CAPITOLUL 8

CURBE ÎN PLAN ŞI ÎN SPAȚIU

8.1. Curbe în plan

I. Definiția analitică a curbelor plane

În capitolul 7 am studiat deja câteva exemple de curbe plane, amintim aici conicele nedegenerate: elipsa, hiperbola şi parabola. În continuare vom prezenta noțiunea generală de curbă plană, precum şi o serie de proprietăți ale acesteia.

Curbele plane studiate până acum au fost reprezentate doar prin ecuații implicite, de forma F(x, y) = 0. Deoarece, din punctul de vedere al cinematicii, o curbă plană este traiectoria unui punct material M, este util să descriem curba prin legătura dintre coordonatele carteziene, (x, y), ale punctului material M şi timpul t : x= f(t), y=g(t).

Fie {O, $\bar{i}$, $\bar{j}$} (xOy) un reper cartezian în spațiul punctual euclidian E_2. Definiția următoare permite introducerea riguroasă a noțiunii de curbă plană folosind diferite tipuri de reprezentări: explicită, implicită, parametrică etc.

Definiția 8.1.1 *Numim arc simplu de curbă plană, mulțimea (C) a punctelor $M(x, y) \in E_2$ care satisfac o ecuație de tipul*

(8.1.1) $y = f(x),\ a < x < b$, *unde* $a, b \in \boldsymbol{R}$ *sunt fixate,*

sau o ecuație de tipul

(8.1.2) $F(x, y)=0,\ a_1 < x < a_2,\ b_1 < y < b_2$ *cu* $a_1, a_2, b_1, b_2 \in \boldsymbol{R}$

sau un sistem de forma

(8.1.3) $$\begin{cases} x = g(t) \\ y = h(t) \end{cases}, \ c_1 < t < c_2, \ cu\ c_1, c_2 \in \mathbf{R},$$

unde f, F, g, ḥ sunt funcţii reale, de clasă cel puţin C^1 *pe domeniile lor de definiţie, iar g şi h stabilesc o corespondenţă bijectivă şi bicontinuă între punctele M ∈ (C) şi mulţimea valorilor parametrului t ∈* (c_1, c_2).

Dacă arcul simplu de curbă *(C)* este definit prin ecuaţia (8.1.1), spunem că avem o *reprezentare (carteziană) explicită* a acestuia. În cazul utilizării ecuaţiei (8.1.2) avem o *reprezentare implicită*, iar în cazul sistemul (8.1.3) o *reprezentarea parametrică*.

Fie *f* o funcţia de clasă cel puţin C^1 pe intervalul (t_1, t_2). Dacă (ρ, θ) este un sistem de coordonate polare în E_2, atunci mulţimea punctelor $M(\rho, \theta) \in E_2$, ale căror coordonate polare satisfac ecuaţia

(8.1.4) $$\rho = f(\theta), \ \theta \in (t_1, t_2),$$

defineşte de asemenea un arc simplu de curbă. Reprezentarea (8.1.4) se *numeşte ecuaţia în coordonate polare a arcului de curbă*. Asemănător, mulţimea punctelor $M \in E_2$, al căror vector de poziţie $\bar{r}$ satisface ecuaţia

(8.1.5) $$\bar{r} = \bar{r}(t), \ c_1 < t < c_2, \ c_1, c_2 \in \mathbf{R} \ \ (\bar{r}(t) = g(t)\bar{i} + h(t)\bar{j},$$

unde g, h îndeplinesc condiţiile din definiţia de mai sus) reprezintă un arc simplu de curbă. Ecuaţia (8.1.5) se numeşte *ecuaţia vectorială a arcului de curbă (C)*.

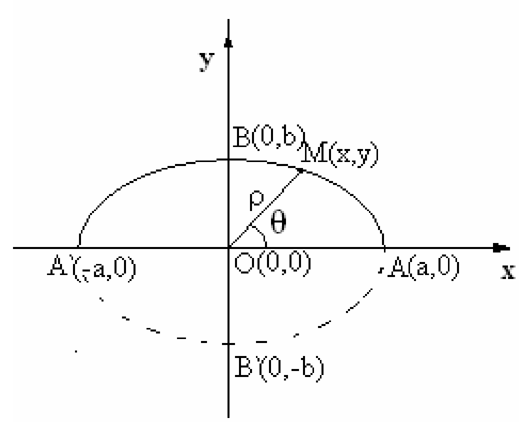

Fig. 40

Exemplu 8.1.2 *a) Se consideră porţiunea situată deasupra axei Ox din elipsa cu centrul în originea O(0, 0) a* *reperului cartezian xOy şi vârfurile în punctele A(a, 0) , A`(-a, 0) , B(b, 0), B`(-b, 0)(Vezi Fig. 40).*

Ecuaţia carteziană explicită a acestui arc de elipsă este y = $\sqrt{\frac{x^2}{a^2}-1}$, *x∈ (-a, a), iar ecuaţia implicită este* $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-1 = 0$, *y > 0, x ∈ (-a, a).*

Deoarece funcţiile f(x) = $\sqrt{\frac{x^2}{a^2}-1}$, *F(x, y) =* $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-1$ *satisfac condiţiile din definiţia de mai sus, deducem că porţiunea de elipsă descrisă este un arc simplu de curbă. Ecuaţiile parametrice ale acestui arc sunt*

$\begin{cases} x = a\cos t \\ y = b\sin t \end{cases}$ *t∈ (0,π) iar cele vectoriale* $\bar{r} = a\cos(t)\bar{i} + b\sin(t)\bar{j}$, *t ∈ (0,π).*

În ceea ce priveşte ecuaţiile în coordonate polare, acestea sunt $\rho = \frac{a^2b^2}{a^2\cos^2\theta + b^2\sin^2\theta}$, *θ ∈ (0,π). Observăm că, în cazul în care a = b, arcul de curbă descris mai sus reprezintă semicercul de rază r = a, cu centrul în originea reperului cartezian xOy, situat deasupra axei Ox.*

Definiţia 8.1.2 *O mulţime de puncte (C) se numeşte arc regulat de curbă plană dacă (C) este un arc simplu de curbă plană şi, în reprezentările (8.1.2) şi (8.1.3), sunt îndeplinite condiţiile*

(8.1.6) $(F`_x)^2 + (F`_y)^2 > 0$, $a_1 < x < a_2$, $b_1 < y < b_2$ ($F`_x = \frac{\partial F}{\partial x}$, $F`_y = \frac{\partial F}{\partial y}$) *şi respectiv*

(8.1.7) $(g`(t))^2 + (h`(t))^2 > 0$, $c_1 < t < c_2$.

Condiţia (8.1.6) din definiţia de mai sus arată că, în cazul arcelor regulate de curbă, derivatele $F`_x$ şi $F`_y$ din reprezentarea implicită nu se anulează simultan în punctul de coordonate $(x, y) \in (a_1, a_2)\times(b_1, b_2)$. Analog, în cazul reprezentării parametrice condiţia (8.1.7) exprimă faptul că g`(t) şi h`(t) nu sunt simultan nule în nici un $t \in (c_1, c_2)$.

Dacă în Definiţia 8.1.2 cerem ca funcţiile *F, g* şi *h* să fie continue pe mulţimea de definiţie şi să aibă derivate (eventual derivate parţiale) până la un ordin *n*(inclusiv *n*) continue (adică funcţiile să fie de clasă C^n) şi cel puţin una din derivatele de ordinul *n* să nu se anuleze pe mulţimea de definiţie, atunci arcul regulat se spune că este arc regulat de ordinul *n* sau de clasă *n*.

Condiţiile (8.1.6), (8.1.7) se numesc *condiţii de regularitate*.

Definiţia 8.1.3 *Un punct M de pe arcul simplu de curbă (C) se numeşte punct regulat dacă el îndeplineşte toate condiţiile de regularitate. În caz contrar, punctul se numeşte punct singular.*

Din definiţiile de mai sus deducem că un arc regulat este constituit numai din puncte regulate, exceptând eventual extremităţile.

Definiţia 8.1.4 *Numim curbă de clasă n, o reuniune de arce regulate de clasă n.*

Deci, dacă (C_i) $(i \in I)$ este o mulţime de arce regulate de clasă *n*, atunci curba *(C)* de clasă *n* arată ca în Fig. 41. (Se observă că ea poate avea şi întreruperi.)

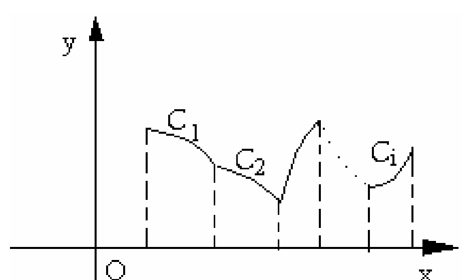

Fig. 41

II. Dreapta tangentă şi dreapta normală într-un punct regulat

Definiţia 8.1.5 *Fie $M_0(x_0, y_0)$ un punct regulat al curbei (C) şi fie $M_1(x_1, y_1) \in$ (C) un punct oarecare. Dreapta tangentă la curba (C) în punctul regulat M_0 este limita dreptei M_1M_0, secantă la curbă, când $M_1 \to M_0$ (Fig. 42).*

Fie curba *(C),* a cărei ecuaţie parametrică este y = f(x), şi fie $M_0(x_0, y_0)$ un punct regulat al ei, iar $M_1(x_1, y_1)$ un punct oarecare pe curbă.

Căutăm ecuaţia dreptei tangente la curba *(C)* în punctul M_0.

Ecuaţia secantei M_1M_0 este $\frac{x-x_0}{x_1-x_0} = \frac{y-y_0}{y_1-y_0}$. Ţinând cont de ecuaţia parametrică a curbei, ecuaţia secantei M_1M_0 se mai scrie $\frac{x-g(t_0)}{g(t_1)-g(t_0)} = \frac{y-h(t_0)}{h(t_1)-h(t_0)}$.

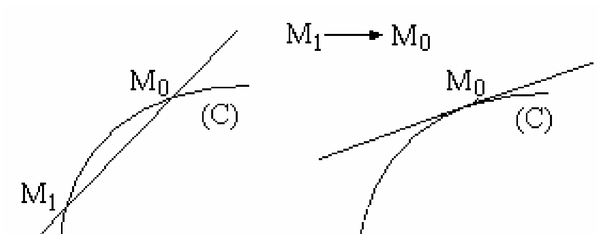

Fig. 42

Conform definiţiei de mai sus, ecuaţia tangentei în punctul M_0 se obţine trecând la limită, pentru $t_1 \to t_0$, în ecuaţia secantei M_1M_0. Obţinem

(8.1.8) $$\frac{x-g(t_0)}{g`(t_0)} = \frac{y-h(t_0)}{h`(t_0)}.$$

Ecuaţia (8.1.8) reprezintă *ecuaţia dreptei tangente la curba (C)* în punctul regulat $M_0 \in$ *(C)* atunci când curba este reprezentată parametric.

Dacă folosim reprezentarea explicită (8.1.1) a curbei *(C)*, observăm că $f`(x_0) = \frac{g`(t_0)}{h`(t_0)}$, $x_0 = g(t_0)$, $y_0 = f(x_0) = h(t_0)$. Aplicând (8.1.8), obţinem

(8.1.9) $$y - y_0 = f`(x_0)(x - x_0),$$

adică *ecuaţia tangentei în punctul M_0* în cazul reprezentării explicite.

În cazul curbei date prin ecuaţia implicită F(x, y) = 0, ţinem cont de formula de derivare a funcţiilor implicite şi avem

$y`(x_0) = -\frac{F`_x(x_0, y_0)}{F`_y(x_0, y_0)} = -\frac{g'(t_0)}{h`(t_0)}$. În acest caz, ecuaţia (8.1.8) devine

(8.1.10) $$(y - y_0)F`_y(x_0, y_0) + (x - x_0)F`_x(x_0, y_0) = 0.$$

Am obţinut teorema următoare:

Teorema 8.1.2 *Considerăm curba (C) şi $M_0(x_0, y_0)$ un punct regulat al ei. În cazul reprezentării parametrice (8.1.3) a curbei (C), ecuaţia tangentei în punctul $M_0(x_0, y_0)$ este (8.1.8); în cazul reprezentării explicite (8.1.1) a curbei (C), ecuaţia tangentei este (8.1.9), iar în cazul reprezentării implicite de ecuaţia tangentei este (8.1.10).*

Definiţia 8.1.6 *Dreapta normală într-un punct regulat al unei curbe plane este dreapta ce trece prin acel punct şi este perpendiculară pe dreapta tangentă în punctul respectiv.*

Din definiţia de mai sus şi Teorema 8.1.2 rezultă imediat ecuaţiile normalei la o curbă plană într-un punct regulat al acesteia.

Teorema 8.1.3 *Fie $M_0(x_0, y_0)$ un punct regulat al curbei (C). În cazul în care curba (C) are reprezentarea parametrică (8.1.3), ecuaţia dreptei normale în punctul $M_0(x_0, y_0)$ este*

(8.1.11) $$\frac{x - g(t_0)}{h`(t_0)} + \frac{y - h(t_0)}{g`(t_0)} = 0;$$

în cazul reprezentării carteziene explicite (8.1.1), ecuaţia normalei este

(8.1.12) $$(y - y_0) f`(x_0) + (x - x_0) = 0,$$

iar în cazul reprezentării implicite ecuaţia căutată este

(8.1.13) $(y - y_0)F`_x(x_0, y_0) - (x - x_0)F`_y(x_0, y_0) = 0.$

III. Curbura şi rază de curbură

Înainte de a da definiţia următoare, reamintim că lungimea arcului de curbă AB, A(x_A, y_A), B(x_B, y_B) ∈ *(C)* este dată de formula

(8.1.14) $l_{AB} = \int_{x_a}^{x_B} \sqrt{1 + (f`(x))^2}\, dx$, în cazul reprezentării carteziene explicite (8.1.1) şi de formula

(8.1.15) $l_{AB} = \int_{t_a}^{t_B} \sqrt{(g`(t))^2 + (h`(t))^2}\, dt$, în cazul reprezentării parametrice (8.1.2), unde $x_A = g(t_A)$, $x_B = h\,(t_B)$.

Definiţia 8.1.7 *a) Numim unghi de contingenţă al unui arc de curbă şi-l notăm $\Delta\alpha$, unghiul ascuţit format de tangentele duse la extremităţile arcului (Fig. 43).*

b) Numim curbură medie a unui arc de curbă, şi o notăm cu K_m, raportul dintre unghiul de contingenţă şi lungimea arcului:

(8.1.15) $$K_m = \frac{\Delta\alpha}{\Delta s}$$

c) Numim curbura unei curbe într-un punct şi o notăm cu K sau $\frac{1}{R}$, limita curburii medii când lungimea arcului tinde către zero

(8.1.16) $$K = \frac{1}{R} = \lim_{\Delta s \to 0} \frac{\Delta\alpha}{\Delta s}.$$

Inversul curburii poartă numele de raza de curbură a curbei în acel punct.

În cele ce urmează vom determina o expresie analitică pentru calculul curburii. Pentru început, considerăm reprezentarea explicită (8.1.1) a curbei *(C)*. Presupunem că funcția f(x) este de clasă cel puțin 2 în vecinătatea unui punct regulat $M_0(x, y)$ al curbei. Considerăm punctul $M_1(x + \Delta x, y + \Delta y)$, infinit apropiat de M, şi (T_0), (T) tangentele în M_0 şi respectiv M_1, care formează cu axa Ox unghiurile φ şi respectiv $\varphi + \Delta\varphi$ (Fig. 43). Presupunem în plus că $f`` \neq 0$. Este uşor de văzut că unghiul $\varphi + \Delta\varphi$, ca unghi exterior, este egal cu suma unghiurilor φ şi $\Delta\alpha$. Deci $\Delta\varphi = \Delta\alpha$. De asemenea, observăm că dacă $\Delta s \to 0$ $(M_1 \to M_0)$, atunci $\Delta x \to 0$. Deci

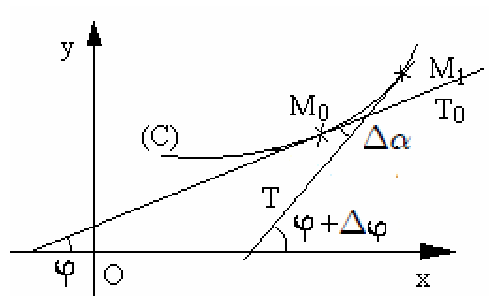

Fig. 43

$$K = \lim_{\Delta s \to 0} \frac{\Delta\alpha}{\Delta s} = \lim_{\Delta s \to 0} \frac{(\Delta\varphi / \Delta x)}{(\Delta s / \Delta x)} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(\Delta\varphi / \Delta x)}{(\Delta s / \Delta x)} = \frac{(d\varphi / dx)}{(ds / dx)}.$$

Interpretarea geometrică a derivatei, *tg* $\varphi = f`(x) \Leftrightarrow \varphi = arctg\ f`(x)$, conduce la relația $d\varphi / dx = \frac{1}{1 + (f`(x))^2} f``(x)$. Pe de altă parte, din formula (8.1.14), rezultă că $ds / dx = \sqrt{1 + (f`(x))^2}$ şi

(8.1.17) $$K = \frac{f``(x)}{\left[1 + (f`(x))^2\right]^{3/2}}, \quad R = \frac{\left[1 + (f`(x))^2\right]^{3/2}}{f``(x)}.$$

Teorema 8.1.4 *Fie (C) o curbă plană, de clasă cel puțin 2 într-o vecinătate a punctului său regulat şi neinflexionar (* $y``(x) \neq 0$*) M(x, y). a)În cazul reprezentării explicite (8.1.1) a curbei*

(C) curbura şi respectiv raza de curbură în punctul M sunt date de relaţia (8.1.17).

b) În cazul reprezentării implicite (8.1.2) a curbei (C), curbura este dată de formula

(8.1.18) $$K = -\frac{(F_y`)^2 F_{xx}`` - 2F_x`F_y`F_{xy}`` + (F_x`)^2 F_{yy}``}{(F_y`)^2 + (F_x`)^2}.$$

c) În cazul reprezentării parametrice (8.1.3) curbura este

(8.1.19) $$K = -\frac{g`(x)h``(x) - h`(x)g``(x)}{(g`(x))^2 + (h`(x))^2}.$$

Demonstraţie. Deoarece cazul a) a fost demonstrat, este suficient să arătăm b) şi c). b) Teorema de derivare a funcţiilor implicite ne asigură că $f`(x) = y`(x) = -\frac{F`_x(x,y)}{F`_y(x,y)}$. Derivând încă o dată pe $f`(x)$ în raport cu *x* obţinem $f``(x) = \frac{(F_y`)^2 F_{xx}`` - 2F_x`F_y`F_{xy}`` + (F_x`)^2 F_{yy}``}{(F_y`)^3}$. Înlocuind expresiile obţinute pentru $f`(x)$ şi $f``(x)$ în (8.1.17) obţinem (8.1.18). c) Reamintim că $f`(x) = -\frac{g'(t)}{h`(t)} = -\frac{\dot{g}}{\dot{h}}$. Deci $f``(x) = -\frac{\dot{g}\ddot{h} - \ddot{g}\dot{h}}{(\dot{h})^2}$. Din (8.1.17) rezultă (8.1.19) prin înlocuire directă.

Este bine-cunoscut următorul rezultat: Curbura unei curbe este identic nulă dacă şi numai dacă curba este o dreaptă (pentru detalii vezi [1]). Rezultă următoarea interpretare: curbura unei curbe într-un punct măsoară abaterea curbei de la o linie dreaptă, anume abaterea de la dreapta tangentă la curbă în punctul respectiv.

VI. Puncte multiple ale unei curbe plane

Fie *(C)* o curbă definită de ecuaţia *F(x, y) = 0*. Punctul M(*x, y*) ∈ *(C)* se numeşte punct multiplu de ordinul *n*, dacă funcţia *F(.,.)* împreună cu toate derivatele sale parţiale până la ordinul *n-1* inclusiv se anulează în acest punct şi cel puţin o derivată parţială de ordinul *n* este diferită de zero în M(*x, y*).

Propoziţia 8.1.1. *Fie (C) o curbă definită de ecuaţia F(x, y) = 0, unde F este o funcţie de clasă C^2. Într-un punct dublu, M(x, y)∈ (C), pantele tangentelor la cele două ramuri ale curbei sunt rădăcinile ecuaţiei în m*

(8.1.20) $$m^2 F_{yy}``(x, y) + 2m F_{xy}``(x, y) + F_{xx}``(x, y) = 0.$$

Demonstraţie. Dacă punctul $M_0(x_0, y_0)$ este un punct dublu al curbei *(C)*, atunci $F(x_0, y_0) = 0$, $F_x`(x_0, y_0) = 0$, $F_y`(x_0, y_0) = 0$. Panta tangentei în M_0 este $m = -\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} \frac{F_x`(x,y)}{F_y`(x,y)}$. Cum M_0 este punct dublu, rezultă $m = -\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} \frac{F_x`(x,y) - F_x`(x_0,y_0)}{F_y`(x,y) - F_y`(x_0,y_0)}$. Aplicând teorema lui l` Hospital, avem $m = -\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} \frac{F_{xx}``(x,y) + F_{xy}``(x,y)y`(x)}{F_{yx}``(x,y) + F_{yy}``(x,y)y`(x)}$. Deoarece derivatele mixte sunt egale, iar $y`(x_0) = m$, trecem la limită şi eliminând numitorii obţinem ec. (8.1.20).

În funcţie de natura rădăcinilor ecuaţiei (8.1.20) avem următoarele situaţii (vezi Fig. 44):

Definiţia 8.1.8 *a) Punctul dublu $M_0(x_0, y_0)$ este eliptic dacă* $\Delta_{x_0y_0} \overset{not}{=} (F_{xy}``(x_0, y_0))^2 - F_{xx}``(x_0, y_0)\, F_{yy}``(x_0, y_0) < 0$. *În acest caz cele două tangente sunt imaginare iar punctul $M_0(x_0, y_0)$ este un punct izolat.*

b) Punctul dublu $M_0(x_0, y_0)$ este hiperbolic dacă $\Delta_{x_0y_0} > 0$. Atunci ecuaţia (8.1.20) are două rădăcini reale şi distincte. Acestea corespund celor două tangente *(distincte) la curbă în punctul M_0. Prin punct trec două ramuri ale curbei. Punctul M_0 se numeşte nod.*

c) Punctul dublu $M_0(x_0, y_0)$ este parabolic dacă $\Delta_{x_0y_0} = 0$. De această dată ecuaţia (8.1.20) are două rădăcini reale egale. Corespunzător, există două tangente la curbă în punctul M_0 reale şi confundate. Spunem că punctul M_0 este punct de întoarcere.

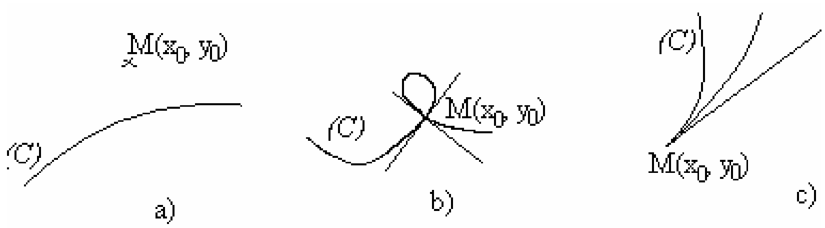

Fig. 44

8.2. Curbe în spaţiu

Fie $\{O, \bar{i}, \bar{j}, \bar{k}\}$ (notat Oxyz) un reper cartezian ortonormat în spaţiul punctual euclidian E_3.

Definiţia 8.2.1 *Numim arc simplu de curbă în spaţiu, mulţimea (C) a punctelor $M(x, y, z) \in E_3$ care satisfac fie ecuaţiile*

(8.2.1) $y = f(x,y),\ z = g(x, y),\ (x, y) \in (a, b) \times (c, d),\ a, b, c, d \in \mathbf{R}$

fie ecuaţii de tipul

(8.2.2) $F(x, y, z) = 0,\ G(x, y, z) = 0,\ (x, y, z) \in (a_1, b_1) \times (a_2, b_2) \times (a_3, b_3),\ a_i,\ b_i \in \mathbf{R},\ i = 1, 2, 3,$ *fie un sistem de forma*

(8.2.3) $$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t), \quad t \in (t_1, t_2),\ t_1, t_2 \in \mathbf{R}, \\ z = z(t) \end{cases}$$

unde f, g, F, G, x ,y, z sunt funcţii reale de clasă cel puţin C^1 *pe domeniile lor de definiţie, funcţiile F şi G satisfac teorema de existenţă a funcţiilor implicite (p. 258 [8]) iar funcţiile x(.), y(.) şi z(.) stabilesc o corespondenţă bijectivă şi bicontinuă între punctele M* $\in$ *(C) şi mulţimea valorilor parametrului* $t \in (t_1, t_2)$.

Ecuaţia (8.2.1) poartă numele de *reprezentare explicită a arcului simplu de curbă (C)*, ecuaţia (8.2.2) este *reprezentarea implicită* a acestuia, iar sistemul (8.1.3) furnizează *reprezentarea parametrică a lui (C).*

Fie $\bar{r}$ vectorul de poziţie al punctului M $\in$ *(C)*. Dacă funcţiile x(.), y(.) şi z(.) sunt cele din definiţia de mais sus, atunci ecuaţia

(8.2.4) $$\bar{r} = x(t)\bar{i} + y(t)\bar{j} + z(t)\bar{k},\ t_1 < t < t_2,\ t_1, t_2 \in \mathbf{R}$$

se numeşte *ecuaţia vectorială a arcului simplu de curbă (C).*

Introducem notaţia $\frac{D(F,G)}{D(y,z)}$ pentru determinantul funcţional $\begin{vmatrix} F`_y & F`_z \\ G`_y & G`_z \end{vmatrix}$. În mod asemănător se definesc şi determinanţii $\frac{D(F,G)}{D(z,x)}$, $\frac{D(F,G)}{D(x,y)}$.

Ca şi în cazul curbelor plane, avem următoarele condiţii de regularitate:

(8.2.5) $\frac{D(F,G)}{D(y,z)} \neq 0$ sau $\frac{D(F,G)}{D(z,x)} \neq 0$ sau $\frac{D(F,G)}{D(x,y)} \neq 0$ - în cazul curbelor definite implicit prin ecuaţiile (8.2.2) şi

(8.2.6) $(x`(t))^2 + (y`(t))^2 + (z`(t))^2 \neq 0$ - în cazul curbelor definite prin ecuaţiile parametrice (8.2.3).

Astfel, un arc simplu de curbă în spaţiu *(C)* se numeşte *arc regulat de curbă* dacă în reprezentările (8.2.2) sau (8.2.3), sunt îndeplinite condiţiile (8.2.5), respectiv (8.2.6). Un *punct* M, de pe un arc simplu de curbă *(C)*, se numeşte *regulat* dacă îndeplineşte toate condiţiile de regularitate. În caz contrar, se spune că punctul este *singular*.

I. Dreapta tangentă şi planul normal la o curbă în spaţiu

Fie *(C)* o curbă definită parametric prin ecuaţiile (8.2.3) şi fie (8.2.4) ecuaţia sa vectorială. Reamintim formula de calcul a lungimii arcului regulat de curbă AB

(8.2.7) $$l_{AB} = \int_{t_a}^{t_B} \sqrt{(x`(t))^2 + (y`(t))^2 + (z`(t))^2}\, dt.$$

Dreapta tangentă la curbă în punctul regulat M_0 $(x_0, y_0, z_0) \in (C)$ este poziţia limită a dreptelor M_0M_1 atunci când $M_1 \in (C)$, $M_1 \to M_0$. Se cunoaşte, (vezi cursul de analiză matematică sau [8] pentru detalii), că vectorul director al tangentei în punctul M_0 este

$$\frac{d\bar{r}}{dt}\Big|_{t=t_0} = \dot{\bar{r}}(t_0) = \dot{x}(t_0)\bar{i} + \dot{y}(t_0)\bar{j} + \dot{z}(t_0)\bar{k},\ x(t_0) = x_0,\ y(t_0) = y_0,\ z(t_0) = z_0.$$

Dacă $\bar{R}$ este vectorul de poziţie al unui punct arbitrar M(x, y, z) de pe tangentă, atunci ecuaţia vectorială a tangentei este $\bar{R} = \bar{r}(t_0) + \lambda\, \dot{\bar{r}}(t_0)$. Ecuaţiile dreptei tangente la *(C)* în punctul M_0, sub formă de rapoarte, se obţin imediat şi sunt următoarele

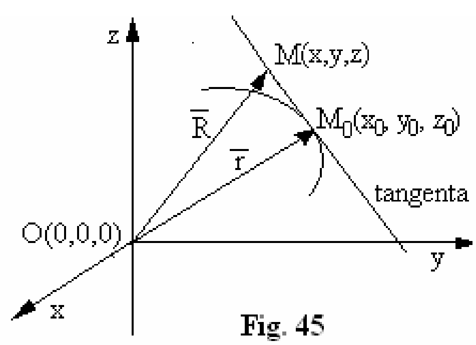

Fig. 45

(8.2.8) $$\frac{x - x(t_0)}{\dot{x}(t_0)} = \frac{y - y(t_0)}{\dot{y}(t_0)} = \frac{z - z(t_0)}{\dot{z}(t_0)}.$$

Dacă curba *(C)* este dată ca intersecţie a două suprafeţe, adică se cunosc ecuaţiile implicite (8.2.2), atunci presupunem că x = x(t); y = y (t); z = z (t) este o parametrizare a curbei. Prin derivare în raport cu *t*, obţinem: $$\begin{cases} F`_x x`(t) + F`_x y`(t) + F`_x z`(t) = 0 \\ G`_x x`(t) + G`_x y`(t) + G`_x z`(t) = 0 \end{cases}.$$

Pentru $t = t_0$, matricea sistemului are rangul doi, deoarece punctul M_0 este regulat. Putem presupune că, spre exemplu, determinantul $\frac{D(F,G)}{D(y,z)}$ este nenul în punctul M_0. Rezolvăm sistemul de mai sus prin regula lui Cramer şi, luând $z`(t_0)$ ca parametru, avem

(8.2.9) $\dfrac{\dot{x}(t_0)}{\frac{D(F,G)}{D(y,z)}} = \dfrac{\dot{y}(t_0)}{\frac{D(F,G)}{D(z,x)}} = \dfrac{\dot{z}(t_0)}{\frac{D(F,G)}{D(x,y)}}$. Aplicând (8.2.8), obţinem ecuaţiile tangentei în M_0 la curba *(C)*

(8.2.10) $$\frac{x - x(t_0)}{\frac{D(F,G)}{D(y,z)}} = \frac{y - y(t_0)}{\frac{D(F,G)}{D(z,x)}} = \frac{z - z(t_0)}{\frac{D(F,G)}{D(x,y)}}.$$

Definiţia 8.2.2 *Se numeşte plan normal (π_N) la curba (C) într-un punct regulat $M_0(x_0, y_0, z_0) \in (C)$, planul perpendicular în M_0 pe dreapta tangentă la curbă în punctul M_0.*

Dacă $\overline{R}$ (respectiv $\overline{r}(t_0)$) este vectorul de poziţie al unui punct arbitrar $M(x, y, z)$ situat în planul normal (π_N) (respectiv al punctului $M_0 \in$ *(C)*), atunci ecuaţia vectorială a planului normal este $<\overline{R} - \overline{r}(t_0), \dot{\overline{r}}(t_0)> = 0$.

De aici rezultă ecuaţia carteziană a planului normal:

(8.2.11) $(x - x(t_0))x`(t_0) + (y - y(t_0))y`(t_0) + (z - z(t_0))z`(t_0) = 0.$

În cazul în care curba (C) este dată prin ecuaţiile implicite (8.2.2), putem folosi formulele (8.2.9) pentru a rescrie ecuaţia (8.2.11) sub forma

(8.2.12) $$\begin{vmatrix} x - x(t_0) & y - y(t_0) & z - z(t_0) \\ F_x` & F_y` & F_z` \\ G_x` & G_y` & G_z` \end{vmatrix} = 0,$$

unde toate derivatele parţiale $F_x`$, $G_x`$ etc. se calculează în punctul (x_0, y_0, z_0).

II. Triedrul lui Frenet

Fie *(C)* o curbă de clasă cel puţin 2 şi fie M_0 un punct regulat al curbei. Fie $\bar{r}$ vectorul de poziţie al unui punct oarecare M $\in$ *(C)*. Presupunem că avem următoarea reprezentare vectorială a curbei *(C)* $\bar{r} = \bar{r}(t)$, $t \in I$, *I* un interval din **R** şi că vectorul de poziţie al punctului M_0 este $\bar{r}(t_0)$. Aşa cum am arătat în paragraful precedent vectorul $\dot{\bar{r}}(t_0)$ este vectorul director al tangentei în punctul M_0 la curbă.

Punctul M_0 se numeşte *neinflexionar* dacă $\ddot{\bar{r}}(t_0) \neq 0$ şi *inflexionar* dacă $\ddot{\bar{r}}(t_0) = 0$. Dacă, în plus, vectorii $\dot{\bar{r}}(t_0)$ şi $\ddot{\bar{r}}(t_0)$ sunt necoliniari, adică $\dot{\bar{r}}(t_0) \times \ddot{\bar{r}}(t_0) \neq 0$, atunci punctul M_0 se numeşte *nestaţionar*. În caz contrar, el se numeşte punct *staţionar* al curbei *(C)*).

Definiţia 8.2.3. *Se numeşte plan osculator (π_0) la curba (C) într-un punct neinflexionar şi nestaţionar $M_0(t_0) \in$ (C), planul care trece prin M_0 şi este paralel cu direcţiile vectorilor liberi $\dot{\bar{r}}(t_0)$ şi $\ddot{\bar{r}}(t_0)$.*

Dacă $\bar{R}$ este vectorul de poziţie al unui punct oarecare M(x, y, z) $\in$ (π_0), atunci ecuaţia vectorială a planului osculator este

$$\langle \bar{R} - \bar{r}(t_0), \dot{\bar{r}}(t_0) \times \ddot{\bar{r}}(t_0) \rangle = 0.$$

De aici rezultă ecuaţia carteziană a planului osculator:

$$\begin{vmatrix} x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \\ \dot{x}(t_0) & \dot{y}(t_0) & \dot{z}(t_0) \\ \ddot{x}(t_0) & \ddot{y}(t_0) & \ddot{z}(t_0) \end{vmatrix} = 0. \tag{8.2.13}$$

Se observă că planul osculator (π_0) conține dreapta tangentă la curbă în punctul M_0 şi este perpendicular pe planul normal, (π_N), în M_0.

De asemenea este important de reținut că, în punctele inflexionare sau staționare ale lui *(C)*, nu putem ataşa plan osculator.

Din acest motiv, în cele ce urmează, vom lua în considerare numai punctele $M_0 \in (C)$, neinflexionare şi nestaționare.

O altă observație importantă este aceea că planul osculator nu depinde de parametrizarea aleasă pe curba *(C)*.

Intersecția dintre planul normal (π_N) şi planul osculator (π_0) la curba *(C)* în punctul M_0 este în mod evident o dreaptă.

Definiția 8.2.4 *Dreapta de intersecție dintre planul normal (π_N) şi planul osculator (π_0) se numeşte normala principală la curba (C) în punctul M_0 şi va fi notată (n_p).*

Ecuația normalei principale, ca dreaptă de intersecție a celor două plane, este dată de sistemul format de ecuațiile (8.2.12) şi (8.2.13).

Pe de altă parte, se observă că vectorul director $\bar{v}_N$ al normalei principale este perpendicular pe fiecare din normalele celor două plane. Deci $\bar{v}_N$ este coliniar cu vectorul $(\dot{\bar{r}}(t_0) \times \ddot{\bar{r}}(t_0)) \times \dot{\bar{r}}(t_0)$. Dacă $\bar{R}$ este vectorul de poziție al unui punct oarecare $M(x, y, z) \in (n_p)$, atunci ecuația vectorială a normalei principale este

(8.2.14) $$\bar{R} - \bar{r}(t_0) = \lambda(\dot{\bar{r}}(t_0) \times \ddot{\bar{r}}(t_0)) \times \dot{\bar{r}}(t_0),\ \lambda \in \mathbf{R}.$$

Scriind această ecuație pe componente obținem ecuațiile carteziene canonice

(8.2.15) $$(n_p): \frac{x - x_0}{\begin{vmatrix} \dot{y} & \dot{z} \\ m & n \end{vmatrix}} = \frac{y - y_0}{\begin{vmatrix} \dot{z} & \dot{x} \\ n & l \end{vmatrix}} = \frac{z - z_0}{\begin{vmatrix} \dot{x} & \dot{y} \\ l & m \end{vmatrix}}$$, unde

(8.2.16) $$l = \begin{vmatrix} \dot{y} & \dot{z} \\ \ddot{y} & \ddot{z} \end{vmatrix},\ m = \begin{vmatrix} \dot{z} & \dot{x} \\ \ddot{z} & \ddot{x} \end{vmatrix},\ n = \begin{vmatrix} \dot{x} & \dot{y} \\ \ddot{x} & \ddot{y} \end{vmatrix}.$$

Definiția 8.2.5 *Dreapta perpendiculară pe planul osculator (π_0) în M_0 se numeşte dreaptă binormală (b_N).*

Observăm că am obținut în M_0 trei drepte perpendiculare două câte două, anume: dreapta tangentă la curba (C) în M_0, normala principală şi dreapta binormală. Este clar că dreapta binormală este conținută în planul normal, iar vectorul ei director este de fapt normala la planul osculator, adică vectorul liber $\dot{\bar{r}}(t_0) \times \ddot{\bar{r}}(t_0)$. Dacă $\bar{R}$ este vectorul de poziție al unui punct oarecare $M(x, y, z) \in (b_N)$, atunci ecuația vectorială a binormalei este

(8.2.17) $$\bar{R} - \bar{r}(t_0) = \lambda(\dot{\bar{r}}(t_0) \times \ddot{\bar{r}}(t_0)),\ \lambda \in \mathbf{R}.$$

De aici deducem ecuațiile carteziene generale ale binormalei

(8.2.18) (b_N) : $\frac{x - x_0}{l} = \frac{y - y_0}{m} = \frac{z - z_0}{n}$, unde *l, m* şi *n* sunt definiți de (8.2.16).

Definiția 8.2.6 *Se numeşte plan rectificat (sau rectificator) în M_0 planul ce trece prin M_0 şi este perpendicular pe normala principală în M_0.*

Ecuația vectorială a planului rectificat este $\langle \bar{R} - \bar{r}(t_0), (\dot{\bar{r}}(t_0) \times \ddot{\bar{r}}(t_0)) \times \dot{\bar{r}}(t_0)\rangle = 0$, deoarece normala principală în M_0 este de fapta normala la planul rectificat. Ecuația carteziană a planului rectificat este

(8.2.19) $$\begin{vmatrix} x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \\ \dot{x}(t_0) & \dot{y}(t_0) & \dot{z}(t_0) \\ l & m & n \end{vmatrix} = 0$$ cu *l, m* şi *n* definiți de (8.2.16).

Fie M(x, y, z) un punct regulat neinflexionar şi nestaţionar al curbei *(C)* (x = x(t), y = y(t), z = z(t)).

În continuare vom dicuta unele proprietăţi ale tangentei, normalei principale şi binormalei la curba *(C)* în punctul M.

În primul rând, observăm că versorul dreptei tangente este $\bar{\tau} = \dot{\bar{r}}(t)/\left\|\dot{\bar{r}}(t)\right\| = \frac{d\bar{r}}{ds}$, unde *s* semnifică lungimea arcului de curbă. Derivând relaţia $\langle \bar{\tau}, \bar{\tau} \rangle = 1$ în raport cu *s,* obţinem $2\langle \bar{\tau}, \frac{d\bar{\tau}}{ds} \rangle = 0$. Deci $\bar{\tau}$ şi $\frac{d\bar{\tau}}{ds}$ sunt vectori ortogonali. Deducem că $\frac{d\bar{\tau}}{ds}$ este o direcţie în planul normal. Un calcul simplu arată că $\frac{d\bar{\tau}}{ds} = \frac{d^2\bar{r}}{ds^2} = \frac{d}{ds}\frac{d\bar{r}}{ds} = \frac{d}{ds}\left(\frac{d\bar{r}}{dt}\frac{dt}{ds}\right) = \frac{d^2\bar{r}}{dt^2}\left(\frac{dt}{ds}\right)^2 + \frac{d\bar{r}}{dt}\frac{d^2t}{ds^2} = \ddot{\bar{r}}\left(\frac{dt}{ds}\right)^2 + \dot{\bar{r}}\frac{d^2t}{ds^2}$. Deoarece $\dot{\bar{r}}$ şi $\ddot{\bar{r}}$ sunt direcţii ce determină planul osculator, rezultă că $\frac{d\bar{\tau}}{ds}$ este o direcţie în planul osculator. Fiind direcţie atât în planul osculator cât şi în cel normal, $\frac{d\bar{\tau}}{ds}$ este vectorul director al normalei principale. Notăm cu $\bar{\nu}$ versorul $\frac{d\bar{\tau}}{ds} / \left\|\frac{d\bar{\tau}}{ds}\right\|$ şi îl vom numi versor normal principal. Deoarece binormala este perpendiculară atât pe dreapta tangentă cât şi pe normala principală, alegem versorul $\bar{\beta}$ al binormalei astfel încât reperul $\{M_0, \bar{\tau}, \bar{\nu}, \bar{\beta}\}$ să fie drept orientat (adică $\bar{\tau}\times\bar{\nu} = \bar{\beta}$, $\bar{\nu}\times\bar{\beta} = \bar{\tau}$, $\bar{\beta}\times\bar{\tau} = \bar{\nu}$). Atunci

- planul osculator este determinat de $\bar{\tau}$ şi $\bar{\nu}$,
- planul normal (π_N) este determinat de $\bar{\nu}$ şi $\bar{\beta}$ iar
- planul rectificat este determinat de $\bar{\tau}$ şi $\bar{\beta}$.

Definiţia 8.2.7. *a) Triedrul format de vectorii liberi* $\bar{\tau}, \bar{\nu}$ *şi* $\bar{\beta}$ *se numeşte triedrul lui Frenet.*

b) Scalarul K = $\left\| \frac{d\bar{\tau}}{ds} \right\|$ *se numeşte curbură a curbei (C) în punctul regulat M ∈ (C). Inversul curburii se numeşte rază de curbură R= 1/K.*

În cele ce urmează vom calcula şi derivatele $\frac{d\bar{\nu}}{ds}$, $\frac{d\bar{\beta}}{ds}$. Cum $\langle \bar{\nu}, \bar{\nu} \rangle = 1$, prin derivare rezultă că $\frac{d\bar{\nu}}{ds}$, $\bar{\nu}$ sunt vectori ortogonali. Analog se arată că $\frac{d\bar{\beta}}{ds}$ şi $\bar{\beta}$ sunt ortogonali. Deoarece triedrul lui Frenet formează o baza în V_3, avem $\frac{d\bar{\nu}}{ds} = a\bar{\beta} + b\,\bar{\tau}$ şi $\frac{d\bar{\beta}}{ds} = a_1\bar{\nu} + b_1\,\bar{\tau}$. Derivând relaţia $\langle \bar{\tau}, \bar{\nu} \rangle = 0$ obţinem $\langle \frac{d\bar{\tau}}{ds}, \bar{\nu} \rangle + \langle \bar{\tau}, \frac{d\bar{\nu}}{ds} \rangle = 0 \Leftrightarrow K + \langle \bar{\tau}, a\bar{\beta} + b\,\bar{\tau} \rangle = 0 \Leftrightarrow K + b = 0 \Leftrightarrow b = -K$. Procedând asemănător, se derivează relaţia $\langle \bar{\tau}, \bar{\beta} \rangle = 0$ şi se obţine $b_1 = 0$. Derivăm şi relaţia $\langle \bar{\nu}, \bar{\beta} \rangle = 0$ şi deducem că $a + a_1 = 0$. Notând scalarul a_1 cu *1/T* obţinem $a = -1/T$. Valoarea *1/T* se numeşte torsiunea curbei *(C)* în punctul M, iar *T* se numeşte raza de torsiune. Din cele de mai sus rezultă relaţia

(8.2.20) $$\begin{pmatrix} d\bar{\tau}/ds \\ d\bar{\nu}/ds \\ d\bar{\beta}/ds \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1/R & 0 \\ -1/R & 0 & 1/T \\ 0 & -1/T & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{\tau} \\ \bar{\nu} \\ \bar{\beta} \end{pmatrix},$$

cunoscută sub denumirea de formulele lui Frenet.

8.3. Exerciţii

1. (***Cisoida lui Diocles***) Cercul *(C)* de rază *r* şi centru A(*r*, 0) care intersectează axa Ox a reperului cartezian xOy în punctele O şi B. Fie D un

punct variabil pe tangenta în punctul B la cercul *(C)*. Notăm cu E intersecţia dreptei DO cu cercul *(C)*. a) Să se determine locul geometric al punctelor P(x, y) care satisfac condiţia $P \in OD$ şi DP = OE (Fig. 46).

b) Să se determine punctele singulare ale cisoidei şi să se precizeze care este ordinul lor de multiplicitate.

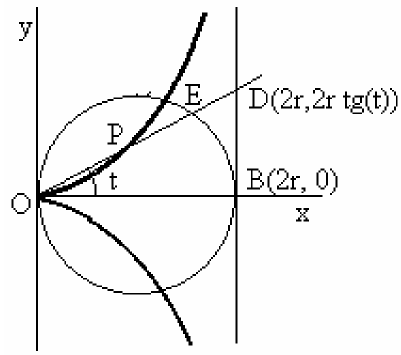

Fig. 46

R: Dacă (x, y) sunt coordonatele lui P, atunci folosim notaţiile din Fig. 46 şi avem x = OP cos t, y = OP sin t, OP = OD - PD = OD – OE = 2r/cos(t) – 2rcos (t) = 2r $\sin^2$(t)/cos(t). Deci x = 2r $\sin^2$(t), y = 2r $\sin^3$(t)/cos(t). Eliminând pe *t,* obţinem ecuaţia carteziană implicită F(x, y) = 0, unde F(x, y) = $x^3 + xy^2 - 2ry^2$. b) Deoarece $F`_x = 3x^2 + y^2$, $F`_y = 2xy - 4ry$ se anulează simultan dacă şi numai dacă x = y = 0, rezultă că O(0, 0) este singurul punct singular al cisoidei. El este un punct dublu deoarece $F``_{yy} = -4r \neq 0$ pentru x = y = 0. Punctul este parabolic.

2. (***Foliului lui Descartes***) Se considera curba a cărei ecuaţie implicită este $x^3 + y^3 - 2xy = 0$ (Fig. 47). a) Să se determine toate punctele duble ale curbei precum şi pantele tangentelor în acestea. b) Să se determine curbura şi raza de curbură în punctele de pe curbă ce au abscisa egală cu 1.

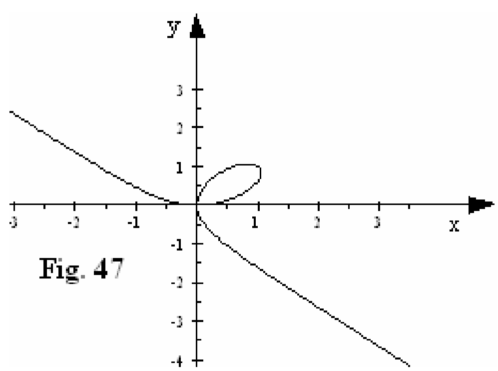

Fig. 47

R: a) Avem $F`_x = 3x^2 - 2y$, $F`_y = 3y^2 - 2x$, $F``_{xx} = 6x$, $F``_{xy} = -2$, $F``_{yy} = 6y$. Singurul punct de pe curbă în care se anulează derivatele parţiale de ordinul înâi este O(0, 0). Deoarece $F``_{xy} = -2 \neq 0$, rezultă că O(0, 0) este punct dublu. Cantitatea $\Delta_{x_0y_0}$, din Definiţia 8.1.8 este egală cu 4 în punctul (0, 0), deci avem de a face cu un punct hiperbolic. Rezolvând ecuaţia (8.1.20) rezultă că pantele celor două tangente în punct sunt $m_1=\infty$ şi $m_2 = 0$. Cele două tangente sunt axa Oy şi axa Ox.

b) Se deduce uşor că punctele de pe foliul lui Descartes care au abscisa egală cu 1 sunt (1, 1), (1, $\sqrt{5}$/2-1/2) şi (1, -$\sqrt{5}$/2-1/2). Aplicând formula (8.1.18) deducem că în cazul punctului (1, 1) curbura este K = 8, R = 1/8. În cazul punctului (1, $\sqrt{5}$/2-1/2) obţinem K = (59/610)$\sqrt{5}$+291/122 ≅ 2. 6015, R = 1/K ≅0.38439 şi pentru punctul (1, -$\sqrt{5}$/2-1/2) avem K = -(59/610)$\sqrt{5}$+291/122 ≅ 2. 1690, R = 1/K ≅0.46105.

3. (***Elicea cilindrică***) Fie curba (C) : x = 2cos t, y = 2sint, z =3t, t∈**R** (Fig. 48). a) Să se determine triedrul Frenet al curbei într-un punct oarecare. b) Să se scrie ecuaţia planului rectificator.

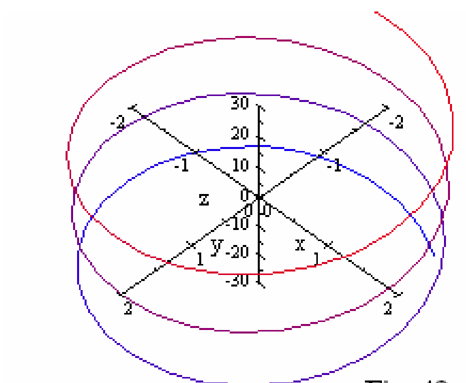

Fig. 48

R: Avem: $\dot{x}(t)$ = -2sint, $\dot{y}(t)$ = 2cost, $\dot{z}(t)$ = 3, $\ddot{x}(t)$ = -2 cost, $\ddot{y}(t)$ = - 2sint, $\ddot{z}(t)$ = 0. Versorul dreptei tangente este $\bar{\tau}$ = -2/$\sqrt{13}$ sin(t) $\bar{i}$ + 2/$\sqrt{13}$ cos(t) $\bar{j}$ + 3/$\sqrt{13}$ $\bar{k}$. Ecuaţia planului osculator este (vezi relaţia (8.2.13))

$$\begin{vmatrix} x-2\cos(t) & y-2\sin(t) & z-3t \\ -2\sin(t) & 2\cos(t) & 3 \\ -2\cos(t) & -2\cos(t) & 0 \end{vmatrix} = 0$$

⇔ 3 sin(t)(x – 2cos(t)) - 3 cos(t)(y – 2sin(t)) +2(z – 3t) = 0. De aici deducem că un versor al binormalei este $\bar{\beta}$= 3/$\sqrt{13}$ sin(t) $\bar{i}$ - 3/$\sqrt{13}$ cos(t) $\bar{j}$ + 2/$\sqrt{13}$ $\bar{k}$. Atunci versorul normalei principale va fi $\bar{\nu}$ = $\bar{\beta}\times\bar{\tau}$ = -13(cos(t) $\bar{i}$ + sin(t) $\bar{j}$).

Ecuaţiile tangentei sunt $\frac{X-2\cos(t)}{-2\sin(t)}=\frac{Y-2\sin(t)}{2\cos(t)}=\frac{Z-3t}{3}$. Ecuaţiile normalei principale sunt $\frac{X-2\cos(t)}{\cos(t)}=\frac{Y-2\sin(t)}{\sin(t)}$, Y = 3t. Ecuaţiile binormalei sunt $\frac{X-2\cos(t)}{3\sin(t)}=\frac{Y-2\sin(t)}{-3\cos(t)}=\frac{Z-3t}{2}$. Ecuaţia planului rectificator este (X - 3cos(t)) cos(t) + (Y - 3sin(t)) sin(t) = 0.