiale 1 si 2 astfel:

$$W_{int} = \int_A^B \vec{F}_{12} d\vec{r}_{12} = E_{p120} - E_{p12}$$

unde E_{p12} este valoarea energiei potentiale la timpul t si E_{p120} este energia potentialã la timpul t_0. Introdusã în relatia (III:23) , se obtine :

E_c - E_{c0} = W_{ext} + E_{p120} - E_{p12}

sau

$(E_c + E_{p12}) - (E_c + E_{p12})_0 = W_{ext}$

Notãm cu :

$U = E_c + E_{p12} = \frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2 + E_{p12}$ **(III.24)** se obtine *energia proprie* a sistemului de puncte materiale.

In general, pentru sistemul de puncte materiale:

$$U = E_c + E_{p\,int} = \sum_{\substack{toate\\ p.m.}} \frac{1}{2} m_i v_i^2 + \sum_{\substack{toate\\ perechile}} E_{pij} \quad \text{unde}$$

$$E_c = \sum_{\substack{toate\\ p.m.}} \frac{1}{2} m_i v_i^2 = \frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2 + \frac{1}{2} m_3 v_3^2 + \cdots \quad \text{iar}$$

$$E_{p\,int} = \sum_{\substack{toate\\ perechile}} E_{pij} = E_{p12} + E_{p13} + \cdots E_{p23} + \cdots$$

În concluzie

$U - U_0 = W_{ext}$ **(III.25)**

Variatia energiei proprii a unui sistem de puncte materiale este egalã cu lucru mecanic efectuat asupra sistemului de cãtre fortele exterioare.

Pentru sistemul izolat pentru care $W_{ext} = 0$, $U - U_0 = 0$, $U = U_0$, energia proprie a sistemului de puncte materiale izolate rãmâne constantã (se conservã).

Ciocniri

Când douã puncte materiale se apropie unul de altul , interactiunea lor mutualã modificã mscarea lor producând de fapt o variatie a impulsului si a energiei. În acest caz spunem cã a avut loc o ciocnire. În general, interactiunea are loc când cele douã puncte materiale sunt apropiate producând o variatie mãsurabilã a miscãrilor lor în timp scurt.

Deoarece la ciocnire contribuie numai fortele interioare , atunci impulsul si energia se conservã.

Fie $\vec{p}_1$ si $\vec{p}_2$ impulsurile celor douã puncte materiale înainte de ciocnire si $\vec{p}_1$' si $\vec{p}_2$' impulsurile dupã ciocnire. Conform conservãrii impulsului , se obtine (Fig.III.14):

$$\vec{p}_1 + \vec{p}_2 = \vec{p}_1' + \vec{p}_2'$$

sau

$$m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2 = m_1\vec{v}_1' + m_2\vec{v}_2'$$

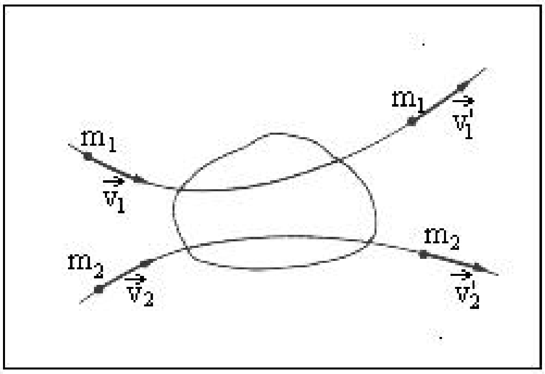


Fig.III. 14

Mai notãm cu E_c si E_c'energiile cinetice înainte si dupã ciocnire si cu E_{p12} si E_{p12}' energiile potentiale înainte si dupã ciocnire atunci,conform conservãrii energiei:

$$E_c + E_{p12} = E_c' + E_{p12}'$$

Dar

$$E_c = \frac{1}{2}m_1 v_1^2 + \frac{1}{2}m_2 v_2^2 = \frac{p_1^2}{2m_1} + \frac{p_2^2}{2m_2}$$

$$E_c' = \frac{1}{2}m_1 v_1'^2 + \frac{1}{2}m_2 v_2'^2 = \frac{p_1'^2}{2m_1} + \frac{p_2'^2}{2m_2}$$

Se introduce cantitatea Q :

$Q = E_c' - E_c = E_{p12} - E'_{p12}$ ca fiind variatia energiilor cinetice si potentiale (initialã - finalã). Deci pentru procesul de ciocnire sunt suficiente urmãtoarele expresii:

$$E'_c - E_c = Q$$

adicã

$$\frac{p_1'^2}{2m_1} + \frac{p_2'^2}{2m_2} = \frac{p_1^2}{2m_1} + \frac{p_2^2}{2m_2} + Q \quad \text{iar}$$

$$p_1' + p_2' = p_1 + p_2$$

sau

$$m_1 v_1 + m_2 v_2 = m_1 v_1' + m_2 v_2' \quad \text{si}$$

$$\frac{1}{2}m_1 v_1^2 + \frac{1}{2}m_2 v_2^2 = \frac{1}{2}m_1 v_1'^2 + \frac{1}{2}m_2 v_2'^2 + Q$$

Observatii :

Dacã Q = 0 , nu existã variatie de energie cineticã (E_c=E_c') si spunem cã ciocnirea este *elasticã* adicã :

$$m_1v_1 + m_2v_2 = m_1v_1' + m_2v_2'$$

$$\frac{1}{2}m_1v_1^2 + \frac{1}{2}m_2v_2^2 = \frac{1}{2}m_1v'^2_1 + \frac{1}{2}m_2v'^2_2 \quad \textbf{(III.26)}$$

Dacã Q ≠ 0 avem ciocnire *neelasticã* (plasticã).

Dacã Q < 0 , E_c scade dar creste E_p - ciocnire neelasticã *endoenergeticã* .

Dacã Q > 0 , E_c creste si E_p scade - ciocnire neelasticã *exoenergeticã*.