Modulul 1

FUNDAMENTELE MECANICII

Conținutul modulului:
1.1 Noțiuni generale
1.2 Principiile fundamentale ale dinamicii
1.3 Teoreme generale în dinamica punctului material
1.4 Energia mecanică şi teoremele energiei

Evaluare:
1. **Definirea mărimilor fizice şi a unităților de măsură**
2. **Enunțul şi formula legilor fizice studiate**
3. **Răspunsuri la întrebările finale**

1.1 Noțiuni generale

Mecanica este acea parte a fizicii care studiază mişcarea corpurilor şi condițiile de echilibru al acestora. După mărimea vitezei de deplasare a corpurilor, se distinge mecanica clasică (corespunzând vitezelor de deplasare mult mai mici ca viteza luminii în vid, ($v << c$) şi mecanica relativistă (viteze comparabile cu viteza luminii în vid).

In funcție de caracterul problemelor abordate, mecanica clasică cuprinde trei părți:

- *statica* - acea parte care studiază condițiile de echilibru al corpurilor;
- *cinematica* - studiază mişcare corpurilor fără să țină seamă de cauzele care o determină;
- *dinamica* - studiază mişcare corpurilor având în vedere interacțiunile acestora în decursul mişcării.

Studiul mişcării corpurilor presupune localizarea lor în spațiu şi în timp. Pentru aceasta se alege un *sistem de referință*, care reprezintă un corp ales ca reper şi un ceasornic, cu ajutorul cărora se pot determina poziția şi durata. In general, sistemul de referință este reprezentat de un sistem triortogonal de axe în sens geometric şi un ceasornic.

Un *punct material* reprezintă un corp ale cărui dimensiuni pot fi neglijate. Punctul material în mişcare este denumit *mobil* , iar totalitatea punctelor succesive prin care trece mobilul în decursul mişcării sale formează *traiectoria* acestuia. Poziția unui punct material M , la un moment dat, pe traiectoria sa este dată de *vectorul de poziție* $\vec{r}$, (fig.1.1), care este, în general, funcție de timp:

$$\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k} \tag{1.1}$$

Deplasarea punctului material în decursul mişcării este dată de *vectorul deplasare* (fig.1.2):

$$\Delta\vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1 \qquad (1.2)$$

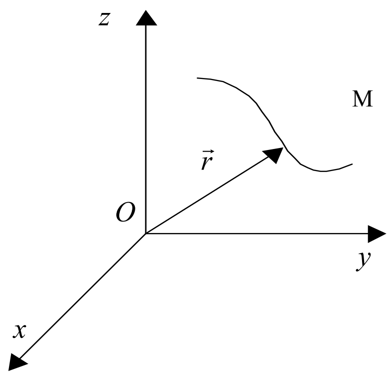

Fig. 1.1

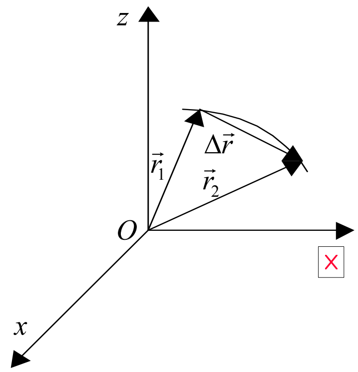

Fig. 1.2

Viteza medie a punctului material se defineşte prin:

$$\vec{v}_m = \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} \qquad (1.3)$$

iar *viteza momentană* se defineşte prin

$$\vec{v} = \lim_{\Delta t \to o} \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \dot{\vec{r}}\ , \qquad (1.4)$$

punctul din ultima expresie fiind o notaţie uzuală în fizică pentru derivata unei mărimi în raport cu timpul.Vectorul viteză momentană este în permanenţă tangent la traiectorie. In SI viteza se măsoară în m/s: $[v]_{SI} = 1\frac{m}{s}$. Cu ajutorul componentelor sale, viteza (momentană) se exprimă în forma:

$$\vec{v} = \dot{\vec{r}} = \dot{x}\vec{i} + \dot{y}\vec{j} + \dot{z}\vec{k} = v_x\vec{i} + v_y\vec{j} + v_z\vec{k} \qquad (1.5)$$

In mod asemănător, *acceleraţia medie* a mobilului este definită prin :

$$\vec{a}_m = \frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t} \qquad (1.6)$$

iar *acceleraţia momentană* prin:

$$\vec{a} = \lim_{\Delta t \to o} \frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \ddot{x}\vec{i} + \ddot{y}\vec{j} + \ddot{z}\vec{k} = a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k}\ . \qquad (1.7)$$

Unitatea de măsură a acceleraţiei în SI este 1m/s^2.

1.2 Principiile fundamentale ale dinamicii

Problema fundamentală a dinamicii şi totodată una din problemele principale ale mecanicii constă în determinarea legii de mişcare a fiecărui punct material al unui sistem mecanic dat, adică a dependenţei de timp a vectorului de poziţie, $\vec{r}(t)$, respectiv a componentelor acestuia $x(t),\ y(t),\ z(t)$, care reprezintă în acelaşi timp şi ecuaţia parametrică a traiectoriei; prin eliminarea parametrului timp se obţine ecuaţia traiectoriei $f(x,y,z)=0$. Rezolvarea acestei probleme se bazează pe câteva principii fundamentale obţinute prin generalizarea observaţiilor experimentale.

1^0. Principiul inerţiei sau prima lege a dinamicii (formulat de către Galilei) afirmă că *orice corp asupra căruia nu acţionează alt corp îşi păstrează starea de mişcare rectilinie şi uniformă sau de repaus relativ*.

Mişcarea unui corp asupra căruia nu acţionează un alt corp se numeşte *mişcare inerţială*. Fiecare mişcare mecanică este *relativă*, deoarece caracterul mişcării depinde de sistemul de referinţă ales. Acelaşi corp poate fi în repaus faţă de un sistem de referinţă, se mişcă rectiliniu şi uniform faţă de altul sau accelerat faţă de un al treilea sistem. Acele sisteme de referinţă în care este valabil principiul inerţiei se numesc *sisteme inerţiale*.

2^0. Principiul forţei sau a doua lege a dinamicii (Newton) afirmă că *o forţă care acţionează asupra unui corp îi imprimă acestuia o acceleraţie proporţională cu forţa* $\vec{F}$ *şi invers proporţională cu masa corpului m:*

$$\vec{F}=m\vec{a}=m\ddot{\vec{r}} \tag{1.8}$$

sau pe componente:

$$\begin{aligned} F_x &= ma_x = m\ddot{x}; \\ F_y &= ma_y = m\ddot{y}; \\ F_z &= ma_z = m\ddot{z}; \end{aligned} \tag{1.8'}$$

În SI masa se măsoară în kg iar forţa în N; $1N=1kg\dfrac{m}{s^2}$.

Aşadar forţa este o mărime vectorială care măsoară interacţiunea dintre corpuri, cauză a modificării stării de mişcare a acestora sau a deformării lor.

In mecanica clasică, masa corpurilor este constantă, nu depinde de starea de mişcare a acestora.

În relaţiile (1.8) şi (1.8') componentele forţei $\vec{F}$ depind, în general, atât de timp cât şi de coordonatele $x,\ y,\ z$ Ecuaţia (1.8), sau ecuaţiile echivalente (1.8'), reprezintă *ecuaţia diferenţială a mişcării corpului* (*ecuaţia de mişcare*) iar soluţiile corespunzătoare constituie legea de mişcare. În soluţiile obţinute prin integrarea ecuaţiilor diferenţiale (1.8') intervin constante arbitrare. Determinarea completă a legilor de mişcare necesită aflarea acestor constante ceea ce se poate face dându-se *condiţiile iniţiale* ale mişcării, adică *poziţia şi viteza punctului material la momentul t=0.*

3^0. Principiul acţiunii şi reacţiunii sau legea a treia a dinamicii (Newton) afirmă că *dacă un corp acţionează asupra altuiacu o forţă, cel de al doilea va acţiona asupra celui dintâi cu o forţă egală în modul şi opusă:*

$$\vec{F}_{12}=-\vec{F}_{21} \tag{1.9}$$

4^0. Principiul independenței acțiunii forțelor afirmă că *fiecare dintre forțele la care este supus un corp acționează independent de celelalte forțe aplicate*. Din acest principiu rezultă posibilitatea înlocuirii unui ansamblu de forțe $\vec{F}_1, \vec{F}_2, ...\vec{F}_n$ acționând asupra unui corp, printr-o *rezultantă* $\vec{R}$, egală cu suma vectorială a forțelor date:

$$\vec{R} = \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i \tag{1.10}$$

5^0. Principiul relativității clasice (Galilei) afirmă că *legile fenomenelor mecanice rămân neschimbate față de oricare sistem de referință inerțial.* O formulare echivalentă este*: prin nici o experiență mecanică efectuată în interiorul unui sistem de referință inerțial nu se poate pune în evidență mişcarea rectilinie şi uniformă sau starea de repaus relativ a acestuia față de alte referențiale inerțiale.*

Fie două sisteme de referință inerțiale S şi S' (fig. 1.3), sistemul S considerat fix şi sistemul S' în mişcare rectilinie şi uniformă cu viteza $\vec{v}$ față de S.

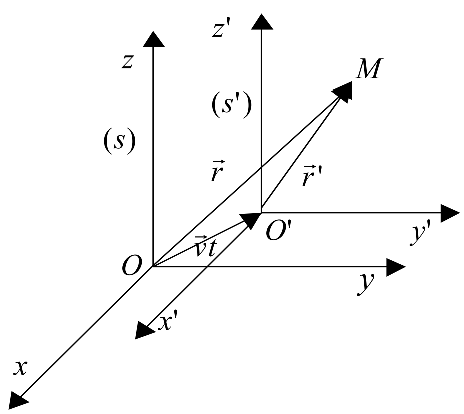

Fig. 1.3

ținând seama că în mecanica newtoniană timpul este absolut (nu depinde de sistemul de referință) şi dacă la $t = t' = 0$ cele două origini O şi O' coincid, se poate scrie:

$$\vec{r} = \vec{r}' + \vec{v}t \quad ; \quad t = t' \tag{1.11}$$

Aceste relații constituie *grupul de transformări Galilei* şi se pot scrie şi sub formă scalară:

$$x = x' + v_x t \;\; ; \;\; y = y' + v_y t \;\; ; \;\; z = z' + v_z t \;\; ; \;\; t = t' \tag{1.11'}$$

Derivând prima ecuație (1.11) în raport cu timpul se obține legea de compunere a vitezelor în mecanica clasică:

$$\dot{\vec{r}} = \dot{\vec{r}}' + \vec{v} \text{ sau } \vec{u} = \vec{u}' + \vec{v} \tag{1.12}$$

şi după o nouă derivare în raport cu timpul:

$$\ddot{\vec{r}} = \ddot{\vec{r}}' \text{ sau } \vec{a} = \vec{a}' \tag{1.13}$$

In mecanica newtoniană masa unui corp, accelerația sa precum şi forțele care o determină sunt aceleaşi față de orice referențial inerțial.

La viteze mari, care se apropie de viteza luminii în vid, $c \cong 3 \cdot 10^8\ m/s$, transformările lui Galilei nu mai sunt adecvate , ele se înlocuiesc cu *transformările lui Lorentz.*

Principiile mecanicii clasice pot fi aplicate şi *sistemelor de puncte* materiale cu condiţia să se ţină seama că în acest caz pot acţiona două tipuri de forţe (fig.1.4):

- *forţe interioare*, $\vec{F}^{(i)}$, cu care fiecare punct material actionează asupra celorlalte puncte din sistem;
- *forţe exterioare*, $\vec{F}^{(e)}$, care acţionează din exteriorul sistemului asupra fiecărui punct din sistem.

Astfel, legea a doua a lui Newton pentru un punct k al sistemului de n puncte materiale se scrie:

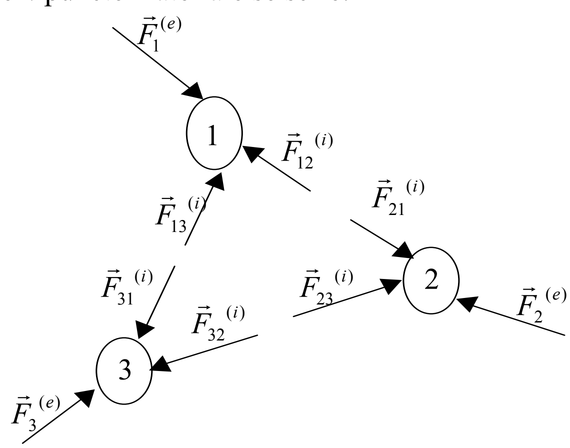

Fig. 1.4

$$m_k \ddot{\vec{r}}_k = \vec{F}_k^{(e)} + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^{n} \vec{F}_{kj}^{(i)} \tag{1.14}$$

unde $\vec{F}_{kj}^{(i)}$ este forţa interioară cu care punctul j din sistem actionează asupra punctului k .

1.3 Teoreme generale în dinamica punctului material

Teoremele generale din dinamica punctului material (numite uneori şi legi) sunt consecinţe directe ale principiilor fundamentale ale dinamicii.

<u>Teorema impulsului.</u>Se numeşte *impuls al punctului material* cu masa m care se mişcă cu viteza $\vec{v}$ mărimea:

$$\vec{p} = m\vec{v} \tag{1.15}$$

În SI impulsul se măsoară în $kg\frac{m}{s}$. Legea a doua a dinamicii pentru un punct material se poate scrie:

$$\vec{F} = m\vec{a} = m\frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d(m\vec{v})}{dt},$$

deci: $$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt}, \qquad (1.16)$$

adică *forța care acționează asupra punctului material este egală cu variația impulsului acestuia în unitatea de timp*, ceea ce constituie *teorema impulsului*. În dinamica clasică ecuațiile (1.16) şi (1.8) sunt echivalente deoarece masa *m* este constantă şi poate fi trecută sub operatorul de derivare, dar ecuația (1.16) este mai generală, fiind valabilă şi în cazul în care masa corpului variază în timpul mişcării.
Dacă rezultanta forțelor care acționează asupra punctului material este nulă, $\vec{F} = 0$, atunci din (1.16) rezultă $\vec{p}$ = constant, ceea ce constituie *teorema (legea) conservării impulsului* pentru punctul material.

Teorema impulsului se extinde şi asupra unui sistem de puncte materiale. Ținând seama că impulsul unui punct *k* din sistem este $\vec{p}_k = m_k\vec{v}_k = m_k\dot{\vec{r}}_k$, ecuația (1.15) devine:

$$\frac{d\vec{p}_k}{dt} = \vec{F}_k^{(e)} + \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq k}}^{n} \vec{F}_{kj}^{(i)}$$

Scriind astfel de relații pentru toate punctele sistemului şi însumând, obținem:

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{d\vec{p}_k}{dt} = \sum_{k=1}^{n}\vec{F}_k^{(e)} + \sum_{k=1}^{n}\sum_{\substack{j=1 \\ j\neq k}}^{n} \vec{F}_{kj}^{(i)}$$

Suma dublă se anulează, deoarece în baza principiului acțiunii şi reacțiunii $\vec{F}_{kj}^{(i)} = -\vec{F}_{jk}^{(i)}$; suma impulsurilor particulelor din sistem este impulsul sistemului:

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{d\vec{p}_k}{dt} = \frac{d}{dt}\sum_{k=1}^{n}\vec{p}_k = \frac{d\vec{p}_{sist.}}{dt}$$

iar $\sum_{k=1}^{n}\vec{F}^{(e)}_{k} = \vec{F}^{(e)}$ este rezultanta forțelor exterioare ce acționează asupra sistemului. Atunci se obține:

$$\frac{d\vec{p}_{sist.}}{dt} = \vec{F}^{(e)} \qquad (1.17)$$

care reprezintă *teorema impulsului pentru sistemul de puncte materiale*. Dacă rezultanta forțelor exterioare este nulă, $\vec{F}^{(e)} = 0$, din (1.17) se obține $\frac{d\vec{p}_{sist.}}{dt}=0$; $\vec{p}_{sist.}$= const. *ceea ce exprimă legea de conservare a impulsului.*

Teorema momentului cinetic. *Momentul cinetic* al unui punct material sau momentul impulsului (denumit şi moment unghiular) față de un punct (pol, în particular originea sistemului de referință) este vectorul

$$\vec{J} = \vec{r} \times \vec{p} = \vec{r} \times m\vec{v} \qquad (1.18)$$

unde $\vec{r}$ este vectorul de poziție al punctului material (având originea în pol).În SI, momentul cinetic se măsoară în $kg\frac{m^2}{s}$.

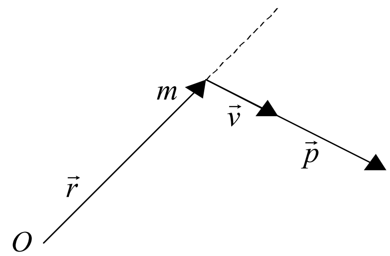

Fig. 1.5

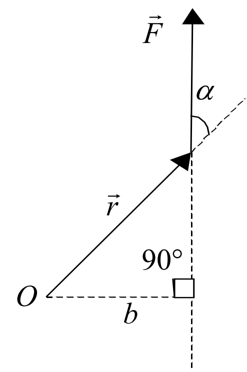

Fig. 1.6

Momentul unei forțe care acționează asupra unui punct material în raport cu un pol este vectorul:

$$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F} \qquad (1.19)$$

În SI, momentul forței se măsoară în Nm. Legea a doua pentru punctul material se scrie:

$$\vec{F} = m\frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d\vec{p}}{dt}$$

Înmulțind vectorial la stânga cu $\vec{r}$:

$$\vec{r} \times \vec{F} = \vec{r} \times \frac{d\vec{p}}{dt} = \frac{d}{dt}(\vec{r} \times \vec{p})$$

deoarece $\frac{d\vec{r}}{dt} \times \vec{p} = \vec{v} \times m\vec{v} = 0$, cei doi vectori ai produsului vectorial fiind coliniari.

Ținând seama de definițiile mărimilor $\vec{J}$ și $\vec{M}$, se obține:

$$\vec{M} = \frac{d\vec{J}}{dt} \qquad (1.20)$$

care constituie *teorema momentului cinetic*: *variația momentului cinetic al unui punct material în unitatea de timp este egală cu momentul forței care acționează asupra punctului material.*
Dacă momentul forței este nul, rezultă din (1.20) că momentul cinetic al punctului este constant, $\vec{J}$ = const., aceasta constituind *teorema conservării momentului cinetic.*

O relație asemănătoare cu (1.20) poate fi scrisă și pentru un sistem de puncte materiale.

1.4 Energia mecanică. Teoremele energiei

Descrierea dinamică a evoluției unui punct material ține seama din forțele care acționează asupra acestuia în fiecare punct al spațiului şi la fiecare moment de timp. Regiunea de spațiu, limitată sau nelimitată, unde în fiecare punct se face simțită acțiunea unei forțe asupra punctului material formează un *câmp de forțe*. Câmpul de forțe care nu depinde de timp se numeşte *staționar*. Dacă direcția forțelor câmpului în fiecare punct al său trece mereu prin acelaşi punct atunci câmpul se numeşte *central*.

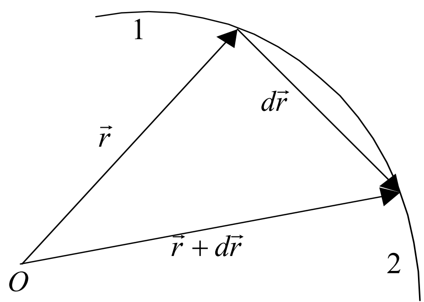

Fig. 1.7

Să considerăm un punct material în mişcare într-un câmp de forțe şi să presupunem că pe drumul elementar $d\vec{r}$ acționează forța $\vec{F}$ (care poate fi rezultanta mai multor forțe şi în general este variabilă). Mărimea

$$dL = \vec{F}d\vec{r} \tag{1.21}$$

se numeşte *lucrul mecanic elementar* al forței $\vec{F}$. Lucrul mecanic la o deplasare finită între două puncte 1 şi 2 de-a lungul unei traiectorii se obține prin integrare

$$L_{12} = \int_1^2 \vec{F}d\vec{r} \tag{1.22}$$

Ca urmare a acțiunii forței $\vec{F}$ pe drumul $d\vec{r}$, viteza punctului material variaza cu $d\vec{v}$, astfel că putem scrie:

$$dL = \vec{F}d\vec{r} = m\frac{d\vec{v}}{dt}d\vec{r} = m\vec{v}d\vec{v} = d\left(\frac{mv^2}{2}\right) = dE_c \tag{1.23}$$

Prin definiție mărimea $E_c = \dfrac{mv^2}{2}$ reprezintă *energia cinetică* a corpului care se mişcă cu viteza $\vec{v}$. Rezultatul obținut

$$dL = dE_c \tag{1.24}$$

sau, pentru o variație finită:

$$L_{12} = \int_1^2 dE_c = E_{c2} - E_{c1} \tag{1.25}$$

exprimă teorema variaţiei energiei cinetice: *lucrul mecanic (elementar) al rezultantei forțelor care acționează asupra unui corp este egal cu variația (elementară) a energiei cinetice a corpului.*

Se defineşte *puterea forțelor* care acționează asupra corpului ca fiind lucrul mecanic efectuat de forțe în unitatea de timp:

$$P = \frac{dL}{dt} = \vec{F} \cdot \vec{v} \qquad (1.26)$$

Atunci, împărțind (1.24) cu dt se obține:

$$P = \frac{dL}{dt} = \frac{dE_c}{dt} = \dot{E}_c \qquad (1.27)$$

In SI puterea se măsoară în watt (1W)

O altă formă a teoremei variației energiei cinetice: *variația energiei cinetice în unitatea de timp este egală cu puterea forțelor care acționează.*

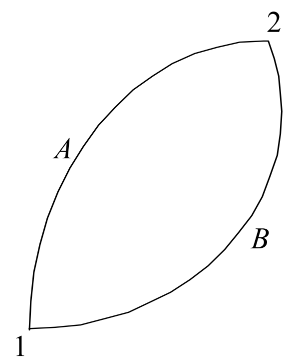

Fig. 1.8

Dacă lucrul forțelor câmpului la deplasarea între oricare două puncte ale unui câmp staționar nu depinde de drum (fig. 1.8), ci numai de poziția acestor puncte atunci câmpul se numeşte *potențial,* iar forțele se numesc *conservative* (derivă din potențial):

$$L_{12} = \int\limits_{\substack{1\\(A)}}^{2} \vec{F}_p d\vec{r} = \int\limits_{\substack{1\\(B)}}^{2} \vec{F}_p d\vec{r} \qquad (1.28)$$

Este evident că *lucrul mecanic al forțelor conservative de-a lungul unei traiectorii închise* (marcată prin cercul suprapus peste simbolul integralei) *este nul*:

$$\oint\limits_{1A2B1} \vec{F}_p d\vec{r} = 0 \qquad (1.29)$$

Ținând seamă de definiția (1.28), lucrul mecanic efectuat de forțele unui câmp potențial la deplasarea între două puncte se poate scrie:

$$L_{12} = \int\limits_{1}^{2} \vec{F}_p d\vec{r} = U(\vec{r}_1) - U(\vec{r}_2) \qquad (1.30)$$

sau, pentru o deplasare infinitesimală (elementară) :

$$dL = \vec{F}_p d\vec{r} = -dU\ , \tag{1.31}$$

în care mărimea fizică $U(\vec{r})$ reprezintă, prin definiție, *energia potențială* a punctului material aflat în câmpul potențial. Expresia (1.30) sau (1.31) reprezintă teorema variației energiei potențiale: *lucrul mecanic al forțelor conservative este egal cu variația energiei potențiale luată cu semn schimbat*. Se observă din (1.30) că energia potențială a punctului material într-un punct al câmpului este determinată numai dacă se alege ca referință energia într-un punct arbitrar.Exemple de câmpuri potențiale:

- *câmpul gravitațional*, în care forța de atracție gravitațională este conservativă; expresia energiei potențiale în câmp gravitațional uniform, cu accelerația gravitațională g, la înălțimea h față de nivelul de referință este $U = mgh$.

- *câmpul electrostatic*, creat de sarcini electrice; energia potențială a unei sarcini electrice q în punctul cu potențialul electric V este $U = qV$;

- *câmpul forțelor elastice*; energia potențială a unui sistem cu constanta elastică k deformat cu elongația x este $U = kx^2/2$.

Energia mecanică totală a unui punct material (sistem) este dată de suma dintre energia cinetică şi cea potențială a punctului material (sistemului):

$$E = E_c + U\ . \tag{1.32}$$

In general asupra unui punct material (sistem) acționează atât forțe conservative cât şi forțe neconservative; lucrul mecanic al rezultantei acestora este:

$$dL = \vec{F}_p d\vec{r} + \vec{F}_n d\vec{r} = -dU + \vec{F}_n d\vec{r} = dE_c \tag{1.33}$$

şi din ultima egalitate se obține:

$$dL_n = \vec{F}_n d\vec{r} = dE_c + dU = dE \tag{1.34}$$

sau pe o traiectorie finită:

$$L_{n12} = \int_1^2 \vec{F}_n d\vec{r} = \int_1^2 dE = E_2 - E_1 = \Delta E \tag{1.35}$$

adică *lucrul mecanic al forțelor neconservative este egal cu variația energiei totale a punctului material (sistemului)* .Exemple de forțe neconservative: forța de frecare (lucrul mecanic al acesteia este negativ şi duce la scăderea energiei totale), forța de tracțiune (lucrul mecanic este pozitiv şi duce la creşterea energiei totale).

Dacă asupra punctului material (sistemului) nu acționează forțe neconservative energia totală a sistemului rămâne constantă - legea conservării energiei mecanice.

Intrebări pentru verificarea însuşirii cunoştințelor şi

pentru evaluare:

1. **Definiți viteza şi accelerația unui mobil.**
2. **Dați enunțul şi expresia legii a doua a dinamicii.**
3. **Definiți impulsul unui punct material şi enunțați teorema impulsului.**
4. **Ce este momentul cinetic al unui punct material şi ce este momentul unei forțe?**
5. **Enunțați teorema momentului cinetic şi cea de conservare a momentului cinetic.**
6. **Cum se exprimă teorema variației energiei cinetice?**
7. **Ce este puterea unei forțe şi care este unitatea ei de măsură?**
8. **Enunțați teorema variației energiei potențiale.**
9. **Ce este energia mecanică totală? Conservarea ei.**