

5.

RĂSUCIREA (TORSIUNEA)

5.1 Generalități

Secțiunea unei bare cu două axe de simetrie este supusă la răsucire pură dacă torsorul forțelor ce acționează pe secțiunea barei, calculat în raport cu centrul de greutate al secțiunii, se reduce la un cuplu, al cărui moment M_t are direcția normală la secțiune (fig. 5.1).

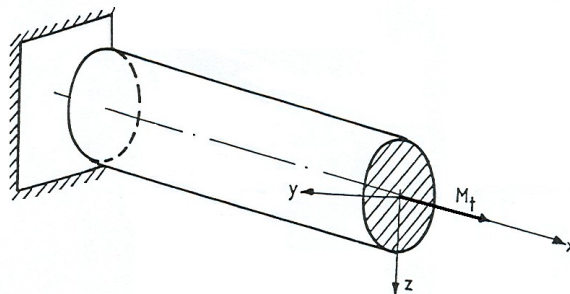


Fig. 5.1

Pieșele solicitate frecvent la răsucire sunt arborii de transmisie și arcurile elicoidale. Studiul solicitării de răsucire se va efectua pentru bare cu secțiunea circulară sau inelară la care ipoteza lui Bernoulli (a secțiunilor plane) este confirmată.

5.2 Tensiuni și deformații

Pentru calculul de rezistență la răsucire este necesar să se stabilească felul tensiunii care apare, legea de distribuție pe secțiune și mărimea acesteia într-un

punct. În acest scop se consideră o bară dreaptă cu secțiunea circulară pe suprafața căreia s-a trasat o rețea de dreptunghiuri curbilinii determinate de generatoare și plane paralele normale la axa barei (fig. 5.2, a).

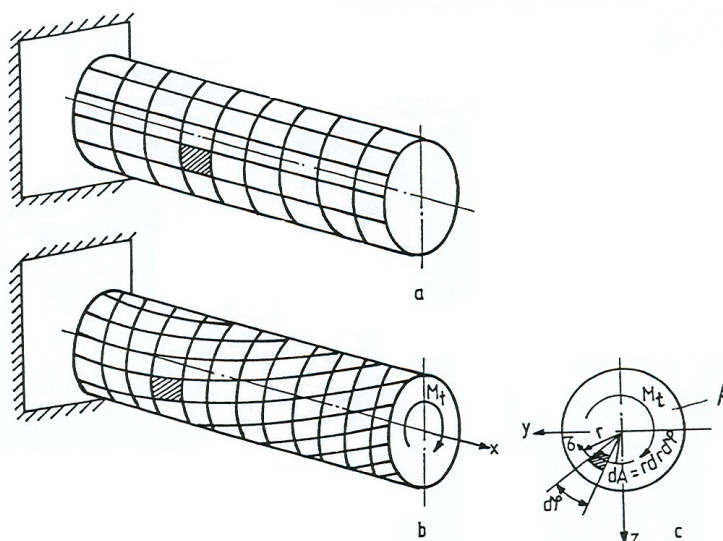


Fig. 5.2

Atunci când bara este solicitată la răsucire prin momentul M_t (fig. 5.2, b) se constată că:

- planele de secționare a barei paralele inițial rămân paralele, deci se verifică ipoteza lui Bernoulli privind planeitatea secțiunilor;
- bara nu-și modifică dimensiunile în sens longitudinal sau transversal, rezultând că în secțiunile transversale nu apar tensiuni normale σ ;
- generatoarele devin elice de egală înclinare, ca urmare dreptunghiurile devin paralelograme datorită existenței tensiunilor tangențiale care produc rotirea unei secțiuni față de altă secțiune; tensiunile tangențiale τ care apar sunt deci perpendiculare pe rază.

Din condiția de echivalență mecanică (fig. 5.2, c) rezultă :

$$M_t = \int_A \tau r dA . \quad (5.1)$$

Se izolează un element de bară de lungime dx și de rază r . Generatoarea BB_1 se rotește cu unghiul γ , după deformarea elementului (fig. 5.3) putându-se scrie:

$$rd\varphi = \gamma dx . \quad (5.2)$$

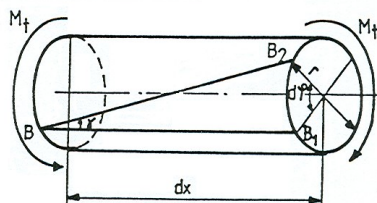


Fig. 5.3

Potrivit legii lui Hooke:

$$\tau = G\gamma. \quad (5.3)$$

Înlocuind pe γ din relația (5.2) în (5.3) se obține:

$$\tau = Gr \frac{d\phi}{dx}, \quad (5.4)$$

ceea ce arată că tensiunea tangențială variază liniar cu raza, fiind maximă la exterior și nulă în centrul secțiunii. Dacă se introduce expresia tensiunii τ din relația (5.4) în (5.1) se obține:

$$M_t = G \frac{d\phi}{dx} \int_A r^2 dA. \quad (5.5)$$

Expresia $\int_A r^2 dA$ reprezintă *momentul de inerție polar* al secțiunii (I_p) astfel că:

$$M_t = GI_p \frac{d\phi}{dx}. \quad (5.6)$$

Din relațiile (5.4) și (5.6) rezultă

$$\tau = \frac{M_t}{I_p} r. \quad (5.7)$$

Tensiunea tangențială maximă apare în punctele cele mai departate de centrul secțiunii (fig. 5.4, a) și are expresia:

$$\tau = \frac{M_t}{I_p} r_{\max} = \frac{M_t}{W_p}, \quad (5.8)$$

unde W_p este *modulul de rezistență polar* al secțiunii.

Pentru secțiunea circulară $W_p = \frac{\pi d^3}{16}$, iar pentru secțiunea inelară

$$W_p = \frac{\pi D^3}{16} \left[1 - \left(\frac{d}{D} \right)^4 \right].$$

În baza principiului dualității tensiunilor tangențiale, se produc tensiuni tangențiale și în secțiunea longitudinală (fig. 5.4, b).

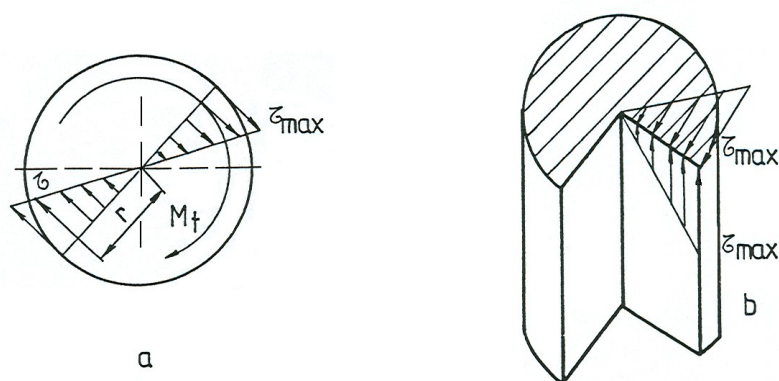


Fig. 5.4

Din relația (5.6) se obține unghiul $d\varphi$ cu care se rotesc două secțiuni situate la distanța dx una de cealaltă,

$$d\varphi = \frac{M_t}{GI_p} dx. \quad (5.9)$$

Rotirea relativă dintre secțiunile de la capetele barei este:

$$\varphi = \int_l \frac{M_t}{GI_p} dx, \quad (5.10)$$

iar când M_t , G , I_p sunt constante în lungul barei, sau pe anumite porțiuni,

$$\varphi = \frac{M_t l}{GI_p} \quad \text{și respectiv} \quad \varphi = \sum \frac{M_{ti} l_i}{G_i I_{pi}}. \quad (5.11)$$

Unghiul de răsucire specifică este:

$$\theta = \frac{M_t}{GI_p}, \quad (5.12)$$

produsul GI_p fiind numit *modul de rigiditate la răsucire*.

Din relația (5.8) rezultă formulele pentru calculul de rezistență al barelor de secțiune circulară solicitate la răsucire:

$$\text{- pentru dimensionare} \quad W_{p_{nec}} = \frac{M_t}{\tau_a}; \quad (5.13)$$

$$\text{- pentru verificare} \quad \tau_{ef} = \frac{M_t}{W_{p_{ef}}} \leq \tau_a; \quad (5.14)$$

$$\text{- calculul capacității de încărcare} \quad M_{t_{cap}} = W_{p_{ef}} \tau_a. \quad (5.15)$$

τ_a fiind rezistență admisibilă a materialului la solicitarea de răsucire.

5.3 Calculul arborilor de transmisie

Arborii de transmisie sunt elemente de mașini care transmit puteri (cupluri) prin intermediul unor roți. De obicei, se dau puterile transmise de roțile montate pe arbore (exprimate în kW) și turația arborelui (în rot/min). Lucrul mecanic elementar al cuplului aplicat arborelui este $Md\theta$, iar puterea corespunzătoare este:

$$P = M \frac{d\theta}{dt} = M\omega, \quad (5.16)$$

momentul care solicită arborele fiind:

$$M = \frac{P}{\omega}, \quad (5.17)$$

unde viteza unghiulară (în rad/s) este $\omega = \frac{\pi n}{30}$, n fiind turația (în rot/min).

Momentul de răsucire M_t din secțiune fiind egal cu momentul exterior M din (5.17) rezultă:

$$M_t = \frac{30}{\pi} \frac{P}{n} \quad [kNm] \quad (5.18)$$

Arborii de transmisie se dimensionează, de obicei, din două condiții:

1. *condiția de rezistență*. Aplicând relația (5.13) se obține:

$$W_{p_{nec}} = \frac{30 \cdot 10^6 P}{\pi n \tau_a}. \quad (5.19)$$

Pentru secțiunea este circulară avem:

$$\frac{\pi d^3}{16} = \frac{30 \cdot 10^6 P}{\pi n \tau_a}, \quad \text{rezultând} \quad d = 365_3 \sqrt{\frac{P}{n \tau_a}}$$

Dacă secțiunea este inelară: $\frac{\pi D^3}{16} \left[1 - \left(\frac{d}{D} \right)^4 \right] = \frac{30 \cdot 10^6 P}{\pi n \tau_a}$, obținându-se

$$d = 365_3 \sqrt{\frac{P}{(1 - k^4) n \tau_a}}, \quad \text{unde } k = d/D.$$

2. *condiția de deformare* cere ca dimensionarea arborelui să se facă astfel ca unghiul de răsucire specifică să nu depășească o anumită valoare impusă. Din aplicarea la limită a relației (5.12)

$$\theta = \frac{M_t}{GI_p} \leq \theta_a, \quad \text{se obține} \quad I_p = \frac{M_t}{G\theta_a}. \quad (5.20)$$

Pentru secțiunea circulară rezultă $\frac{\pi d^4}{32} = \frac{M_t}{G\theta_a}$, $d = \sqrt[4]{\frac{32M_t}{\pi G\theta_a}}$,

iar pentru secțiunea inelară

$$\frac{\pi D^4}{32} \left[1 - \left(\frac{d}{D} \right)^4 \right] = \frac{M_t}{G\theta_a}, \quad D = \sqrt[4]{\frac{32M_t}{\pi (1 - k^4) G\theta_a}}.$$

La arbori, de obicei $\theta_a = 0,25 \text{ } ^\circ/\text{m} = 0,25 \cdot \pi / 180 \cdot 10^{-3} \text{ rad/mm}$. În urma dimensionării, în cele două condiții, se adoptă diametrul cu valoarea cea mai mare.

Aplicația 1

Să se dimensioneze arborele unui motor din figura 5.5 care primește puterea $P_1=32 \text{ kW}$ la turația $n = 180 \text{ rot/min}$ și transmite puterile $P_2 = 12 \text{ kW}$ și $P_3=20 \text{ kW}$ la două mașini dacă: a) $\tau_a=30 \text{ MPa}$, b) $\theta_a = 0,25 \text{ } ^\circ/\text{m}$. Se dau $G = 8,1 \cdot 10^4 \text{ MPa}$. Să se calculeze totodată și rotirea relativă dintre roțile 2 și 3.

Rezolvare

Se calculează momentele de răsucire cu relația (5.18) și se obține:

$$M_{t_{2-1}} = \frac{30 (-12)}{\pi \cdot 180} = -0,636 \text{ kNm}; \quad M_{t_{1-3}} = \frac{30 \cdot 20}{\pi \cdot 180} = 1,06 \text{ kNm}.$$

Dimensionarea arborelui în cele două situații:

a) aplicând relația (5.13) rezultă

$$W_{p_{nec}} = \frac{1,06 \cdot 10^6}{30} = 35,38 \cdot 10^3 \text{ mm}^3, \text{ de unde } d = 10^3 \sqrt[3]{\frac{16 \cdot 35,38}{\pi}} = 56,5 \text{ mm}.$$

b) aplicând relația (5.20) se obține

$$I_{p_{nec}} = \frac{1,06 \cdot 10^6 \cdot 180 \cdot 10^3}{8,1 \cdot 10^4 \cdot 0,25\pi} = 3 \cdot 10^6 \text{ mm}^4, \text{ de unde}$$

$$d = 10^3 \sqrt[3]{\frac{32 \cdot 300}{\pi}} = 74,4 \text{ mm}.$$

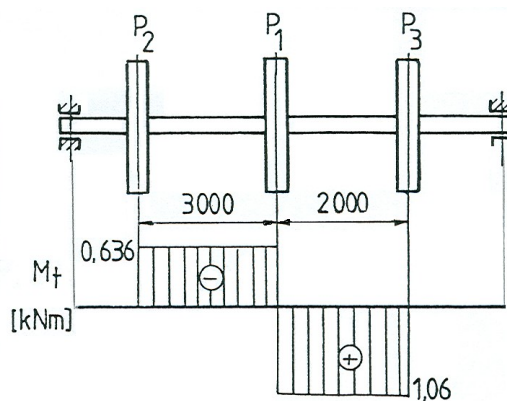


Fig. 5.5

Se adoptă pentru arbore spre exemplu $d = 75 \text{ mm}$.

Rotirea relativă dintre roțile 2 și 3 se determină cu relația (5.11):

$$\varphi_{2-3} = \frac{32 \cdot 10^6}{8,1 \cdot 10^4 \pi \cdot 75^4} (-0,636 \cdot 3000 + 1,06 \cdot 2000) = 8,42 \cdot 10^{-4} \text{ rad}.$$

5.4 Calculul arcurilor elicoidale

Un arc elicoidal se confecționează, în general, din sârma de oțel, de un anumit diametru d , care se înfășoară după o anumită tehnologie, pe un cilindru sub forma unei elice (fig. 5.6, a). Distanța R de la axa cilindrului la axa sârmei, se numește *rază de înfășurare*.

Asupra arcului acționează forța F . Reducând această forță în centrul de greutate al unei secțiuni a sârmei se obține o forță F și un moment $M = FR$

(fig.5.6,b). Descompunând forța F și momentul M după normala și tangenta la secțiune se obține:

- o forță axială $N = F \sin \alpha$,
- o forță tăietoare $T = F \cos \alpha$,
- un moment de torsiune $M_t = M \cos \alpha = FR \cos \alpha$,
- un moment încovoietor $M_i = M \sin \alpha = FR \sin \alpha$,

unde α reprezintă unghiul de înclinare a spirei arcului.

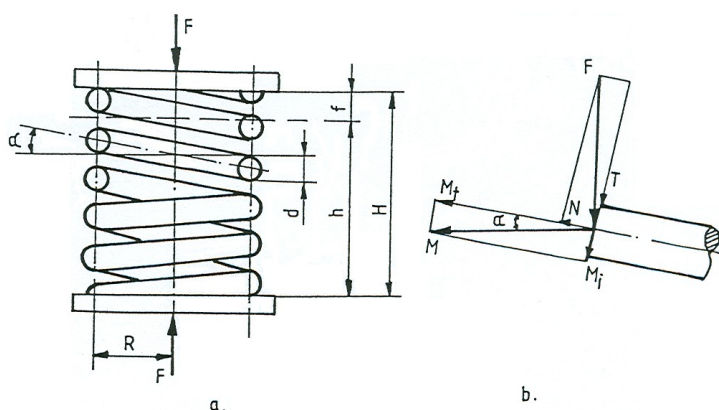


Fig. 5.6

La arcurile elicoidale cu spire strânse unghiul α este foarte mic ($\alpha < 5^\circ$) și ca urmare se poate considera $\cos \alpha \cong 1$ și $\sin \alpha \cong 0$, astfel încât eforturile din spire sunt $T = F$ și respectiv $M_t = FR$. Prin urmare arcurile sunt sollicitate la forfecare și răsucire:

$$\tau_f = \frac{F}{A} = \frac{F}{\frac{\pi d^2}{4}}, \quad \tau_t = \frac{M_t}{W_p} = \frac{FR}{\frac{\pi d^3}{16}},$$

tensiunea rezultantă în arc fiind:

$$\tau = \frac{16FR}{\pi d^3} \left(1 + \frac{d}{4R} \right). \quad (5.21)$$

Întrucât raportul $d/(4R) \ll 1$, se consideră că tensiunea în arc este cea produsă numai de sollicitarea de răsucire:

$$\tau = \frac{16FR}{\pi d^3}. \quad (5.22)$$

Ca urmare a deformării arcului forța F capătă o deplasare f numită *săgeata* arcului. Pentru stabilirea relației de calcul a săgeții arcului se consideră un element de lungime ds dintr-o spiră la care secțiunea din A este presupusă fixă iar secțiunea din B se rotește cu $d\varphi$, forța F deplasându-se cu săgeata elementara df , ca în figura 5.7.

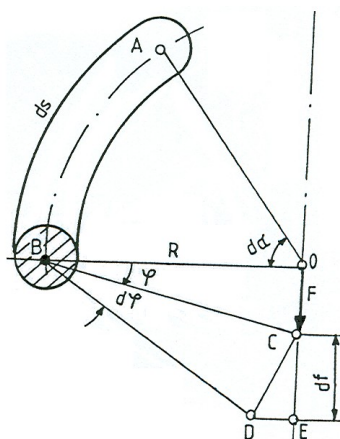


Fig. 5.7

Din figura 5.7 rezultă :

$$BC = \frac{R}{\cos\varphi}, \quad CD = BCd\varphi = \frac{Rd\varphi}{\cos\varphi}, \quad CE = df = CD \cos\varphi = Rd\varphi.$$

Dar: $d\varphi = \frac{M_t ds}{GI_p}$, $M_t = FR, I_p = \frac{\pi d^4}{32}$, $ds = R d\alpha$, rezultând

$$df = \frac{32FR^3}{\pi Gd^4} d\alpha.$$

Săgeata corespunzătoare unei spire este $f_1 = \int_0^{2\pi} df = \frac{64FR^3}{Gd^4}$,

iar cea corespunzătoare întregului arc cu i spire

$$f = f_1 \cdot i = \frac{64FR^3 i}{Gd^4} \quad (5.23)$$

sau

$$f = \frac{64Fi}{Gd} \left(\frac{R}{d} \right)^3. \quad (5.24)$$

Dimensionarea arcului se face astfel încât să fie îndeplinită atât condiția de rezistență cât și cea de deformare. Utilizând relația (5.22) se obține:

$$d = \sqrt[3]{\frac{16FR}{\pi \tau_a}}, \quad (5.25)$$

unde $\tau_a = (400...600)$ MPa la oțeluri pentru arcuri.

Prin folosirea relației (5.24) rezultă :

$$d = \frac{64Fi}{Gf_a} \left(\frac{R}{d} \right)^3. \quad (5.26)$$

Întrucât arcurile se realizează cu rapoarte $k = R/d$ precizate prin norme sau standarde, relația anterioară poate fi scrisă sub forma:

$$d = \frac{64Fik^3}{Gf_a}, \quad (5.27)$$

unde f_a este săgeata impusă arcului. Din aplicarea relațiilor (5.25) și (5.27) se alege valoarea cea mai mare obținută pentru diametrul sârmei. Înălțimea arcului în stare comprimată (fig. 5.6) trebuie astfel stabilită încât între două spire vecine să existe o anumită distanță, a carei valoare minimă se ia de obicei egală cu $d/4$ și deci:

$$h = id + (i - 1) \frac{d}{4}.$$

În stare nesolicitată, înălțimea H a arcului este

$$h = H + f.$$

Aplicația 2

Să se determine valoarea forței F care acționează arcul contactorului electric din figura 5.8 pentru a produce deplasarea $s = 1,1$ mm. Să se calculeze totodată tensiunea maximă din arc. Se dau: $R = 20$ mm, $d = 8$ mm, $i = 12$ spire, $G = 42 \cdot 10^3$ MPa.

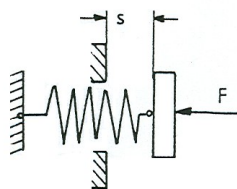


Fig. 5.8

Rezolvare

Din expresia săgeții rezultă

$$F = \frac{sGd^4}{64R^3i} \text{ sau } F = \frac{1,1 \cdot 42 \cdot 10^3 \cdot 8^4}{64 \cdot 20^3 \cdot 12} = 30,8N,$$

iar tensiunea maximă în arc este

$$\tau = \frac{16FR}{\pi d^3} = \frac{16 \cdot 30,8 \cdot 20}{\pi \cdot 8^3} = 6,12MPa.$$

5.5 Bare static nedeterminate la răsucire

Problemele static nedeterminate la răsucire se rezolvă pe baza condițiilor de echilibru static și a condițiilor de deformație.

Aplicatia 3

Arborele bimetalic format din doi cilindri din materiale diferite presați unul în celalalt, ca în figura 5.9, este solicitat la răsucire de momentul M_0 . Să se calculeze tensiunile maxime din arbore.

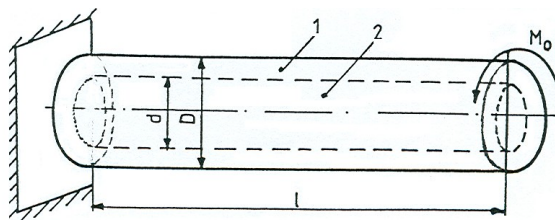


Fig. 5.9

Rezolvare. Din condiția de echilibru static

$$M_{t1} + M_{t2} = M_0,$$

iar din condiția de deformație, ținând seama ca cei doi cilindri lucrează împreună

$$\varphi_1 = \varphi_2, \text{ adică } \frac{M_{t1}l}{G_1J_{P1}} = \frac{M_{t2}l}{G_2J_{P2}} \text{ rezultă :}$$

$$M_{t1} = M_0 \frac{G_1 I_{p1}}{G_1 I_{p1} + G_2 I_{p2}}, \quad M_{t2} = M_0 \frac{G_2 I_{p2}}{G_1 I_{p1} + G_2 I_{p2}}.$$
$$\tau_1 = \frac{M_{t1} D}{I_{p1} 2}, \quad \tau_2 = \frac{M_{t2} d}{I_{p2} 2}.$$

Momentele de inerție polare ale celor doi arbori sunt:

$$I_{p1} = \frac{\pi D^4}{32} \left[1 - \left(\frac{d}{D} \right)^4 \right], \quad I_{p2} = \frac{\pi d^4}{32}.$$

Pentru ca arborele să reziste trebuie ca:

$$\tau_1 \leq \tau_{a1}, \quad \tau_2 \leq \tau_{a2}.$$