

Universitatea *Transilvania* din Braşov
Facultatea de Matematică–Informatică
Catedra de Informatică

ERNEST SCHEIBER

ANALIZĂ NUMERICĂ

Braşov

Cuprins

I	INTERPOLARE ȘI APLICAȚII	9
1	Diferențe finite	11
1.1	Diferențe finite	11
1.2	Ecuția cu diferențe liniară	14
1.2.1	Sistem fundamental de soluții	15
1.2.2	Determinarea unui sistem fundamental de soluții	17
1.2.3	Soluția ecuației cu diferențe neomogenă	20
1.3	Transformarea z	21
2	Elemente din teoria interpolării	31
2.1	Sisteme Cebîșev	31
2.2	Interpolare Lagrange	38
2.3	Interpolarea Lagrange-Hermite	39
2.4	Diferențe divizate	44
2.5	Algoritm pentru calculul diferenței divizate	54
3	Convergența procedeeor de interpolare prin polinoame	65
3.1	Spații liniar ordonate	65
3.2	Interpolare și aproximare	68
3.3	Divergența interpolării Lagrange	69
3.3.1	Stațiu topologic Baire	69
3.3.2	Principiul condensării singularităților	72
3.3.3	Norma operatorilor integrali	74
3.3.4	Norma operatorului Fourier	75
3.3.5	Divergența polinoamelor de interpolare Lagrange	77
4	Formule de derivare numerică	85
4.1	Aproximarea derivatei prin diferențe	85
4.1.1	Extrapolarea Richardson	86

4.2	Aproximarea derivatei prin interpolare	89
5	Formule de integrare numerică	91
5.1	Natura aproximării	92
5.2	Formule de tip Newton - Cotes	94
5.3	Evaluarea restului	96
5.4	Formula trapezului	102
5.5	Formula lui Simpson	104
5.6	Integrale de tip <i>Cauchy</i>	105
5.7	Polinoame ortogonale	107
5.8	Polinoame Legendre	112
5.9	Polinoame Hermite	115
5.10	Polinoamele lui Laguerre	118
5.11	Polinoame Cebişev	121
5.12	Formule de tip Gauss	121
5.13	Formula dreptunghiului ($n = 1$)	126
5.14	Cazuri speciale	128
5.14.1	Formula de integrare numerică Lobatto	128
5.14.2	Formula de integrare numerică Radau	130
5.14.3	Formula de cvadratură Gauss-Kronrod	131
5.15	Formula Euler-MacLaurin	132
5.15.1	Polinoamele și numerele lui Bernoulli	132
5.15.2	Formula Euler-MacLaurin	136
5.15.3	Formule de integrare Euler-MacLaurin	139
6	Rezolvarea problemelor Cauchy	149
6.1	Metode de discretizare	150
6.2	Scheme de calcul de tip Runge - Kutta	156
6.3	Scheme de calcul de tip Adams	160
6.4	Schema de calcul predictor - corector	164
6.5	A-stabilitatea schemelor de calcul	167
6.6	Rezolvarea unui sistem algebric de ecuații neliniare prin integrarea unei probleme Cauchy	170
7	Metoda celor mai mici pătrate	177
7.1	Determinarea unei funcții de aproximare	177
7.2	Polinom trigonometric de aproximare	183
7.3	Aproximare în spații prehilbertiene	185

8 Transformarea Fourier discretă	189
8.1 Transformata Fourier discretă	189
8.2 Algoritmul transformării Fourier discretă rapidă	192
8.3 Aplicații ale transformatei Fourier discretă	194
8.3.1 Calculul coeficienților Fourier	194
8.3.2 Calculul coeficienților Laurent	195
8.3.3 Determinarea funcției analitice cunoscând partea reală	196
8.3.4 Calculul integralei Cauchy	197
8.4 Transformarea cosinus discretă	198
9 Polinoame trigonometrice	203
9.1 Interpolare trigonometrică pe noduri oarecare	204
9.2 Interpolare trigonometrică pe noduri echidistante	210
9.3 Calculul coeficienților Fourier	214
9.4 Convergența polinoamelor de interpolare trigonometrică	215
10 Funcții spline polinomiale	223
10.1 Interpolare cu funcții spline cubice	223
10.2 Funcția spline polinomială	232
10.2.1 Funcția spline polinomială naturală	233
10.2.2 Interpolare cu funcții spline polinomiale	235
10.3 Funcții B-spline	237
10.3.1 Funcții B-spline pe noduri echidistante	240
11 Interpolare cu sinus cardinal	243
11.1 Interpolare pe noduri echidistante în $[0, \pi]$	243
11.2 Interpolare pe noduri echidistante în \mathbb{R}	247
II ALGEBRA LINIARĂ NUMERICĂ	251
12 Elemente de analiză matriceală	253
12.1 Definiții, notații, proprietăți	253
13 Rezolvarea sistem. algebrice liniare	263
13.1 Metoda Gauss - Jordan	264
13.2 Inversarea unei matrice	268
13.3 Factorizarea LU	269
13.4 Cazul matricelor simetrice - Factorizarea Cholesky	277
13.5 Rezolvarea sistemelor tridiagonale	278

13.6 Metode iterative	280
13.7 Metoda gradientului conjugat	286
13.8 Soluție în sensul celor mai mici pătrate	290
13.9 Numărul de condiționare al unei matrice	292
14 Transformarea Householder	297
14.1 Transformata Householder	297
14.2 Descompunerea QR	299
14.3 Cea mai bună aproximație	303
14.4 Metoda celor mai mici pătrate	308
14.5 Bidiagonalizarea unei matrice	310
14.6 Reducerea la forma Hessenberg	312
15 Valori și vectori proprii	315
15.1 Forma normală Schur	315
15.2 Diagonalizarea unei matrice	318
15.3 Descompunerea valorii singulare	320
15.4 Raza spectrală a unei matrice	323
15.5 Metoda puterii	326
15.6 Algoritmul QR	327
16 Descompunerea valorii singulare	333
16.1 Descompunerea valorii singulare	333
16.2 Metoda celor mai mici pătrate prin DVS	337
17 Spații Krylov	339
17.1 Definiția spațiului Krylov	339
17.2 Descompunerea Arnoldi	339
17.3 Rezolvarea sistemelor algebrice de ecuații liniare	342
17.3.1 Varianta Ritz-Galerkin	344
17.3.2 Varianta rezidului minimal	344
17.4 Calculul valorilor și vectorilor proprii	345
17.5 Calculul elementului de cea mai bună aproximație	345
III REZOLVAREA ECUAȚIILOR NELINIARE	347
18 Rezolvarea ecuațiilor neliniare	349
18.1 Preliminarii de analiză funcțională	349
18.2 Metoda liniarizării	356

18.3	Metoda liniarizării modificată	360
18.4	Rezolvarea sistemelor algebrice neliniare	362
18.5	Rezolvarea ecuațiilor algebrice	365
18.6	Rezolvarea ecuațiilor polinomiale	370
IV	REZOLVARE PRIN OPTIMIZARE	379
19	Elemente din teoria optimizării	381
19.1	Funcționale diferențiabile	381
19.2	Funcționale convexe	383
19.3	Proprietăți ale problemei de optimizare	386
19.4	Metode de descreștere	388
19.5	Metoda gradientului	389
20	Rezolvarea ecuațiilor prin optimizare	393
20.1	Rezolvarea unui sistem liniar prin cele mai mici pătrate	393
20.2	Rezolvarea unui sistem neliniar prin cele mai mici pătrate	394
20.3	Rezolvarea unei ecuații liniare prin metode de optimizare	395
V	ANEXE	397
A	Noțiuni de teoria erorilor	399
A.1	Eroare absolută și eroare relativă	399
A.2	Reprezentarea numerelor în virgulă mobilă	400
A.3	Aritmetica numerelor în virgulă mobilă	401
A.4	Protocolul IEEE 754	403
A.5	Controlul erorii	404
B	Implementarea metodelor iterative	409
C	Identități trigonometrice	411
D	Determinarea unor parametri numerici	413
E	Îmbunătățirea convergenței	417
E.1	Ordinul de convergență al unui șir	417
E.2	Îmbunătățirea convergenței unui șir	418
E.3	Transformarea lui Euler	418

F	Determinarea ordinelor de convergență	421
G	Scheme Runge-Kutta deduse prin calcul simbolic	427
	G.1 Schema de calcul explicită de tip Runge – Kutta în 4 trepte . . .	428
	G.2 Schema de calcul implicită de tip Runge – Kutta în 2 trepte . . .	433
H	Reprezentarea mulțimii de A-stabilitate	437
	Bibliografie	439

SCHEIBER ERNEST

SCHEIBER ERNEST

SCHEIBER ERNEST

SCHEIBER ERNEST

SCH
EIBER ERNEST

Partea I

INTERPOLARE ȘI APLICAȚII

SCH
EIBER ERNEST

SCH
EIBER ERNEST

SCH
EIBER ERNEST

Capitolul 1

Diferențe finite

1.1 Diferențe finite

Diferențele finite stau la baza multor metode de calcul numeric privind integrarea și derivarea numerică, integrarea ecuațiilor diferențiale ordinare și cu derivate parțiale. Funcțiile care intervin în acest capitol sunt funcții reale de o variabilă reală. Printr-o diferență finită de înțelege un operator de forma

$$\Gamma_h f(x) = Af(x + ah) - Bf(x + bh) \quad (1.1)$$

unde A, B, a, b sunt constante reale. Se observă caracterul liniar al operatorului

$$\Gamma_h(\lambda f + \mu g) = \lambda \Gamma_h f + \mu \Gamma_h g.$$

Diferențele finite de ordin superior se introduc recursiv

$$\begin{aligned} \Gamma_h^0 f &= f \\ \Gamma_h^n f &= \Gamma_h(\Gamma_h^{n-1} f), \quad n > 1. \end{aligned}$$

Diferențele finite uzuale sunt:

- diferența finită progresivă

$$\Delta_h f(x) = f(x + h) - f(x);$$

- diferența finită regresivă

$$\nabla_h f(x) = f(x) - f(x - h);$$

- diferența finită centrată

$$\delta_h f(x) = f\left(x + \frac{h}{2}\right) - f\left(x - \frac{h}{2}\right).$$

În cele ce urmează vom studia doar diferențele finite uzuale.

Formulele explicite de calcul ale unei diferențe finite de ordin superior sunt

Teorema 1.1.1 *Au loc egalitățile:*

$$\begin{aligned} (i) \quad \Delta_h^n f(x) &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (-1)^{n-k} f(x + kh); \\ (ii) \quad \nabla_h^n f(x) &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (-1)^k f(x - kh); \\ (iii) \quad f(x + nh) &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \Delta_h^k f(x); \\ (iv) \quad f(x - nh) &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (-1)^k \nabla_h^k f(x). \end{aligned} \tag{1.2}$$

Demonstrație. $\Delta_h^n f(x)$ se exprimă ca o combinație liniară a valorilor lui f în $x, x + h, \dots, x + nh$, adică are loc o formulă de forma

$$\Delta_h^n f(x) = \sum_{k=0}^n A_k f(x + kh).$$

Pentru determinarea coeficienților $(A_k)_{0 \leq k \leq n}$, alegem $f(x) = e^x$ și atunci

$$e^x (e^h - 1)^n = \sum_{k=0}^n A_k e^{x+kh}.$$

Dezvoltând binomul din membrul stâng găsim

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (-1)^{n-k} e^{x+kh} = \sum_{k=0}^n A_k e^{x+kh}.$$

Identificând coeficienții lui e^{x+kh} găsim $A_k = \binom{n}{k} (-1)^{n-k}$, adică relația (i).

În mod asemănător se pot justifica și celelalte relații. ■

Stabilim o serie de proprietăți ale diferenței finite progresivă. Rezultate asemănătoare se pot deduce și pentru celelalte diferențe finite.

Teorema 1.1.2 (Teorema de medie) Dacă funcția f este derivabilă de ordin n atunci există $c \in (x, x + nh)$ astfel încât

$$\Delta_h^n f(x) = h^n f^{(n)}(c). \quad (1.3)$$

Demonstrație. Prin inducție matematică după n , pentru $n = 1$, utilizând teorema de medie a lui Lagrange avem succesiv

$$\Delta_h f(x) = f(x + h) - f(x) = hf'(c) \quad x < c < x + h.$$

Presupunem relația (1.3) adevărată pentru diferențele de ordin $n-1$. Dacă $g(x) = \frac{\Delta_h^{n-1} f(x)}{h^{n-1}}$ atunci

$$\begin{aligned} \frac{\Delta_h^n f(x)}{h^n} &= \frac{\Delta_h(\Delta_h^{n-1} f(x))}{h^n} = \frac{\frac{\Delta_h^{n-1} f(x+h)}{h^{n-1}} - \frac{\Delta_h^{n-1} f(x)}{h^{n-1}}}{h} = \\ &= \frac{g(x+h) - g(x)}{h} = g'(\tilde{c}) = \frac{d}{dx} \left[\frac{\Delta_h^{n-1} f(x)}{h^{n-1}} \right] \Big|_{x=\tilde{c}} \end{aligned}$$

unde $x < \tilde{c} < x + h$. Deoarece operatorul de derivare comută cu operatorul de diferență finită, rezultă că

$$\frac{\Delta_h^n f(x)}{h^n} = \frac{d}{dx} \left[\frac{\Delta_h^{n-1} f(x)}{h^{n-1}} \right] \Big|_{x=\tilde{c}} = \frac{\Delta_h^{n-1} f'(x)}{h^{n-1}} \Big|_{x=\tilde{c}}.$$

Utilizând ipoteza inducției,

$$\frac{\Delta_h^n f(x)}{h^n} = \frac{\Delta_h^{n-1} f'(x)}{h^{n-1}} \Big|_{x=\tilde{c}} = (f')^{(n-1)}(\tilde{c}) = f^{(n)}(c),$$

unde $x < \tilde{c} < c < \tilde{c} + (n-1)h < x + nh$. ■

Observație 1.1.1

Presupunând că funcția f are derivata de ordinul n continuă, pentru $h \rightarrow 0$, din (1.3) rezultă

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\Delta_h^n f(x)}{h^n} = f^{(n)}(x). \quad (1.4)$$

Diferența finită progresivă de ordin superior pentru produsul a două funcții generalizează formula lui Leibniz

Teorema 1.1.3 (*Formula lui Leibniz*) Are loc formula:

$$\Delta_h^n f(x)g(x) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \Delta_h^k f(x) \Delta_h^{n-k} g(x+kh) \quad (1.5)$$

Demonstrația teoremei se face prin inducție matematică după n .

Observație 1.1.2

Să presupunem că funcțiile f, g au derivata de ordinul n continuă. Împărțind (1.5) la h^n și utilizând Observația 1.1.1, pentru $h \rightarrow 0$, obținem

$$(f(x)g(x))^{(n)} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} f^{(k)}(x)g^{(n-k)}(x). \quad (1.6)$$

1.2 Ecuația cu diferențe liniară și cu coeficienți constanți

Considerăm ecuația cu diferențe ($h = 1$)

$$\alpha_p \Delta^p u(n) + \alpha_{p-1} \Delta^{p-1} u(n) + \dots + \alpha_1 \Delta u(n) + \alpha_0 u(n) = f_{n+p} \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

unde necunoscută este funcția $u : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$, iar coeficienții $\alpha_0, \dots, \alpha_p$ sunt constante reale. Explicitând diferențele finite progresive în funcție de valorile funcției (1.2) obținem

$$a_p u_{n+p} + a_{p-1} u_{n+p-1} + \dots + a_1 u_{n+1} + a_0 u_n = f_{n+p} \quad n \in \mathbb{N}, \quad (1.7)$$

unde $u_n = u(n)$.

Presupunem că $a_0 \cdot a_p \neq 0$.

În cele ce urmează, numim (1.7) ecuație cu diferențe liniară și cu coeficienți constanți, de ordin p și se cere soluția care verifică în plus condițiile inițiale

$$\begin{aligned} u_0 &= v_0 \\ u_1 &= v_1 \\ &\dots \\ u_{p-1} &= v_{p-1} \end{aligned} \quad (1.8)$$

Teorema 1.2.1 Există cel mult o soluție a ecuației cu diferențe (1.7) care verifică condițiile (1.8).

În prealabil studiem ecuația cu diferențe omogenă, liniară și cu coeficienți constanți

$$a_p u_{n+p} + a_{p-1} u_{n+p-1} + \dots + a_1 u_{n+1} + a_0 u_n = 0 \quad n \in \mathbb{N}, \quad (1.9)$$

Teorema 1.2.2 *Mulțimea soluțiilor ecuației cu diferențe omogenă, liniară și cu coeficienți constanți formează un spațiu liniar.*

1.2.1 Sistem fundamental de soluții

Teoria ecuației cu diferențe omogenă, liniară și cu coeficienți constanți este asemănătoare cu cea a ecuației diferențiale liniară, omogenă și cu coeficienți constanți.

Definiție 1.2.1 *Sirurile $(u_n^1)_{n \in \mathbb{N}}, \dots, (u_n^p)_{n \in \mathbb{N}}$ sunt liniar independente dacă relațiile*

$$\lambda_1 u_n^1 + \dots + \lambda_p u_n^p = 0, \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

implică $\lambda_1 = \dots = \lambda_p = 0$.

Teorema 1.2.3 *Sirurile $(u_n^1)_{n \in \mathbb{N}}, \dots, (u_n^p)_{n \in \mathbb{N}}$, soluții ale ecuației (1.9) sunt liniar independente dacă și numai dacă au loc relațiile*

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} u_n^1 & \dots & u_n^p \\ u_{n+1}^1 & \dots & u_{n+1}^p \\ \dots & \dots & \dots \\ u_{n+p-1}^1 & \dots & u_{n+p-1}^p \end{vmatrix} \neq 0, \quad \forall n \in \mathbb{N}. \quad (1.10)$$

Demonstrație. Presupunem prin absurd că există $\bar{n} \in \mathbb{N}$ astfel încât $\Delta_{\bar{n}} = 0$. Atunci sistemul algebric de ecuații liniare și omogene

$$\begin{aligned} \lambda_1 u_{\bar{n}}^1 + \dots + \lambda_p u_{\bar{n}}^p &= 0 \\ \lambda_1 u_{\bar{n}+1}^1 + \dots + \lambda_p u_{\bar{n}+1}^p &= 0 \\ \dots & \dots \\ \lambda_1 u_{\bar{n}+p-1}^1 + \dots + \lambda_p u_{\bar{n}+p-1}^p &= 0 \end{aligned} \quad (1.11)$$

în necunoscutele $\lambda_1, \dots, \lambda_p$, admite o soluție nebanală notată la fel.

Înmulțind ecuațiile sistemului, respectiv cu $-\frac{a_0}{a_p}, \dots, -\frac{a_{p-1}}{a_p}$ și sumând egalitățile astfel obținute, rezultă

$$\lambda_1 \left(-\frac{1}{a_p} \sum_{i=0}^{p-1} a_i u_{\bar{n}+i}^1 \right) + \dots + \lambda_p \left(-\frac{1}{a_p} \sum_{i=0}^{p-1} a_i u_{\bar{n}+i}^p \right) = 0.$$

Deoarece potrivit ipotezei, șirurile $(u_k^j)_{k \in \mathbb{N}}$, $j = 1, \dots, p$ sunt soluții ale ecuației cu diferențe (1.9), ultima egalitate devine

$$\lambda_1 u_{n+p}^1 + \dots + \lambda_p u_{n+p}^p = 0.$$

Observăm că această egalitate completează relațiile sistemului (1.11). Reluând înmulțirea ultimelor p egalități, respectiv prin $-\frac{a_0}{a_p}, \dots, -\frac{a_{p-1}}{a_p}$ și adunarea lor deducem

$$\lambda_1 u_m^1 + \dots + \lambda_p u_m^p = 0 \quad \forall m \geq n.$$

Procedând asemănător, înmulțim ecuațiile sistemului (1.11), respectiv cu $-\frac{a_1}{a_0}, \dots, -\frac{a_p}{a_0}$ și sumând egalitățile astfel obținute, găsim

$$\lambda_1 \left(-\frac{1}{a_0} \sum_{i=1}^p a_i u_{n+i-1}^1 \right) + \dots + \lambda_p \left(-\frac{1}{a_0} \sum_{i=1}^p a_i u_{n+i-1}^p \right) = 0,$$

sau

$$\lambda_1 u_{n-1}^1 + \dots + \lambda_p u_{n-1}^p = 0.$$

Repetând, deducem

$$\lambda_1 u_m^1 + \dots + \lambda_p u_m^p = 0 \quad \forall m \leq n.$$

În felul acesta contrazicem liniar independența șirurilor.

Reciproc, presupunem prin absurd că șirurile $(u_k^j)_{k \in \mathbb{N}}$, $j = 1, \dots, p$ nu sunt liniar independente, existând constantele $\lambda_1, \dots, \lambda_p$, nu toate nule astfel încât

$$\lambda_1 u_n^1 + \dots + \lambda_p u_n^p = 0, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Pentru orice $n \in \mathbb{N}$, sistemul (1.11) are o soluție nebanală, deci $\Delta_n = 0$, ceea ce nu se poate. ■

Definiție 1.2.2 p șiruri soluții ale ecuației (1.9) și liniar independente formează un sistem fundamental de soluții.

Importanța unui sistem fundamental este reliefată în

Teorema 1.2.4 Dacă $(u_k^j)_{k \in \mathbb{N}}$, $j = 1, \dots, p$ formează un sistem fundamental de soluții pentru ecuația cu diferențe (1.9) atunci pentru orice altă soluție $(u_k)_{k \in \mathbb{N}}$ a ei, există constantele c_1, \dots, c_p astfel încât

$$u_n = c_1 u_n^1 + \dots + c_p u_n^p, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Demonstrație. Considerăm sistemul algebric de ecuații liniare în necunoscutele c_1, \dots, c_p

$$\begin{aligned} c_1 u_0^1 + \dots + c_p u_0^p &= u_0 \\ c_1 u_1^1 + \dots + c_p u_1^p &= u_1 \\ \dots & \dots \\ c_1 u_{p-1}^1 + \dots + c_p u_{p-1}^p &= u_{p-1} \end{aligned} \quad (1.12)$$

Determinantul sistemului fiind diferit de 0, sistemul (1.12) admite o soluție unică notată tot c_1, \dots, c_p .

Înmulțind ecuațiile sistemului (1.12) respectiv cu $-\frac{a_0}{a_p}, -\frac{a_1}{a_p}, \dots, -\frac{a_{p-1}}{a_p}$ și sumând egalitățile astfel obținute deducem

$$c_1 \left(-\frac{1}{a_p} \sum_{k=0}^{p-1} a_k u_k^1 \right) + \dots + c_p \left(-\frac{1}{a_p} \sum_{k=0}^{p-1} a_k u_k^p \right) = -\frac{1}{a_p} \sum_{k=0}^{p-1} a_k u_k,$$

sau

$$c_1 u_p^1 + \dots + c_p u_p^p = u_p. \quad (1.13)$$

Repetând raționamentul, din aproape în aproape obținem

$$u_n = c_1 u_n^1 + \dots + c_p u_n^p, \quad \forall n \in \mathbb{N}. \blacksquare$$

1.2.2 Determinarea unui sistem fundamental de soluții

Căutăm soluții ale ecuației cu diferențe omogene (1.9) sub forma unei progresii geometrice $u_k = x^k$, $k \in \mathbb{N}$. Rezultă că x trebuie să fie rădăcina polinomului caracteristic

$$f(x) = a_p x^p + a_{p-1} x^{p-1} + \dots + a_1 x + a_0.$$

Notăm prin x_1, \dots, x_p rădăcinile acestui polinom.

Cazul rădăcinilor distincte două câte două.

Teorema 1.2.5 Dacă x_1, \dots, x_p sunt rădăcini distincte două câte două ale polinomului caracteristic atunci șirurile $(x_1^n)_{n \in \mathbb{N}}, \dots, (x_p^n)_{n \in \mathbb{N}}$ formează un sistem fundamental de soluții pentru ecuația cu diferențe omogemă (1.9).

Demonstrație. Verificăm condiția de liniar independență, dată în Teorema 1.2.3, a celor p șiruri.

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} x_1^n & \dots & x_p^n \\ x_1^{n+1} & \dots & x_p^{n+1} \\ \dots & \dots & \dots \\ x_1^{n+p-1} & \dots & x_p^{n+p-1} \end{vmatrix} =$$

$$= (x_1 \cdot \dots \cdot x_p)^n V(x_1, \dots, x_p) = (x_1 \cdot \dots \cdot x_p)^n \prod_{1 \leq j < i \leq p} (x_i - x_j) \neq 0. \blacksquare$$

Cazul rădăcinilor multiple. Stabilim un rezultat ajutător

Teorema 1.2.6 *Dacă $f(x)$ este polinomul caracteristic și $\varphi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ este o funcție oarecare atunci*

$$\begin{aligned} & a_p x^{n+p} \varphi(n+p) + a_{p-1} x^{n+p-1} \varphi(n+p-1) + \dots + a_0 x^n \varphi(n) = \\ & = x^n [f(x) \varphi(n) + \frac{1}{1!} x f'(x) \Delta \varphi(n) + \dots + \frac{1}{p!} x^p f^{(p)} \Delta^p \varphi(n)]. \end{aligned}$$

Demonstrație. Utilizând relația (iii) de la (1.2) au loc egalitățile

$$\begin{aligned} \varphi(n) &= \varphi(n) \\ \varphi(n+1) &= \binom{1}{0} \varphi(n) + \binom{1}{1} \Delta \varphi(n) \\ \varphi(n+2) &= \binom{2}{0} \varphi(n) + \binom{2}{1} \Delta \varphi(n) + \binom{2}{2} \Delta^2 \varphi(n) \\ &\vdots \\ \varphi(n+p) &= \binom{p}{0} \varphi(n) + \binom{p}{1} \Delta \varphi(n) + \binom{p}{2} \Delta^2 \varphi(n) + \dots \\ &\quad \dots + \binom{p}{p} \Delta^p \varphi(n) \end{aligned}$$

pe care le înmulțim respectiv cu $a_0 x^n, a_1 x^{n+1}, a_2 x^{n+2}, \dots, a_p x^{n+p}$ și le însumăm, obținând

$$\sum_{k=0}^p a_k x^{n+k} \varphi(n+k) = x^n \sum_{k=0}^p b_k(x) \Delta^k \varphi(n),$$

unde

$$b_k(x) = \sum_{j=k}^p \binom{j}{k} a_j x^j = \frac{x^k}{k!} \sum_{j=k}^p j(j-1) \cdot \dots \cdot (j-k+1) x^{j-k} = \frac{x^k}{k!} f^{(k)}(x). \blacksquare$$

În consecință, dacă x este o rădăcină a polinomului caracteristic, având ordinul de multiplicitate r atunci șirul $(x^n \varphi(n))_{n \in \mathbb{N}}$, cu $\varphi(n)$ polinom de grad cel mult $r-1$, este soluție a ecuației cu diferențe (1.9).

Mai mult,

Teorema 1.2.7 Dacă x_1, x_2, \dots, x_k sunt rădăcinile polinomului caracteristic, având respectiv ordinele de multiplicitate r_1, r_2, \dots, r_k , ($r_1 + r_2 + \dots + r_k = p$), atunci șirurile

$$\begin{array}{cccc} (x_1^n)_{n \in \mathbb{N}} & (nx_1^n)_{n \in \mathbb{N}} & \dots & (n^{r_1-1}x_1^n)_{n \in \mathbb{N}} \\ (x_2^n)_{n \in \mathbb{N}} & (nx_2^n)_{n \in \mathbb{N}} & \dots & (n^{r_2-1}x_2^n)_{n \in \mathbb{N}} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ (x_k^n)_{n \in \mathbb{N}} & (nx_k^n)_{n \in \mathbb{N}} & \dots & (n^{r_k-1}x_k^n)_{n \in \mathbb{N}} \end{array}$$

formează un sistem fundamental de soluții pentru ecuația cu diferențe omogenă (1.9).

Demonstrație. Presupunem prin absurd că șirurile

$$(x_i^n)_{n \in \mathbb{N}}, (nx_i^n)_{n \in \mathbb{N}}, \dots, (n^{r_i-1}x_i^n)_{n \in \mathbb{N}}, \quad 1 \leq i \leq k$$

sunt liniar dependente. Atunci există constantele $C_{i,0}, C_{i,1}, \dots, C_{i,r_i-1}$, $1 \leq i \leq k$ nu toate nule, astfel încât

$$\sum_{i=1}^k (C_{i,0}x_i^n + C_{i,1}nx_i^n + \dots + C_{i,r_i-1}n^{r_i-1}x_i^n) = 0, \quad \forall n \in \mathbb{N},$$

sau

$$\sum_{i=1}^k x_i^n P_i(n) = 0, \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad (1.14)$$

unde $P_i(n) = C_{i,0} + C_{i,1}n + \dots + C_{i,r_i-1}n^{r_i-1}$.

Potrivit presupunerii făcute, polinoamele $P_i(n)$, $i = 1, \dots, k$ nu sunt toate identic nule. Putem presupune că toate polinoamele care apar în relația (1.14) sunt neidentic nule.

Împărțind (1.14) prin x_1^n rezultă

$$P_1(n) + \left(\frac{x_2}{x_1}\right)^n P_2(n) + \dots + \left(\frac{x_k}{x_1}\right)^n P_k(n) = 0, \quad \forall n \in \mathbb{N}. \quad (1.15)$$

Aplicând relației (1.15) diferența¹ Δ^n deducem

$$\left(\frac{x_2}{x_1}\right)^n P_{2,1}(n) + \dots + \left(\frac{x_k}{x_1}\right)^n P_{k,1}(n) = 0, \quad \forall n \in \mathbb{N},$$

unde polinoamele $P_{i,1}$ $i = 2, \dots, k$ au gradele respectiv egale cu ale polinoamelor P_i $i = 2, \dots, k$.

¹ Pentru $a \neq 1$ și φ polinom are loc $\Delta a^n \varphi(n) = a^n(a\varphi(n+1) - \varphi(n))$ unde $a\varphi(n+1) - \varphi(n)$ este un polinom de același grad cu φ .

Repetând raționamentul de mai sus de $k - 1$ ori deducem egalitatea

$$\left(\frac{x_k}{x_{k-1}}\right)^n P_{k,k-1}(n) = 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Pe de-o parte rezultă că polinomul $P_{k,k-1}$ este identic nul, iar pe de altă parte este neidentic nul. Contradicția apărută justifică afirmația teoremei. ■

Exemplul 1.2.1 Șirul lui Fibonacci este definit prin ecuația cu diferențe

$$u_{n+2} - u_{n+1} - u_n = 0, \quad \forall n \in \mathbb{N}. \quad (1.16)$$

Polinomul caracteristic este $f(x) = x^2 - x - 1$ și are rădăcinile $\frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$. Formula termenului general al șirului definit de (1.16) este

$$u_n = C_1 \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2}\right)^n + C_2 \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2}\right)^n.$$

Dacă impunem condițiile inițiale $u_0 = u_1 = 1$ atunci coeficienții C_1, C_2 rezultă din sistemul

$$\begin{aligned} u_0 &= C_1 + C_2 = 1 \\ u_1 &= C_1 \frac{1 + \sqrt{5}}{2} + C_2 \frac{1 - \sqrt{5}}{2} = 1. \end{aligned}$$

Rezolvând sistemul de mai sus, se obține $C_1 = \frac{1 + \sqrt{5}}{2\sqrt{5}}$, $C_2 = \frac{1 - \sqrt{5}}{2\sqrt{5}}$. Prin urmare

$$u_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left[\left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2}\right)^{n+1} - \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2}\right)^{n+1} \right]. \quad (1.17)$$

1.2.3 Soluția ecuației cu diferențe neomogenă

Suntem în măsură să soluționăm problema determinată de ecuația cu diferențe neomogenă, liniară și cu coeficienți constanți (1.7) cu condițiile inițiale (1.8).

Teorema 1.2.8 Dacă $(u_n^k)_{n \in \mathbb{N}}$, $k = 0, 1, \dots, p-1$ formează un sistem fundamental de soluții pentru ecuația cu diferențe omogenă care satisfac condițiile inițiale $u_n^k = \delta_{k,n}$, $k, n \in \{0, 1, \dots, p-1\}$ atunci soluția problemei (1.7)-(1.8) este

$$u_n = \sum_{i=0}^{p-1} v_i u_n^i + \frac{1}{a_p} \sum_{k=0}^{n-p} f_{k+p} u_{n-k-1}^{p-1}, \quad \forall n \in \mathbb{N}. \quad (1.18)$$

Se presupune că

$$\begin{aligned} f_k &= 0 \quad \text{pentru } k < p; \\ u_n^k &= 0 \quad \text{pentru } n < 0, k = 0, 1, \dots, p-1. \end{aligned} \quad (1.19)$$

Demonstrație. Șirul $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ definit prin $z_n = \sum_{i=0}^{p-1} v_i u_n^i$ este o soluție a ecuației cu diferențe omogenă care verifică condițiile inițiale (1.8).

Verificăm că șirul $(w_n)_{n \in \mathbb{N}}$ definit prin $w_n = \frac{1}{a_p} \sum_{k=0}^{n-p} f_{k+p} u_{n-k-1}^{p-1}$ este o soluție a ecuației cu diferențe neomogenă (1.7) care satisface condițiile inițiale omogene $w_n = 0$, pentru $n = 0, 1, \dots, p-1$.

Dacă $n \in \{0, 1, \dots, p-1\}$ atunci pentru $k = -1, -2, \dots, n-p$ au loc egalitatea $f_{k+p} = 0$ și în consecință

$$w_n = \frac{1}{a_p} f_p u_{n-1}^{p-1} = 0,$$

datorită condițiilor inițiale verificate de șirul $(u_n^{p-1})_{n \in \mathbb{Z}}$.

Utilizând (1.19), au loc egalitățile

$$w_n = \frac{1}{a_p} \sum_{k=0}^{n-p} f_{k+p} u_{n-k-1}^{p-1} = \frac{1}{a_p} \sum_{k=-\infty}^{\infty} f_{k+p} u_{n-k-1}^{p-1}.$$

Atunci

$$\begin{aligned} \sum_{j=0}^p a_j w_{n+j} &= \frac{1}{a_p} \sum_{j=0}^p a_j \sum_{k=-\infty}^{\infty} f_{k+p} u_{n+j-k-1}^{p-1} = \\ &= \frac{1}{a_p} \sum_{j=0}^p a_j \sum_{k=0}^n f_{k+p} u_{n+j-k-1}^{p-1} = \frac{1}{a_p} \sum_{k=0}^n f_{k+p} \sum_{j=0}^p a_j u_{n+j-k-1}^{p-1}. \end{aligned}$$

Pentru $k = 0, 1, \dots, n-1$, deoarece șirul $(u_n^{p-1})_{n \in \mathbb{Z}}$ este soluție a ecuației cu diferențe omogenă (1.9), au loc egalitățile

$$\sum_{j=0}^p a_j u_{n+j-k-1}^{p-1} = 0$$

iar pentru $k = n$, din condițiile inițiale verificate de același șir, are loc

$$\sum_{j=0}^p a_j u_{j-1}^{p-1} = a_p.$$

În consecință $\sum_{j=0}^p a_j w_{n+j} = \frac{1}{a_p} f_{n+p} a_p = f_{n+p}$. ■

1.3 Transformarea z

Fie \mathcal{S} mulțimea șirurilor de numere complexe $x = (x_n)_{n \in \mathbb{Z}}$. Dacă $x_n = 0, \forall n < 0$ atunci șirul x se numește cu suport pozitiv. Mulțimea acestor șiruri se notează cu \mathcal{S}^+ .

Exemplul 1.3.1 $u = (u_n)_{n \in \mathbb{Z}}$, cu $u_n = \begin{cases} 0 & n < 0 \\ 1 & n \geq 0 \end{cases}$.

Exemplul 1.3.2 $\delta_k = (\delta_{k,n})_{n \in \mathbb{Z}}$, cu $\delta_{k,n} = \begin{cases} 0 & n \neq k \\ 1 & n = k \end{cases}$.

Definiție 1.3.1 Fie $x, y \in \mathcal{S}^+$ astfel încât, pentru orice $n \in \mathbb{Z}$, seria $\sum_{k \in \mathbb{Z}} x_{n-k} y_k$ este convergentă. Șirul $z = (z_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ definit prin

$$z_n = \sum_{k \in \mathbb{Z}} x_{n-k} y_k$$

se numește produsul de convoluție al șirurilor x și y și se notează cu $z = x * y$.

Evident $x * y = y * x$.

Exemplul 1.3.3 Dacă $x = (x_n)_{n \in \mathbb{Z}}$, atunci șirul $z = x * \delta_k$, $z = (z_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ este

$$z_n = \sum_{s \in \mathbb{Z}} x_{n-s} \delta_{k,s} = x_{n-k} \quad \forall n \in \mathbb{Z}.$$

Definiție 1.3.2 Fie $x = (x_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ și funcția $X(z) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{x_n}{z^n}$, definită în domeniul de convergență al seriei Laurent. Operatorul ce atașează șirului x funcția $X(z)$ se numește transformata z a șirului x

$$\mathcal{L}(x) = X$$

Exemplul 1.3.4 Transformata z a șirului u este

$$\mathcal{L}(u)(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{z^n} = \frac{z}{z-1},$$

definită în coroana $\{z \in \mathbb{C} : |z| > 1\}$.

Exemplul 1.3.5 $\mathcal{L}(\delta_k)(z) = \frac{1}{z^k}$.

Exemplul 1.3.6 Dacă $x = (x_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ și $y = (y_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ cu $y_n = x_{n-k}$, $\forall n \in \mathbb{Z}$ atunci

$$\mathcal{L}(y)(z) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{y_n}{z^n} = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{x_{n-k}}{z^n} = z^{-k} \mathcal{L}(x)(z).$$

Transformarea z se bucură de următoarele proprietăți:

Teorema 1.3.1 Operatorul \mathcal{L} este liniar.

Teorema 1.3.2 Dacă $x \in \mathcal{S}$ atunci $\mathcal{L}(x * \delta_k)(z) = \frac{1}{z^k} \mathcal{L}(x)(z)$.

Demonstrație. Șirul $x * \delta_k$ este $(x_{n-k})_{n \in \mathbb{Z}}$. În consecință

$$\mathcal{L}(x * \delta_k)(z) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{x_{n-k}}{z^n} = \frac{1}{z^k} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{x_{n-k}}{z^{n-k}} = \frac{1}{z^k} \mathcal{L}(x)(z). \quad \blacksquare$$

Teorema 1.3.3 Are loc egalitatea

$$\mathcal{L}(x * y) = \mathcal{L}(x)\mathcal{L}(y) \quad \forall x, y \in \mathcal{S}.$$

Demonstrație. Dacă $u = x * y = (\sum_{k \in \mathbb{Z}} x_{n-k} y_k)_{n \in \mathbb{Z}}$ atunci

$$\mathcal{L}(u)(z) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{\sum_{k \in \mathbb{Z}} x_{n-k} y_k}{z^n} = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \frac{y_k}{z^k} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{x_{n-k}}{z^{n-k}} = \mathcal{L}(y)(z)\mathcal{L}(x)(z). \quad \blacksquare$$

Teorema 1.3.4 Dacă $x = (x_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ și $X(z) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{x_n}{z^n}$ este convergentă în coroana $\{z \in \mathbb{C} : r < |z| < R\}$ atunci are loc egalitatea

$$x_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=\rho} z^{n-1} X(z) dz, \quad (1.20)$$

unde discul delimitat de cercul $|z| = \rho$ conține toate singularitățile funcției $X(z)$.

Demonstrație. Calculăm integrala din (1.20)

$$\int_{|z|=\rho} z^{n-1} X(z) dz = \sum_{k \in \mathbb{Z}} x_k \int_{|z|=\rho} z^{n-1-k} dz = 2\pi i x_n. \quad \blacksquare$$

O aplicație a transformării z este rezolvarea ecuațiilor cu diferențe liniare și cu coeficienți constanți. Considerăm ecuația cu diferențe (1.7) și extindem mulțimea indicilor la \mathbb{Z} , definind

$$u_n = 0, \quad \forall n < 0$$

și

$$f_{n+p} = a_p u_{n+p} + a_{p-1} u_{n+p-1} + \dots + a_1 u_{n+1} + a_0 u_n, \quad \forall n < 0.$$

Atunci ecuația cu diferențe (1.7) se poate scrie

$$a_p u_n + a_{p-1} u_{n-1} + \dots + a_1 u_{n-p+1} + a_0 u_{n-p} = f_n, \quad \forall n \in \mathbb{Z},$$

sau

$$a_p (u * \delta_0)_n + a_{p-1} (u * \delta_1)_n + \dots + a_1 (u * \delta_{p-1})_n + a_0 (u * \delta_p)_n = f_n. \quad (1.21)$$

Notăm $u = (u_n)_{n \in \mathbb{Z}}$, $U(z) = \mathcal{L}(u)(z)$, $f = (f_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ și $F(z) = \mathcal{L}(f)(z)$. În urma aplicării transformării z asupra ecuației (1.21) și utilizând Teorema 1.3.2 obținem ecuația

$$U(z) \left(a_p + \frac{a_{p-1}}{z} + \dots + \frac{a_1}{z^{p-1}} + \frac{a_0}{z^p} \right) = F(z).$$

Explicitând funcția necunoscută, găsim

$$U(z) = \frac{z^p F(z)}{a_p z^p + a_{p-1} z^{p-1} + \dots + a_1 z + a_0}.$$

Potrivit formulei (1.20), termenii șirului u se calculează cu

$$u_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=\rho} \frac{z^{n+p-1} F(z)}{a_p z^p + a_{p-1} z^{p-1} + \dots + a_1 z + a_0} dz.$$

Exemplul 1.3.7 Șirul lui Fibonacci, se poate scrie

$$u_n - u_{n-1} - u_{n-2} = 0, \quad \forall n \geq 2.$$

Extinzând mulțimea indicilor la \mathbb{Z} , obținem

$$u_n - u_{n-1} - u_{n-2} = \begin{cases} 0 & n \in \mathbb{Z} \setminus \{0, 1\} \\ u_1 - u_0 & n = 1 \\ u_0 & n = 0 \end{cases}$$

Ecuația transformatei z a șirului $u = (u_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ este

$$U(z) \left(1 - \frac{1}{z} - \frac{1}{z^2} \right) = u_0 + \frac{u_1 - u_0}{z},$$

de unde

$$U(z) = \frac{u_0 z^2 + (u_1 - u_0)z}{z^2 - z - 1}.$$

Dacă $\rho > \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ atunci

$$u_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=\rho} \frac{[u_0 z^2 + (u_1 - u_0)z]z^{n-1}}{z^2 - z - 1}.$$

Calculând integrala prin reziduuri obținem

$$\begin{aligned} u_n &= \frac{1}{\sqrt{5}} \left[u_0 \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^{n+1} + (u_1 - u_0) \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n \right] - \\ &\quad - \frac{1}{\sqrt{5}} \left[u_0 \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^{n+1} + (u_1 - u_0) \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n \right] = \\ &= \frac{(\sqrt{5}-1)u_0 + 2u_1}{2\sqrt{5}} \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n + \frac{(\sqrt{5}+1)u_0 - 2u_1}{2\sqrt{5}} \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n. \end{aligned}$$

Dacă $u_0 = u_1 = 1$ atunci se regăsește (1.17).

Probleme și teme de seminar

P 1.1 Să se calculeze

1. $\Delta_h^n \frac{1}{x}$
2. $\Delta_h^n \frac{1}{x^2-1}$
3. $\Delta_h^n \sin(ax+b)$
4. $\Delta_h^n \cos(ax+b)$
5. $\Delta_h^n x e^x$

P 1.2 Să se arate că dacă $\Delta F(x) = f(x)$ atunci $\sum_{k=1}^n f(k) = F(n+1) - F(1)$.

P 1.3 Să se calculeze $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)\dots(k+p)}$.

P 1.4 Să se demonstreze formula de însumare prin părți

$$\sum_{k=1}^n u(k)\Delta v(k) = u(n+1)v(n+1) - u(1)v(1) - \sum_{k=1}^n v(k+1)\Delta u(k).$$

P 1.5 Să se calculeze $\sum_{k=1}^n k2^k$.

Indicații.

1. $u(k) = k, \Delta v(k) = 2^k \Rightarrow \Delta u(k) = 1, v(k) = 2^k$ și se aplică rezultatul problemei anterioare.
2. Se derivează identitatea $\sum_{k=1}^n 2^{kx} = \frac{2^{(n+1)x} - 2^x}{2^x - 1}$ și se particularizează $x = 1$.
3. Notând cu S suma căutată, au loc egalitățile

$$\begin{aligned} S &= 2 + 2 \cdot 2^2 + \dots + n \cdot 2^n \\ 2^{n+1} - 2 &= 2 + 2^2 + \dots + 2^n \end{aligned}$$

Înmulțind prima egalitate cu 2 și adunând rezultă ecuația în S

$$2S + 2^{n+1} - 2 = S + n2^{n+1}.$$

4. Au loc egalitățile

$$\begin{aligned} S = & \begin{array}{ccccccc} 2 & + & 2^2 & + & 2^3 & + & \dots & + & 2^{n-1} & + & 2^n & + \\ & + & 2^2 & + & 2^3 & + & \dots & + & 2^{n-1} & + & 2^n & + \\ & & & + & 2^3 & + & \dots & + & 2^{n-1} & + & 2^n & + \\ & & & & & & & & & & & + & 2^{n-1} & + & 2^n & + \\ & & & & & & & & & & & & & + & 2^n & = \end{array} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= 2(2^n - 1) + 2^2(2^{n-1} - 1) + 2^3(2^{n-2} - 1) + \dots + 2^{n-1}(2^2 - 1) + 2^n(2 - 1) = \\ &= n2^{n+1} - (2 + 2^2 + \dots + 2^n) = \dots \end{aligned}$$

P 1.6 Să se arate că

$$\begin{aligned} & \left(\begin{array}{cccccc} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} & 0 & \dots & 0 \\ \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \begin{pmatrix} n \\ 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} n \\ 1 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} n \\ 2 \end{pmatrix} & \dots & \begin{pmatrix} n \\ n \end{pmatrix} \end{array} \right)^{-1} = \\ & = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ -\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} & 0 & \dots & 0 \\ \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} & -\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ (-1)^n \begin{pmatrix} n \\ 0 \end{pmatrix} & (-1)^{n-1} \begin{pmatrix} n \\ 1 \end{pmatrix} & (-1)^{n-2} \begin{pmatrix} n \\ 2 \end{pmatrix} & \dots & \begin{pmatrix} n \\ n \end{pmatrix} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Indicație. Se scriu matriceal relațiile

$$x^s = ((x-1) + 1)^s = \sum_{i=0}^s \binom{s}{i} (x-1)^i, \quad s = 0, 1, \dots, n,$$

și

$$(x-1)^s = \sum_{i=0}^s (-1)^{s-i} \binom{s}{i} x^i, \quad s = 0, 1, \dots, n.$$

P 1.7 Să se rezolve și să se discute în funcție de parametrul p ecuația cu diferențe $u_{n+2} - 2pu_{n+1} + u_n = 0$.

P 1.8 Să se rezolve ecuația cu diferențe $u_{n+2} - u_{n+1} - 6u_n = 2^{n+2}$.

P 1.9 Să se rezolve sistemul

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 = 1 \\ -x_{i-1} + 2x_i - x_{i+1} = i & 2 \leq i \leq n-1 \\ -x_{n-1} + 2x_n = n \end{cases}$$

Indicație. 1. Sistemul are soluție unică. Determinantul sistemului este

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & & & & \ddots & & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & -1 & 2 \end{vmatrix}$$

care dezvoltat după prima linie conduce la formula de recurență $\Delta_n = 2\Delta_{n-1} - \Delta_{n-2}$. Soluția ecuației cu diferențe este $\Delta_n = C_1 + C_2n$. Deoarece $\Delta_2 = 3$, $\Delta_3 = 4$ se obține $\Delta_n = n + 1$.

2. Se rezolvă ecuația cu diferențe $x_{k+1} - 2x_k + x_{k-1} = -k$, $k \in \mathbb{N}$. Determinăm sistemul fundamental al ecuației cu diferențe omogene corespunzătoare: $(u_k^0)_{k \in \mathbb{N}}$, $(u_k^1)_{k \in \mathbb{N}}$ care satisface condițiile inițiale

$$\begin{aligned} u_0^0 &= 1 & u_1^0 &= 0 \\ u_0^1 &= 0 & u_1^1 &= 1 \end{aligned}$$

Se obține

$$u_k^0 = 1 - k \quad u_k^1 = k.$$

Utilizând formula (1.18) rezultă $u_k = v_0(1 - k) + v_1k - \frac{k^3 - k}{6}$.

3. Impunând condițiile $x_0 = 0$ și $x_{n+1} = 0$ găsim $v_0 = 0$, $v_1 = \frac{n^2 + 2n}{6}$. În final avem $x_k = \frac{k}{6}((n+1)^2 - k^2)$.

P 1.10 Să se rezolve sistemul

$$\begin{cases} a_{-1} - 2a_0 + a_1 = 0 \\ a_{i-1} + 4a_i + a_{i+1} = 6y_i \\ a_{n-1} - 2a_n + a_{n+1} = 0 \end{cases} \quad i \in \{0, 1, \dots, n\},$$

unde $(y_i)_{0 \leq i \leq n}$ sunt numere date.

Indicație. 1. Din primele două ecuații

$$\begin{cases} a_{-1} - 2a_0 + a_1 = 0 \\ a_{-1} + 4a_0 + a_1 = 6y_0 \end{cases}$$

rezultă $a_0 = y_0$. Asemănător, din ultimele două ecuații rezulta $a_n = y_n$.

Astfel sistemul se rescrie sub forma

$$\begin{cases} a_0 = y_0 \\ a_{i+2} + 4a_{i+1} + a_i = 6y_{i+1} \\ a_n = y_n \end{cases} \quad 0 \leq i \leq n-2$$

2. Soluția ecuației cu diferențe $a_{i+2} + 4a_{i+1} + a_i = f_{i+2} = 6y_{i+1}$ este

$$a_i = a_0 u_i^0 + a_1 u_i^1 + \sum_{k=0}^{i-2} f_{k+2} u_{i-k-1}^1, \quad i \geq 2. \quad (1.22)$$

$(u_i^0)_{i \in \mathbb{N}}, (u_i^1)_{i \in \mathbb{N}}$ sunt soluții ale ecuației cu diferențe omogene care verifică condițiile inițiale

$$\begin{aligned} u_0^0 &= 1 & u_0^1 &= 0 \\ u_1^0 &= 0 & u_1^1 &= 1 \end{aligned}$$

Prin calcul direct rezultă

$$\begin{aligned} u_i^0 &= \frac{(-1)^{k-1}}{2\sqrt{3}} \left((2 + \sqrt{3})^{k-1} - (2 - \sqrt{3})^{k-1} \right) \\ u_i^1 &= -u_{i+1}^0 \end{aligned}$$

Valoarea pentru a_1 din (1.22) se obține din ecuația

$$a_n = y_n = a_0 u_n^0 + a_1 u_n^1 + \sum_{k=0}^{n-2} f_{k+2} u_{n-k-1}^1.$$

Se obțin

$$\begin{aligned} a_1 &= \frac{y_0 u_n^0 - y_n - 6 \sum_{k=0}^{n-2} y_{k+1} u_{n-k}^0}{u_{n+1}^0}, \\ a_i &= y_0 u_i^0 - a_1 u_{n+1}^0 - 6 \sum_{k=0}^{i-2} y_{i+1} u_{i-k}^0, \quad i = 2, \dots, n-1. \end{aligned}$$

P 1.11 Puterea factorială a lui x de ordin n cu pasul h este definită prin

$$x^{[n,h]} = x(x-h)\dots(x-(n-1)h), \quad x^{[0,h]} = 1.$$

Pentru $h = 1$ se utilizează notația $x^{[n]} = x(x-1)\dots(x-n+1)$.

Să se arate că $\Delta_n x^{[n,h]} = n \Delta_h x^{[n-1,h]}$.

P 1.12 Dacă $P \in \mathbb{P}_n$ atunci are loc egalitatea

$$P(x) = \sum_{k=0}^n \frac{\Delta_h^k P(0)}{h^k k!} x^{[k,h]}.$$

Indicație. $1 = x^{[0,h]}, x^{[1,h]}, \dots, x^{[n,h]}$ sunt polinoame de grad respectiv $0, 1, \dots, n$. În consecință are loc reprezentarea $P(x) = \sum_{k=0}^n c_k x^{[k,h]}$. Calculăm

$$\Delta_h^j P(x) = \sum_{k=j}^n c_k \Delta_h^j x^{[k,h]} = \sum_{k=j}^n c_k A_k^j \Delta_h^j x^{[k-j,h]}.$$

Pentru $x = 0$ se obține $\Delta_h^j P(0) = c_j j! h^j$.

P 1.13 Numerele lui Stirling de speța întâi \bar{S}_n^i și de speța a doua $\bar{\bar{S}}_n^i$ sunt introduse prin

$$x^{[n]} = \sum_{i=1}^n \bar{S}_n^i x^i, \quad x^n = \sum_{i=1}^n \bar{\bar{S}}_n^i x^{[i]}.$$

Să se demonstreze formulele de recurență

$$\begin{aligned} \bar{S}_{n+1}^i &= \bar{S}_n^{i-1} - n \bar{S}_n^i, & \bar{S}_n^0 &= \delta_{n,0}, \\ \bar{\bar{S}}_n^i &= i \bar{\bar{S}}_{n-1}^i + \bar{\bar{S}}_{n-1}^{i-1}, & \bar{\bar{S}}_n^0 &= \delta_{n,0}. \end{aligned}$$

Indicație. 1. $\bar{S}_n^i = \frac{1}{i!} (x^{[n]})^{(i)}|_{x=0}$. Derivând de i ori egalitatea $x^{[n+1]} = x^{[n]}(x-n)$ se obține

$$((x^{[n+1]})^{(i)}) = (x^{[n]})^{(i)}(x-n) + i(x^{[n]})^{(i-1)}.$$

Pentru $x = 0$ rezultă $((x^{[n+1]})^{(i)}|_{x=0} = i(x^{[n]})^{(i-1)}|_{x=0} - n(x^{[n]})^{(i)}|_{x=0}$ și se împarte la $i!$.

2. $\bar{\bar{S}}_n^i = \frac{1}{i!} \Delta^i x^n|_{x=0}$. Calculăm Δ^i pentru produsul $x^n = x^{n-1}x$

$$\Delta^i x^n = i \Delta^{i-1} x^{n-1} + \Delta^i x^{n-1}(x+i).$$

Pentru $x = 0$ rezultă $\Delta^i x^n|_{x=0} = i \Delta^{i-1} x^{n-1}|_{x=0} + i \Delta^i x^{n-1}|_{x=0}$ și se împarte la $i!$.

P 1.14 Să se arate că

$$\int_0^n q(q-1)\dots(q-i+1)(q-i-1)\dots(q-n)dq = (-1)^{n-i} \sum_{j=0}^i \sum_{k=0}^{n-i} \bar{S}_i^j \bar{S}_{n-i}^k \frac{j!k!n^{j+k+1}}{(j+k+1)!}.$$

Indicație.

$$\begin{aligned} \int_0^n q(q-1)\dots(q-i+1)(q-i-1)\dots(q-n)dq &= (-1)^{n-i} \int_0^n q^{[i]}(n-q)^{[n-i]}dq = \\ &= (-1)^{n-i} \sum_{j=0}^i \sum_{k=0}^{n-i} \bar{S}_i^j \bar{S}_{n-i}^k \int_0^n q^j(n-q)^k dq. \end{aligned}$$

P 1.15 Să se arate că

$$\begin{pmatrix} \bar{S}_0^0 & & & \\ \bar{S}_1^0 & \bar{S}_1^1 & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ \bar{S}_n^0 & \bar{S}_n^1 & \dots & \bar{S}_n^n \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} \bar{S}_0^0 & & & \\ \bar{S}_1^0 & \bar{S}_1^1 & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ \bar{S}_n^0 & \bar{S}_n^1 & \dots & \bar{S}_n^n \end{pmatrix}.$$

SCHEIBER ERNEST

SCHEIBER ERNEST

Capitolul 2

Elemente din teoria interpolării

Fie X o mulțime și funcția $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ cunoscută numai prin valorile ei într-un număr finit de puncte x_1, x_2, \dots, x_n din mulțimea X : $y_i = f(x_i), i \in \{1, 2, \dots, n\}$.

O mulțime \mathcal{F} de funcții reale definite în X este interpolatoare de ordin n dacă pentru orice sistem de n puncte distincte x_1, x_2, \dots, x_n din X și oricare ar fi numerele reale y_1, y_2, \dots, y_n există în \mathcal{F} o singură funcție care în punctele x_i ia respectiv valorile y_i , pentru orice $i \in \{1, 2, \dots, n\}$.

În acest cadru problema de interpolare are următorul enunț: Dându-se mulțimea interpolatoare \mathcal{F} de ordinul n în X și perechile $(x_i, y_i) \in X \times \mathbb{R}, i \in \{1, 2, \dots, n\}$, cu proprietatea că $i \neq j \Rightarrow x_i \neq x_j$, să se determine aceea funcție $\varphi \in \mathcal{F}$ care în punctele x_i ia respectiv valorile y_i : $y_i = \varphi(x_i), i \in \{1, 2, \dots, n\}$.

Funcția de interpolare φ și f au aceleași valori în punctele $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$. Se consideră că φ este o aproximare a funcției f . Din punct de vedere teoretic se ridică următoarele probleme:

- Precizarea unor mulțimi interpolatoare (problema existenței funcției de interpolare);
- Determinarea funcției de interpolare;
- Evaluarea diferenței dintre o funcție și funcția de interpolare corespunzătoare.

2.1 Sisteme Cebîșev

Considerăm funcțiile reale

$$f_1, f_2, \dots, f_n \tag{2.1}$$

definite în intervalul compact $[a, b]$.

Sistemul de funcții (2.1) este liniar independent dacă egalitatea

$$\sum_{i=1}^n \lambda_i f_i(x) = 0, \quad \forall x \in [a, b]$$

are loc numai pentru $\lambda_1 = \dots = \lambda_n = 0$.

Teorema 2.1.1 *Sistemul de funcții (2.1) este liniar independent dacă există un sistem de puncte $a \leq x_1 < x_2 < \dots < x_n \leq b$ astfel încât determinantul*

$$V \begin{pmatrix} f_1 & f_2 & \dots & f_n \\ x_1 & x_2 & \dots & x_n \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} f_1(x_1) & f_2(x_1) & \dots & f_n(x_1) \\ f_1(x_2) & f_2(x_2) & \dots & f_n(x_2) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ f_1(x_n) & f_2(x_n) & \dots & f_n(x_n) \end{vmatrix} \neq 0.$$

Demonstrație. Presupunem prin absurd, că sistemul de funcții (2.1) este liniar independent și că pentru orice sistem de puncte $a \leq x_1 < x_2 < \dots < x_n \leq b$ are loc egalitatea $V \begin{pmatrix} f_1 & f_2 & \dots & f_n \\ x_1 & x_2 & \dots & x_n \end{pmatrix} = 0$.

Atunci $\max\{\text{rang}(f_i(x_j))_{1 \leq i, j \leq n} : a \leq x_1 < x_2 < \dots < x_n \leq b\} = m \leq n - 1$. Există punctele $a \leq x_1^0 < x_2^0 < \dots < x_n^0 \leq b$ astfel încât $\text{rang}(f_i(x_j^0))_{1 \leq i, j \leq n} = m$ și $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ o soluție nebanală a sistemului algebric de ecuații liniare

$$\begin{aligned} \lambda_1 f_1(x_1^0) + \lambda_2 f_2(x_1^0) + \dots + \lambda_n f_n(x_1^0) &= 0 \\ \lambda_1 f_1(x_2^0) + \lambda_2 f_2(x_2^0) + \dots + \lambda_n f_n(x_2^0) &= 0 \\ \dots & \\ \lambda_1 f_1(x_n^0) + \lambda_2 f_2(x_n^0) + \dots + \lambda_n f_n(x_n^0) &= 0 \end{aligned}$$

Deoarece rangul matricii $(f_i(x_j^0))_{1 \leq i, j \leq n}$ este m , între vectorii

$$v_i = (f_1(x_i^0), f_2(x_i^0), \dots, f_n(x_i^0)), \quad i = 1, 2, \dots, n$$

există m vectori liniari independenți. Putem presupune că aceștia sunt printre v_1, \dots, v_{n-1} .

Atunci pentru orice $x \in [a, b]$ are loc egalitatea $\sum_{i=1}^n \lambda_i f_i(x) = 0$. Într-adevăr matricea

$$\begin{pmatrix} f_1(x_1^0) & f_2(x_1^0) & \dots & f_n(x_1^0) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ f_1(x_{n-1}^0) & f_2(x_{n-1}^0) & \dots & f_n(x_{n-1}^0) \\ f_1(x) & f_2(x) & \dots & f_n(x) \end{pmatrix}$$

are rangul cel mult egal cu m . Dacă $v = (f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x))$ atunci există constantele $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_{n-1}$ astfel încât $v = \sum_{i=1}^{n-1} \mu_i v_i$ sau pe componente

$$f_j(x) = \sum_{i=1}^{n-1} \mu_i f_j(x_i^0), \quad j = 1, 2, \dots, n.$$

Înmulțind relațiile de mai sus, respectiv cu $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ și sumând obținem

$$\sum_{j=1}^n \lambda_j f(x_j) = \sum_{j=1}^n \lambda_j \sum_{i=1}^{n-1} \mu_i f_j(x_i^0) = \sum_{i=1}^{n-1} \mu_i \sum_{j=1}^n \lambda_j f(x_i^0) = 0.$$

În acest fel se contrazice independența familiei de funcții (2.1).

Reciproc, să presupunem că există sistemul de puncte $a \leq x_1 < x_2 < \dots < x_n \leq b$ astfel încât $V \begin{pmatrix} f_1 & f_2 & \dots & f_n \\ x_1 & x_2 & \dots & x_n \end{pmatrix} \neq 0$.

Dacă familia de funcții (2.1) nu ar fi linear independentă atunci ar exista constantele $\lambda_1, \dots, \lambda_n$, nu toate nule astfel încât $\sum_{i=1}^n \lambda_i f_i(x) = 0, \quad \forall x \in [a, b]$.

În particular, sistemul omogen

$$\begin{aligned} \lambda_1 f_1(x_1) + \lambda_2 f_2(x_1) + \dots + \lambda_n f_n(x_1) &= 0 \\ \lambda_1 f_1(x_2) + \lambda_2 f_2(x_2) + \dots + \lambda_n f_n(x_2) &= 0 \\ \dots & \\ \lambda_1 f_1(x_n) + \lambda_2 f_2(x_n) + \dots + \lambda_n f_n(x_n) &= 0 \end{aligned}$$

în necunoscutele $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ admite o soluție nebanală, cea ce contrazice ipoteza făcută asupra determinantului $V \begin{pmatrix} f_1 & f_2 & \dots & f_n \\ x_1 & x_2 & \dots & x_n \end{pmatrix}$. ■

Definiție 2.1.1 Sistemul de funcții (2.1) este un sistem Cebîșev dacă pentru orice sistem de puncte $a \leq x_1 < x_2 < \dots < x_n \leq b$ determinantul

$$V \begin{pmatrix} f_1 & f_2 & \dots & f_n \\ x_1 & x_2 & \dots & x_n \end{pmatrix}$$

este diferit de zero.

Observație 2.1.1 Orice sistem Cebîșev este alcătuit din funcții linear independente.

Observație 2.1.2 În orice interval $[a, b]$ funcțiile $1, x, x^2, \dots, x^n$ formează un sistem Cebîșev.

Fie $\mathcal{F} = \text{span}\{f_1, f_2, \dots, f_n\}$ spațiul liniar generat de funcțiile (2.1).

Teorema 2.1.2 (Condiția lui Haar) *Sistemul (2.1) formează un sistem Cebîșev dacă și numai dacă orice funcție din $\mathcal{F} \setminus \{0\}$ se anulează cel mult în $n - 1$ puncte din $[a, b]$.*

Demonstrație. Să presupunem că familia de funcții (2.1) formează un sistem Cebîșev și că există o funcție $f \in \mathcal{F} \setminus \{0\}$ care se anulează cel puțin în n puncte $a \leq x_1 < x_2 < \dots < x_n \leq b$ adică

$$f(x_j) = \sum_{i=1}^n c_i f_i(x_j) = 0, \quad j \in \{1, 2, \dots, n\}. \quad (2.2)$$

În acest caz relațiile (2.2) privesc ca un sistem algebric de ecuații liniare și omogene în necunoscutele c_1, \dots, c_n admit o soluție nebanală, deci $V \begin{pmatrix} f_1 & f_2 & \dots & f_n \\ x_1 & x_2 & \dots & x_n \end{pmatrix} = 0$, ceea ce contrazice definiția unui sistem Cebîșev.

Reciproc, presupunem că orice funcție din $\mathcal{F} \setminus \{0\}$ se anulează cel mult în $n - 1$ puncte din $[a, b]$ și prin absurd, că există sistemul de puncte $a \leq x_1 < x_2 < \dots < x_n \leq b$ astfel încât $V \begin{pmatrix} f_1 & f_2 & \dots & f_n \\ x_1 & x_2 & \dots & x_n \end{pmatrix} = 0$. Atunci sistemul algebric de ecuații liniare

$$\begin{aligned} \lambda_1 f_1(x_1) + \lambda_2 f_2(x_1) + \dots + \lambda_n f_n(x_1) &= 0 \\ \lambda_1 f_1(x_2) + \lambda_2 f_2(x_2) + \dots + \lambda_n f_n(x_2) &= 0 \\ \dots & \\ \lambda_1 f_1(x_n) + \lambda_2 f_2(x_n) + \dots + \lambda_n f_n(x_n) &= 0 \end{aligned}$$

în necunoscutele $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ admite o soluție nebanală. Cu această soluție nebanală definim $f = \sum_{i=1}^n \lambda_i f_i$. f aparține mulțimii $\mathcal{F} \setminus \{0\}$ și se anulează în punctele x_1, \dots, x_n . Acest fapt contrazice ipoteza făcută, deci familia de funcții (2.1) formează un sistem Cebîșev. ■

Teorema 2.1.3 *Dacă familia de funcții (2.1) formează un sistem Cebîșev în $[a, b]$ atunci \mathcal{F} formează o familie interpolatoare de ordin n în $[a, b]$.*

Demonstrație. Fie $a \leq x_1 < x_2 < \dots < x_n \leq b$ și numerele reale y_1, y_2, \dots, y_n . Considerăm sistemul algebric de ecuații liniare

$$\begin{aligned} c_1 f_1(x_1) + c_2 f_2(x_1) + \dots + c_n f_n(x_1) &= y_1 \\ c_1 f_1(x_2) + c_2 f_2(x_2) + \dots + c_n f_n(x_2) &= y_2 \\ \dots & \\ c_1 f_1(x_n) + c_2 f_2(x_n) + \dots + c_n f_n(x_n) &= y_n \end{aligned} \quad (2.3)$$

în necunoscutele c_1, c_2, \dots, c_n . Determinantul sistemului $V \begin{pmatrix} f_1 & f_2 & \dots & f_n \\ x_1 & x_2 & \dots & x_n \end{pmatrix}$ este diferit de 0, deci (2.3) admite o soluție unică c_1, c_2, \dots, c_n . Funcția $f = \sum_{i=1}^n c_i f_i$ satisface condițiile de interpolare $f(x_i) = y_i$, $i \in \{1, 2, \dots, n\}$. ■

Observație 2.1.3 *Condiția ca o familie de funcții (2.1) să formeze un sistem Cebîșev este echivalentă cu condiția lui Haar sau cu proprietatea de a fi interpolatoare de ordin n pentru spațiul liniar \mathcal{F} .*

Pentru funcția $f \in \mathcal{F}$ care satisface condițiile de interpolare

$$f(x_i) = y_i \quad i \in \{1, 2, \dots, n\} \quad (2.4)$$

folosim notația $L(\mathcal{F}; x_1, \dots, x_n; y_1, \dots, y_n)$. Dacă y_1, \dots, y_n sunt valorile unei funcții φ , respectiv în punctele x_1, \dots, x_n , atunci notația folosește $L(\mathcal{F}; x_1, \dots, x_n; \varphi)$.

Teorema 2.1.4 *Dacă familia de funcții (2.1) formează un sistem Cebîșev în $[a, b]$ atunci soluția problemei de interpolare (2.4) este*

$$L(\mathcal{F}; x_1, \dots, x_n; y_1, \dots, y_n)(x) = \frac{1}{V \begin{pmatrix} f_1 & f_2 & \dots & f_n \\ x_1 & x_2 & \dots & x_n \end{pmatrix}} \cdot \quad (2.5)$$

$$\cdot \sum_{i=1}^n y_i \begin{vmatrix} f_1(x_1) & f_2(x_1) & \dots & f_n(x_1) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ f_1(x_{i-1}) & f_2(x_{i-1}) & \dots & f_n(x_{i-1}) \\ f_1(x) & f_2(x) & \dots & f_n(x) \\ f_1(x_{i+1}) & f_2(x_{i+1}) & \dots & f_n(x_{i+1}) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ f_1(x_n) & f_2(x_n) & \dots & f_n(x_n) \end{vmatrix}$$

sau

$$L(\mathcal{F}; x_1, \dots, x_n; y_1, \dots, y_n)(x) = \frac{1}{V \begin{pmatrix} f_1 & f_2 & \dots & f_n \\ x_1 & x_2 & \dots & x_n \end{pmatrix}} \cdot \quad (2.6)$$

$$\sum_{i=1}^n f_i(x) \begin{vmatrix} f_1(x_1) & \dots & f_{i-1}(x_1) & y_1 & f_{i+1}(x_1) & \dots & f_n(x_1) \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ f_1(x_n) & \dots & f_{i-1}(x_n) & y_n & f_{i+1}(x_n) & \dots & f_n(x_n) \end{vmatrix}.$$

Demonstrație. Potrivit teoremei (2.1.3) problema de interpolare (2.4) are o soluție $L(x) = L(\mathcal{F}; x_1, \dots, x_n; y_1, \dots, y_n)(x)$ care verifică egalitatea

$$\begin{vmatrix} L(x) & f_1(x) & f_2(x) & \dots & f_n(x) \\ y_1 & f_1(x_1) & f_2(x_1) & \dots & f_n(x_1) \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ y_n & f_1(x_n) & f_2(x_n) & \dots & f_n(x_n) \end{vmatrix} = 0 \quad (2.7)$$

Într-adevăr, determinantul dezvoltat după prima linie este o funcție din \mathcal{F} . Această funcție se anulează în x_1, \dots, x_n și atunci, potrivit teoremei (2.1.2), determinantul este nul pentru orice $x \in [a, b]$.

Descompunem (2.7) într-o sumă de doi determinanți

$$\begin{vmatrix} L(x) & f_1(x) & f_2(x) & \dots & f_n(x) \\ 0 & f_1(x_1) & f_2(x_1) & \dots & f_n(x_1) \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & f_1(x_n) & f_2(x_n) & \dots & f_n(x_n) \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & f_1(x) & f_2(x) & \dots & f_n(x) \\ y_1 & f_1(x_1) & f_2(x_1) & \dots & f_n(x_1) \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ y_n & f_1(x_n) & f_2(x_n) & \dots & f_n(x_n) \end{vmatrix} = 0. \quad (2.8)$$

Dezvoltând al doilea determinant din (2.8) după prima coloană obținem

$$L(x)V \begin{pmatrix} f_1 & f_2 & \dots & f_n \\ x_1 & x_2 & \dots & x_n \end{pmatrix} + \sum_{i=1}^n (-1)^i y_i \begin{vmatrix} f_1(x) & f_2(x) & \dots & f_n(x) \\ f_1(x_1) & f_2(x_1) & \dots & f_n(x_1) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ f_1(x_{i-1}) & f_2(x_{i-1}) & \dots & f_n(x_{i-1}) \\ f_1(x_{i+1}) & f_2(x_{i+1}) & \dots & f_n(x_{i+1}) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ f_1(x_n) & f_2(x_n) & \dots & f_n(x_n) \end{vmatrix} = 0$$

de unde se obține imediat (2.5).

Relația (2.6) se obține analog, dezvoltând al doilea determinant din (2.8) după prima linie. ■

Teorema 2.1.5 Dacă $V \begin{pmatrix} f_1 & f_2 & \dots & f_n \\ x_1 & x_2 & \dots & x_n \end{pmatrix} \neq 0$ și $y_1, y_2, \dots, y_n \in \mathbb{R}$ atunci există o singură funcție $L \in \mathcal{F}$ astfel încât $L(x_i) = y_i, \forall i \in \{1, 2, \dots, n\}$.

Demonstrație. Reprezentarea $L = \sum_{i=1}^n c_i f_i$ și condițiile de interpolare conduc la sistemul algebric de ecuații liniare

$$\sum_{i=1}^n c_i f_i(x_j) = y_j, \quad j \in \{1, 2, \dots, n\}, \quad (2.9)$$

a cărui determinant $V \begin{pmatrix} f_1 & f_2 & \dots & f_n \\ x_1 & x_2 & \dots & x_n \end{pmatrix}$ este diferit de zero. ■

Teorema 2.1.6 Dacă $V \begin{pmatrix} f_1 & f_2 & \dots & f_n \\ x_1 & x_2 & \dots & x_n \end{pmatrix} \neq 0$, $y_1, y_2, \dots, y_n \in \mathbb{R}$ iar $L \in \mathcal{F}$ este funcția de interpolare pentru care $L(x_i) = y_i$, $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ atunci

$$\begin{vmatrix} L(x) & f_1(x) & \dots & f_n(x) \\ y_1 & f_1(x_1) & \dots & f_n(x_1) \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ y_n & f_1(x_n) & \dots & f_n(x_n) \end{vmatrix} = 0 \quad (2.10)$$

Demonstrație. Din (2.9) se obține

$$c_i = \frac{\begin{vmatrix} f_1(x_1) & \dots & f_{i-1}(x_1) & y_1 & f_{i+1}(x_1) & \dots & f_n(x_1) \\ \vdots & & & \vdots & & & \vdots \\ f_1(x_n) & \dots & f_{i-1}(x_n) & y_n & f_{i+1}(x_n) & \dots & f_n(x_n) \end{vmatrix}}{V \begin{pmatrix} f_1 & f_2 & \dots & f_n \\ x_1 & x_2 & \dots & x_n \end{pmatrix}}$$

care dezvoltat după coloana i conduce la

$$c_i = \frac{1}{V \begin{pmatrix} f_1 & f_2 & \dots & f_n \\ x_1 & x_2 & \dots & x_n \end{pmatrix}} \sum_{j=1}^n (-1)^{i+j} y_j V \begin{pmatrix} f_1 & \dots & f_{i-1} & f_{i+1} & \dots & f_n \\ x_1 & \dots & x_{j-1} & x_{j+1} & \dots & x_n \end{pmatrix}.$$

Prin urmare

$$\begin{aligned} L(x) &= \frac{1}{V \begin{pmatrix} f_1 & f_2 & \dots & f_n \\ x_1 & x_2 & \dots & x_n \end{pmatrix}} \times \\ &\times \sum_{i=1}^n f_i(x) \sum_{j=1}^n (-1)^{i+j} y_j V \begin{pmatrix} f_1 & \dots & f_{i-1} & f_{i+1} & \dots & f_n \\ x_1 & \dots & x_{j-1} & x_{j+1} & \dots & x_n \end{pmatrix} = \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{V \begin{pmatrix} f_1 & f_2 & \cdots & f_n \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_n \end{pmatrix}} \sum_{j=1}^n y_j \begin{vmatrix} f_1(x_1) & \cdots & f_n(x_1) \\ \vdots & & \vdots \\ f_1(x_{j-1}) & \cdots & f_n(x_{j-1}) \\ f_1(x) & \cdots & f_n(x) \\ f_1(x_{j+1}) & \cdots & f_n(x_{j+1}) \\ \vdots & & \vdots \\ f_1(x_n) & \cdots & f_n(x_n) \end{vmatrix}$$

egalitate echivalentă cu (2.10). ■

2.2 Interpolare Lagrange

Particularizăm rezultatele secțiunii anterioare pentru sistemul Cebîșev alcătuit din funcțiile $1, x, x^2, \dots, x^n$. În acest caz \mathcal{F} coincide cu mulțimea polinoamelor de grad cel mult n , \mathbb{P}_n . Mulțimea \mathbb{P}_n este interpolatoare de ordinul $n + 1$ pe orice mulțime de puncte care conține cel puțin $n + 1$ puncte distincte. Problema de interpolare corespunzătoare se numește problema de interpolare Lagrange, iar soluția ei polinomul de interpolare Lagrange.

Teorema 2.2.1 *Expresia polinomului de interpolare Lagrange este*

$$\begin{aligned} \bar{L}(\mathbb{P}_n; x_1, \dots, x_n; y_1, \dots, y_n)(x) &= \\ &= \sum_{i=1}^{n+1} y_i \frac{(x - x_1) \cdots (x - x_{i-1})(x - x_{i+1}) \cdots (x - x_{n+1})}{(x_i - x_1) \cdots (x_i - x_{i-1})(x_i - x_{i+1}) \cdots (x_i - x_{n+1})} \end{aligned} \quad (2.11)$$

Demonstrație. Determinantul $V \begin{pmatrix} 1, & x, & \dots, & x^n \\ x_1, & x_2, & \dots, & x_n \end{pmatrix}$ revine la determinantul lui Vandermonde

$$V(x_1, x_2, \dots, x_n) = \begin{vmatrix} 1 & x_1 & \cdots & x_1^n \\ 1 & x_2 & \cdots & x_2^n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & x_{n+1} & \cdots & x_{n+1}^n \end{vmatrix} = \prod_{1 \leq j < i \leq n+1} (x_i - x_j).$$

Utilizând (2.5) găsim

$$\frac{\begin{vmatrix} 1 & x_1 & \dots & x_1^n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & x_{i-1} & \dots & x_{i-1}^n \\ 1 & x & \dots & x^n \\ 1 & x_{i+1} & \dots & x_{i+1}^n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & x_{n+1} & \dots & x_{n+1}^n \end{vmatrix}}{V\begin{pmatrix} 1, & x, & \dots, & x^n \\ x_1, & x_2, & \dots, & x_n \end{pmatrix}} = \frac{V(x_1, \dots, x_{i-1}, x, x_{i+1}, \dots, x_{n+1})}{V(x_1, \dots, x_{i-1}, x_i, x_{i+1}, \dots, x_{n+1})} =$$

$$= \frac{(x - x_1) \dots (x - x_{i-1})(x - x_{i+1}) \dots (x - x_{n+1})}{(x_i - x_1) \dots (x_i - x_{i-1})(x_i - x_{i+1}) \dots (x_i - x_{n+1})} \quad i = 1, 2, \dots, n + 1. \quad \blacksquare$$

Polinoamele $l_i(x) = \frac{(x-x_1)\dots(x-x_{i-1})(x-x_{i+1})\dots(x-x_{n+1})}{(x_i-x_1)\dots(x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i+1})\dots(x_i-x_{n+1})}$, $i \in \{1, 2, \dots, n + 1\}$ se numesc polinoamele fundamentale Lagrange și verifică relațiile $l_i(x_j) = \delta_{i,j}$, $\forall i, j \in \{1, 2, \dots, n + 1\}$.

2.3 Interpolarea Lagrange-Hermite

Date fiind nodurile de interpolare $x_1 < x_2 < \dots < x_{n+1}$, numerele naturale r_1, r_2, \dots, r_{n+1} și numerele reale

$$f^{(k)}(x_i), \quad k \in \{0, 1, \dots, r_i\}, \quad i \in \{1, 2, \dots, n + 1\},$$

ne propunem să determinăm un polinom $H(x)$ care să satisfacă condițiile:

$$H^{(k)}(x_i) = f^{(k)}(x_i), \quad \begin{matrix} \forall k \in \{0, 1, \dots, r_i\}, \\ \forall i \in \{1, 2, \dots, n + 1\}. \end{matrix} \quad (2.12)$$

Vom arăta că în mulțimea polinoamelor de grad cel mult m , \mathbb{P}_m , cu

$$m + 1 = \sum_{i=1}^{n+1} (r_i + 1) \quad (2.13)$$

există un singur polinom ce satisface condițiile de interpolare (2.12), îi vom determina forma și vom evalua restul $f(x) - H(x)$, în ipoteza în care datele de interpolare corespund funcției f .

Teorema 2.3.1 *Dacă X și Y sunt spații m -dimensionale iar $A \in (X, Y)^\#$ este un operator liniar și injectiv atunci A este bijectiv.*

Demonstrația 1. Fie e_1, e_2, \dots, e_m o bază în X . Atunci Ae_1, Ae_2, \dots, Ae_m este o bază în Y . Într-adevăr, dacă $\sum_{i=1}^m \lambda_i Ae_i = 0$, atunci datorită liniarității $A(\sum_{i=1}^m \lambda_i e_i) = 0$ și a injectivității $\sum_{i=1}^m \lambda_i e_i = 0$, deci $\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_m = 0$.

Dacă $y \in Y$, atunci există constantele c_1, c_2, \dots, c_m astfel încât

$$y = \sum_{i=1}^m c_i Ae_i = A\left(\sum_{i=1}^m c_i e_i\right),$$

adică surjectivitatea operatorului A . ■

Demonstrația 2. Putem identifica A printr-o matrice din $M_n(\mathbb{R})$. Deoarece operatorul A este injectiv $\text{Ker}(A) = \{0\}$. Din 12.1.27 rezultă că $\dim(\text{Im}(A)) = n$ adică operatorul A este surjectiv. ■

Teorema 2.3.2 *Problema de interpolare Lagrange - Hermite are soluție unică în mulțimea polinoamelor de grad cel mult m , \mathbb{P}_m , (2.13).*

Demonstrație. Definim operatorul $A : \mathbb{P}_m \rightarrow \mathbb{R}^{m+1}$ prin

$$A(p) = (p(x_1), p'(x_1), \dots, p^{(r_1)}(x_1), \dots, p(x_{n+1}), p'(x_{n+1}), \dots, p^{(r_{n+1})}(x_{n+1})). \quad (2.14)$$

A este liniar și injectiv. Într-adevăr, dacă $A(p) = 0$, cu $p \in \mathbb{P}_m$ atunci polinomul $u(x) = \prod_{i=1}^{n+1} (x - x_i)^{r_i+1}$ divide polinomul p . Deoarece

$$\text{grad}(u) = \sum_{i=1}^{n+1} (r_i + 1) = m + 1 > \text{grad}(p),$$

rezultă că $p = 0$.

Din (2.3.1), rezultă că operatorul A este bijectiv, deci există un singur polinom $H \in \mathbb{P}_m$ astfel încât

$$A(H) = (f^{(0)}(x_1), f^{(1)}(x_1), \dots, f^{(r_1)}(x_1), \dots, f^{(0)}(x_{n+1}), f^{(1)}(x_{n+1}), \dots, f^{(r_{n+1})}(x_{n+1}))$$

sau

$$H^{(k)}(x_i) = f^{(k)}(x_i), \quad \forall k \in \{0, 1, \dots, r_i\}, \quad \forall i \in \{1, 2, \dots, n+1\}. \quad \blacksquare$$

Introducem notațiile:

$$u(x) = \prod_{i=1}^{n+1} (x - x_i)^{r_i+1} \quad (2.15)$$

$$u_i(x) = \frac{u(x)}{(x - x_i)^{r_i+1}} \quad (2.16)$$

Teorema 2.3.3 *Expresia polinomului de interpolare Lagrange – Hermite, soluția problemei de interpolare Lagrange – Hermite este*

$$H(x) = \sum_{i=1}^{n+1} \sum_{j=0}^{r_i} f^{(j)}(x_i) h_{i,j}(x), \quad (2.17)$$

unde

$$h_{i,j}(x) = u_i(x) \frac{(x - x_i)^j}{j!} \sum_{k=0}^{r_i-j} \left(\frac{1}{u_i(x)} \right)_{x=x_i}^{(k)} \frac{(x - x_i)^k}{k!}.$$

Demonstrație. Fie $(e_{i,j})_{1 \leq i \leq n+1, 0 \leq j \leq r_i}$ baza canonică în \mathbb{R}^{m+1} . Pentru fiecare $i \in \{1, 2, \dots, n+1\}$, $j \in \{0, 1, \dots, r_i\}$ există polinomul $h_{i,j} \in \mathbb{P}_m$ astfel încât $A(h_{i,j}) = e_{i,j}$, unde A este operatorul definit în (2.14). Atunci

$$\begin{aligned} A(H) &= (f^{(0)}(x_1), f^{(1)}(x_1), \dots, f^{(r_1)}(x_1), \dots \\ &\quad \dots, f^{(0)}(x_{n+1}), f^{(1)}(x_{n+1}), \dots, f^{(r_{n+1})}(x_{n+1})) = \\ &= \sum_{i=1}^{n+1} \sum_{j=0}^{r_i} f^{(j)}(x_i) e_{i,j} = \sum_{i=1}^{n+1} \sum_{j=0}^{r_i} f^{(j)}(x_i) A(h_{i,j}) = \\ &= A\left(\sum_{i=1}^{n+1} \sum_{j=0}^{r_i} f^{(j)}(x_i) h_{i,j}\right). \end{aligned}$$

Injectivitatea operatorului A implică (2.17).

Din definiția polinomului $h_{i,j}$, rezultă că $h_{i,j}$ se divide prin $u_i(x)(x - x_i)^j$. Prin urmare

$$h_{i,j}(x) = u_i(x)(x - x_i)^j g_{i,j}(x), \quad (2.18)$$

unde $g_{i,j}$ este un polinom a cărui grad este

$$\text{grad}g_{i,j} = \text{grad}h_{i,j} - \text{grad}u_i - j = m - ((m+1) - (r_i+1)) - j = r_i - j.$$

Polinomul $g_{i,j}$ se poate scrie

$$g_{i,j}(x) = \sum_{k=0}^{r_i-j} g_{i,j}^{(k)}(x_i) \frac{(x-x_i)^k}{k!}.$$

Din (2.18) găsim

$$(x-x_i)^j g_{i,j}(x) = h_{i,j}(x) \frac{1}{u_i(x)}$$

și derivând de $j+k$, potrivit formulei lui Leibniz, obținem

$$\sum_{s=0}^{j+k} \binom{j+k}{s} ((x-x_i)^j)^{(s)} g_{i,j}^{(j+k-s)}(x) = \sum_{s=0}^{j+k} \binom{j+k}{s} h_{i,j}^{(j+k-s)}(x) \left(\frac{1}{u_i(x)} \right)^{(s)}.$$

Pentru $x = x_i$ singurul termen diferit de 0 în membrul stâng se obține pentru $s = j$ iar în membrul drept, datorită definiției lui $h_{i,j}$, singurul termen diferit de 0 se obține pentru $s = k$. Rezultă

$$j! g_{i,j}^{(k)}(x_i) = h_{i,j}^{(j)} \left(\frac{1}{u_i(x)} \right)_{x=x_i}^{(k)}$$

de unde

$$g_{i,j}^{(k)}(x_i) = \frac{1}{j!} \left(\frac{1}{u_i(x)} \right)_{x=x_i}^{(k)}, \quad k \in \{0, 1, \dots, r_i - j\}. \quad \blacksquare$$

Teorema 2.3.4 Dacă f este o funcție de $m+1$ ori derivabilă în intervalul $I = (\min\{x, x_1, \dots, x_{n+1}\}, \max\{x, x_1, \dots, x_{n+1}\})$ atunci există $\xi \in I$ astfel încât

$$f(x) - H(x) = u(x) \frac{f^{(m+1)}(\xi)}{(m+1)!}. \quad (2.19)$$

Demonstrație. Funcția $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definită prin

$$F(z) = \begin{vmatrix} u(z) & f(z) - H(z) \\ u(x) & f(x) - H(x) \end{vmatrix}$$

admite zerourile x, x_1, \dots, x_{n+1} cu ordinele de multiplicitate, respectiv $1, r_1 + 1, \dots, r_{n+1} + 1$. Spunem că F se anulează în $1 + \sum_{i=1}^{n+1} (r_i + 1) = m + 2$ puncte. Din teorema lui Rolle rezultă că există $\xi \in I$ astfel încât $F^{(m+1)}(\xi) = 0$. Dar

$$F^{(m+1)}(\xi) = (m+1)!(f(x) - H(x)) - f^{(m+1)}(\xi)u(x) = 0,$$

de unde se deduce (2.19). ■

Cazuri particulare importante.

1. **Polinomul Taylor.** Fie $n = 0$ și notăm $x_1 = a$, $r_1 = r$. În acest caz polinomul de interpolare $H(x)$ satisface condițiile

$$H^{(j)}(a) = f^{(j)}(a) \quad j \in \{0, 1, \dots, r\}$$

și are expresia

$$H(x) = \sum_{j=0}^r f^{(j)}(a) \frac{(x-a)^j}{j!},$$

ceea ce corespunde polinomului lui Taylor atașat funcției f în punctul a , de grad r .

2. **Polinomul lui Lagrange.** Dacă $r_i = 0, i = 1, 2, \dots, n+1$ atunci regăsim polinomul de interpolare Lagrange

$$\begin{aligned} H(x) &= \sum_{i=1}^{n+1} f(x_i) \frac{u_i(x)}{u_i(x_i)} = \\ &= \sum_{i=1}^{n+1} f(x_i) \frac{(x-x_1)\dots(x-x_{i-1})(x-x_{i+1})\dots(x-x_{n+1})}{(x_i-x_1)\dots(x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i+1})\dots(x_i-x_{n+1})} = \\ &= L(\mathbb{P}_n, x_1, \dots, x_{n+1}, f)(x). \end{aligned}$$

3. **Polinomul lui Fejér.** Fie $r_i = 1, i = 1, 2, \dots, n+1$. Introducând notațiile

$$\begin{aligned} w(x) &= \prod_{i=1}^{n+1} (x-x_i) \\ w(x) &= \frac{w(x)}{x-x_i} & i \in \{1, 2, \dots, n+1\} \\ l_i(x) &= \frac{w_i(x)}{w_i(x_i)} = \frac{w(x)}{(x-x_i)w'(x_i)} & i \in \{1, 2, \dots, n+1\} \end{aligned}$$

găsim $u(x) = w^2(x)$ și $u_i(x) = w_i^2(x), i \in \{1, 2, \dots, n+1\}$. Atunci

$$h_{i,0}(x) = w_i^2(x) \left(\frac{1}{w_i^2(x_i)} + (x-x_i) \left(\frac{1}{w_i^2(x)} \right)'_{x=x_i} \right) =$$

$$\begin{aligned}
&= w_i^2(x) \left(\frac{1}{w_i^2(x_i)} - (x - x_i) \frac{2w_i'(x_i)}{w_i^3(x_i)} \right) = \\
&= \frac{w_i^2(x)}{w_i^2(x_i)} \left(1 - (x - x_i) \frac{w_i''(x_i)}{w_i'(x_i)} \right) = l_i^2(x) \left(1 - (x - x_i) \frac{w_i''(x_i)}{w_i'(x_i)} \right),
\end{aligned}$$

și

$$h_{i,1}(x) = w_i^2(x)(x - x_i) \frac{1}{w_i^2(x_i)} = l_i^2(x)(x - x_i).$$

Expresia polinomului de interpolare devine

$$\begin{aligned}
H(x) &= \sum_{i=1}^{n+1} f(x_i) h_{i,0}(x) + \sum_{i=1}^{n+1} f'(x_i) h_{i,1}(x) = \tag{2.20} \\
&= \sum_{i=1}^{n+1} f(x_i) l_i^2(x) \left(1 - (x - x_i) \frac{w_i''(x_i)}{w_i'(x_i)} \right) + \sum_{i=1}^{n+1} f'(x_i) l_i^2(x) (x - x_i).
\end{aligned}$$

Acest polinom este cunoscut sub numele de polinomul lui Fejér.

2.4 Polinomul de interpolarea Lagrange și diferența divizată

Scopul acestei secțiuni este reliefarea unor formule legate de polinomul de interpolare Lagrange. Utilizăm notațiile

$$\begin{aligned}
u(x) &= \prod_{i=1}^{n+1} (x - x_i)^{r_i+1} \\
u_i(x) &= \frac{u(x)}{(x - x_i)^{r_i+1}} \\
l_i(x) &= \frac{(x - x_1) \dots (x - x_{i-1})(x - x_{i+1}) \dots (x - x_{n+1})}{(x_i - x_1) \dots (x_i - x_{i-1})(x_i - x_{i+1}) \dots (x_i - x_{n+1})} = \\
&= \frac{u_i(x)}{u_i(x_i)} = \frac{u(x)}{(x - x_i)u'(x_i)}.
\end{aligned}$$

Din (2.2.1) avem

$$L(\mathbb{P}_n; x_1, \dots, x_{n+1}; f)(x) = \sum_{i=1}^{n+1} f(x_i) \frac{u_i(x)}{u_i(x_i)} = \tag{2.21}$$

$$= u(x) \sum_{i=1}^{n+1} f(x_i) \frac{1}{(x-x_i)u'(x_i)} = \sum_{i=1}^{n+1} f(x_i) l_i(x).$$

Din teorema (2.3.4) deducem

Teorema 2.4.1 *Dacă f este o funcție de $n+1$ ori derivabilă în intervalul $I = (\min\{x, x_1, \dots, x_{n+1}\}, \max\{x, x_1, \dots, x_{n+1}\})$ atunci există $\xi \in I$ astfel încât*

$$f(x) = L(\mathbb{P}_n; x_1, \dots, x_{n+1}; f)(x) + u(x) \frac{f^{n+1}(\xi)}{(n+1)!}. \quad (2.22)$$

În particular, pentru $f = 1$ rezultă

$$1 = L(\mathbb{P}_n; x_1, \dots, x_{n+1})(x) = u(x) \sum_{i=1}^{n+1} \frac{1}{(x-x_i)u'(x_i)}. \quad (2.23)$$

Împărțind (2.21) la (2.23) deducem formula *baricentrică* a polinomului de interpolare Lagrange

$$L(\mathbb{P}_n; x_1, \dots, x_{n+1}; f)(x) = \frac{\sum_{i=1}^{n+1} \frac{f(x_i)}{(x-x_i)u'(x_i)}}{\sum_{i=1}^{n+1} \frac{1}{(x-x_i)u'(x_i)}}. \quad (2.24)$$

O metoda utilă de calcul se bazează pe formula de recurență a polinoamelor de interpolare Lagrange

Teorema 2.4.2 *Are loc formula*

$$L(\mathbb{P}_n; x_1, \dots, x_{n+1}; f)(x) = \frac{(x-x_{n+1})L(\mathbb{P}_{n-1}; x_1, \dots, x_n; f)(x) - (x-x_1)L(\mathbb{P}_{n-1}; x_2, \dots, x_{n+1}; f)(x)}{x_1 - x_{n+1}} \quad (2.25)$$

Demonstrație. Funcția din membrul drept al egalității (2.25) verifică condițiile de interpolare ce definesc polinomul $L(\mathbb{P}_n; x_1, \dots, x_{n+1}; f)(x)$. ■

Definiție 2.4.1 *Numim diferență divizată de ordin n a funcției f în nodurile x_1, \dots, x_{n+1} coeficientul lui x^n a polinomului de interpolare Lagrange $L(\mathbb{P}_n; x_1, \dots, x_{n+1}; f)(x)$ și-l notăm $[x_1, \dots, x_{n+1}; f]$.*

Teorema 2.4.3 *Are loc egalitatea*

$$\begin{aligned} L(\mathbb{P}_n; x_1, \dots, x_{n+1}; f)(x) &= \\ &= L(\mathbb{P}_{n-1}; x_1, \dots, x_n; f)(x) + (x - x_1) \dots (x - x_n)[x_1, \dots, x_{n+1}; f]. \end{aligned} \quad (2.26)$$

Demonstrație. Funcția $L(\mathbb{P}_n; x_1, \dots, x_{n+1}; f)(x) - L(\mathbb{P}_{n-1}; x_1, \dots, x_n; f)(x) - (x - x_1) \dots (x - x_n)[x_1, \dots, x_{n+1}; f]$ reprezintă un polinom de grad cel mult $n - 1$ care se anulează în n puncte distincte x_1, \dots, x_n ; deci este polinomul identic nul.

■

Un rezultat asemănător celui din (2.4.1) este

Teorema 2.4.4 *Are loc formula*

$$f(x) = L(\mathbb{P}_n; x_1, \dots, x_{n+1}; f)(x) + u(x)[x, x_1, \dots, x_{n+1}; f] \quad (2.27)$$

Demonstrație. Polinomul de interpolare Lagrange al funcției f în nodurile x, x_1, \dots, x_{n+1} verifică egalitatea (2.26)

$$\begin{aligned} L(\mathbb{P}_{n+1}; x, x_1, \dots, x_{n+1}; f)(z) &= \\ &= L(\mathbb{P}_n; x_1, \dots, x_{n+1}; f)(z) + (z - x_1) \dots (z - x_{n+1})[x, x_1, \dots, x_{n+1}; f]. \end{aligned}$$

Pentru $z = x$ obținem (2.27). ■

În funcție de diferențe divizate, polinomul de interpolare Lagrange se scrie

Teorema 2.4.5 (*Forma lui Newton a polinomului de interpolare*) *Are loc formula*

$$\begin{aligned} L(\mathbb{P}_n; x_1, \dots, x_{n+1}; f)(x) &= \\ &= f(x_1) + \sum_{i=1}^n (x - x_1) \dots (x - x_i)[x_1, \dots, x_{i+1}; f] \end{aligned} \quad (2.28)$$

Demonstrație. Potrivit (2.4.3) au loc succesiv egalitățile

$$\begin{aligned} L(\mathbb{P}_n; x_1, \dots, x_{n+1}; f)(x) &= L(\mathbb{P}_{n-1}; x_1, \dots, x_n; f)(x) \\ &\quad + (x - x_1) \dots (x - x_n)[x_1, \dots, x_{n+1}; f] \\ L(\mathbb{P}_{n-1}; x_1, \dots, x_n; f)(x) &= L(\mathbb{P}_{n-2}; x_1, \dots, x_{n-1}; f)(x) \\ &\quad + (x - x_1) \dots (x - x_{n-1})[x_1, \dots, x_n; f] \\ &\quad \dots \quad \dots \\ L(\mathbb{P}_1; x_1, x; f)(x) &= L(\mathbb{P}_0; x_1; f)(x) + (x - x_1)[x_1, x_2; f] \end{aligned}$$

care însumate dau (2.28). ■

Punând în evidență coeficientul lui x^n în (2.21), găsim următoarele formule de calcul pentru diferența divizată

$$\begin{aligned} [x_1, \dots, x_{n+1}; f] &= \quad (2.29) \\ &= \sum_{i=1}^{n+1} \frac{f_i(x)}{(x_i - x_1) \dots (x_i - x_{i-1})(x_i - x_{i+1}) \dots (x_i - x_{n+1})} = \sum_{i=1}^{n+1} \frac{f_i(x)}{u_i(x_i)} = \sum_{i=1}^{n+1} \frac{f(x_i)}{u'(x_i)}. \end{aligned}$$

Stabilim proprietăți ale diferenței divizate.

Teorema 2.4.6 *Diferențele divizate ale unei funcții verifică formula de recurență*

$$[x_1, \dots, x_{n+1}; f] = \frac{[x_1, \dots, x_n; f] - [x_2, \dots, x_{n+1}; f]}{x_1 - x_{n+1}}, \quad (2.30)$$

$$[x_1; f] = f(x_1). \quad (2.31)$$

Demonstrație. Potrivit (2.4.3) au loc dezvoltările

$$\begin{aligned} L(\mathbb{P}_n; x_1, \dots, x_{n+1}; f)(x) &= \\ &= L(\mathbb{P}_{n-1}; x_1, \dots, x_n; f)(x) + (x - x_1) \dots (x - x_n) [x_1, \dots, x_{n+1}; f] = \\ &= L(\mathbb{P}_{n-2}; x_2, \dots, x_n; f)(x) + (x - x_2) \dots (x - x_n) [x_1, \dots, x_n; f] + \\ &\quad + (x - x_1) \dots (x - x_n) [x_1, \dots, x_{n+1}; f] \end{aligned}$$

și

$$\begin{aligned} L(\mathbb{P}_n; x_1, \dots, x_{n+1}; f)(x) &= \\ &= L(\mathbb{P}_{n-1}; x_2, \dots, x_{n+1}; f)(x) + (x - x_2) \dots (x - x_{n+1}) [x_1, \dots, x_{n+1}; f] = \\ &= L(\mathbb{P}_{n-2}; x_2, \dots, x_n; f)(x) + (x - x_2) \dots (x - x_n) [x_2, \dots, x_{n+1}; f] + \\ &\quad + (x - x_2) \dots (x - x_{n+1}) [x_1, \dots, x_{n+1}; f]. \end{aligned}$$

Egalând cele două dezvoltări, după reducere și simplificare obținem

$$\begin{aligned} [x_1, \dots, x_n; f] + (x - x_1) [x_1, \dots, x_{n+1}; f] &= \\ = [x_2, \dots, x_{n+1}; f] + (x - x_{n+1}) [x_1, \dots, x_{n+1}; f] \end{aligned}$$

de unde rezultă (2.30). ■

Teorema 2.4.7 (*Formula de medie*) Dacă funcția f admite derivate până la ordinul n în intervalul $I = (\min\{x_1, \dots, x_{n+1}\}, \max\{x_1, \dots, x_{n+1}\})$ atunci există $\xi \in I$ astfel încât

$$[x_1, \dots, x_{n+1}; f] = \frac{f^{(n)}}{n!} \quad (2.32)$$

Demonstrație. Fie $x \in I$. Ținând seama de (2.4.4) are loc egalitatea

$$f(x) - L(\mathbb{P}_{n-1}, x_1, \dots, x_n; f)(x) = (x - x_1) \dots (x - x_n) [x, x_1, \dots, x_n; f] \quad (2.33)$$

și potrivit lui (2.4.1) există $\xi \in I$ astfel încât

$$f(x) - L(\mathbb{P}_{n-1}, x_1, \dots, x_n; f)(x) = (x - x_1) \dots (x - x_n) \frac{f^{(n)}(\xi)}{n!}. \quad (2.34)$$

Egalând (2.33) și (2.34), pentru $x = x_{n+1}$ obținem (2.32). ■

Observație 2.4.1 Dacă $f \in C^n(I)$ și $x \in I$ atunci

$$\lim_{x_1 \rightarrow x, \dots, x_n \rightarrow x} [x_1, \dots, x_{n+1}; f] = \frac{f^{(n)}(x)}{n!}.$$

Această observație justifică definiția

Definiție 2.4.2

$$\underbrace{[x, \dots, x; f]}_{n+1 \text{ ori}} = \frac{f^{(n)}(x)}{n!} \quad (2.35)$$

Această definiție permite definirea diferenței divizare pe noduri multiple. În prealabil stabilim

Teorema 2.4.8 Fie nodurile

$$\begin{array}{cccc} x_1^1, & x_1^2, & \dots & x_1^{r_1+1} \\ x_2^1, & x_2^2, & \dots & x_2^{r_2+1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_{n+1}^1, & x_{n+1}^2, & \dots & x_{n+1}^{r_{n+1}+1} \end{array}$$

și notațiile

$$\begin{aligned} v_i(x) &= \prod_{j=1}^{r_i+1} (x - x_i^j), \\ u(x) &= \prod_{i=1}^{n+1} v_i(x), \\ u_i(x) &= \frac{u(x)}{v_i(x)}. \end{aligned}$$

Are loc formula

$$\begin{aligned} [x_1^1, \dots, x_1^{r_1+1}, x_2^1, \dots, x_2^{r_2+1}, \dots, x_{n+1}^1, \dots, x_{n+1}^{r_{n+1}+1}; f] &= \quad (2.36) \\ &= \sum_{i=1}^{n+1} [x_i^1, \dots, x_i^{r_i+1}; \frac{f}{u_i}] \end{aligned}$$

Demonstrație. Deoarece $u'(x_i^j) = u_i(x_i^j)v_i'(x_i^j)$, formula (2.29) ne dă

$$\begin{aligned} [x_1^1, \dots, x_1^{r_1+1}, x_2^1, \dots, x_2^{r_2+1}, \dots, x_{n+1}^1, \dots, x_{n+1}^{r_{n+1}+1}; f] &= \\ = \sum_{i=1}^{n+1} \sum_{j=1}^{r_i+1} \frac{f(x_i^j)}{u'(x_i^j)} &= \sum_{i=1}^{n+1} \sum_{j=1}^{r_i+1} \frac{f(x_i^j)}{u_i(x_i^j)v_i'(x_i^j)} = \sum_{i=1}^{n+1} [x_i^1, \dots, x_i^{r_i+1}; \frac{f}{u_i}]. \blacksquare \end{aligned}$$

Combinând (2.35) cu (2.36) definim

Definiție 2.4.3

$$[\underbrace{x_1, \dots, x_1}_{r_1+1 \text{ ori}}, \dots, \underbrace{x_{n+1}, \dots, x_{n+1}}_{r_{n+1}+1 \text{ ori}}; f] = \quad (2.37)$$

$$\sum_{i=1}^{n+1} \frac{1}{r_i!} \left(\frac{f(t)}{(t-x_1)^{r_1+1} \dots (t-x_{i-1})^{r_{i-1}+1} (t-x_{i+1})^{r_{i+1}+1} \dots (t-x_{n+1})^{r_{n+1}+1}} \right)_{t=x_i}^{(r_i)}.$$

Teorema 2.4.9 (Formula lui Leibniz) Are loc formula

$$[x_1, \dots, x_{n+1}, f \cdot g] = \sum_{i=1}^{n+1} [x_1, \dots, x_i; f] \cdot [x_i, \dots, x_{n+1}; g] \quad (2.38)$$

Demonstrație. Prin inducție după n , pentru $n = 0$

$$[x_1, f \cdot g] = f(x_1)g(x_1) = [x_1, f] \cdot [x_1, g].$$

Presupunem egalitatea (2.43) adevărată în cazul diferențelor finite de ordin n și o demonstrăm în cazul diferențelor finite de ordin $n + 1$. Fie $n + 2$ puncte distincte x_1, x_2, \dots, x_{n+2} . Trebuie să arătăm că

$$[x_1, \dots, x_{n+2}, f \cdot g] = \sum_{i=1}^{n+2} [x_1, \dots, x_i; f] \cdot [x_i, \dots, x_{n+2}; g].$$

Aplicând formula de recurență (2.31) și ipoteza inducției deducem

$$\begin{aligned} [x_1, \dots, x_{n+2}; f \cdot g] &= \frac{[x_1, \dots, x_{n+1}; f \cdot g] - [x_2, \dots, x_{n+2}; f \cdot g]}{x_1 - x_{n+2}} = \\ &= \frac{1}{x_1 - x_{n+2}} \left(\sum_{k=1}^{n+1} [x_1, \dots, x_k; f] \cdot [x_k, \dots, x_{n+1}; g] - \right. \\ &\quad \left. - \sum_{k=2}^{n+2} [x_2, \dots, x_k; f] \cdot [x_k, \dots, x_{n+2}; g] \right). \end{aligned}$$

În membrul drept adunăm și scădem expresia

$$\sum_{k=2}^{n+2} [x_1, \dots, x_{k-1}; f] \cdot [x_k, \dots, x_{n+2}; g].$$

Atunci egalitatea anterioară devine

$$\begin{aligned} [x_1, \dots, x_{n+2}; f \cdot g] &= \frac{1}{x_1 - x_{n+2}} \left(\sum_{k=1}^{n+1} [x_1, \dots, x_k; f] \cdot [x_k, \dots, x_{n+1}; g] - \right. \\ &\quad \left. - \sum_{k=2}^{n+2} [x_1, \dots, x_{k-1}; f] \cdot [x_k, \dots, x_{n+2}; g] + \right. \\ &\quad \left. + \sum_{k=2}^{n+2} ([x_1, \dots, x_{k-1}; f] - [x_2, \dots, x_k; f])[x_k, \dots, x_{n+2}; g] \right). \end{aligned}$$

În prima sumă vom scrie i în loc de k , în a doua sumă efectuăm schimbarea de indice $k - 1 = i$, iar în ultima sumă scriem de asemenea i în locul lui k , după ce aplicăm formula de recurență (2.31). Astfel vom obține

$$\begin{aligned}
[x_1, \dots, x_{n+2}; f \cdot g] &= \frac{1}{x_1 - x_{n+2}} \left(\sum_{i=1}^{n+1} [x_1, \dots, x_i; f] \cdot [x_i, \dots, x_{n+1}; g] - \right. \\
&\quad \left. - \sum_{i=1}^{n+1} [x_1, \dots, x_i; f] \cdot [x_{i+1}, \dots, x_{n+2}; g] + \right. \\
&\quad \left. + \sum_{i=2}^{n+2} (x_1 - x_i) [x_1, \dots, x_i; f] \cdot [x_i, \dots, x_{n+2}; g] \right) = \\
&= \frac{1}{x_1 - x_{n+2}} \left(\sum_{i=1}^{n+1} [x_1, \dots, x_i; f] ([x_i, \dots, x_{n+1}; g] - [x_{i+1}, \dots, x_{n+2}; g]) + \right. \\
&\quad \left. + \sum_{i=2}^{n+2} (x_1 - x_i) [x_1, \dots, x_i; f] \cdot [x_i, \dots, x_{n+2}; g] \right) = \\
&= \frac{1}{x_1 - x_{n+2}} \left(\sum_{i=1}^{n+1} (x_i - x_{n+2}) [x_1, \dots, x_i; f] \cdot [x_i, \dots, x_{n+2}; g] + \right. \\
&\quad \left. + \sum_{i=2}^{n+2} (x_1 - x_i) [x_1, \dots, x_i; f] \cdot [x_i, \dots, x_{n+2}; g] \right).
\end{aligned}$$

Grupând termenii corespunzători,

$$\begin{aligned}
[x_1, \dots, x_{n+2}; f \cdot g] &= \frac{1}{x_1 - x_{n+2}} \left((x_1 - x_{n+2}) [x_1; f] \cdot [x_1, \dots, x_{n+2}; g] + \right. \\
&\quad \left. + \sum_{i=2}^{n+1} (x_1 - x_{n+2}) [x_1, \dots, x_i; f] \cdot [x_i, \dots, x_{n+2}; g] + \right. \\
&\quad \left. + (x_1 - x_{n+2}) [x_1, \dots, x_{n+2}; f] \cdot [x_{n+2}; g] \right) = \\
&= \sum_{i=1}^{n+2} [x_1, \dots, x_i; f] \cdot [x_i, \dots, x_{n+2}; g]. \quad \blacksquare
\end{aligned}$$

Legătura dintre diferența finită progresivă / regresivă și diferența divizată a unei funcții este

Teorema 2.4.10 *Au loc egalitățile*

$$[a, a + h, \dots, a + nh; f] = \frac{\Delta_h^n f(a)}{h^n n!} \quad (2.39)$$

$$[a, a - h, \dots, a - nh; f] = \frac{\nabla_h^n f(a)}{h^n n!} \quad (2.40)$$

Demonstrație. Pentru $x_i = a + (i - 1)h$, $i = 1, \dots, n + 1$, formula (2.29) devine

$$[a, a + h, \dots, a + nh; f] = \sum_{i=1}^{n+1} \frac{f(a + (i - 1)h)}{(-1)^{n-i+1} (n - i + 1)! (i - 1)! h^n}.$$

Prin schimbarea de indice $j = i - 1$ obținem

$$\begin{aligned} [a, a + h, \dots, a + nh; f] &= \sum_{j=0}^n \frac{f(a + jh)}{(-1)^{n-j} (n - j)! j! h^n} = \\ &= \frac{1}{n! h^n} \sum_{j=0}^n \binom{n}{j} (-1)^j f(a + jh) = \frac{\Delta_h^n f(a)}{h^n n!}. \end{aligned}$$

Analog se demonstrează și cealaltă egalitate. ■

Observație 2.4.2

Dacă în (2.38) se aleg nodurile echidistante $a, a + h, \dots, a + nh$ atunci cu (2.39) se regăsește (1.5).

În cazul nodurilor echidistante, polinomul de interpolare Lagrange are expresia

Teorema 2.4.11 *Au loc formulele*

$$\begin{aligned} L(\mathbb{P}_n; a, a + h, \dots, a + nh; f) &= \quad (2.41) \\ &= \sum_{i=0}^n f(a + ih) \frac{(-1)^{n-i}}{h^n i! (n - i)!} (x - a) \dots (x - a - (i - 1)h) (x - a - (i + 1)h) \dots (a - a - nh) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} L(\mathbb{P}_n; a, a + h, \dots, a + nh; f) &= \quad (2.42) \\ &= f(a) + \sum_{i=1}^n \frac{\Delta_h^i f(a)}{h^i i!} (x - a) (x - a - h) \dots (x - a - (i - 1)h) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} L(\mathbb{P}_n; a, a - h, \dots, a - nh; f) &= \quad (2.43) \\ &= f(a) + \sum_{i=1}^n \frac{\nabla_h^i f(a)}{h^i i!} (x - a) (x - a + h) \dots (x - a + (i - 1)h) \end{aligned}$$

Teorema 2.4.12 *Are loc formula de derivare*

$$\frac{d^m}{dx^m}[x_1, \dots, x_n, x; f] = m![x_1, \dots, x_n, \underbrace{x, \dots, x}_{m+1 \text{ ori}}; f]. \quad (2.44)$$

Demonstrație. Prin inducție matematică după m . Pentru $m = 1$ cu ajutorul formulei de recurență a diferențelor divizate găsim

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx}[x_1, \dots, x_n, x; f] &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{[x_1, \dots, x_n, x+h; f] - [x_1, \dots, x_n, x; f]}{h} = \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} [x_1, \dots, x_n, x+h, x; f] = [x_1, \dots, x_n, x, x; f]. \end{aligned}$$

În ipoteza în care formula (2.44) este adevărată pentru derivatele de ordin $m-1$ vom avea

$$\begin{aligned} \frac{d^m}{dx^m}[x_1, \dots, x_n, x; f] &= \\ &= (m-1)! \lim_{h \rightarrow 0} \frac{[x_1, \dots, x_n, \underbrace{x+h, \dots, x+h}_{m \text{ ori}}; f] - [x_1, \dots, x_n, \underbrace{x, \dots, x}_{m \text{ ori}}; f]}{h}. \end{aligned}$$

Adunăm și scădem termeni convenabili la numărătorul fracției, după care aplicăm formula de recurență a diferențelor divizate

$$\begin{aligned} \frac{d^m}{dx^m}[x_1, \dots, x_n, x; f] &= \\ &= (m-1)! \lim_{h \rightarrow 0} \left(\frac{[x_1, \dots, x_n, \underbrace{x+h, \dots, x+h}_{m \text{ ori}}; f] - [x_1, \dots, x_n, \underbrace{x+h, \dots, x+h, x}_{m-1 \text{ ori}}; f]}{h} + \right. \\ &\quad + \frac{[x_1, \dots, x_n, \underbrace{x+h, \dots, x+h, x}_{m-1 \text{ ori}}; f] - [x_1, \dots, x_n, \underbrace{x, \dots, x, x}_{m-2 \text{ ori}}; f]}{h} + \dots \\ &\quad \left. \dots + \frac{[x_1, \dots, x_n, x+h, \underbrace{x, \dots, x}_{m-1 \text{ ori}}; f] - [x_1, \dots, x_n, \underbrace{x, \dots, x}_{m \text{ ori}}; f]}{h} \right) = \\ &= (m-1)! \lim_{h \rightarrow 0} ([x_1, \dots, x_n, \underbrace{x+h, \dots, x+h}_{m \text{ ori}}; f] + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + [x_1, \dots, x_n, \overbrace{x+h, \dots, x+h}^{m-1 \text{ ori}}, x, x; f] + \dots + [x_1, \dots, x_n, x+h, \overbrace{x, \dots, x}^{m \text{ ori}}; f] = \\
& = m! [x_1, \dots, x_n, \underbrace{x, \dots, x}_{m+1 \text{ ori}}; f]. \quad \blacksquare
\end{aligned}$$

2.5 Algoritm pentru calculul diferenței divizate a unui polinom

Fie polinomul $P(x) = \sum_{i=0}^n a_i x^i$ și numerele distincte două câte două x_0, x_1, \dots, x_m $m < n$. În cele ce urmează se va dezvolta un algoritm ce amintește de schema lui Horner, pentru calculul diferenței divizate $[x_0, x_1, \dots, x_m; P]$.

Teorema 2.5.1 *Dacă $P \in \mathbb{P}_n$ și $m < n$ atunci funcția $\varphi(x) = [x_0, x_1, \dots, x_{m-1}, x; P]$ este polinom de grad cel mult $n - m$, $\varphi \in \mathbb{P}_{n-m}$.*

Demonstrație. Datorită condițiilor de interpolare are loc egalitatea $P(x) = L(\mathbb{P}_m; x_0, x_1, \dots, x_{m-1}, x; P)(x)$. Aplicând 2.21, rezultă egalitățile

$$\begin{aligned}
P(x) &= L(\mathbb{P}_m; x_0, x_1, \dots, x_{m-1}, x; P)(x) = L(\mathbb{P}_{m-1}; x_0, x_1, \dots, x_{m-1}; P)(x) + \\
&+ (x - x_0) \dots (x - x_{m-1}) [x_0, x_1, \dots, x_{m-1}, x; P],
\end{aligned}$$

de unde

$$\varphi(x) = \frac{P(x) - L(\mathbb{P}_{m-1}; x_0, x_1, \dots, x_{m-1}; P)(x)}{(x - x_0) \dots (x - x_{m-1})}.$$

Polinomul $P(x) - L(\mathbb{P}_{m-1}; x_0, x_1, \dots, x_{m-1}; P)(x) \in \mathbb{P}_n$ se anulează în x_0, \dots, x_{m-1} deci $P(x) - L(\mathbb{P}_{m-1}; x_0, x_1, \dots, x_{m-1}; P)(x)$ se divide prin $(x - x_0) \dots (x - x_{m-1})$ și astfel $\varphi \in \mathbb{P}_{n-m}$. \blacksquare

Tinând seama de teorema anterioară, se introduc notațiile

$$[x_0, x_1, \dots, x_{k-1}, x; P] = \sum_{i=0}^{n-k} A_{k-1,i} x^i, \quad k \in \{1, 2, \dots, m\}. \quad (2.45)$$

Din formula de recurență

$$[x_0, x_1, \dots, x_k, x; P] = \frac{[x_0, x_1, \dots, x_{k-1}, x; P] - [x_0, x_1, \dots, x_k; P]}{x - x_k}$$

rezultă

$$[x_0, x_1, \dots, x_{k-1}, x; P] = [x_0, x_1, \dots, x_k; P] + (x - x_k)[x_0, x_1, \dots, x_k, x; P].$$

Introducând reprezentările (2.45), egalitatea de mai sus se scrie

$$\sum_{i=0}^{n-k} A_{k-1,i} x^i = [x_0, x_1, \dots, x_k; P] + (x - x_k) \sum_{i=0}^{n-k-1} A_{k,i} x^i$$

sau

$$\sum_{i=0}^{n-k} A_{k-1,i} x^i = [x_0, x_1, \dots, x_k; P] + \sum_{i=1}^{n-k} A_{k,i-1} x^i - x_k \sum_{i=0}^{n-k-1} A_{k,i} x^i.$$

Identificând coeficienții, se obțin relațiile:

$$\begin{aligned} A_{k-1,n-k} &= A_{k,n-k-1} \\ A_{k-1,i} &= A_{k,i-1} - x_k A_{k,i} \quad i = 1, \dots, n-k-1 \\ A_{k-1,0} &= [x_0, x_1, \dots, x_k; P] - x_k A_{k,0} \end{aligned}$$

sau

$$\begin{aligned} A_{k,n-k-1} &= A_{k-1,n-k} \\ A_{k,i-1} &= A_{k-1,i} + x_k A_{k,i} \quad i = 1, \dots, n-k-1 \\ [x_0, x_1, \dots, x_k; P] &= A_{k-1,0} + x_k A_{k,0} \end{aligned} \quad (2.46)$$

În tabelul

	$A_{k-1,n-k-1}$	$A_{k-1,n-k-2}$	\dots	$A_{k-1,i}$	\dots	$A_{k-1,1}$	$A_{k-1,0}$
x_k	$A_{k,n-k}$	$A_{k,n-k-1}$	\dots	$A_{k,i-1}$	\dots	$A_{k,0}$	$[x_0, x_1, \dots, x_k; P]$

linia a doua se calculează potrivit formulelor (2.46), în maniera schemei lui Horner.

Pentru $k = 0$, din

$$[x; P] = [x_0; P] + (x - x_0)[x_0, x; P]$$

sau

$$\sum_{i=0}^n a_i x^i = \sum_{i=0}^n a_i x_0^i + (x - x_0) \sum_{i=0}^{n-1} A_{0,i} x^i.$$

La fel ca mai sus, rezultă relațiile

$$\begin{aligned} A_{0,n-1} &= a_n \\ A_{0,i-1} &= a_i + x_0 A_{0,i} \quad i = 1, \dots, n-1 \\ [x_0; P] &= a_0 + x_0 A_{0,0} \end{aligned}$$

care corespund schemei lui Horner.

Astfel, algoritmul constă în completarea succesivă, conform regulei schemei lui Horner, a liniilor în tabelul

	a_n	a_{n-1}	\dots		a_2	a_1	a_0
x_0	$A_{0,n-1}$	$A_{0,n-2}$	\dots		$A_{0,1}$	$A_{0,0}$	$[x_0; P]$
x_1	$A_{1,n-2}$	$A_{1,n-3}$	\dots		$A_{1,0}$	$[x_0, x_1; P]$	
\vdots							
x_m	$A_{m,n-m-1}$	$A_{m,n-m-2}$	$A_{m,0}$	$[x_0, \dots, x_m; P]$			

Probleme și teme de seminar

P 2.1 Fie $L(x) = L(\mathbb{P}_n; x_1, \dots, x_{n+1}; f)(x)$. Să se arate că

$$\begin{vmatrix} L(x) & 1 & x & \dots & x^n \\ f(x_1) & 1 & x_1 & \dots & x_1^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f(x_{n+1}) & 1 & x_{n+1} & \dots & x_{n+1}^n \end{vmatrix} = 0.$$

Dezvoltând determinantul după prima coloană să se deducă reprezentarea (2.2.1) și dezvoltând după prima linie să se arate că

$$L(\mathbb{P}_n; x_1, \dots, x_{n+1}; f)(x) = \frac{1}{V(x_1, \dots, x_{n+1})} \cdot \sum_{i=1}^{n+1} x^i \begin{vmatrix} 1 & x_1 & \dots & x_1^{i-1} & f(x_1) & x_1^{i+1} & \dots & x_1^n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_{n+1} & \dots & x_{n+1}^{i-1} & f(x_{n+1}) & x_{n+1}^{i+1} & \dots & x_{n+1}^n \end{vmatrix}.$$

P 2.2 Să se demonstreze formula

$$[x_1, x_2, \dots, x_{n+1}; f] = \frac{\begin{vmatrix} 1 & x_1 & \dots & x_1^{n-1} & f(x_1) \\ 1 & x_2 & \dots & x_2^{n-1} & f(x_2) \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & x_{n+1} & \dots & x_{n+1}^{n-1} & f(x_{n+1}) \end{vmatrix}}{V(x_1, x_2, \dots, x_{n+1})}.$$

P 2.3 Să se arate că

$$1. [x_1, x_2, \dots, x_{n+1}; x^m] = \begin{cases} 0 & \text{dacă } m \in \{0, 1, \dots, n-1\} \\ 1 & \text{dacă } m = n. \end{cases}$$

$$2. [x_1, x_2, \dots, x_{n+1}; \frac{1}{x}] = \frac{(-1)^n}{x_1 x_2 \dots x_{n+1}}$$

$$3. [x_1, x_2, \dots, x_{n+1}; \frac{1}{x^2}] = \frac{(-1)^n}{x_1 x_2 \dots x_{n+1}} \sum_{i=1}^{n+1} \frac{1}{x_i}$$

P 2.4 Să se calculeze determinanții:

1.

$$\begin{vmatrix} 1 & x_1 & \dots & x_1^{n-1} & \frac{1}{x_1^2} \\ 1 & x_2 & \dots & x_2^{n-1} & \frac{1}{x_2^2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & x_{n+1} & \dots & x_{n+1}^{n-1} & \frac{1}{x_{n+1}^2} \end{vmatrix}$$

2.

$$\begin{vmatrix} 1 & x_1^2 & x_1^3 & \dots & x_1^{n+1} \\ 1 & x_2^2 & x_2^3 & \dots & x_2^{n+1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & x_{n+1}^2 & x_{n+1}^3 & \dots & x_{n+1}^{n+1} \end{vmatrix}$$

3.

$$\begin{vmatrix} 1 & x_1 & \dots & x_1^{n-1} & x_1^{n+1} \\ 1 & x_2 & \dots & x_2^{n-1} & x_2^{n+1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & x_{n+1} & \dots & x_{n+1}^{n-1} & x_{n+1}^{n+1} \end{vmatrix}$$

P 2.5 Să se arate că dacă $f \in \mathbb{P}_n$ și $x \neq x_i, i \in \{1, \dots, n+1\}$ atunci

$$[x_1, x_2, \dots, x_{n+1}; \frac{f(x)}{z-x}] = \frac{f(z)}{(z-x_1) \dots (z-x_{n+1})}$$

P 2.6 Fie $I \subseteq \mathbb{R}, \mathcal{F} = \{f | f : I \rightarrow \mathbb{R}\}$ și $x_0 < x_1 < \dots < x_n$ elemente din I . Dacă $T : \mathcal{F} \rightarrow M_{n+1}(\mathbb{R})$ este operatorul liniar definit prin

$$T(f) = \begin{pmatrix} [x_0; f] & [x_0, x_1; f] & [x_0, x_1, x_2; f] & \dots & [x_0, x_1, \dots, x_n; f] \\ 0 & [x_1; f] & [x_1, x_2; f] & \dots & [x_1, \dots, x_n; f] \\ \vdots & & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & [x_n; f] \end{pmatrix}$$

atunci identitatea lui Leibniz implică $T(fg) = T(f)T(g)$.

P 2.7 Cu notațiile problemei anterioare, fie $\xi \in I$ și funcția

$$\delta_\xi(x) = \begin{cases} 1 & \text{dacă } x = \xi \\ 0 & \text{dacă } x \neq \xi \end{cases}$$

Să se arate că

1. $f(x)\delta_\xi(x) = f(\xi)\delta_\xi(x)$;
2. $[x_0, x_1, \dots, x_n; \delta_{x_n}] = \frac{f(x_n)}{(x_n - x_0)(x_n - x_1)\dots(x_n - x_{n-1})}$;
3. $T(f)U = \text{diag}(f(x_0), f(x_1), \dots, f(x_n))U$ cu

$$U = \begin{pmatrix} [x_0; \delta_{x_0}] & [x_0, x_1; \delta_{x_1}] & [x_0, x_1, x_2; \delta_{x_2}] & \dots & [x_0, x_1, \dots, x_n; \delta_{x_n}] \\ 0 & [x_1; \delta_{x_1}] & [x_1, x_2; \delta_{x_2}] & \dots & [x_1, \dots, x_n; \delta_{x_n}] \\ \vdots & & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & [x_n; \delta_{x_n}] \end{pmatrix}.$$

Coloanele matricei U reprezintă vectorii proprii matricei $T(f)$ corespunzând valorilor proprii $f(x_0), f(x_1), \dots, f(x_n)$.

P 2.8 Fie x, x_1, x_2, \dots, x_n puncte distincte două câte două de pe axa reală și $u(x) = \prod_{i=1}^n (x - x_i)$. Să se deducă relațiile

1. $\sum_{k=1}^n \frac{f(x_k)}{(x - x_k)u'(x_k)} = -[x, x_1, \dots, x_n; f] + \frac{f(x)}{u(x)}$;
2. $\sum_{k=1}^n \frac{x^n - x_k^n}{(x - x_k)u'(x_k)} = 1$;
3. Dacă $\varphi(x) = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x(x+1)}{2!} + \dots + \frac{x(x+1)\dots(x+n-1)}{n!}$ atunci

$$\sum_{k=1}^n \frac{1 - (-k)^n}{(1+k)\varphi'(-k)} = n!.$$

P 2.9 Dacă $P \in \mathbb{P}_n(X)$, ($n \geq 2$), are toate rădăcinile simple x_1, x_2, \dots, x_n atunci

$$\sum_{i=1}^n \frac{1}{P'(x_i)} = 0.$$

R. Dacă $Q(x) = \prod_{i=1}^{n-1} (x - x_i)$ și $P(x) = Q(x)(x - x_n)$ atunci

$$1 = L(\mathbb{P}_{n-1}, x_1, \dots, x_{n-1}, 1)(x) = Q(x) \sum_{i=1}^{n-1} \frac{1}{(x - x_i)Q'(x_i)}.$$

de unde, pentru $x = x_n$ rezultă

$$\frac{1}{Q(x_n)} = \sum_{i=1}^{n-1} \frac{1}{(x_n - x_i)Q'(x_i)}.$$

Apoi, $P'(x_i) = Q'(x_i)(x_i - x_n)$, $i \in \{1, \dots, n-1\}$ și $P'(x_n) = Q(x_n)$. Prin urmare

$$\sum_{i=1}^n \frac{1}{P'(x_i)} = \sum_{i=1}^{n-1} \frac{1}{(x_i - x_n)Q'(x_i)} + \frac{1}{Q(x_n)} = -\frac{1}{Q(x_n)} + \frac{1}{Q(x_n)} = 0.$$

P 2.10 Fie x_1, x_2, \dots, x_{n+1} rădăcinile polinomului Cebîșeb T_{n+1} . Să se arate că

$$L(\mathbb{P}_n; x_1, \dots, x_{n+1}; f)(x) = \frac{2}{n+1} \sum_{j=0}^n \alpha_j \left(\sum_{k=1}^{n+1} f(x_k) T_j(x_k) \right) T_j(x),$$

$$\text{unde } \alpha_j = \begin{cases} \frac{1}{2} & \text{dacă } j = 0 \\ 1 & \text{dacă } j \geq 1 \end{cases}.$$

R. Este suficient de arătat că

$$l_k(x) = \frac{2}{n+1} \sum_{j=0}^n \alpha_j T_j(x_k) T_j(x), \quad k \in \{1, 2, \dots, n+1\}.$$

În acest sens dacă $\varphi_k(x) = \frac{2}{n+1} \sum_{j=0}^n \alpha_j T_j(x_k) T_j(x)$ trebuie arătat că $\varphi_k(x_s) = \delta_{k,s}, \forall s \in \{1, 2, \dots, n+1\}$, cu $x_s = \cos \frac{(2s-1)\pi}{2(n+1)}$.

Notând $t_s = \frac{(2s-1)\pi}{2(n+1)}$, pentru $k \neq s$ au loc egalitățile

$$\begin{aligned} \varphi_k(x_s) &= \frac{2}{n+1} \left[\frac{1}{2} + \sum_{j=1}^n \cos jt_k \cos jt_s \right] = \\ &= \frac{1}{n+1} \left[1 + \sum_{j=1}^n \cos j(t_k + t_s) + \sum_{j=1}^n \cos j(t_k - t_s) \right] = \\ &= \frac{1}{2(n+1)} \left[\frac{\sin(n + \frac{1}{2})(t_k + t_s)}{\sin \frac{t_k + t_s}{2}} + \frac{\sin(n + \frac{1}{2})(t_k - t_s)}{\sin \frac{t_k - t_s}{2}} \right] = \\ &= \frac{1}{4(n+1) \sin \frac{t_k + t_s}{2} \sin \frac{t_k - t_s}{2}} [\cos(nt_k + (n+1)t_s) - \cos((n+1)t_k + nt_s) + \\ &\quad + \cos(nt_k - (n+1)t_s) - \cos((n+1)t_k - nt_s)]. \end{aligned}$$

Doarece $\cos((n+1)t_p \pm a) = \mp(-1)^p \sin a$ rezultă

$$\varphi_k(x_s) = \frac{1}{4(n+1) \sin \frac{t_k + t_s}{2} \sin \frac{t_k - t_s}{2}} [-(-1)^s \sin nt_k + (-1)^k \sin nt_s +$$

$$+ (-1)^s \sin nt_k - (-1)^k \sin nt_s] = 0.$$

Apoi

$$\begin{aligned} \varphi_k(x_k) &= \frac{2}{n+1} \left[\frac{1}{2} + \sum_{j=1}^n T_j^2(x_k) \right] = \frac{1}{n+1} \left[n+1 + \sum_{j=1}^n \cos 2jt_k \right] = \\ &= 1 + \frac{\sin nt_k \cos (n+1)t_k}{\sin t_k} = 1. \end{aligned}$$

P 2.11 Să se determine polinomul de interpolare Lagrange – Hermite care satisface condițiile de interpolare

$$\begin{aligned} H^{(j)}(a) &= f^{(j)}(a) & j \in \{0, 1, \dots, m\} \\ H^{(j)}(b) &= f^{(j)}(b) & j \in \{0, 1, \dots, n\} \end{aligned}$$

R.

$$\begin{aligned} H(x) &= \left(\frac{x-b}{a-b} \right)^{n+1} \sum_{j=0}^m \frac{(x-a)^j}{j!} \left[\sum_{k=0}^{m-j} \left(\frac{x-a}{b-a} \right)^k \binom{m+k}{k} \right] f^{(j)}(a) + \\ &+ \left(\frac{x-a}{b-a} \right)^{m+1} \sum_{j=0}^n \frac{(x-b)^j}{j!} \left[\sum_{k=0}^{n-j} \left(\frac{x-b}{a-b} \right)^k \binom{n+k}{k} \right] f^{(j)}(b). \end{aligned}$$

P 2.12 Utilizând notațiile §2.3, dacă $r = \max\{r_1, \dots, r_{n+1}\}$ și f este o funcție de r ori derivabilă, atunci expresia polinomului de interpolare Lagrange – Hermite se poate scrie

$$H(x) = \sum_{i=1}^{n+1} u_i(x) \sum_{s=0}^{r_i} \frac{(x-x_i)^s}{s!} \left[\frac{f(t)}{u_i(t)} \right]_{t=x_i}^{(s)}.$$

P 2.13 Fie $I \subseteq \mathbb{R}$ un interval compact, punctele $x_0 < x_1 < \dots < x_n$ din I și funcționala $\mathcal{D}_I \in [C(I)]^*$ definită prin $\mathcal{D}_I(f) = [x_0, \dots, x_n; f]$. Să se arate că

$$1. \|\mathcal{D}_I\| = \sum_{i=0}^n \frac{1}{|u'(x_i)|}$$

$$\text{unde } u(x) = \prod_{i=0}^n (x - x_i).$$

2. Dacă $x_j = \cos \frac{(n-j)\pi}{n}$, $j \in \{0, 1, \dots, n\}$, adică x_j sunt punctele de extrem ale polinomului Cebîșeb $T_n(x)$ din intervalul $[-1, 1]$, atunci $\|\mathcal{D}_I\| = 2^{n-1}$, unde $I = [-1, 1]$.

3. Dacă $I = [-1, 1]$ și $-1 \leq x_0 < x_1 < \dots < x_n \leq 1$ atunci $\|\mathcal{D}_I\| \geq 2^{n-1}$.

R. 1. Inegalitatea $|\mathcal{D}(f)| \leq \|f\|_\infty \sum_{i=0}^n \frac{1}{|u'(x_i)|}$ este imediată. Pentru

$$f(x) = \begin{cases} (-1)^n & \text{dacă } x \in (\infty, x_0) \\ 1 & \text{dacă } x \in (x_n, \infty) \\ (-1)^{n-j} & \text{dacă } x = x_j \\ \text{afină în rest} & \end{cases}$$

au loc relațiile

$$\sum_{i=0}^n \frac{1}{|u'(x_i)|} = \left| \sum_{i=0}^n \frac{f(x_i)}{u'(x_i)} \right| |\mathcal{D}(f)| \leq \|\mathcal{D}\| \|f\|_\infty \sum_{i=0}^n \frac{1}{|u'(x_i)|} \leq \|\mathcal{D}\| \sum_{i=0}^n \frac{1}{|u'(x_i)|}.$$

2.

$$2^{n-1} = \frac{T_n^{(n)}(\xi)}{n!} = [x_0, \dots, x_n; T_n] = \sum_{i=0}^n \frac{T_n(x_i)}{u'(x_i)} = \sum_{i=0}^n \frac{(-1)^{n-i}}{u'(x_i)} = \sum_{i=0}^n \frac{1}{|u'(x_i)|} = \|\mathcal{D}\|.$$

3. În cazul unor noduri oarecare din intervalul $[-1, 1]$ au loc inegalitățile

$$2^{n-1} = [x_0, \dots, x_n; T_n] = \sum_{i=0}^n \frac{T_n(x_i)}{u'(x_i)} \leq \sum_{i=0}^n \frac{1}{|u'(x_i)|} = \|\mathcal{D}\|.$$

P 2.14 1. Să se determine polinomul de interpolare Q care satisface condițiile

$$Q(-1) = \alpha, \quad Q(1) = \beta, \quad Q(0) = \gamma, \quad Q'(0) = m.$$

2. Fie $m \in \mathbb{R}^*$. Să se determine polinomul de grad minim S care satisface condițiile

$$S(-1) = 0, \quad S(1) = 0, \quad S'(0) = m$$

astfel încât volumul corpului obținut prin rotația graficului lui S în jurul axei Ox , $x \in [-1, 1]$ să fie minim.

P 2.15 Fie X un spațiu prehilbertian și $Y = \text{span}\{x_1, \dots, x_n\}$, unde $x_i \in X$, $i = 1, \dots, n$, sunt elemente ortonormate. Să se arate că elementul de cea mai bună aproximație a lui $x \in Y$ prin elementele mulțimii Y , este $y_0 = \sum_{i=1}^n \langle x, x_i \rangle x_i$.

R. Fie $y = \sum_{i=1}^n c_i x_i$ un element din Y . Atunci

$$\begin{aligned} \|y - x\|_2^2 &= \sum_{i=1}^n c_i^2 - 2 \sum_{i=1}^n c_i \langle x_i, x \rangle + \|x\|_2^2 = \\ &= \|x\|_2^2 - \sum_{i=1}^n \langle x_i, x \rangle^2 + \sum_{i=1}^n (c_i - \langle x_i, x \rangle)^2. \end{aligned}$$

Pentru $c_i = \langle x_i, x \rangle$ expresia de mai sus este minimă.

P 2.16 1. Fie $X = C^{n+1}[a, b]$ și $a \leq x_1 < x_2 < \dots < x_{n+1} \leq b$. Să se arate că

$$\langle f, g \rangle_1 = \sum_{i=1}^{n+1} f(x_i)g(x_i) + \int_a^b f^{(n+1)}(x)g^{(n+1)}(x)dx$$

este un produs scalar în X .

2. Dacă $l_i(x) = \frac{(x-x_1)\dots(x-x_{i-1})(x-x_{i+1})\dots(x-x_{n+1})}{(x_i-x_1)\dots(x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i+1})\dots(x_i-x_{n+1})}$, $i = 1, \dots, n+1$ și $Y = \text{span}\{l_1, \dots, l_{n+1}\} = \mathbb{P}_n \subset C^{n+1}[a, b]$, să se arate că elementul de cea mai bună aproximare a unei funcții $f \in C^{n+1}[a, b]$ prin elementele mulțimii Y , în sensul normei generate de produsul scalar $\langle \cdot, \cdot \rangle_1$, este polinomul de interpolare Lagrange $L(\mathbb{P}_n; x_1, \dots, x_{n+1}; f)$.

P 2.17 1. Fie $X = C^{n+1}[a, b]$ și $x_0 \in [a, b]$. Să se arate că

$$\langle f, g \rangle_2 = \sum_{i=0}^n \frac{f^{(i)}(x_0)g^{(i)}(x_0)}{i!^2} + \int_a^b f^{(n+1)}(x)g^{(n+1)}(x)dx$$

este un produs scalar în X .

2. Dacă $e_i(x) = (x - x_0)^i$, $i = 0, \dots, n$ și $Y = \text{span}\{e_0, \dots, e_n\} = \mathbb{P}_n \subset C^{n+1}[a, b]$, să se arate că elementul de cea mai bună aproximare a unei funcții $f \in C^{n+1}[a, b]$ prin elementele mulțimii Y , în sensul normei generate de produsul scalar $\langle \cdot, \cdot \rangle_2$, este polinomul lui Taylor $T_n(f, x_0)(x) = \sum_{i=0}^n \frac{f^{(i)}(x_0)}{i!} (x - x_0)^i$.

P 2.18 1. Dacă $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ atunci

$$f(x) = f(0)(1-x) + f(1)x + R_1(x)f''(\xi), \quad |R_1(x)| \leq \frac{1}{8}.$$

2. Dacă $f : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ atunci

$$f(x) = \frac{1}{2}f(-1)(x^2 - x) + f(0)(1 - x^2) + \frac{1}{2}f(1)(x^2 + x) + R_2(x)f^{(3)}(\xi)$$

$$|R_2(x)| \leq \frac{1}{9\sqrt{3}}.$$

SCHEIBER ERNEST

SCHEIBER ERNEST

SCHEIBER ERNEST

SCHEIBER ERNEST

SCHEIBER ERNEST SCHEIBER ERNEST

SCHEIBER ERNEST SCHEIBER ERNEST

Capitolul 3

Convergența procedeeilor de interpolare prin polinoame

Data fiind șirurile de noduri de interpolare

$$\begin{array}{ccccccc} x_1^{(1)} & & & & & & \\ x_1^{(2)} & x_2^{(2)} & & & & & \\ x_1^{(3)} & x_2^{(3)} & x_3^{(3)} & & & & \\ \dots & \dots & \dots & \dots & & & \\ x_1^{(n)} & x_2^{(n)} & x_3^{(n)} & \dots & x_n^{(n)} & & \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \end{array} \quad (3.1)$$

o funcție f și șirul funcțiilor de interpolare $L_n(x)$ a lui f în nodurile $x_1^{(n)}, x_2^{(n)}, x_3^{(n)}, \dots, x_n^{(n)}$, se ridică întrebarea dacă șirul L_k converge sau nu către f .

În cele ce urmează vom vedea că răspunsul poate fi atât afirmativ cât și negativ, în funcție de interpolarea folosită.

3.1 Spații liniar ordonate

Definiție 3.1.1 Se numește spațiu liniar ordonat real o mulțime X cu proprietățile

1. X este spațiu liniar peste corpul numerelor reale;
2. X este un spațiu ordonat (relația de ordine fiind notată \leq);
3. pentru orice $x, y, z \in X$ și orice $a \in \mathbb{R}, a > 0$,

$$x \leq y \implies \begin{cases} x + z \leq y + z \\ ax \leq ay \end{cases}$$

Fie E o mulțime oarecare și $F(E)$ spațiul liniar al funcțiilor definite în E cu valori reale. Definind în $F(E)$ relația de ordine

$$f \leq g \quad \Longleftrightarrow \quad f(x) \leq g(x) \quad \forall x \in E,$$

$F(E)$ devine un spațiu liniar ordonat real.

Definiție 3.1.2 Fie X, Y spații liniar ordonate reale. Un operator liniar $U \in (X, Y)^\#$ este pozitiv dacă

$$\forall x \geq 0 \quad \Longrightarrow \quad U(x) \geq 0.$$

Teorema 3.1.1 Dacă $U : F(E) \rightarrow F(E)$ este un operator liniar și pozitiv atunci

$$(i) \quad f \leq g \quad \Longrightarrow \quad U(f) \leq U(g);$$

$$(ii) \quad |U(f)| \leq U(|f|), \quad \forall f \in F(E).$$

Mulțimea funcțiilor reale și continue definite în intervalul mărginit și închis $[a, b]$, notat uzual prin $C[a, b]$, este un spațiu liniar ordonat real ($E = [a, b]$). Totodată $C[a, b]$ este un spațiu normat, cu norma $\|f\| = \max_{x \in [a, b]} |f(x)|$. Convergența unui șir de funcții, în sensul acestei norme, înseamnă convergența uniformă.

Teorema 3.1.2 (Korovkin) Fie $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $U_n : C[a, b] \rightarrow C[a, b]$ un șir de operatori liniari și pozitivi și $e_i(x) = x^i$. Dacă

$$\lim_{n \rightarrow \infty} U_n(e_i) = e_i, \quad i \in \{0, 1, 2\},$$

atunci, pentru orice $f \in C[a, b]$ are loc

$$\lim_{n \rightarrow \infty} U_n(f) = f.$$

Demonstrație. Fie $f \in C[a, b]$. Funcția f este uniform continuă, adică

$$\forall \epsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \text{astfel încât} \quad \forall |t - x| < \delta \quad \Rightarrow \quad |f(t) - f(x)| < \frac{\epsilon}{2}.$$

Dacă $|t - x| \geq \delta$ atunci $|f(t) - f(x)| \leq \|f\| \leq 2 \frac{(t-x)^2}{\delta^2} \|f\|$. Prin urmare, pentru orice $t, x \in [a, b]$ are loc inegalitatea

$$|f(t) - f(x)| \leq \frac{\epsilon}{2} + 2 \frac{(t-x)^2}{\delta^2} \|f\|. \quad (3.2)$$

Notăm prin $u_n(x), v_n(x), w_n(x)$ funcțiile definite prin

$$u_n(x) = U_n(e_0)(x) - 1, \quad v_n(x) = U_n(e_1)(x) - x, \quad w_n(x) = U_n(e_2)(x) - x^2.$$

Din ipoteza teoremei rezultă că

$$\lim_{n \rightarrow \infty} u_n(x) = 0, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} v_n(x) = 0, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} w_n(x) = 0, \quad (3.3)$$

uniform în $[a, b]$.

Pentru operatorul U_n , punem în evidență variabila funcției original și variabila funcției imagine pentru un operator U_n , respectiv prin t și x .

Datorită liniarității lui U_n , au loc egalitățile

$$\begin{aligned} U_n(f)(x) - f(x) &= U_n(f(t))(x) - f(x) = \\ &= U_n(f(t))(x) - f(x)(U_n(e_0(t))(x) - u_n(x)) = U_n(f(t) - f(x))(x) + f(x)u_n(x). \end{aligned}$$

Fie $\epsilon > 0$ și $\delta > 0$, ce rezultă din uniform continuitatea funcției f . Din egalitatea anterioară, datorită inegalității (3.2) și pozitivității operatorului U_n , rezultă că

$$\begin{aligned} |U_n(f)(x) - f(x)| &\leq \\ &\leq |U_n(f(t) - f(x))(x)| + \|f\| |u_n(x)| \leq U_n(|f(t) - f(x)|)(x) + \|f\| |u_n(x)| \leq \\ &\leq U_n\left(\frac{\epsilon}{2} + 2\frac{(t-x)^2}{\delta^2} \|f\|\right)(x) + \|f\| |u_n(x)|. \end{aligned} \quad (3.4)$$

Dezvoltând membrul drept din (3.4), găsim că acesta este egal cu

$$\begin{aligned} &\frac{\epsilon}{2} U_n(e_0(t))(x) + \frac{2\|f\|}{\delta^2} U_n((t-x)^2)(x) + \|f\| |u_n(x)| = \\ &= \frac{\epsilon}{2} (1 + u_n(x)) + \frac{2\|f\|}{\delta^2} U_n((t-x)^2)(x) + \|f\| |u_n(x)| = \\ &= \frac{\epsilon}{2} (1 + u_n(x)) + \frac{2\|f\|}{\delta^2} (w_n(x) - 2xv_n(x) + x^2u_n(x)) + \|f\| |u_n(x)|. \end{aligned}$$

Așadar (3.4) devine

$$|U_n(f)(x) - f(x)| \leq \frac{\epsilon}{2} + \left(\frac{\epsilon}{2} + \|f\|\right) |u_n(x)| + \frac{2\|f\|}{\delta^2} (w_n(x) - 2xv_n(x) + x^2u_n(x)).$$

Intervalul $[a, b]$ fiind compact și (3.3) implică existența unui $n_0 \in \mathbb{N}$, astfel încât pentru orice $n > n_0$ să fie adevărată inegalitatea

$$\left(\frac{\epsilon}{2} + \|f\|\right) |u_n(x)| + \frac{2\|f\|}{\delta^2} |w_n(x) - 2xv_n(x) + x^2u_n(x)| < \frac{\epsilon}{2}.$$

Astfel $|U_n(f)(x) - f(x)| < \epsilon$, $\forall n > n_0$, $\forall x \in [a, b]$, adică are loc convergența șirului $(U_n(f))_{n \in \mathbb{N}}$ către f . ■

Analiza demonstrației de mai sus, permite enunțarea următoarei versiuni a Teoremei 3.1.2

Teorema 3.1.3 Fie $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $U_n : C[a, b] \rightarrow C[a, b]$ un șir de operatori liniari și pozitivi. Dacă

$$\lim_{n \rightarrow \infty} U_n(1) = 1 \quad \text{și} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} U_n((t-x)^2)(x) = 0$$

atunci, pentru orice $f \in C[a, b]$ are loc

$$\lim_{n \rightarrow \infty} U_n(f) = f.$$

3.2 Interpolare și aproximare

Pentru o funcție continuă indicăm un șir de polinoame de interpolare a funcției care în plus converge converge.

Teorema 3.2.1 (Fejér) Fie $f \in C[-1, 1]$ și $x_k^{(n)} = \cos \frac{(2k-1)\pi}{2n}$, $k \in \{1, 2, \dots, n\}$ rădăcinile polinomului lui Cebîșev $T_n(x) = \cos n \arccos x$. Dacă F_{2n-1} este polinomul de interpolare Lagrange-Hermite care satisface condițiile de interpolare

$$\begin{aligned} F_{2n-1}(x_k^{(n)}) &= f(x_k^{(n)}) \\ F'_{2n-1}(x_k^{(n)}) &= 0 \end{aligned} \quad \forall k \in \{1, 2, \dots, n\},$$

atunci șirul $(F_{2n-1})_{n \in \mathbb{N}}$ converge către f (uniform în $[-1, 1]$).

Demonstrație. Utilizând expresia polinomului lui Fejér (2.20), cu notațiile introduse la deducerea lui, găsim

$$F_{2n-1}(x) = \sum_{k=1}^n f(x_k^{(n)}) \left[1 - (x - x_k^{(n)}) \frac{w''(x_k^{(n)})}{w'(x_k^{(n)})} \right] l_k^2(x), \quad (3.5)$$

unde $w(x) = \prod_{k=1}^n (x - x_k^{(n)}) = \frac{1}{2^{n-1}} T_n(x)$.

Ținând seama de expresia polinomului lui Cebîșev, se deduc egalitățile

$$\begin{aligned} \frac{w''(x_k^{(n)})}{w'(x_k^{(n)})} &= \frac{x_k^{(n)}}{1 - (x_k^{(n)})^2} \\ l_k^2(x) &= \frac{T_n^2(x)}{n^2} \cdot \frac{1 - (x_k^{(n)})^2}{(x - x_k^{(n)})^2} \end{aligned}$$

Exprimarea (3.5) devine

$$F_{2n-1}(x) = \frac{T_n^2(x)}{n^2} \sum_{k=1}^n f(x_k^{(n)}) \frac{1 - xx_k^{(n)}}{(x - x_k^{(n)})^2}.$$

Definim șirul de operatori $\mathcal{F}_n : C[-1, 1] \rightarrow C[-1, 1]$ prin $\mathcal{F}_n(f)(x) = F_{2n-1}(x)$. \mathcal{F}_n este un operator liniar și pozitiv.

În continuare verificăm condițiile Teoremei 3.1.3.

1. Din formula restului polinomului de interpolare Lagrange – Hermite (2.19) rezultă că

$$\mathcal{F}_n(1)(x) = 1.$$

2. Au loc egalitățile

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_n((t-x)^2)(x) &= \frac{T_n^2(x)}{n^2} \sum_{k=1}^n (x_k^{(n)} - x)^2 \frac{1 - xx_k^{(n)}}{(x - x_k^{(n)})^2} = \\ &= \frac{T_n^2(x)}{n^2} (n - x \sum_{k=1}^n x_k^{(n)}) = \frac{T_n^2(x)}{n} \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty, \end{aligned}$$

și în consecință $\lim_{n \rightarrow \infty} \mathcal{F}_n(f) = \lim_{n \rightarrow \infty} F_{2n-1} = f$. ■

3.3 Divergența interpolării Lagrange

Deducerea rezultatului de divergență necesită cunoașterea unei serii de probleme din topologie (Spații topologice Baire) și analiză funcțională (Principiul condensării singularităților) cât și o estimare a normei operatorului Fourier. Aceste probleme sunt prezentate în secțiunile următoare.

3.3.1 Spațiu topologic Baire

Fie X un spațiu topologic.

Definiție 3.3.1 O submulțime nevidă $Y \subset X$ este rară dacă $\text{int}(\overline{Y}) = \emptyset$.

Definiție 3.3.2 O submulțime nevidă este de categoria I dacă se poate reprezenta ca o reuniune numărabilă de mulțimi rare. În caz contrar submulțimea este de categoria II.

Definiție 3.3.3 O submulțime nevidă este reziduală dacă este complementara unei mulțimi de categoria I.

Definiție 3.3.4 O submulțime nevidă este superdensă dacă este densă în spațiul topologic, reziduală și nenumărabilă.

Definiție 3.3.5 Un spațiu topologic se numește spațiu topologic Baire dacă orice submulțime nevidă și deschisă este de categoria II.

Au loc următoarele rezultate:

Teorema 3.3.1 Fie X un spațiu topologic, Y o submulțime nevidă în X și $Z = X \setminus Y$. Următoarele afirmații sunt echivalente:

- (i) Y este deschisă și densă în X ;
- (ii) Z este închisă și rară.

Demonstrație. Y deschisă $\Leftrightarrow Z$ închisă.

Fie Y , o submulțime deschisă și densă în X , $\overline{Y} = X$. Presupunem prin absurd că Z nu e rară, adică există $x \in \text{int}(\overline{Z}) = \text{int}(Z) \subseteq Z$. Atunci Z este o vecinătate a lui x . Din $Y \cap Z = \emptyset$ rezultă că $x \notin \overline{Y}$, ceea ce contrazice ipoteza $\overline{Y} = X$.

Invers, fie Z o submulțime închisă și rară. Dacă presupunem prin absurd că Y nu este densă atunci există $x \in X \setminus \overline{Y} \subseteq X \setminus Y = Z$. Submulțimea $X \setminus \overline{Y}$ este deschisă, deci $\emptyset \neq \text{int}(Z) \subseteq \text{int}(\overline{Z})$, ceea ce contrazice ipoteza $\text{int}(\overline{Z}) = \emptyset$. ■

Teorema 3.3.2 Orice submulțime a unei mulțimi de categoria I este de categoria I.

Demonstrație. Fie Y o mulțime de categoria I, reprezentată prin

$$Y = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} Y_n, \quad Y_n \text{ submulțime rară, } \forall n \in \mathbb{N}.$$

Dacă $Z \subset Y$ atunci $Z = Z \cap Y = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} (Z \cap Y_n)$, iar submulțimile $Z \cap Y_n$ sunt rare, $\forall n \in \mathbb{N}$. ■

Un spațiu topologic Baire este caracterizat de următoarea proprietate

Teorema 3.3.3 Un spațiu topologic este spațiu topologic Baire dacă și numai dacă o intersecție numărabilă de mulțimi deschise și dense rămâne densă.

Demonstrație. Fie X un spațiu topologic Baire și familia $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de mulțimi deschise și dense în X . Presupunem prin absurd că mulțimea $Z = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} X_n$ nu e densă în X . Atunci mulțimea $Y = X \setminus \overline{Z}$ este deschisă și nevidă. Din relațiile

$$Y = X \setminus \overline{Z} \subseteq X \setminus Z = X \cap C(Z) = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} (X \cap C(X_n)) = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} (X \setminus X_n),$$

deducem utilizând Teoremele 3.3.1 și 3.3.2 că Y este de categoria I, contrazicând proprietatea de spațiu topologic Baire a lui X .

Reciproc, presupunem prin absurd că X nu e spațiu topologic Baire, adică există o mulțime nevidă și deschisă Y astfel încât

$$Y = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} Y_n \quad Y_n \text{ submulțime rară, } \forall n \in \mathbb{N}.$$

Submulțimile $X_n = X \setminus \overline{Y}_n = C(\overline{Y}_n)$ sunt deschise și dense în X ,

$$\overline{X}_n = \overline{C(\overline{Y}_n)} = C(\text{int}(\overline{Y}_n)) = X.$$

Potrivit ipotezei $\overline{\bigcap_{n \in \mathbb{N}} X_n} = X$.

Pe de altă parte,

$$\emptyset \neq Y = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} Y_n \subseteq \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \overline{Y}_n = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} C(X_n) = C\left(\bigcap_{n \in \mathbb{N}} X_n\right),$$

ceea ce contrazice afirmația anterioară. ■

Recunoașterea unui spațiu topologic Baire este ușurată de

Teorema 3.3.4 *Un spațiu metric complet este un spațiu topologic Baire.*

Demonstrație. Presupunem prin absurd că există o mulțime deschisă și nevidă Y de categoria I:

$$Y = \bigcup_{n \in \mathbb{N}^*} Y_n \quad Y_n \text{ submulțime rară, } \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

Fie $B_0 = Y$. Mulțimea deschisă $B_0 \setminus \overline{Y}_1$ este nevidă – altfel $Y = B_0 \subseteq \overline{Y}_1$, ceea ce ar contrazice raritatea lui Y_1 .

Prin urmare există $x_1 \in B_0 \setminus \overline{Y}_1$ și $r'_1 > 0$ astfel încât $B(x_1, r'_1) \subseteq B_0 \setminus \overline{Y}_1$.¹

¹ $B(x, r) = \{y \in X : d(x, y) < r\}$, unde $d(x, y)$ este distanța dintre x și y .

Pentru $r_1 = \min\{1, \frac{1}{2}r'_1\}$ mulțimea $B_1 = B(x_1, r_1)$ satisface relațiile

$$\begin{aligned}\overline{B}_1 \cap \overline{Y}_1 &= \emptyset, \\ \overline{B}_1 &\subseteq B_0.\end{aligned}$$

Inductiv, presupunem că s-au construit mulțimile $B_i = B(x_i, r_i)$, $i = 1, 2, \dots, n-1$ astfel încât

$$\begin{aligned}\overline{B}_i \cap \overline{Y}_i &= \emptyset, \\ \overline{B}_i &\subseteq B_{i-1}.\end{aligned}$$

Mulțimea deschisă $B_{n-1} \setminus \overline{Y}_n$ este nevidă – altfel $B_{n-1} \subseteq \overline{Y}_n$, cea ce ar contrazice raritatea lui Y_n .

Există $x_n \in B_{n-1} \setminus \overline{Y}_n$ și $r'_n > 0$ astfel încât $B(x_n, r'_n) \subseteq B_{n-1} \setminus \overline{Y}_n$.

Pentru $r_n = \min\{\frac{1}{n}, \frac{1}{2}r'_n\}$ mulțimea $B_n = B(x_n, r_n)$ satisface relațiile

$$\begin{aligned}\overline{B}_n \cap \overline{Y}_n &= \emptyset, \\ \overline{B}_n &\subseteq \overline{B}_{n-1}.\end{aligned}$$

Șirul $(x_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ este fundamental, deci convergent. Fie $x = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$.

Deoarece $x_n \in B_n \subseteq B_1$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, rezultă că

$$x \in \overline{B}_n \subseteq \overline{B}_1 \subseteq B_0 = Y. \quad (3.6)$$

Pe de altă parte, pentru orice $n \geq m$, $x_n \in B_m$, de unde

$$x \in \overline{B}_m \Leftrightarrow x \notin \overline{Y}_m, \quad \forall m \in \mathbb{N}^*.$$

Urmează $x \notin Y$, în contradicție cu (3.6). ■

3.3.2 Principiul condensării singularităților

Fie X, Y spații normate și o submulțime de operatori liniari și continui $\mathcal{A} \subseteq (X, Y)^*$. Mulțimea singularităților atașat submulțimii de operatori liniari și pozitivi \mathcal{A} este

$$\mathcal{S}_{\mathcal{A}} = \{x \in X : \sup_{A \in \mathcal{A}} \|A(x)\| = \infty\}.$$

Proprietăți ale acestei mulțimi sunt precizate în

Teorema 3.3.5 (Principiul condensării singularităților) *Dacă X este un spațiu Banach, Y un spațiu normat și \mathcal{A} o submulțime de operatori liniari și continui, astfel încât $\sup_{A \in \mathcal{A}} \|A\| = \infty$, atunci mulțimea singularităților atașată familiei \mathcal{A} este superdensă în X .*

Demonstrație. Introducem mulțimile

$$X_n = \{x \in X : \exists A \in \mathcal{A} \text{ astfel încât } \|A(x)\| > n\} \quad n \in \mathbb{N}.$$

Atunci avem

(i)

$$\mathcal{S}_{\mathcal{A}} = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} X_n. \quad (3.7)$$

(ii)

$$X_n = \bigcup_{A \in \mathcal{A}} \{x \in X : \|A(x)\| > n\},$$

deci X_n este o submulțime deschisă.

(iii)

$$\overline{X_n} = X.$$

Pentru justificarea acestei afirmații, presupunem prin absurd, că există $n \in \mathbb{N}$ și $x_0 \in X \setminus \overline{X_n}$. Deoarece mulțimea $X \setminus \overline{X_n}$ este deschisă, există $r > 0$ astfel încât $\overline{B}(x_0, r) = \{x \in X : \|x - x_0\| \leq r\} \subset X \setminus \overline{X_n}$. Din identitatea

$$A(x) = \frac{\|x\|}{r} \left[A\left(r \frac{x}{\|x\|} + x_0\right) - A(x_0) \right]$$

se deduce

$$\|A(x)\| \leq \frac{2n}{r} \|x\|, \quad \forall x \in X, \forall A \in \mathcal{A}, \quad (3.8)$$

deoarece $r \frac{x}{\|x\|} + x_0, x_0 \in \overline{B}(x_0, r) \subset X \setminus \overline{X_n}$.

Inegalitatea (3.8) contrazice ipoteza $\sup_{A \in \mathcal{A}} \|A\| = \infty$.

Spațiul Banach X este un spațiu topologic Baire și din (3.7), potrivit Teoremei 3.3.3, mulțimea $\mathcal{S}_{\mathcal{A}}$ este densă în X .

(iv) Din Teorema 3.3.1 mulțimea $X \setminus X_n$ este închisă și rară. Relația (3.7) implică

$$\mathcal{S}_{\mathcal{A}} = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} X_n = X \setminus \left(X \setminus \bigcap_{n \in \mathbb{N}} X_n \right) = X \setminus \bigcup_{n \in \mathbb{N}} (X \setminus X_n),$$

adică $\mathcal{S}_{\mathcal{A}}$ este o mulțime reziduală.

Dacă $x \in \mathcal{S}_{\mathcal{A}}$ și $\lambda > 0$ atunci $\lambda x \in \mathcal{S}_{\mathcal{A}}$, deci $\mathcal{S}_{\mathcal{A}}$ este nenumărabilă. ■

O consecință importantă a Teoremei 3.3.5 este

Teorema 3.3.6 (Principiul mărginirii uniforme) Dacă X este un spațiu Banach, Y un spațiu normat, atunci orice submulțime de operatori liniari și continui, $\mathcal{A} \subseteq (X, Y)^*$ mărginită punctual, $\forall x \in X, \sup_{A \in \mathcal{A}} \|A(x)\| < \infty$, este uniform mărginită, $\sup_{A \in \mathcal{A}} \|A\| < \infty$.

3.3.3 Norma operatorilor integrali

Evaluarea normei unui operator integral se bazează pe

Teorema 3.3.7 Fie $I = [a, b]$ și $C(I)$ spațiul Banach al funcțiilor continue definite în I și cu valori complexe. Dacă $e \in C(I)$, atunci norma funcționalei $x^* \in [C(I)]^*$, definită prin

$$x^*(x) = \int_I e(t)x(t)dt$$

este $\|x^*\| = \int_I |e(t)|dt$.

Demonstrație. Norma unei funcții $x \in C(I)$ este $\|x\| = \max_{t \in I} |x(t)|$. Din inegalitatea $|x^*(x)| \leq \|x\| \int_I |e(t)|dt$ rezultă $\|x^*\| \leq \int_I |e(t)|dt$.

Apoi, pentru $n \in \mathbb{N}$, au loc relațiile

$$\begin{aligned} \int_I |e(t)|dt &= \int_I \frac{|e(t)|}{1+n|e(t)|}dt + \int_I \frac{n|e(t)|^2}{1+n|e(t)|}dt \leq \\ &\leq \int_I \frac{1}{n}dt + \int_I e(t) \frac{\overline{ne(t)}}{1+n|e(t)|}dt \leq \frac{b-a}{n} + \|x^*\|. \end{aligned}$$

Pentru $n \rightarrow \infty$ se obține inegalitatea $\int_I |e(t)|dt \leq \|x^*\|$. ■

Fie $k : I \times I \rightarrow \mathbb{C}$ o funcție continuă și operatorul linear $A : C(I) \rightarrow C(I)$ definit prin

$$A(x)(t) = \int_I k(t, s)x(s)ds.$$

Atunci

Teorema 3.3.8 Norma operatorului A este $\|A\| = \max_{t \in I} \int_I |k(t, s)|ds$.

Demonstrație. Din inegalitățile

$$|A(x)(t)| = \left| \int_I k(t, s)x(s)ds \right| \leq \int_I |k(t, s)| |x(s)|ds \leq$$

$$\leq \|x\| \int_I |k(t, s)| ds \leq \|x\| \max_{t \in I} \int_I |k(t, s)| ds$$

rezultă

$$\|A(x)\| \leq \|x\| \max_{t \in I} \int_I |k(t, s)| ds$$

și

$$\|A\| \leq \max_{t \in I} \int_I |k(t, s)| ds.$$

Fie $t_0 \in I$ astfel încât $\int_I |k(t_0, s)| ds = \max_{t \in I} \int_I |k(t, s)| ds$, și funcția $e(t) = k(t_0, t)$.

Funcționala $e^* \in [C(I)]^*$, definită prin $e^*(x) = \int_I e(s)x(s) ds = \int_I k(t_0, s)x(s) ds$ are norma $\|e^*\| = \int_I |k(t_0, s)| ds$.

Din relațiile

$$\begin{aligned} \|A\| &= \sup_{\|x\| \leq 1} \|A(x)\| = \sup_{\|x\| \leq 1} \max_{t \in I} |A(x)(t)| \geq \\ &\geq \sup_{\|x\| \leq 1} |A(x)(t_0)| = \sup_{\|x\| \leq 1} |e^*(x)| = \|e^*\| = \int_I |k(t_0, s)| ds, \end{aligned}$$

rezultă egalitatea enunțată. ■

3.3.4 Norma operatorului Fourier

Fie $C_{2\pi}$ spațiul funcțiilor reale, continue și periodice cu perioada 2π . Operatorul lui Fourier $S_n : C_{2\pi} \rightarrow C_{2\pi}$ este definit prin

$$S_n(x)(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^n (a_k \cos kt + b_k \sin kt)$$

unde

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x(t) \cos kt dt, \quad b_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x(t) \sin kt dt, \quad k \in \{0, 1, \dots, n\}.$$

Prin calcul direct vom deduce

Teorema 3.3.9 *Are loc egalitatea*

$$S_n(x)(t) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x(s) \frac{\sin(n + \frac{1}{2})(s - t)}{2 \sin \frac{s-t}{2}} ds.$$

Demonstrație. În baza identității 3 din Anexa C rezultă

$$\begin{aligned} S_n(x)(t) &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x(s) \left[\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^n \cos k(s-t) \right] ds = \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x(t) \frac{\sin(n + \frac{1}{2})(s-t)}{2 \sin \frac{s-t}{2}} ds. \quad \blacksquare \end{aligned}$$

Teorema 3.3.10 Norma operatorului S_n este

$$\|S_n\| = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \left| \frac{\sin(n + \frac{1}{2})\tau}{\sin \frac{\tau}{2}} \right| d\tau$$

Demonstrație. Potrivit Teoremei 3.3.8, norma operatorului S_n este

$$\|S_n\| = \max_{t \in I} \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left| \frac{\sin(n + \frac{1}{2})(s-t)}{2 \sin \frac{s-t}{2}} \right| ds,$$

unde $I = [-\pi, \pi]$. Prin schimbarea de variabilă $s-t = \tau$, integrala din expresia normei devine

$$\int_{-\pi}^{\pi} \left| \frac{\sin(n + \frac{1}{2})(s-t)}{2 \sin \frac{s-t}{2}} \right| ds = \int_{\pi-t}^{\pi-t} \left| \frac{\sin(n + \frac{1}{2})\tau}{2 \sin \frac{\tau}{2}} \right| d\tau.$$

Datorită periodicității și parității funcției de sub integrală, rezultă

$$\|S_n\| = \max_{t \in I} \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \left| \frac{\sin(n + \frac{1}{2})\tau}{\sin \frac{\tau}{2}} \right| d\tau = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \left| \frac{\sin(n + \frac{1}{2})\tau}{\sin \frac{\tau}{2}} \right| d\tau. \quad \blacksquare$$

Teorema 3.3.11 Are loc inegalitatea

$$\|S_n\| \geq \frac{4}{\pi^2} \ln(n+1).$$

Demonstrație. Prin schimbarea de variabilă $\tau = \frac{2\pi t}{2n+1}$, din expresia normei operatorului S_n , deducem

$$\|S_n\| = \frac{2}{2n+1} \int_0^{n+\frac{1}{2}} \left| \frac{\sin \pi t}{\sin \frac{\pi t}{2n+1}} \right| dt = \quad (3.9)$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{2}{2n+1} \left(\sum_{j=0}^{n-1} \int_j^{j+1} \left| \frac{\sin \pi t}{\sin \frac{\pi t}{2n+1}} \right| dt + \int_n^{n+\frac{1}{2}} \left| \frac{\sin \pi t}{\sin \frac{\pi t}{2n+1}} \right| dt \right) \geq \\
&\geq \frac{2}{2n+1} \sum_{j=0}^{n-1} \int_j^{j+1} \left| \frac{\sin \pi t}{\sin \frac{\pi t}{2n+1}} \right| dt.
\end{aligned}$$

Dacă $t \in [j, j+1]$ atunci $\frac{\pi t}{2n+1} \in [0, \frac{\pi}{2}]$ și în consecință

$$\sin \frac{\pi j}{2n+1} \leq \sin \frac{\pi t}{2n+1} \leq \sin \frac{\pi(j+1)}{2n+1} \leq \frac{\pi(j+1)}{2n+1},$$

de unde

$$\frac{|\sin \pi t|}{\sin \frac{\pi t}{2n+1}} \geq \frac{|\sin \pi t|}{\frac{\pi(j+1)}{2n+1}}.$$

Deoarece $\int_j^{j+1} |\sin \pi t| dt = \frac{2}{\pi}$, inegalitatea (3.9) ne dă

$$\|S_n\| \geq \frac{4}{\pi^2} \sum_{j=1}^n \frac{1}{j}.$$

Din teorema de medie Lagrange, rezultă inegalitatea

$$\frac{1}{j} > \ln(j+1) - \ln j > \frac{1}{j+1}$$

care conduce la $\|S_n\| \geq \frac{4}{\pi^2} \ln(n+1)$. ■

3.3.5 Divergența polinoamelor de interpolare Lagrange

Notăm $u_k(x) = \cos kx$, $v_k(x) = \sin kx$, $k \in \mathbb{N}$, prin $C_{2\pi}$ spațiul liniar al funcțiilor continue și periodice, cu perioada 2π , E_p mulțimea funcțiilor pare din $C_{2\pi}$ și $W_n = \text{span}\{u_0, u_1, \dots, u_n\}$.

Teorema 3.3.12 *Dacă $\mathcal{P} \in (E_p, W_n)^*$ astfel încât*

1. $\mathcal{P}^2 = \mathcal{P}$,
2. $\mathcal{P}(E_p) = W_n$, (adică \mathcal{P} este operator surjectiv),

atunci $\|I - \mathcal{P}\| \geq \frac{2}{\pi^2} \ln(n+1) - \frac{1}{2}$.

Demonstrație. Notăm prin $T_y : C_{2\pi} \rightarrow C_{2\pi}$ operatorul definit prin

$$T_y(f)(x) = f(x + y).$$

Următoarele proprietăți ale lui T_y sunt imediate

1. $T_y T_{-y} = T_{-y} T_y = I \quad \Leftrightarrow \quad T_y^{-1} = T_{-y}$, unde prin I s-a notat operatorul identic.
2. $\|T_y\| = 1$.

Definim operatorul liniar

$$\tilde{\mathcal{P}}(f)(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} T_s(I - \mathcal{P})(T_{-s} + T_s)(f)(t) ds.$$

Pentru orice $t \in [-\pi, \pi]$ și orice $f \in C_{2\pi}$ din inegalitatea

$$|\tilde{\mathcal{P}}(f)(t)| \leq 2\|I - \mathcal{P}\| \|f\|$$

deducem că $\|\tilde{\mathcal{P}}(f)\| \leq 2\|I - \mathcal{P}\| \|f\|$ și deci

$$\|\tilde{\mathcal{P}}\| \leq 2\|I - \mathcal{P}\|. \quad (3.10)$$

Vom arăta că

$$\tilde{\mathcal{P}} = I - S_n, \quad (3.11)$$

unde S_n este operatorul lui Fourier.

Întrucât orice funcție din E_p se poate scrie ca o serie de forma $\sum_{i=0}^{\infty} a_i u_i$ este suficient să arătăm că

$$\tilde{\mathcal{P}}(u_i) = (I - S_n)(u_i), \quad \forall i \in \mathbb{N}.$$

Deoarece

$$S_n(u_i) = \begin{cases} u_i & \text{pentru } 0 \leq i \leq n \\ 0 & \text{pentru } i > n \end{cases}$$

rămâne de arătat că

$$\tilde{\mathcal{P}}(u_i) = \begin{cases} 0 & \text{pentru } 0 \leq i \leq n \\ u_i & \text{pentru } i > n. \end{cases}$$

Din surjectivitatea operatorului \mathcal{P} rezultă că

$$\forall p \in W_n \quad \exists f \in E_p \quad \text{astfel încât} \quad \mathcal{P}(f) = p.$$

Atunci

$$p = \mathcal{P}(f) = \mathcal{P}^2(f) = \mathcal{P}(p), \quad \forall p \in W_n. \quad (3.12)$$

Au loc egalitățile

$$(T_{-s} + T_s)(u_i)(t) = u_i(t-s) + u_i(t+s) = 2u_i(t)u_i(s),$$

de unde

$$\mathcal{P}(T_{-s} + T_s)(u_i)(t) = 2u_i(s)\mathcal{P}(u_i)(t). \quad (3.13)$$

Pentru $0 \leq i \leq n$, $u_i \in W_n$, din (3.12) și (3.13) rezultă că

$$(I - \mathcal{P})(T_{-s} + T_s)(u_i)(t) = 0,$$

deci $\tilde{\mathcal{P}}(u_i) = 0$.

Dacă $i > n$ atunci $\mathcal{P}(u_i)$ se reprezintă sub formă $\mathcal{P}(u_i) = \sum_{j=0}^n a_j u_j$ unde $a_j \in R$, $\forall 0 \leq j \leq n$. Ținând seama de (3.13) găsim

$$\begin{aligned} T_s(I - \mathcal{P})((T_{-s} + T_s)(u_i)(t) &= T_s(I - \mathcal{P})(2u_i(s)u_i(t)) = 2u_i(s)T_s(u_i - \sum_{j=0}^n a_j u_j)(t) = \\ &= 2u_i(s)[u_i(s)u_i(t) - v_i(s)v_i(t) - \sum_{j=0}^n a_j(u_j(s)u_j(t) - v_j(s)v_j(t))]. \end{aligned}$$

Prin urmare

$$\begin{aligned} \tilde{\mathcal{P}}(u_i)(t) &= \frac{1}{2\pi} \left[u_i(t) \int_{-\pi}^{\pi} u_i^2(s) ds - v_i(t) \int_{-\pi}^{\pi} u_i(s)v_i(s) ds - \right. \\ &\left. - \sum_{j=0}^n a_j \left(u_j(t) \int_{-\pi}^{\pi} u_j(s)u_j(s) ds - v_j(t) \int_{-\pi}^{\pi} u_j(s)v_j(s) ds \right) \right] = u_i(t). \end{aligned}$$

În final, din (3.10) și (3.11) rezultă

$$\|I - \mathcal{P}\| \geq \frac{1}{2} \|\tilde{\mathcal{P}}\| = \frac{1}{2} \|I - S_n\| \geq \frac{1}{2} | \|S_n\| - 1 | \geq \frac{2}{\pi^2} \ln(n+1) - \frac{1}{2}. \blacksquare$$

Teorema 3.3.13 Dacă $\mathcal{Q} \in (C[a, b], \mathbb{P}_n)^*$ astfel încât

1. $\mathcal{Q}^2 = \mathcal{Q}$,
2. $\mathcal{Q}(C[a, b]) = \mathbb{P}_n$,

atunci $\|I - \mathcal{Q}\| \geq \frac{2}{\pi^2} \ln(n+1) - \frac{1}{2}$.

Demonstrație. Funcția $\psi(t) = \frac{a+b}{2} + \frac{b-a}{2} \cos t$ transformă bijectiv intervalul $[0, \pi]$ în $[a, b]$.

Definim operatorul liniar $\mathcal{A} : C[a, b] \rightarrow E_p$ prin

$$\mathcal{A}(f)(t) = \begin{cases} f(\psi(t)) & \text{dacă } t \in [0, \pi], \\ f(\psi(-t)) & \text{dacă } t \in [-\pi, 0). \end{cases}$$

Din egalitatea imediată $\|\mathcal{A}(f)\| = \|f\|$ rezultă $\|\mathcal{A}\| = 1$. Dacă $\mathcal{A}(f) = 0$ atunci $\|\mathcal{A}(f)\| = \|f\| = 0$ și, în consecință $f = 0$. Astfel operatorul \mathcal{A} este injectiv și deci inversabil.

Operatorul $\mathcal{P} = \mathcal{A}\mathcal{Q}\mathcal{A}^{-1}$ aparține spațiului $(E_p, W_n)^*$. Observăm că

$$\mathcal{P}^2 = \mathcal{A}\mathcal{Q}\mathcal{A}^{-1}\mathcal{A}\mathcal{Q}\mathcal{A}^{-1} = \mathcal{A}\mathcal{Q}^2\mathcal{A}^{-1} = \mathcal{A}\mathcal{Q}\mathcal{A}^{-1} = \mathcal{P}.$$

Deoarece $\mathcal{Q} = \mathcal{A}^{-1}\mathcal{P}\mathcal{A}$, din relațiile

$$\|I - \mathcal{Q}\| = \|\mathcal{A}^{-1}(I - \mathcal{P})\mathcal{A}\| \leq \|\mathcal{A}^{-1}\| \|I - \mathcal{P}\| \|\mathcal{A}\| = \|I - \mathcal{P}\|.$$

și

$$\|I - \mathcal{P}\| = \|\mathcal{A}(I - \mathcal{Q})\mathcal{A}^{-1}\| \leq \|\mathcal{A}\| \|I - \mathcal{Q}\| \|\mathcal{A}^{-1}\| = \|I - \mathcal{Q}\|.$$

rezultă $\|I - \mathcal{Q}\| = \|I - \mathcal{P}\|$. Potrivit teoremei anterioare

$$\|I - \mathcal{Q}\| = \|I - \mathcal{P}\| \geq \frac{2}{\pi^2} \ln(n+1) - \frac{1}{2}. \blacksquare$$

Teorema 3.3.14 Fie x_1, x_2, \dots, x_{n+1} puncte distincte două câte două ale unui interval $[a, b]$. Operatorul $\mathcal{L}(f) = L(\mathbb{P}_n; x_1, \dots, x_{n+1})(f)$ are următoarele proprietăți:

(i) $\mathcal{L}^2 = \mathcal{L}$;

(ii) $\mathcal{L}(C[a, b]) = \mathbb{P}_n$;

(iii) $\|\mathcal{L}\| = \max_{x \in [a, b]} \sum_{i=1}^{n+1} |l_i(x)|$, adică $\mathcal{L} \in (C[a, b], \mathbb{P}_n)^*$. Prin $l_i(x)$ s-au notat polinoamele fundamentale ale lui Lagrange.

Demonstrație. Afirmațiile (i), (ii) rezultă din egalitatea

$$L(\mathbb{P}_n; x_1, \dots, x_{n+1}; f) = f \quad \forall f \in \mathbb{P}_n.$$

(iii) Din inegalitățile

$$|\mathcal{L}(f)(x)| \leq \|f\| \sum_{i=1}^{n+1} |l_i(x)| \leq \|f\| \max_{x \in [a, b]} \sum_{i=1}^{n+1} |l_i(x)|$$

se deduce că $\mathcal{L} \in (C[a, b], \mathbb{P}_n)^*$ și $\|\mathcal{L}\| \leq \max_{x \in [a, b]} \sum_{i=1}^{n+1} |l_i(x)|$.

Fie $x_0 \in [a, b]$ astfel încât $\sum_{i=1}^{n+1} |l_i(x_0)| = \max_{x \in [a, b]} \sum_{i=1}^{n+1} |l_i(x)|$ și funcția

$$f_0(x) = \begin{cases} 1 & \text{dacă } x \in \{a, b\} \\ \operatorname{sgn} l_i(x_0) & \text{dacă } x = x_i, i \in \{1, 2, \dots, n+1\} \\ \text{afină în rest} & \end{cases} .$$

Atunci $f_0 \in C[a, b]$ și $\|f_0\| = 1$. Deoarece

$$L(\mathbb{P}_n; x_1, \dots, x_{n+1}; f_0)(x) = \sum_{i=1}^{n+1} |l_i(x_0)|$$

au loc relațiile

$$\max_{x \in [a, b]} \sum_{i=1}^{n+1} |l_i(x)| = \sum_{i=1}^{n+1} |l_i(x_0)| = \|\mathcal{L}(f_0)\| \leq \|\mathcal{L}\| \leq \max_{x \in [a, b]} \sum_{i=1}^{n+1} |l_i(x)|,$$

de unde rezultă expresia normei operatorului \mathcal{L} . ■

În finalul acestei secțiuni stabilim următorul rezultat de divergență:

Teorema 3.3.15 *Fie o mulțime de șiruri de noduri de interpolare (3.1) dintr-un interval $[a, b]$. Mulțimea funcțiilor continue $f \in C[a, b]$ cu proprietatea că șirul polinoamelor de interpolare Lagrange $L(\mathbb{P}_{n-1}, x_1^{(1)}, \dots, x_n^{(n)}; f)$ nu converge (uniform) către f este superdensă în $C[a, b]$.*

Demonstrație. Fie șirul de operatori $(\mathcal{L}_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$, $\mathcal{L}_n \in (C[a, b], \mathbb{P}_n)^*$ definiți prin

$$\mathcal{L}(f)(x) = L(\mathbb{P}_{n-1}; x_1^{(n)}, \dots, x_n^{(n)}; f)(x) \quad \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

Potrivit Teoremei 3.3.14 operatorul \mathcal{L}_n satisface ipotezele Teoremei 3.3.13. În consecință

$$\|I - \mathcal{L}_n\| \geq \frac{2}{\pi^2} \ln(n+1) - \frac{1}{2}, \quad \forall n \in \mathbb{N}^*,$$

de unde $\sup_{n \in \mathbb{N}^*} \|I - \mathcal{L}_n\| = \infty$.

Familia de operatori liniari și continui

$$\mathcal{A} = \{I - \mathcal{L}_n : n \in \mathbb{N}^*\}$$

satisface condiția principiului condensării singularităților (Teorema 3.3.5). Prin urmare mulțimea singularităților $\mathcal{S}_{\mathcal{A}}$ este superdensă în $C[a, b]$. Astfel mulțimea funcțiilor $f \in C[a, b]$ pentru care $\sup_{n \in \mathbb{N}^*} \|(I - \mathcal{L}_n)(f)\| = \infty$, deci și a acelor funcții pentru care $\mathcal{L}_n(f)$ nu converge uniform către f este superdensă în $C[a, b]$.

■

Probleme și teme de seminar

P 3.1 Fie $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ și polinomul lui Bernstein de grad n atașat funcției f , $B_n(f)(x) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} f\left(\frac{k}{n}\right) x^k (1-x)^{n-k}$. Să se arate că

1. $B_n(1)(x) = 1$;
2. $B_n(t)(x) = x$;
3. $B_n(t^2)(x) = \frac{x+(n-1)x^2}{n}$.

P 3.2 Fie $(u_k)_{k \in \mathbb{N}}$ un șir de numere și $B_n(u_i, u_{i+1}, \dots, u_{i+n})$ polinomul

$$B_n(u_i, u_{i+1}, \dots, u_{i+n})(x) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} u_{i+k} x^k (1-x)^{n-k}.$$

Să se arate că

$$B_n(u_0, u_1, \dots, u_n)(x) = B_1(B_{n-1}(u_0, \dots, u_{n-1})(x), B_{n-1}(u_1, \dots, u_n)(x))(x).$$

Indicație. Deoarece $B_1(u_i, u_{i+1})(x) = (1-x)u_i + xu_{i+1}$ vom avea

$$\begin{aligned} & B_1(B_{n-1}(u_0, \dots, u_{n-1})(x), B_{n-1}(u_1, \dots, u_n)(x))(x) = \\ & = (1-x)B_{n-1}(u_0, \dots, u_{n-1})(x) + xB_{n-1}(u_1, \dots, u_n)(x) = \\ & = \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} u_k x^k (1-x)^{n-1-k} + \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} u_{k+1} x^{k+1} (1-x)^{n-1-k} = \dots \end{aligned}$$

P 3.3 Să se demonstreze egalitatea

$$B_n(f)(x) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \Delta_{\frac{1}{n}}^k f(0) x^k.$$

Indicație. Dezvoltând $(1-x)^{n-k}$ se obține

$$\begin{aligned} B_n(f)(x) &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} f\left(\frac{k}{n}\right) \sum_{j=0}^{n-k} \binom{n-k}{j} (-1)^j x^{j+k} = \\ &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} f\left(\frac{k}{n}\right) \sum_{i=k}^n \binom{n-k}{i-k} (-1)^{i-k} x^i, \end{aligned}$$

cu $i = k + j$.

Schimbând ordinea sumărilor rezultă

$$B_n(f)(x) = \sum_{i=0}^n x^i \sum_{k=0}^i (-1)^{i-k} \binom{n-k}{i-k} \binom{n}{k} f\left(\frac{k}{n}\right).$$

Deoarece $\binom{n-k}{i-k} \binom{n}{k} = \binom{n}{i} \binom{i}{k}$ și folosind (1.2) vom avea

$$B_n(f)(x) = \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} x^i \sum_{k=0}^i \binom{i}{k} (-1)^{i-k} f\left(\frac{k}{n}\right) = \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} x^i \Delta_{\frac{1}{n}}^i f(0).$$

P 3.4 Să se arate că $\lim_{n \rightarrow \infty} B_n(f)(x) \stackrel{u}{=} f(x)$, $\forall f \in C[0, 1]$, adică spațiul liniar al polinoamelor este dens în $C[0, 1]$ (Weierstrass).

SCHEIBER ERNEST

SCHEIBER ERNEST

SCHEIBER ERNEST

SCHEIBER ERNEST

SCHEIBER ERNEST SCHEIBER ERNEST

SCHEIBER ERNEST SCHEIBER ERNEST

Capitolul 4

Formule de derivare numerică

Prezentăm două moduri de aproximare a derivatei unei funcții într-un punct:

- *Aproximarea derivatei prin diferențe*, utilă în cazul în care funcția este cunoscută dar derivarea formală este mult prea laborioasă;
- *Aproximarea derivatei prin derivata unei funcții de interpolare*, utilă în cazul în care funcția este cunoscută prin valorile ei într-o mulțime de puncte.

4.1 Aproximarea derivatei prin diferențe

Următoarele formule de aproximare a derivatelor unei funcții sunt uzuale:

$$f'(x) \simeq \frac{\Delta_h f(x)}{h} = \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \quad (4.1)$$

$$f'(x) \simeq \frac{\delta_{2h} f(x)}{2h} = \frac{f(x+h) - f(x-h)}{2h} \quad (4.2)$$

$$f''(x) \simeq \frac{\delta_h^2 f(x)}{h^2} = \frac{f(x+h) - 2f(x) + f(x-h)}{h^2} \quad (4.3)$$

În ipoteza că f este derivabilă de un număr suficient de ori, pentru fiecare din cazurile de mai sus, eroarea aproximării este evaluată în:

Teorema 4.1.1 *Fie $h > 0$. Au loc relațiile:*

$$\begin{aligned} (i) \quad & \frac{\Delta_h f(x)}{h} = f'(x) + \frac{h}{2} f''(c_1), & x < c_1 < x+h; \\ (ii) \quad & \frac{\delta_{2h} f(x)}{2h} = f'(x) + \frac{h^2}{6} f^{(3)}(c_2), & x-h < c_2 < x+h; \\ (iii) \quad & \frac{\delta_h^2 f(x)}{h^2} = f'(x) + \frac{h^2}{12} f^{(4)}(c_3), & x-h < c_3 < x+h. \end{aligned}$$

Demonstrație. Cele trei relații sunt consecințe ale dezvoltărilor tayloriene atașate unei funcții.

Prima egalitate rezultă din

$$f(x+h) = f(x) + hf'(x) + \frac{h^2}{2}f''(c_1) \quad x < c_1 < x+h.$$

Utilizând dezvoltările

$$\begin{aligned} f(x+h) &= f(x) + hf'(x) + \frac{h^2}{2}f''(x) + \frac{h^3}{6}f^{(3)}(c_{21}) & x < c_{21} < x+h \\ f(x-h) &= f(x) - hf'(x) + \frac{h^2}{2}f''(x) - \frac{h^3}{6}f^{(3)}(c_{22}) & x-h < c_{22} < x \end{aligned}$$

obținem

$$\frac{f(x+h) - f(x-h)}{2h} = f'(x) + \frac{h^2}{6} \frac{f^{(3)}(c_{21}) + f^{(3)}(c_{22})}{2}.$$

Funcția $f^{(3)}$ având proprietatea lui Darboux în $(x-h, x+h)$, există $c_2 \in (\min\{x-h, x+h\}, \min\{x-h, x+h\} \cup (x-h, c+h))$ astfel încât $f^{(3)} = \frac{f^{(3)}(c_{21}) + f^{(3)}(c_{22})}{2}$. Prin urmare

$$\frac{\delta_{2h}f(x)}{2h} = f'(x) + \frac{h^2}{6}f^{(3)}(c_2).$$

În mod asemănător, din dezvoltările

$$\begin{aligned} f(x+h) &= f(x) + hf'(x) + \frac{h^2}{2}f''(x) + \frac{h^3}{6}f^{(3)}(x) + \frac{h^4}{24}f^{(4)}(c_{31}) & x < c_{31} < x+h \\ f(x-h) &= f(x) - hf'(x) + \frac{h^2}{2}f''(x) - \frac{h^3}{6}f^{(3)}(x) + \frac{h^4}{24}f^{(4)}(c_{32}) & x-h < c_{32} < x \end{aligned}$$

obținem

$$\frac{f(x+h) - 2f(x) + f(x-h)}{h^2} = f''(x) + \frac{h^2}{12} \frac{f^{(4)}(c_{31}) + f^{(4)}(c_{32})}{2}.$$

Repetând raționamentul de mai sus, există $c_3 \in (x-h, x+h)$ astfel încât

$$\frac{\delta_h^2 f(x)}{h^2} = f''(x) + \frac{h^2}{12}f^{(4)}(c_3). \quad \blacksquare$$

4.1.1 Extrapolarea Richardson

Un număr S se aproximează prin $\varphi(h)$, $S \approx \varphi(h)$, mai precis având loc o egalitate de forma

$$S = \varphi(h) + a_2h^2 + a_4h^4 + a_6h^6 + \dots \quad (4.4)$$

Dacă $a_2 \neq 0$ atunci $a_2 h^2$ reprezintă termenul dominant al erorii. Puterea lui h din termenul dominant definește ordinul aproximării, 2 în cazul de față.

În (4.4), dacă se pune $\frac{h}{2}$ în loc de h , atunci rezultă

$$S = \varphi\left(\frac{h}{2}\right) + \frac{1}{4}a_2 h^2 + \frac{1}{16}a_4 h^4 + \frac{1}{64}a_6 h^6 + \dots \quad (4.5)$$

În vederea eliminării termenului cu h^2 , înmulțim (4.4) cu $-\frac{1}{3}$ și (4.5) $\frac{4}{3}$ și adunându-le se obține

$$S = \frac{4}{3}\varphi\left(\frac{h}{2}\right) - \frac{1}{3}\varphi(h) - \frac{1}{4}a_4 h^4 - \frac{5}{16}a_6 h^6 + \dots$$

adică o relație de forma

$$S = \psi(h) + b_4 h^4 + b_6 h^6 + \dots, \quad (4.6)$$

având ordinul de aproximare 4.

Repetând procedeul, adică eliminând termenul cu h^4 din (4.6) se ajunge la o formulă de aproximație a lui S de ordin 6.

Următorul procedeu, denumit extrapolarea Richardson, realizează eliminarea succesivă a termenilor de ordin h^2, h^4, \dots, h^{2M} .

Introducem

$$D(n, 0) = \varphi\left(\frac{h}{2^n}\right), \quad n = 0, 1, \dots, M.$$

Extrapolarea Richardson constă în completarea tabelului

$$\begin{array}{cccc} D(0, 0) & & & \\ D(1, 0) & D(1, 1) & & \\ D(2, 0) & D(2, 1) & D(2, 2) & \\ \vdots & & \vdots & \ddots \\ D(M, 0) & D(M, 1) & D(M, 2) & \dots & D(M, M) \end{array}$$

utilizând formula de recurență

$$D(n, k) = \frac{4^k}{4^k - 1} D(n, k-1) - \frac{1}{4^k - 1} D(n-1, k-1), \quad \begin{array}{l} n=k, k+1, \dots, M \\ k = 1, 2, \dots, M. \end{array}$$

Tabelul se construiește completând succesiv coloanele acestuia.

Teorema 4.1.2 *Au loc relațiile*

$$D(n, k) = S + \sum_{j=k+1}^{\infty} A_{j, k+1} \left(\frac{h}{2^n}\right)^{2j},$$

adică ordinul aproximării lui S prin $D(n, k)$ este $2k + 2$.

Demonstrație. Inducție după k . Din (4.4) rezultă

$$S = \varphi\left(\frac{h}{2^n}\right) + \sum_{j=1}^{\infty} a_{2j} \left(\frac{h}{2^n}\right)^{2j}$$

sau

$$D(n, 0) = S - \sum_{j=1}^{\infty} a_{2j} \left(\frac{h}{2^n}\right)^{2j} = S + \sum_{j=1}^{\infty} A_{j,1} \left(\frac{h}{2^n}\right)^{2j},$$

unde, s-au notat $A_{j,1} = -a_{2j}$, $j \in \mathbb{N}^*$.

Presupunem că

$$D(n, k-1) = S + \sum_{j=k}^{\infty} A_{j,k} \left(\frac{h}{2^n}\right)^{2j}, \quad n = k-1, k, \dots, M.$$

Potrivit formulei de recurență

$$\begin{aligned} D(n, k) &= \frac{4^k}{4^k - 1} D(n, k-1) - \frac{1}{4^k - 1} D(n-1, k-1) = \\ &= \frac{4^k}{4^k - 1} \left[S + \sum_{j=k}^{\infty} A_{j,k} \left(\frac{h}{2^n}\right)^{2j} \right] - \frac{1}{4^k - 1} \left[S + \sum_{j=k}^{\infty} A_{j,k} \left(\frac{h}{2^{n-1}}\right)^{2j} \right] = \\ &= S + \sum_{j=k}^{\infty} A_{j,k} \frac{4^k - 4^j}{4^k - 1} \left(\frac{h}{2^n}\right)^{2j} = S + \sum_{j=k+1}^{\infty} A_{j,k} \frac{4^k - 4^j}{4^k - 1} \left(\frac{h}{2^n}\right)^{2j}. \end{aligned}$$

Notând $A_{j,k+1} = A_{j,k} \frac{4^k - 4^j}{4^k - 1}$ se obține relația din enunțul teoremei. ■

Aplicație la formule de derivare numerică. În ipoteza relațiilor

$$\begin{aligned} f(x+h) &= \sum_{j=0}^{\infty} \frac{f^{(j)}(x)}{j!} h^j \\ f(x-h) &= \sum_{j=0}^{\infty} (-1)^j \frac{f^{(j)}(x)}{j!} h^j \end{aligned}$$

rezultă

$$\frac{f(x+h) - f(x-h)}{2h} = f'(x) + \sum_{j=1}^{\infty} \frac{f^{(2j+1)}(x)}{(2j+1)!} h^{2j}$$

sau

$$f'(x) = \varphi(h) - \sum_{j=1}^{\infty} \frac{f^{(2j+1)}(x)}{(2j+1)!} h^{2j},$$

unde $\varphi(h) = \frac{f(x+h) - f(x-h)}{2h}$.

Extrapolarea Richardson conduce la formule de derivare numerică cu ordine de aproximare superioară. De exemplu, eliminând termenul cu h^2 se obține

$$\frac{4}{3}\varphi\left(\frac{h}{2}\right) - \frac{1}{3}\varphi(h) = \frac{1}{6h} \left[f(x-h) - 8f\left(x - \frac{h}{2}\right) + 8f\left(x + \frac{h}{2}\right) - f(x+h) \right].$$

4.2 Aproximarea derivatei prin derivata unei funcții de interpolare

Derivata unei funcții f , cunoscută prin valorile ei în punctele $a, a+h, \dots, a+nh$ se poate aproxima prin derivata polinomului de interpolare Lagrange

$$f'(x) \simeq \frac{d}{dx} L(\mathbb{P}_n; a, a+h, \dots, a+nh; f)(x). \quad (4.7)$$

Prin substituția $x = a + qh$ expresia polinomului de interpolare Lagrange devine

$$\begin{aligned} L(\mathbb{P}_n; a, a+h, \dots, a+nh; f)(x) &= L(\mathbb{P}_n; a, a+h, \dots, a+nh; f)(a+qh) = \\ &= \sum_{i=0}^n f(a+ih) \frac{(-1)^{n-i}}{i!(n-i)!} \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^n (q-j) = Q(q). \end{aligned}$$

În urma derivării, aproximarea (4.7) devine

$$\begin{aligned} f'(x) &\simeq \frac{d}{dx} L(\mathbb{P}_n; a, a+h, \dots, a+nh; f)(x) = Q'(q) \frac{dq}{dx} = \\ &= \frac{1}{h} \sum_{i=0}^n f(a+ih) \frac{(-1)^{n-i}}{i!(n-i)!} \sum_{\substack{k=0 \\ k \neq i}}^n \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i, k}}^n (q-j). \end{aligned}$$

În mod asemănător, derivata de ordinul doi a funcției f se poate aproxima prin

$$f''(x) \simeq \frac{d^2}{dx^2} L(\mathbb{P}_n; a, a+h, \dots, a+nh; f)(x) = Q''(q) \left(\frac{dq}{dx}\right)^2 + Q'(q) \frac{d^2q}{dx^2} =$$

$$= \frac{1}{h^2} \sum_{i=0}^n f(a+ih) \frac{(-1)^{n-i}}{i!(n-i)!} \sum_{\substack{k=0 \\ k \neq i}}^n \sum_{\substack{l=0 \\ l \neq i, k}}^n \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i, k, l}}^n (q-j).$$

Dacă în locul polinomului de interpolare Lagrange se utilizează alte funcții de interpolare atunci se deduc alte formule de derivare numerică.

Probleme și teme de seminar

P 4.1 Utilizând aproximarea unei funcții cu polinomul de interpolare Lagrange pe noduri echidistante să se deducă aproximațiile:

$$f'(a) \approx \frac{1}{h} \left[\Delta_h f(x) - \frac{\Delta_h^2 f(a)}{2} + \frac{\Delta_h^3 f(a)}{3} + \dots + (-1)^{n-1} \frac{\Delta_h^n f(a)}{n} \right]$$

$$f'(a) \approx \frac{1}{h} \left[\nabla_h f(x) + \frac{\nabla_h^2 f(a)}{2} + \frac{\nabla_h^3 f(a)}{3} + \dots + \frac{\nabla_h^n f(a)}{n} \right]$$

Indicație.

$$\begin{aligned} f'(a) &= f'(x)|_{x=a} \approx \frac{d}{dx} L(\mathbb{P}_n; a, a+h, \dots, a+nh; f)(x)|_{x=a} = \\ &= \frac{d}{dx} \left[\sum_{k=0}^n \frac{\Delta_h^k f(a)}{k! h^k} (x-a)(x-a-h) \dots (x-a-(k-1)h) \right]_{x=a} = \\ &= \sum_{k=1}^n \frac{\Delta_h^k f(a)}{k! h^k} \frac{d}{dx} [(x-a)(x-a-h) \dots (x-a-(k-1)h)]_{x=a} = \\ &= \sum_{k=1}^n \frac{\Delta_h^k f(a)}{k! h^k} (-h)(-2h) \dots (-(k-1)h) = \frac{1}{h} \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k-1} \Delta_h^k f(a)}{k}. \end{aligned}$$

Capitolul 5

Formule de integrare numerică

Fie $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ o funcție continuă. Pentru a calcula integrala funcției în intervalul $[a, b]$ se consideră formule de forma

$$\int_a^b f(x)dx = \sum_{i=0}^n A_i f(x_i) + R(f),$$

numite formule de integrare numerică sau formule de cvadratură. Punctele

$$x_0, x_1, \dots, x_n$$

se numesc nodurile formulei de integrare numerică, iar

$$A_0, A_1, \dots, A_n$$

se numesc coeficienții formulei de integrare numerică. Practic, evaluarea integralei revine la calculul sumei din membrul drept $I_n = \sum_{i=0}^n A_i f(x_i)$. Expresia $R(f)$ este restul formulei de integrare numerică. $R(f)$ oferă informații privind clasa funcțiilor pentru care formula de integrare numerică este eficientă, în sensul că pentru funcția dată și $\varepsilon > 0$, pentru n suficient de mare, are loc inegalitatea

$$|R(f)| = \left| \int_a^b f(x)dx - \sum_{i=0}^n A_i f(x_i) \right| < \varepsilon. \quad (5.1)$$

În aplicații, acuratețea aproximării se probează prin satisfacerea unei inegalități de forma $|I_{n'} - I_n| < \varepsilon$, $n' > n$.

O metodă de obținere a unor formule de integrare numerică constă în aproximarea funcției f cu o funcție de interpolare. Astfel există o mare varietate de formule de integrare numerică.

5.1 Natura aproximării funcționalei $I(f) = \int_a^b f(x)dx$

Notăm prin $C[a, b]$ spațiul Banach al funcțiilor reale și continue definite în intervalul compact $[a, b]$, înzestrat cu norma $\|f\| = \max\{|f(x)| : x \in [a, b]\}$.

Considerăm funcționalele liniare

$$\begin{aligned} I(f) &= \int_a^b f(x)dx, \\ \delta_x(f) &= f(x), \\ \sigma(f) &= \sum_{i=0}^n A_i \delta_{x_i}(f). \end{aligned}$$

Astfel se pune problema aproximării în spațiul dual $C^*[a, b]$ a funcționalei I cu funcționala σ .

Teorema 5.1.1 *Au loc egalitățile*

$$1. \quad \|I\| = b - a \quad (5.2)$$

$$2. \quad \|\sigma\| = \sum_{i=0}^n |A_i| \quad (5.3)$$

$$3. \quad \|I - \sigma\| = b - a + \sum_{i=0}^n |A_i| \quad (5.4)$$

Demonstrație.

1. Din inegalitățile

$$|I(f)| = \left| \int_a^b f(x)dx \right| \leq \int_a^b |f(x)|dx \leq (b - a)\|f\|$$

deducem că $\|I\| \leq b - a$. Inegalitatea contrară rezultă folosind funcția $f_1(x) = 1$,

$$b - a = I(f_1) \leq |I(f_1)| \leq \|I\| \|f_1\| = \|I\| \leq b - a.$$

2. Au loc inegalitățile

$$|\sigma(f)| = \left| \sum_{i=0}^n A_i f(x_i) \right| \leq \|f\| \sum_{i=0}^n |A_i|,$$

adică $\|\sigma\| \leq \sum_{i=0}^n |A_i|$. Dacă

$$f_2(x) = \begin{cases} \text{sign}(A_i) & x \in \{x_0, \dots, x_n\}, A_i \neq 0, \\ 1 & x \in \{a, b\} \\ \text{afină în rest} \end{cases}$$

atunci $\|f_2\| = 1$ și

$$\sum_{i=0}^n |A_i| \geq \|\sigma\| = \sup_{\|f\| \leq 1} |\sigma(f)| \geq |\sigma(f_2)| = \sum_{i=0}^n |A_i|.$$

3. $\|I - \sigma\| \leq \|I\| + \|\sigma\| \leq b - a + \sum_{i=0}^n |A_i|$. Fie $m \in \mathbb{N}^*$ astfel încât $\frac{2}{m} < \min_{0 \leq i \leq n-1} x_{i+1} - x_i$ și funcția

$$f_3(x) = \begin{cases} -\text{sign}(A_i) & x \in \{x_0, \dots, x_n\} \\ 1 & x \in \{a, x_0 \pm \frac{1}{m}, \dots, x_n \pm \frac{1}{m}\} \\ \text{afină în rest} \end{cases}$$

Din nou $\|f_3\| = 1$ și au loc inegalitățile

$$\begin{aligned} b-a + \sum_{i=0}^n |A_i| &\geq \|I - \sigma\| = \sup_{\|f\| \leq 1} |(I - \sigma)(f)| \geq |(I - \sigma)(f_3)| = \int_a^b f_3(x) dx + \sum_{i=0}^n |A_i| = \\ &= \int_a^{x_0 - \frac{1}{m}} f_3(x) dx + \sum_{i=0}^n \int_{x_i - \frac{1}{m}}^{x_i + \frac{1}{m}} f_3(x) dx + \sum_{i=0}^{n-1} \int_{x_i + \frac{1}{m}}^{x_{i+1} - \frac{1}{m}} f_3(x) dx + \int_{x_n + \frac{1}{m}}^b f_3(x) dx + \sum_{i=0}^n |A_i| = \\ &= b - a - \frac{2}{m}(n+1) + \sum_{i=0}^n |A_i| + \sum_{i=0}^n \int_{x_i - \frac{1}{m}}^{x_i + \frac{1}{m}} f_3(x) dx \geq b - a - \frac{2}{m}(n+1) + \sum_{i=0}^n |A_i|, \end{aligned}$$

deoarece intergralele din ultima sumă sunt nenegative. Pentru $m \rightarrow \infty$ rezultă expresia normei funcționale $I - \sigma$. ■

Considerăm șirul de funcționale

$$\sigma_k = \sum_{i=0}^{n_k} A_i^k \delta_{x_i^k} \quad (5.5)$$

care generează formulele de integrare numerică

$$\int_a^b f(x) dx = \sum_{i=0}^{n_k} A_i^k f(x_i^k) + R_k(f)$$

Teorema 5.1.2 *Nu există un șir de funcționale (5.5) astfel încât*

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \|I - \sigma_k\| = 0.$$

Demonstrație. Din (5.4) rezultă $\|I - \sigma_k\| \geq b - a$, de unde concluzia teoremei.

■

Condiții care asigură convergența slabă sunt date în teorema

Teorema 5.1.3 *Șirul de funcționale (5.5) converge slab către I dacă și numai dacă*

1.

$$M > 0, \quad \sum_{i=0}^{n_k} |A_i^k| \leq M, \quad \forall k \in \mathbb{N};$$

2.

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{i=0}^{n_k} A_i(x_i^k)^p = \int_a^b x^p dx, \quad \forall p \in \mathbb{N}.$$

Demonstrație. Cele două condiții traduc condițiile de convergență slabă, adică

1. Marginirea șirului de funcționale:

$$\|\sigma_k\| = \sum_{i=0}^{n_k} |A_i^k| \leq M, \quad \forall k \in \mathbb{N};$$

2. Convergența șirului de funcționale pe un subspațiu dens în $C[a, b]$. În acest caz, subspațiul este \mathbb{P} , spațiul polinoamelor, convergența fiind probată pentru x^p , $p \in \mathbb{N}$. ■

5.2 Formule de integrare numerică de tip Newton - Cotes

Alegerea nodurilor echidistantă și integrarea polinomului de interpolare Lagrange în locul funcției constituie specificul unei formule de integrare numerică de tip Newton - Cotes.

Fie $n \in \mathbb{N}^*$ și nodurile echidistante $a, a+h, a+2h, \dots, a+nh = b$, ($h = \frac{b-a}{n}$). În acest caz, funcția f se aproximează prin polinomul de interpolare Lagrange $L(\mathbb{P}_n; a, a+h, \dots, a+nh; f)(x)$. În consecință

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x) dx &\simeq \int_a^b L(\mathbb{P}_n; a, a+h, \dots, a+nh; f)(x) dx = \\ &= \sum_{i=0}^n \frac{(-1)^{n-i} f(a+ih)}{i!(n-i)! h^n} \cdot \int_a^b (x-a)(x-a-h) \dots (x-a-(i-1)h)(x-a-(i+1)h) \dots (x-a-nh) dx. \end{aligned}$$

Prin schimbarea de variabilă $x = a+qh$ rezultă

$$\begin{aligned} &\int_a^b L(\mathbb{P}_n; a, a+h, \dots, a+nh; f)(x) dx = \\ &= \sum_{i=0}^n \frac{(-1)^{n-i} f(a+ih)}{i!(n-i)!} h \int_0^n q(q-1) \dots (q-i+1)(q-i-1) \dots (q-n) dq = \\ &= (b-a) \sum_{i=0}^n C_{n,i} f(a+ih) \end{aligned}$$

unde coeficienții

$$C_{n,i} = \frac{(-1)^{n-i}}{i!(n-i)! n} \int_0^n q(q-1) \dots (q-i+1)(q-i-1) \dots (q-n) dq$$

se numesc numerele lui Cotes.

Integralele care apar în expresia numerelor lui Cotes se calculează fără eroare (Problema 1.14, orice pachet de calcul simbolic - *Computer Algebra System* - calculează aceste integrale). Astfel, se obțin:

$$C_{1,0} = - \int_0^1 (q-1) dq = \frac{1}{2}, \quad C_{1,1} = \int_0^1 q dq = \frac{1}{2}$$

și

$$\begin{aligned} C_{2,0} &= \frac{1}{4} \int_0^2 (q-1)(q-2) dq = \frac{1}{6}, & C_{2,1} &= -\frac{1}{2} \int_0^2 q(q-2) dq = \frac{2}{3}, \\ C_{2,2} &= \frac{1}{4} \int_0^2 q(q-1) dq = \frac{1}{6}. \end{aligned}$$

Pentru $n = 1$ rezultă aproximarea

$$\int_a^b f(x)dx \simeq \frac{1}{2}(b-a)[f(a) + f(b)],$$

iar pentru $n = 2$ rezultă

$$\int_a^b f(x)dx \simeq \frac{1}{6}(b-a)\left[f(a) + 4f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b)\right].$$

Restul sau eroarea formulei de integrare numerică se definește prin

$$R(f) = \int_a^b f(x)dx - (b-a) \sum_{i=0}^n C_{n,i} f(a+ih), \quad (5.6)$$

formula de integrare numerică de tip Newton-Côtes devine

$$\int_a^b f(x)dx = (b-a) \sum_{i=0}^n C_{n,i} f(a+ih) + R(f) \quad (5.7)$$

5.3 Evaluarea restului

Stabilim în prealabil o serie de proprietăți simple.

O funcție $f : [c-l, c+l] \rightarrow \mathbb{R}$ este simetrică față de punctul (c, d) dacă

$$\frac{f(c-x) + f(c+x)}{2} = d, \quad \forall x \in [0, l].$$

Teorema 5.3.1 Dacă funcția $f : [c-l, c+l] \rightarrow \mathbb{R}$ este simetrică față de punctul (c, d) atunci

$$\int_{c-l}^{c+l} f(x)dx = 2ld. \quad (5.8)$$

Demonstrație. Integrala (5.8) se descompune în suma

$$I = \int_{c-l}^{c+l} f(x)dx = \int_{c-l}^c f(x)dx + \int_c^{c+l} f(x)dx.$$

În cele două integrale, efectuăm schimbările de variabilă $x = c - t$, respectiv $x = c + t$. Rezultă

$$I = \int_0^l [f(c-t) + f(c+t)]dt = 2ld \quad \blacksquare.$$

Fie $a, h \in \mathbb{R}$, $h > 0$, $n \in \mathbb{N}$, $a_i = a + ih, i \in \{0, 1, \dots, n\}$. Notăm

$$\begin{aligned} u(x) &= \prod_{i=0}^n (x - a_i), & F(x) &= \int_a^x u(t) dt, \\ I_i &= [a_i, a_{i+1}], & F_i &= \int_{a_i}^{a_{i+1}} u(t) dt. \end{aligned}$$

Teorema 5.3.2 *Dacă $n = 2m$ atunci au loc afirmațiile*

1.

$$\begin{aligned} u(x) &\geq 0, \quad \forall x \in I_i, \quad i \text{ par}, \\ u(x) &\leq 0, \quad \forall x \in I_i, \quad i \text{ impar}, \end{aligned}$$

2. $u(x)$ este simetrică față de punctul $(a_m, 0)$;

3. $F(a) = F(a + nh) = 0$;

4. $F(x) > 0, \quad \forall x \in (a, a + nh)$.

Demonstrație.

1. Fie $x \in I_i$. Pentru $j \leq i$, $x - a_j \geq 0$; în timp ce, pentru $j > i$, $x - a_j < 0$. Numărul factorilor negativi este $2m - i$.

2. Deoarece

$$\begin{aligned} u(a_m - t) &= t(t^2 - h^2)[t^2 - (2h)^2] \dots [t^2 - (mh)^2] \\ u(a_m + t) &= t(t^2 - h^2)[t^2 - (2h)^2] \dots [t^2 - (mh)^2] \end{aligned}$$

$$u(a_m - t) + u(a_m + t) = 0$$

3. Deoarece $u(x)$ este simetrică față de punctul $(a_m, 0)$, potrivit Teoremei 5.3.1 avem

$$F(a + nh) = F(a + 2mh) = \int_a^{a+2mh} u(t) dt = \int_{a_m-mh}^{a_m+mh} u(t) dt = 0.$$

4. Numerele F_i sunt nenule, și potrivit pct. 1 al teoremei sign $F_i = (-1)^i$.

Stabilim formula de recurență

$$F_i = \frac{\xi - a + h}{\xi - a + 2mh} F_{i-1}, \quad \xi \in [a_{i-1}, a_i] \quad i = 1, \dots, m - 1.$$

Într-adevăr, prin schimbarea de variabilă $t = s + h$ expresia lui F_i devine

$$\begin{aligned} F_i &= \int_{a_i}^{a_{i+1}} u(t) dt = \int_{a_{i-1}}^{a_i} (s - a + h)(s - a) \dots (s - a - (2m - 1)h) ds = \\ &= \int_{a_{i-1}}^{a_i} \frac{s - a + h}{s - a - 2mh} u(s) ds. \end{aligned}$$

Funcția $u(s)$ nu schimbă semnul în intervalul I_i , deci potrivit primei teoreme de medie a calculului integral, există $\xi \in [a_{i-1}, a_i]$ astfel încât

$$F_i = \frac{\xi - a + h}{\xi - a - 2mh} \int_{a_{i-1}}^{a_i} u(s) ds = \frac{\xi - a + h}{\xi - a - 2mh} F_{i-1}.$$

Fie $q = \frac{\xi - a}{h}$. Din $\xi \in I_{i-1}$ rezultă $q \in [i - 1, i] \subseteq [0, m - 1] \subset [0, m - \frac{1}{2}]$. Prin urmare

$$\left| \frac{\xi - a + h}{\xi - a - 2mh} \right| = \left| \frac{q + 1}{q - 2m} \right| = \frac{q + 1}{2m - q} < 1.$$

În consecință,

$$|F_i| = \left| \frac{\xi - a + h}{\xi - a - 2mh} \right| |F_{i-1}| < |F_{i-1}|.$$

Astfel

$$|F_0| > |F_1| > \dots > |F_{m-1}|,$$

sau

$$F_0 > -F_1 > F_2 > -F_3 > \dots > (-1)^{m-1} F_{m-1}.$$

Reținem inegalitatea $F_{2j} + F_{2j+1} > 0$.

Dacă $x \in I_i$, $i \in \{0, 1, \dots, m - 1\}$ atunci

$$F(x) = F_0 + F_1 + \dots + F_{i-1} + \int_{a_i}^x u(t) dt.$$

Pentru $i = 2i'$

$$F(x) = (F_0 + F_1) + \dots + (F_{2i'-2} + F_{2i'-1}) + \int_{a_{2i'}}^x u(t) dt > 0,$$

deoarece parantezele cât și ultimul termen sunt pozitive.

Pentru $i = 2i' + 1$

$$F(x) = (F_0 + F_1) + \dots + (F_{2i'-2} + F_{2i'-1}) + F_{2i'} + \int_{a_{2i'+1}}^x u(t)dt,$$

dar

$$\int_{a_{2i'+1}}^x u(t)dt \geq \int_{a_{2i'+1}}^{a_{2i'+2}} u(t)dt = F_{2i'+1}.$$

Prin urmare

$$F(x) \geq (F_0 + F_1) + \dots + (F_{2i'-2} + F_{2i'-1}) + (F_{2i'} + F_{2i'+1}) > 0.$$

Astfel, pentru $x \in (a, a_m]$, $F(x) > 0$. Fie acum $x \in [a_m, a_{2m})$, $x = a_m + y$, $y \in [0, mh)$. Atunci

$$F(x) = \int_a^x u(t)dt = \int_{a_0}^{a_m-y} u(t)dt + \int_{a_m-y}^{a_m+y} u(t)dt = \int_{a_0}^{a_m-y} u(t)dt > 0,$$

datorită proprietății de simetrie a funcției $u(x)$ față de punctul $(a_m, 0)$, a doua integrală este 0. ■

Evaluarea restului formulei de integrare numerică de tip Newton-Côtes este dată de teorema

Teorema 5.3.3 1. Dacă $n = 2m$ și $f \in C^{n+2}[a, b]$ atunci

$$R(f) = \frac{f^{(n+2)}(\xi)}{(n+2)!} \int_a^b xu(x)dx. \quad (5.9)$$

2. Dacă $n = 2m + 1$ și $f \in C^{n+1}[a, b]$ atunci

$$R(f) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} \int_a^b u(x)dx. \quad (5.10)$$

($\xi \in [a, b]$).

Demonstrație. Integrând în $[a, b]$ identitatea

$$f(x) = L(\mathbb{P}_n; a, a+h, \dots, a+nh; f)(x) + u(x)[x, a, a+h, \dots, a+nh; f]$$

deducem

$$R(f) = \int_a^b u(x)[x, a, a+h, \dots, a+nh; f]dx \quad (5.11)$$

1. Cazul $n = 2m$. Dacă $F(x) = \int_a^x u(t)dt$, integrând prin părți (5.11) găsim

$$R(f) = F(x)[x, a, a+h, \dots, a+nh; f]_a^b - \int_a^b F(x)[x, x, a, a+h, \dots, a+nh; f]dx = \\ - \int_a^b F(x)[x, x, a, a+h, \dots, a+nh; f]dx.$$

Deoarece $F(x) \geq 0$, $\forall x \in [a, b]$, se poate aplica prima teoremă de medie a calculului integral, existând $\eta \in [a, b]$, astfel încât

$$R(f) = -[\eta, \eta, a, a+h, \dots, a+nh; f] \int_a^b F(x)dx,$$

și aplicând teorema de medie a diferențelor divizate, există $\xi \in [a, b]$ astfel încât

$$R(f) = -\frac{f^{(n+2)}(\xi)}{(n+2)!} \int_a^b F(x)dx.$$

Efectuând încă o integrare prin părți se obține (5.9).

2. Cazul $n = 2m + 1$. Descompunem integrala (5.11) în

$$R(f) = \int_a^b u(x)[x, a, a+h, \dots, a+nh; f]dx = \int_{a_0}^{a_{2m+1}} u(x)[x, a_0, a_1, \dots, a_{2m+1}; f]dx = \\ = \int_{a_0}^{a_{2m}} u(x)[x, a_0, a_1, \dots, a_{2m+1}; f]dx + \int_{a_{2m}}^{a_{2m+1}} u(x)[x, a_0, a_1, \dots, a_{2m+1}; f]dx.$$

Notăm prin I_1 și respectiv I_2 cele două integrale de mai sus. Fie $v(x) = \prod_{i=0}^{2m} (x - a_i)$. Atunci $u(x) = v(x)(x - a_{2m+1})$. Utilizând formula de recurență

$$[x, a_0, a_1, \dots, a_{2m+1}; f] = \frac{[x, a_0, \dots, a_{2m}; f] - [a_0, \dots, a_{2m+1}; f]}{x - a_{2m+1}}$$

prima integrală devine

$$I_1 = \int_{a_0}^{a_{2m}} v(x)[x, a_0, \dots, a_{2m}; f]dx - [a_0, \dots, a_{2m+1}; f] \int_{a_0}^{a_{2m}} v(x)dx.$$

Aplicând rezultatul stabilit în cazul anterior, există $\xi_1 \in [a_0, a_{2m}]$ astfel încât

$$I_1 = \frac{f^{(2m+2)}(\xi_1)}{(2m+1)!} \int_{a_0}^{a_{2m}} xv(x)dx.$$

Folosind din nou faptul că $\int_{a_0}^{a_{2m}} v(x)dx = 0$, rezultă

$$I_1 = \frac{f^{(n+1)}(\xi_1)}{(n+1)!} \int_{a_0}^{a_{2m}} u(x)dx.$$

Reluând calculele, dacă în integrala anterioară se efectuează o integrare prin părți atunci se obține

$$\int_{a_0}^{a_{2m}} u(x)dx = \int_{a_0}^{a_{2m}} xv(x)dx = - \int_{a_0}^{a_{2m}} F(x)dx < 0,$$

unde $F(x) = \int_{a_0}^x v(t)dt$.

În intervalul $[a_{2m}, a_{2m+1}]$ funcția $u(x)$ este nepozitivă. Aplicând succesiv prima teoremă de medie a calculului integral și teorema de medie a diferențelor divizate există $\xi_2 \in [a_0, a_{2m+1}]$ astfel încât

$$I_2 = \frac{f^{(n+1)}(\xi_2)}{(n+1)!} \int_{a_{2m}}^{a_{2m+1}} u(x)dx.$$

Prin urmare

$$\begin{aligned} R(f) &= \frac{f^{(n+1)}(\xi_1)}{(n+1)!} \int_{a_0}^{a_{2m}} u(x)dx + \frac{f^{(n+1)}(\xi_2)}{(n+1)!} \int_{a_{2m}}^{a_{2m+1}} u(x)dx = \\ &= \frac{1}{(n+1)!} (\lambda_1 f^{(n+1)}(\xi_1) + \lambda_2 f^{(n+1)}(\xi_2)), \end{aligned}$$

unde prin λ_1, λ_2 s-au notat cele două integrale, numere nepozitive. Se observă că $\lambda_1 + \lambda_2 = \int_a^b u(x)dx$. Potrivit proprietății lui Darboux, există $\xi \in [\xi_1, \xi_2] \subset [a, b]$ astfel încât

$$\frac{\lambda_1 f^{(n+1)}(\xi_1) + \lambda_2 f^{(n+1)}(\xi_2)}{\lambda_1 + \lambda_2} = f^{(n+1)}(\xi).$$

În consecință

$$R(f) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} \int_a^b u(x)dx. \quad \blacksquare$$

5.4 Formula trapezului ($n = 1$)

Evalaurea restului. Potrivit formulei (5.10)

$$R(f) = \frac{f''(\xi)}{2!} \int_a^b u(x) dx$$

unde $u(x) = (x-a)(x-b)$. Integrala este $-\frac{(b-a)^3}{6}$. În consecință, are loc formula trapezului

$$\int_a^b f(x) dx = \frac{1}{2}(b-a)[f(a) + f(b)] - \frac{f''(\xi)(b-a)^3}{12}.$$

Denumirea formulei provine din faptul că integrala $\int_a^b f(x) dx$, adică aria delimitată de graficul funcției f , axa Ox și dreptele $x = a$ și $x = b$ se aproximează prin aria trapezului ABNM (Fig. 1).

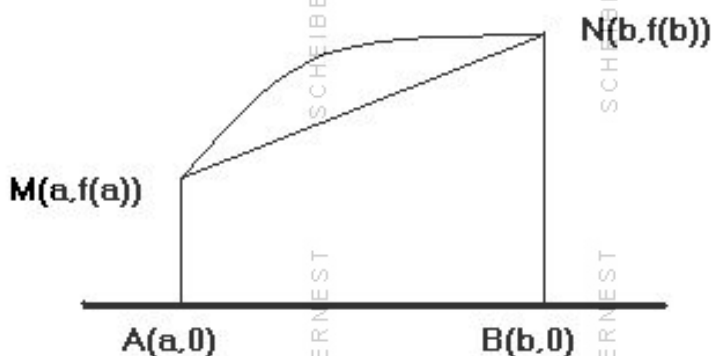


Fig. 1

Aplicarea practică a formulei trapezului. Fie $m \in \mathbb{N}^*$. Împărțim intervalul $[a, b]$ în m părți prin punctele $a_i = a + ih, i = 0, 1, \dots, m$ ($h = \frac{b-a}{m}$) și utilizăm formula trapezului pentru calculul integralei funcției în fiecare interval $[a_i, a_{i+1}], i = 0, 1, \dots, m-1$. Astfel

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x) dx &= \sum_{i=0}^{m-1} \int_{a_i}^{a_{i+1}} f(x) dx = \\ &= \sum_{i=0}^{m-1} \left\{ \frac{1}{2}(a_{i+1} - a_i)[f(a_{i+1}) + f(a_i)] - \frac{f''(\xi_i)(a_{i+1} - a_i)^3}{12} \right\}. \end{aligned}$$

Separând expresiile, rezultă

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{b-a}{2m}[f(a) + 2 \sum_{i=1}^{m-1} f(a+ih) + f(b)] - \frac{(b-a)^3}{12m^2} \frac{f''(\xi_0) + \dots + f''(\xi_{m-1})}{m}$$

și repetând raționamentul din demonstrația Teoremei 4.1.1 obținem formula *trapezelor*.

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{b-a}{2m}[f(a) + 2 \sum_{i=1}^{m-1} f(a+ih) + f(b)] - \frac{(b-a)^3}{12m^2} f''(\xi).$$

Prin urmare integrala funcției f în intervalul $[a, b]$ se aproximează prin

$$I_m(f) = \frac{b-a}{2m}[f(a) + 2 \sum_{i=1}^{m-1} f(a+ih) + f(b)].$$

Aplicație. Să se calculeze $\frac{\pi}{4}$ cu o precizie $\varepsilon = 0.01$ utilizând formula trapezelor pentru calculul integralei

$$\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2} = \frac{\pi}{4}.$$

Nu se ține seama de erorile de rotunjire.

Dacă $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$ atunci trebuie determinat $m \in \mathbb{N}^*$ astfel încât

$$\left| \frac{\pi}{4} - I_m\left(\frac{1}{x^2+1}\right) \right| = \left| \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2m}[f(0) + 2 \sum_{i=1}^{m-1} f(ih) + f(1)] \right| < \varepsilon.$$

Ținând seama de expresia restului în formula trapezelor, condiția de mai sus se realizează dacă

$$\frac{|f''(\xi)|}{12m^2} \leq \frac{\sup\{|f''(x)| : x \in [0, 1]\}}{12m^2} < \varepsilon.$$

$f''(x) = 2 \frac{3x^2-1}{(1+x^2)^3}$ reprezintă o funcție crescătoare în intervalul $[0, 1]$ (deoarece $f^{(3)}(x) = \frac{24x(1-x^2)}{(1+x^2)^4} \geq 0, \forall x \in [0, 1]$) și în consecință

$$\sup\{|f''(x)| : x \in [0, 1]\} = \max\{|f''(0)|, |f''(1)|\} = 2.$$

Cel mai mic volum de calcul se obține pentru cel mai mic m care satisface inegalitatea

$$\frac{\sup\{|f''(x)| : x \in [0, 1]\}}{12m^2} = \frac{1}{6m^2} < \varepsilon.$$

Rezultă $m = 5$, în care caz

$$\frac{\pi}{4} \simeq I_5\left(\frac{1}{x^2+1}\right) = \frac{1}{10}\{f(0) + 2[f(0.2) + f(0.4) + f(0.6) + f(0.8)] + f(1)\} \simeq 0.787.$$

Pentru π găsim aproximarea 3.148.

5.5 Formula lui Simpson ($n = 2$)

Evalaurea restului. Potrivit formulii (5.9)

$$R(f) = \frac{f^{(4)}(\xi)}{4!} \int_a^b xu(x)dx.$$

unde $u(x) = (x - a)(x - \frac{a+b}{2})(x - b)$. Valoarea integralei este $-\frac{(b-a)^5}{120}$.

Rezultă formula de integrare numerică a lui Simpson:

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{1}{6}(b-a)[f(a) + 4f(\frac{a+b}{2}) + f(b)] - \frac{(b-a)^5}{2880}f^{(4)}(\xi).$$

Aplicarea practică a formulei lui Simpson. Fie $m \in \mathbb{N}^*$. Împărțim intervalul $[a, b]$ în $2m$ părți prin punctele $a_i = a + ih$, $i = 0, 1, \dots, 2m$ ($h = \frac{b-a}{2m}$) și aplicăm formula lui Simpson pentru calculul integralei funcției în fiecare interval $[a_{2i}, a_{2i+2}]$, $i = 0, 1, \dots, m-1$.

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x)dx &= \sum_{i=0}^{m-1} \int_{a_{2i}}^{a_{2i+2}} f(x)dx = \\ &= \sum_{i=0}^{m-1} \left\{ \frac{1}{6}(a_{2i+2} - a_{2i})[f(a_{2i}) + 4f(a_{2i+1}) + f(a_{2i+2})] - \frac{f^{(4)}(\xi_i)(a_{2i+2} - a_{2i})^5}{2880} \right\}. \end{aligned}$$

Regrupând termenii rezultă formula finală

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{b-a}{6m}[f(a) + 2 \sum_{i=1}^{m-1} f(a_{2i}) + 4 \sum_{i=0}^{m-1} f(a_{2i+1}) + f(b)] - \frac{(b-a)^5}{2880m^4}f^{(4)}(\xi).$$

Rezultă că integrala funcției f în intervalul $[a, b]$ se aproximează prin

$$J_m(f) = \frac{b-a}{6m}[f(a) + 2 \sum_{i=1}^{m-1} f(a_{2i}) + 4 \sum_{i=0}^{m-1} f(a_{2i+1}) + f(b)].$$

Legătură între formula trapezelor și formula lui Simpson. Fie $n \in \mathbb{N}^*$ și notăm prin I_n și J_n aproximațiile obținute aplicând respectiv formula trapezelor și formula lui Simpson

$$\begin{aligned} I_n &= \frac{b-a}{2n}[f(a) + 2 \sum_{i=1}^{n-1} f(a + i\frac{b-a}{n}) + f(b)], \\ J_n &= \frac{b-a}{6n}[f(a) + 2 \sum_{i=1}^{n-1} f(a + 2i\frac{b-a}{2n}) + 4 \sum_{i=0}^{n-1} f(a + (2i+1)\frac{b-a}{2n}) + f(b)]. \end{aligned}$$

Teorema 5.5.1 *Are loc egalitatea*

$$J_n = \frac{4}{3}I_{2n} - \frac{1}{3}I_n.$$

Demonstrație. Pentru simplificarea scrierii, notăm $h = \frac{b-a}{2n}$ și $f_i = f(a+ih)$, $i \in \{0, 1, \dots, 2n\}$. Atunci

$$\begin{aligned} & \frac{4}{3}I_{2n}(f) - \frac{1}{3}I_n(f) = \\ &= \frac{4}{3} \cdot \frac{b-a}{2 \cdot 2n} [f_0 + 2 \sum_{i=1}^{2n-1} f_i + f_{2n}] - \frac{1}{3} \cdot \frac{b-a}{2n} [f_0 + 2 \sum_{i=1}^{n-1} f_{2i} + f_{2n}] = \\ &= \frac{b-a}{6n} [f_0 + 2 \sum_{i=1}^{n-1} f_{2i} + 4 \sum_{i=0}^{n-1} f_{2i+1} + f_{2n}] = J_n(f). \quad \blacksquare \end{aligned}$$

5.6 Integrale de tip Cauchy

Fie $f \in C[-1, 1]$ și $a \in [-1, 1]$. Integrala

$$\int_{-1}^1 \frac{f(x)}{x-a} dx$$

se numește integrală de tip *Cauchy*. Formula de integrare numerică se va obține înlocuind funcția f printr-un polinom de interpolare în nodurile x_0, x_1, \dots, x_n .

Cazul $a \notin \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$. În acest caz funcția f se înlocuiește cu

$$L(\mathbb{P}_n; a, x_0, \dots, x_n; f)(x) = \sum_{k=0}^n f(x_k) \frac{x-a}{x_k-a} l_k(x) + f(a) \frac{u(x)}{u(a)},$$

unde

$$l_k(x) = \frac{u_k(x)}{u_k(x_k)}, \quad u_k(x) = \frac{u(x)}{x-x_k}, \quad u(x) = \prod_{k=0}^n (x-x_k).$$

Astfel

$$\frac{f(x)}{x-a} \approx \sum_{k=0}^n \frac{f(x_k)}{x_k-a} l_k(x) + \frac{f(a)}{u(a)} \frac{u(x)}{x-a},$$

de unde

$$\int_{-1}^1 \frac{f(x)}{x-a} dx \approx \sum_{k=0}^n \frac{f(x_k)}{x_k-a} \int_{-1}^1 l_k(x) dx + \frac{f(a)}{u(a)} \int_{-1}^1 \frac{u(x)}{x-a} dx.$$

Dacă $q(x)$ este câtul împărțirii polinomului $u(x)$ prin $x - a$ atunci

$$\frac{u(x)}{x - a} = q(x) + \frac{u(a)}{x - a} \Rightarrow \int_{-1}^1 \frac{u(x)}{x - a} dx = \int_{-1}^1 q(x) dx + u(a) \ln \frac{1 - a}{1 + a}.$$

Observație 5.6.1

Integrala singulară este

$$\int_{-1}^1 \frac{dx}{x - a} = \lim_{\varepsilon \searrow 0} \left(\int_{-1}^{a-\varepsilon} \frac{dx}{x - a} + \int_{a+\varepsilon}^1 \frac{dx}{x - a} \right) = \ln \frac{1 - a}{1 + a}.$$

În final rezultă

$$\int_{-1}^1 \frac{f(x)}{x - a} dx \approx \sum_{k=0}^n \frac{f(x_k)}{x_k - a} \int_{-1}^1 l_k(x) dx + \int_{-1}^1 q(x) dx + u(a) \ln \frac{1 - a}{1 + a}.$$

unde integralele din membrul drept sunt aplicate unor polinoame.

Dacă nodurile sunt echidistante $x_k = -1 + \frac{2}{n}k$, $k \in \{0, 1, \dots, n\}$ atunci $\int_{-1}^1 l_k(x) dx = 2C_{n,k}$.

Cazul $a \in \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$. Presupunem că $a = x_i$. Funcția f se înlocuiește cu polinomul de interpolare Lagrange-Hermite corespunzătoare condițiilor de interpolare

$$\begin{aligned} H(x_j) &= f(x_j), & j \in \{0, 1, \dots, n\}, \\ H'(x_i) &= f'(x_i). \end{aligned}$$

Au loc relațiile

$$H(x) = \sum_{k=0}^n f(x_k) h_{k,0}(x) + f'(x_i) h_{i,1}(x),$$

iar

$$\begin{aligned} h_{k,0}(x) &= \frac{x - a}{x_k - a} l_k(x), & k \neq i \\ h_{i,0}(x) &= l_i(x) (1 - (x - a) l_i'(a)) \\ h_{i,1}(x) &= (x - a) l_i(x) \end{aligned}$$

unde

$$l_k(x) = \frac{w_k(x)}{w_k(x_k)}, \quad w_k(x) = \frac{w(x)}{x - x_k}, \quad w(x) = \prod_{k=0}^n (x - x_k).$$

Astfel

$$H(x) = \sum_{\substack{k=0 \\ k \neq i}}^n f(x_k) \frac{x-a}{x_k-a} l_k(x) + f(a) l_i(x) (1 - (x-a) l_i'(a)) + f'(a) (x-a) l_i(x).$$

Astfel

$$\int_{-1}^1 \frac{f(x)}{x-a} dx \approx \sum_{\substack{k=0 \\ k \neq i}}^n \frac{f(x_k)}{x_k-a} \int_{-1}^1 l_k(x) dx + f(a) \int_{-1}^1 \left(\frac{1}{x-a} - l_i'(a) \right) l_i(x) dx + f'(a) \int_{-1}^1 l_i(x) dx.$$

Integralele din membrul drept se calculează fără nici o eroare de metodă.

5.7 Polinoame ortogonale

Fie $I \subseteq \mathbb{R}$ un interval și $\rho : I \rightarrow (0, \infty)$ o funcție continuă. În mulțimea polinoamelor $\mathbb{P} \subset \mathbb{R}[X]$ introducem produsul scalar

$$\langle P, Q \rangle = \int_I \rho(x) P(x) Q(x) dx.$$

Un polinom $P \in \mathbb{P}_n$ este *monic* dacă coeficientul lui x^n este 1.

Polinomul $Q_n \in \mathbb{P}_n$ este al n -lea polinom ortogonal în intervalul I , cu ponderea ρ , dacă

$$\langle Q_n, P \rangle = 0, \quad \forall P \in \mathbb{P}_{n-1}.$$

Este folosită și terminologia: $Q_n(x)$ este ortogonal în intervalul I , cu ponderea ρ , pe mulțimea polinoamelor de grad cel mult $n-1$, \mathbb{P}_{n-1} .

Teorema 5.7.1 *Există un unic polinom monic P_n de grad n ortogonal în intervalul I , cu ponderea ρ , pe mulțimea polinoamelor \mathbb{P}_{n-1} .*

Demonstrație. Fie $P_0(x) = 1$. Presupunem că s-au construit cele n polinoame monice ortogonale în I cu ponderea ρ , $P_1(x), P_2(x), \dots, P_n(x)$. $P_{n+1}(x)$ se construiește utilizând algoritmul Gram-Schmidt, pornind de la funcția $p(x) = x^{n+1}$. Atunci

$$P_{n+1}(x) = p(x) - \sum_{k=0}^n \frac{\langle p, P_k \rangle}{\langle P_k, P_k \rangle} P_k(x)$$

este polinom monic de grad $n + 1$, ortogonal pe P_0, P_1, \dots, P_n . Intr-adevăr,

$$\langle P_{n+1}, P_j \rangle = \langle p, P_j \rangle - \sum_{k=0}^n \frac{\langle p, P_k \rangle}{\langle P_k, P_k \rangle} \langle P_k, P_j \rangle = \langle p, P_j \rangle - \langle p, P_j \rangle = 0,$$

unde $j \in \{0, 1, \dots, n\}$. Deci P_{n+1} este ortogonal în intervalul I , cu ponderea ρ , pe \mathbb{P}_n .

Pentru a justifica unicitatea lui P_{n+1} , presupunem că mai există un polinom monic \tilde{P}_{n+1} de grad $n + 1$ ortogonal în intervalul I , cu ponderea ρ pe mulțimea polinoamelor \mathbb{P}_n . Fie $p = P_{n+1} - \tilde{P}_{n+1} \in \mathbb{P}_n$. Pentru $k \in \{0, 1, \dots, n\}$ au loc egalitățile

$$\langle p, P_k \rangle = \langle P_{n+1}, P_k \rangle - \langle \tilde{P}_{n+1}, P_k \rangle = 0,$$

de unde $P_{n+1} = \tilde{P}_{n+1}$. ■

Fie $\delta_n^2 = \langle P_n, P_n \rangle$ și polinoamele ortogonale

$$\begin{aligned} P_n(x) &= x^n + \gamma_n x^{n-1} + \dots \\ Q_n(x) &= a_n x^n + b_n x^{n-1} + \dots \end{aligned} \quad (5.12)$$

Atunci au loc egalitățile

$$Q_n(x) = a_n P_n(x), \quad \gamma_n = \frac{b_n}{a_n}, \quad d_n^2 = \langle Q_n, Q_n \rangle = a_n^2 \delta_n^2. \quad (5.13)$$

Teorema 5.7.2 Dacă $P_{-1} = 0$ și $P_0, P_1, \dots, P_n, \dots$ sunt polinoame monice ortogonale în intervalul I , cu ponderea ρ , atunci are loc formula -celor trei termeni-

$$P_{n+1}(x) = (x - \alpha_n)P_n(x) - \beta_n P_{n-1}(x), \quad (5.14)$$

cu

$$\alpha_n = \frac{\langle P_n, xP_n \rangle}{\langle P_n, P_n \rangle} \quad \beta_n = \frac{\langle P_n, P_n \rangle}{\langle P_{n-1}, P_{n-1} \rangle} = \frac{\delta_n^2}{\delta_{n-1}^2}. \quad (5.15)$$

Demonstrație. Fie $n \in \mathbb{N}$ și polinomul

$$p(x) = P_{n+1}(x) - (x - \alpha_n)P_n(x) + \beta_n P_{n-1}(x),$$

unde α_n și β_n sunt dați de (5.15).

Deoarece P_n și P_{n+1} sunt polinoame monice, $p \in \mathbb{P}_n$.

Pentru $k \in \{0, 1, \dots, n-2\}$ avem

$$\langle p, P_k \rangle = \langle P_{n+1}, P_k \rangle - \langle P_n, (x - \alpha_n)P_k \rangle + \beta_n \langle P_{n-1}, P_k \rangle = 0.$$

Există polinomiul $q \in \mathbb{P}_{n-1}$ astfel încât $xP_{n-1} = P_n + q$. Atunci

$$\begin{aligned} \langle p, P_{n-1} \rangle &= \langle P_{n+1}, P_{n-1} \rangle - \langle P_n, (x - \alpha_n)P_{n-1} \rangle + \beta_n \langle P_{n-1}, P_{n-1} \rangle = \\ &= - \langle P_n, xP_{n-1} \rangle + \beta_n \langle P_{n-1}, P_{n-1} \rangle = \\ &= - \langle P_n, P_n \rangle - \langle P_n, q \rangle + \beta_n \langle P_{n-1}, P_{n-1} \rangle = 0, \end{aligned}$$

și

$$\begin{aligned} \langle p, P_n \rangle &= \langle P_{n+1}, P_n \rangle - \langle (x - \alpha_n)P_n, P_n \rangle + \beta_n \langle P_{n-1}, P_n \rangle = \\ &= - \langle xP_n, P_n \rangle + \alpha_n \langle P_n, P_n \rangle = 0. \end{aligned}$$

Cum $\langle p, P_k \rangle = 0$, $\forall k \in \{0, 1, \dots, n\}$ și $p \in \mathbb{P}_n$ rezultă $p = 0$. ■

În cazul unui șir oarecare de polinoame ortogonale (5.12), tinând seama de (5.13), relația (5.14) a Teoremei 5.7.2 devine

$$xQ_n = \frac{a_n}{a_{n+1}}Q_{n+1} + \alpha_n Q_n + \frac{a_{n-1}}{a_n} \frac{d_n^2}{d_{n-1}^2} Q_{n-1}, \quad \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

Utilizând reprezentările (5.12) ale polinoamelor Q_n , din identificarea coeficienților termenilor de grad n , în egalitatea anterioară, se obține $\alpha_n = \frac{b_n}{a_n} - \frac{b_{n+1}}{a_{n+1}}$. Astfel

$$xQ_n = \frac{a_n}{a_{n+1}}Q_{n+1} + \left(\frac{b_n}{a_n} - \frac{b_{n+1}}{a_{n+1}}\right)Q_n + \frac{a_{n-1}}{a_n} \frac{d_n^2}{d_{n-1}^2} Q_{n-1}, \quad \forall n \in \mathbb{N}^*. \quad (5.16)$$

Referitor la rădăcinile unui polinom ortogonal pe \mathbb{P}_{n-1} are loc rezultatul:

Teorema 5.7.3 *Dacă polinomul $u \in \mathbb{P}_n$ este ortogonal, cu ponderea $\rho(x)$, în I , pe \mathbb{P}_{n-1} atunci rădăcinile lui $u(x)$ sunt simple și aparțin intervalului I .*

Demonstrație. Să presupunem că $u(x)$ are $m \leq n$ rădăcini reale și cu ordinul de multiplicitate impar în I , notate x_1, \dots, x_m . Fie

$$q(x) = \begin{cases} 1 & \text{dacă } m = 0 \\ \prod_{i=1}^m (x - x_i) & \text{dacă } m > 0 \end{cases}$$

Atunci $u(x)q(x)$ nu schimbă semnul în I , astfel

$$\int_I \rho(x)u(x)q(x)dx \neq 0.$$

Dacă $m < n$ atunci relația de mai sus este contradictorie; prin urmare $m = n$. ■

Determinarea rădăcinilor unui polinom ortogonal.

Fie matricea

$$T_n = \begin{pmatrix} \alpha_0 & \sqrt{\beta_1} & & & & \\ \sqrt{\beta_1} & \alpha_1 & \sqrt{\beta_2} & & & \\ & & \ddots & & & \\ & & & \alpha_{n-2} & \sqrt{\beta_{n-1}} & \\ & & & \sqrt{\beta_{n-1}} & \alpha_{n-1} & \end{pmatrix}$$

Notăm prin $\varphi_n(x)$ polinomul caracteristic al matricei T_n , adică $\varphi_n(x) = |xI_n - T_n|$.

Teorema 5.7.4 Utilizând notațiile teoremei 5.7.3, pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$, $P_n(x) = \varphi_n(x)$.

Demonstrație. Inducție după n . Dacă $P_1(x) = x - a_1$ atunci condiția de ortogonalitate $\langle P_1, P_0 \rangle = 0$ implică

$$\langle P_1, P_0 \rangle = \langle x, P_0 \rangle - a_1 \langle 1, P_0 \rangle = \langle xP_0, P_0 \rangle - a_1 \langle P_0, P_0 \rangle = 0,$$

de unde

$$a_1 = \frac{\langle xP_0, P_0 \rangle}{\langle P_0, P_0 \rangle} = \alpha_0.$$

Presupunând că $P_k(x) = \varphi_k(x)$, $k \in \{1, 2, \dots, n-1\}$ se dezvoltă determinantul $\varphi_n(x)$ după ultima coloană și se obține

$$\varphi_n(x) = (x - \alpha_{n-1})\varphi_{n-1}(x) - \beta_{n-1}\varphi_{n-2}(x) = (x - \alpha_{n-1})P_{n-1}(x) - \beta_{n-1}P_{n-2}(x).$$

Ținând seama de teorema 5.7.3, rezultă că $\varphi_n(x) = P_n(x)$. ■

În concluzie, rădăcinile polinomului $P_n(x)$ sunt valorile proprii ale matricei T_n .

Într-o altă abordare, avem nevoie de

Teorema 5.7.5 (Formula Darboux-Christoffel) Are loc relația

$$\sum_{k=0}^n \frac{Q_k(x)Q_k(y)}{d_k^2} = \frac{a_n}{a_{n+1}} \frac{1}{d_n^2} \frac{Q_{n+1}(x)Q_n(y) - Q_n(x)Q_{n+1}(y)}{x-y}. \quad (5.17)$$

Demonstrație. Potrivit formulei (5.16), pentru orice $k \in \{1, 2, \dots, n\}$ au loc egalitățile

$$\begin{aligned} xQ_k(x) &= \frac{a_k}{a_{k+1}}Q_{k+1}(x) + \left(\frac{b_k}{a_k} - \frac{b_{k+1}}{a_{k+1}}\right)Q_k(x) + \frac{a_{k-1}}{a_k} \frac{d_k^2}{d_{k-1}^2}Q_{k-1}(x), \\ xQ_k(y) &= \frac{a_k}{a_{k+1}}Q_{k+1}(y) + \left(\frac{b_k}{a_k} - \frac{b_{k+1}}{a_{k+1}}\right)Q_k(y) + \frac{a_{k-1}}{a_k} \frac{d_k^2}{d_{k-1}^2}Q_{k-1}(y). \end{aligned}$$

Scăzând relațiile de mai sus, înmulțite în prealabil cu $Q_k(y)$ și respectiv $Q_k(x)$, se obține

$$(x-y)Q_k(x)Q_k(y) = \frac{a_k}{a_{k+1}}[Q_{k+1}(x)Q_k(y) - Q_k(x)Q_{k+1}(y)] + \\ + \frac{a_{k-1}}{a_k} \frac{d_k^2}{d_{k-1}^2} [Q_{k-1}(x)Q_k(y) - Q_k(x)Q_{k-1}(y)]$$

sau

$$(x-y) \frac{Q_k(x)Q_k(y)}{d_k^2} = \frac{a_k}{a_{k+1}} \frac{1}{d_k^2} [Q_{k+1}(x)Q_k(y) - Q_k(x)Q_{k+1}(y)] - \\ - \frac{a_{k-1}}{a_k} \frac{1}{d_{k-1}^2} [Q_k(x)Q_{k-1}(y) - Q_{k-1}(x)Q_k(y)].$$

Adunând, rezultă

$$(x-y) \sum_{k=1}^n \frac{Q_k(x)Q_k(y)}{d_k^2} = \frac{a_n}{a_{n+1}} \frac{1}{d_n^2} [Q_{n+1}(x)Q_n(y) - Q_n(x)Q_{n+1}(y)] - \\ - \frac{a_0}{a_1} \frac{1}{d_0^2} [Q_1(x)Q_0(y) - Q_0(x)Q_1(y)].$$

Dar

$$\frac{a_0}{a_1} \frac{1}{d_0^2} [Q_1(x)Q_0(y) - Q_0(x)Q_1(y)] = \frac{a_0}{a_1} \frac{1}{d_0^2} [(a_1x + b_1)a_0 - a_0((a_1y + b_1))] = \\ = \frac{a_0^2}{d_0^2} (x-y) = (x-y) \frac{Q_0(x)Q_0(y)}{d_0^2}.$$

Trecând acest termen în membrul stâng, se obține relația din enunțul teoremei.

■

Formula lui Darboux-Christoffel are următoarea consecință importantă:

Teorema 5.7.6 Rădăcinile polinoamului Q_n separă rădăcinile polinomului Q_{n+1} .

Demonstrație. Din (5.17), pentru $y \rightarrow x$ și utilizând regula lui l'Hospital se obține

$$\sum_{k=0}^n \frac{Q_k(x)^2}{d_k^2} = \frac{a_n}{a_{n+1}} \frac{1}{d_n^2} [Q'_{n+1}(x)Q_n(x) - Q'_n(x)Q_{n+1}(x)]. \quad (5.18)$$

Fie $x_1 < x_2 < \dots < x_{n+1}$ rădăcinile polinomului Q_{n+1} . Pentru $x = x_i$ din (5.18) rezultă

$$\sum_{k=0}^n \frac{Q_k(x_i)^2}{d_k^2} = \frac{a_n}{a_{n+1}} \frac{1}{d_n^2} Q'_{n+1}(x_i)Q_n(x_i) > 0, \quad \forall i \in \{1, \dots, n+1\},$$

adică semnul expresiei $Q'_{n+1}(x_i)Q_n(x_i)$ nu depinde de i .

Deoarece rădăcinile polinomului Q_{n+1} sunt simple, $Q'_{n+1}(x_i)$ și $Q'_{n+1}(x_{i+1})$ au semne contrare. Prin urmare $Q_n(x_i)$ și $Q_n(x_{i+1})$ au semne contrare. Astfel, Q_n are cel puțin o rădăcină în intervalul (x_i, x_{i+1}) . Cum numărul intervalelor (x_i, x_{i+1}) , $i \in \{1, \dots, n\}$ este n , fiecare asemenea interval conține exact o rădăcină a lui Q_n . ■

Practic, cunoscând rădăcinile polinomului ortogonal Q_n , rădăcinile lui Q_{n+1} se pot calcula utilizând metoda empirică a înjumătățirii.

5.8 Polinoame Legendre

Polinoamele lui Legendre sunt polinoame ortogonale cu ponderea $\rho(x) = 1$ în intervalul $I = [a, b]$, $a, b \in \mathbb{R}$.

Teorema 5.8.1 *Polinoamul*

$$u(x) = \frac{n!}{(2n)!} [(x-a)^n(x-b)^n]^{(n)}$$

este ortogonal, cu ponderea $\rho(x) = 1$, în intervalul $[a, b]$, pe \mathbb{P}_{n-1} .

Demonstrație. Fie $u(x) \in P_n$ polinomul ortogonal, cu ponderea $\rho(x) = 1$, în intervalul $[a, b]$, pe \mathbb{P}_{n-1} și $L(x)$ soluția problemei Cauchy

$$\begin{aligned} L^{(n)}(x) &= u(x), \\ L(a) &= 0, \\ L'(a) &= 0, \\ &\dots\dots\dots \\ L^{(n-1)} &= 0. \end{aligned}$$

Observăm că $L \in \mathbb{P}_{2n}$. Dacă $q \in \mathbb{P}_{n-1}$ atunci în urma a $n-1$ integrări prin părți găsim

$$0 = \int_a^b q(x)u(x)dx = \int_a^b q(x)L^{(n)}(x)dx =$$

$$\begin{aligned}
&= qL^{(n-1)}|_a^b - q'L^{(n-2)}|_a^b + \dots + (-1)^{n-1}q^{(n-1)}L|_a^b + (-1)^n \int_a^b q^{(n)}(x)L(x)dx = \\
&= q(b)L^{(n-1)}(b) - q'(b)L^{(n-2)}(b) + \dots + (-1)^{n-1}q^{(n-1)}(b)L(b).
\end{aligned}$$

În particular, pentru $q = 1, x, x^2, \dots, x^{n-1}$, din egalitatea de mai sus, obținem succesiv

$$L^{(n-1)}(b) = L^{(n-2)}(b) = \dots = L(b) = 0.$$

Astfel a și b sunt rădăcini multiple, de ordin n pentru $L(x)$ și deoarece L este polinom de grad cel mult $2n$ deducem $L(x) = c(x-a)^n(x-b)^n$ și în consecință $u(x) = c[(x-a)^n(x-b)^n]^{(n)}$.

Dacă $c = \frac{n!}{(2n)!}$ atunci coeficientul lui x^n este 1. ■

Se notează

$$L_n(x) = \frac{n!}{(2n)!} [(x-a)^n(x-b)^n]^{(n)}$$

În cazul intervalului $[-1, 1]$ au loc proprietățile:

Funcția generatoare a polinoamelor Legendre este

$$\Psi(x, z) = \frac{1}{\sqrt{1-2xz+z^2}} = \sum_{n=0}^{\infty} L_n(x)z^n. \quad (5.19)$$

Formula de recurență. Derivând (5.19) după z se găsește

$$\frac{x-z}{1-2xz+z^2} \frac{1}{\sqrt{1-2xz+z^2}} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)L_{n+1}(x)z^n,$$

de unde

$$(x-z) \sum_{n=0}^{\infty} L_n(x)z^n = (1-2xz+z^2) \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)L_{n+1}(x)z^n.$$

Din identificarea coeficienților lui z^n rezultă formula de recurență

$$(n+1)L_{n+1}(x) - x(2n+1)L_n(x) + nL_{n-1}(x) = 0, \quad \forall n \in \mathbb{N}^*. \quad (5.20)$$

Derivând (5.19) după x se obține

$$\frac{z}{1-2xz+z^2} \frac{1}{\sqrt{1-2xz+z^2}} = \sum_{n=0}^{\infty} L'_n(x)z^n$$

sau

$$z \sum_{n=0}^{\infty} L_n(x) z^n = (1 - 2xz + z^2) \sum_{n=0}^{\infty} L'_n(x) z^n.$$

Identificând din nou coeficienții lui z^n rezultă

$$L_{n-1}(x) = L'_n(x) - 2xL'_{n-1}(x) + L'_{n-2}(x). \quad (5.21)$$

Ecuția diferențială a polinoamelor Legendre. Din (5.19) și (5.21) se deduc relațiile

$$L_{n-1}(x) = \frac{1}{n} [(2n+1)xL_n(x) - (n+1)L_{n+1}(x)] \quad (5.22)$$

$$L_n(x) = L'_{n+1}(x) - 2xL'_n(x) + L'_{n-1}(x). \quad (5.23)$$

Substituind (5.22) în (5.23) rezultă

$$L'_{n+1}(x) = xL'_n(x) + (n+1)L_n(x), \quad (5.24)$$

care introdus în (5.23) dă

$$L'_{n-1}(x) = xL'_n(x) - nL_n(x). \quad (5.25)$$

Pentru $n := n+1$, relația (5.25) devine

$$L'_n(x) = xL'_{n+1}(x) - (n+1)L_{n+1}(x).$$

Derivând această relație și substituind apoi L'_{n+1}, L''_{n+1} dat de (5.24) rezultă ecuația diferențială

$$\frac{d}{dx} [(1-x^2)L'_n(x)] + n(n+1)L_n(x) = 0, \quad \forall n \in \mathbb{N}^*. \quad (5.26)$$

Teorema 5.8.2 *Au loc relațiile de ortogonalitate*

$$\int_{-1}^1 L_n(x)L_k(x)dx = \frac{2}{2n+1}\delta_{n,k}$$

Demonstrație. Fie $n \neq k$. Scăzând egalitățile

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} [(1-x^2)L'_n(x)] + n(n+1)L_n(x) &= 0, \\ \frac{d}{dx} [(1-x^2)L'_k(x)] + k(k+1)L_k(x) &= 0 \end{aligned}$$

înmulțite în prealabil cu $L_k(x)$ și respectiv $L_n(x)$, se obține

$$\frac{d}{dx} [(1-x^2)(L'_n(x)L_k(x) - L'_k(x)L_n(x))] + [n(n+1) - k(k+1)]L_n(x)L_k(x) = 0.$$

Prin integrare rezultă

$$(1-x^2)[L'_n(x)L_k(x) - L'_k(x)L_n(x)] \Big|_{-1}^1 + [n(n+1) - k(k+1)] \int_{-1}^1 L_n(x)L_k(x) dx = 0,$$

de unde $\int_{-1}^1 L_n(x)L_k(x) dx = 0$.

Integrând relațiile

$$\begin{aligned} (n+1)L_{n+1}(x) - x(2n+1)L_n(x) + nL_{n-1}(x) &= 0 \\ nL_n(x) - x(2n-1)L_n(x) + (n-1)L_{n-2}(x) &= 0 \end{aligned}$$

înmulțite în prealabil cu $L_{n-1}(x)$ și respectiv cu $L_n(x)$ se obțin egalitățile

$$\begin{aligned} -(2n+1) \int_{-1}^1 xL_n(x)L_{n-1}(x) dx + n \int_{-1}^1 L_{n-1}^2(x) dx &= 0 \\ n \int_{-1}^1 L_n^2(x) dx - (2n-1) \int_{-1}^1 L_n(x)L_{n-1}(x) dx &= 0, \end{aligned}$$

de unde

$$\int_{-1}^1 L_n^2(x) dx = \frac{2n-1}{2n+1} \int_{-1}^1 L_{n-1}^2(x) dx.$$

Recursiv, rezultă

$$\int_{-1}^1 L_n^2(x) dx = \frac{2}{2n+1}.$$

5.9 Polinoame Hermite

Polinoamele lui Hermite sunt polinoame ortogonale cu ponderea $\rho(x) = e^{-x^2}$ în $I = \mathbb{R}$.

Funcția generatoare a polinoamelor Hermite este

$$\Psi(x, z) = e^{2xz - z^2} = \sum_{n=0}^{\infty} H_n(x) \frac{z^n}{n!}, \quad (5.27)$$

adică $H_n(x) = \frac{\partial^n \Psi}{\partial z^n}(x, 0)$.

Scriind $\Psi(x, z) = e^{x^2} e^{-(x-z)^2}$ și $u = x - z$, din $\frac{\partial^n \Psi}{\partial z^n}(x, z) = e^{x^2} \frac{d^n e^{-u^2}}{du^n} (-1)^n$ rezultă

$$H_n(x) = \frac{\partial^n \Psi}{\partial z^n}(x, 0) = e^{x^2} (-1)^n \frac{d^n e^{-x^2}}{dx^n}.$$

În particular, $H_0(x) = 1$, $H_1(x) = 2x$.

Formula de recurență. Derivând (5.27) după z se găsește

$$2e^{2xz-z^2}(x-z) = \sum_{n=1}^{\infty} H_n(x) \frac{z^{n-1}}{(n-1)!},$$

de unde

$$2(x-z) \sum_{n=0}^{\infty} H_n(x) \frac{z^n}{n!} = \sum_{n=1}^{\infty} H_n(x) \frac{z^{n-1}}{(n-1)!}.$$

Ordonând după puterile lui z , avem

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} (H_{n+1}(x) - 2xH_n(x) + 2nH_{n-1}(x)) = 0,$$

adică au loc formulele de recurență

$$H_{n+1}(x) - 2xH_n(x) + 2nH_{n-1}(x) = 0, \quad \forall n \in \mathbb{N}^*. \quad (5.28)$$

Ecuția diferențială a polinoamelor Hermite. Derivând (5.27) după x se obține

$$2ze^{2xz-z^2} = \sum_{n=0}^{\infty} H'_n(x) \frac{z^n}{n!}$$

sau

$$2z \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} H'_n(x) \frac{z^n}{n!}.$$

În mod analog, ordonând după puterile lui z , se obține

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} (H'_n(x) - 2nH_{n-1}(x)) = 0.$$

Deci

$$H'_n(x) = 2nH_{n-1}(x), \quad \forall n \in \mathbb{N}^*. \quad (5.29)$$

Utilizând (5.29), rezultă că coeficientul lui x^n în $H_n(x)$ este 2^n .

Substituind (5.29) în (5.28), acesta devine

$$H_{n+1}(x) - 2xH_n(x) + H'_n(x) = 0,$$

care derivată dă

$$H'_{n+1}(x) - 2H_n(x) - 2xH'_n(x) + H''_n(x) = 0,$$

sau

$$H''_n(x) - 2xH'_n(x) + 2nH_n(x) = 0, \quad \forall n \in \mathbb{N}^*. \quad (5.30)$$

Teorema 5.9.1 *Au loc relațiile de ortogonalitate*

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} H_n(x) H_k(x) dx = 2^n n! \sqrt{\pi} \delta_{n,k}$$

Demonstrație. Fie $n \neq k$. Scăzând egalitățile

$$\begin{aligned} H_n''(x) - 2nH_n'(x) + 2nH_n(x) &= 0, \\ H_k''(x) - 2kH_k'(x) + 2kH_k(x) &= 0 \end{aligned}$$

înmulțite în prealabil cu $H_k(x)$ și respectiv $H_n(x)$, se obține

$$\begin{aligned} \left[K_n''(x) H_k(x) - H_k''(x) H_n(x) \right] - 2x \left[K_n'(x) H_k(x) - H_k'(x) H_n(x) \right] + \\ + 2(n-k) H_n(x) H_k(x) = 0 \end{aligned}$$

sau

$$\frac{d}{dx} \left[(K_n'(x) H_k(x) - H_k'(x) H_n(x)) e^{-x^2} \right] + 2(n-k) e^{-x^2} H_n(x) H_k(x) = 0$$

Prin integrare rezultă

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} H_n(x) H_k(x) dx = 0.$$

Integrând relațiile

$$\begin{aligned} H_{n+1}(x) - 2xH_n(x) + 2nH_{n-1}(x) &= 0 \\ H_n(x) - 2xH_{n-1}(x) + 2(n-1)H_{n-2}(x) &= 0 \end{aligned}$$

înmulțite în prealabil cu $e^{-x^2} H_{n-1}(x)$ și respectiv cu $e^{-x^2} H_n(x)$ se obțin egalitățile

$$\begin{aligned} -2 \int_{-\infty}^{\infty} x e^{-x^2} H_n(x) H_{n-1}(x) dx + 2n \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} H_{n-1}^2(x) dx &= 0 \\ \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} H_n^2(x) dx - 2 \int_{-\infty}^{\infty} x e^{-x^2} H_n(x) H_{n-1}(x) dx &= 0, \end{aligned}$$

de unde

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} H_n^2(x) dx = 2n \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} H_{n-1}^2(x) dx.$$

Recursiv, rezultă

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} H_n^2(x) dx = 2^n n! \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx = 2^n n! \sqrt{\pi}. \quad \blacksquare$$

5.10 Polinoamele lui Laguerre

Polinoamele lui Laguerre $L_n^{<\alpha>}(x)$, ($\alpha > -1$), sunt polinoame ortogonale cu ponderea $\rho(x) = x^\alpha e^{-x}$ în intervalul $I = (0, \infty)$.

Funcția generatoare a polinoamelor Laguerre este

$$\Psi(x, z) = \frac{1}{(1-z)^{\alpha+1}} e^{-\frac{xz}{1-z}} = \sum_{n=0}^{\infty} L_n^{<\alpha>}(x) \frac{z^n}{n!}. \quad (5.31)$$

Dezvoltând funcția exponențială

$$e^{-\frac{xz}{1-z}} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!} \frac{x^k z^k}{(1-z)^k}$$

și utilizând dezvoltarea binomială

$$(1-z)^{-k-\alpha-1} = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(k+\alpha+1)(k+\alpha+2)\dots(k+\alpha+j)}{j!} z^j, \quad |z| < 1,$$

din (5.31) rezultă dezvoltarea

$$\Psi(x, z) = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} (-1)^k \frac{(k+\alpha+1)(k+\alpha+2)\dots(k+\alpha+j)}{k!j!} x^k z^{k+j}.$$

Prin schimbarea de indice $j+k=n$, egalitatea anterioară devine

$$\Psi(x, z) = \sum_{n=0}^{\infty} z^n \sum_{k=0}^n (-1)^k \frac{(\alpha+k+1)(\alpha+k+2)\dots(\alpha+n)}{k!(n-k)!} x^k.$$

Prin urmare

$$\begin{aligned} L_n^{<\alpha>}(x) &= n! \sum_{k=0}^n (-1)^k \frac{(\alpha+k+1)(\alpha+k+2)\dots(\alpha+n)}{k!(n-k)!} x^k = \\ &= x^{-\alpha} e^x \frac{d^n}{dx^n} (x^{n+\alpha} e^{-x}). \end{aligned} \quad (5.32)$$

Formula de recurență. Derivând (5.31) după z rezultă

$$\frac{1}{(1-z)^{\alpha+1}} e^{-\frac{xz}{1-z}} \left[\frac{\alpha+1}{1-z} - \frac{x}{(1-z)^2} \right] = \sum_{n=1}^{\infty} L_n^{<\alpha>}(x) \frac{z^{n-1}}{(n-1)!} = \sum_{n=0}^{\infty} L_{n+1}^{<\alpha>}(x) \frac{z^n}{n!},$$

sau

$$\sum_{n=0}^{\infty} L_n^{<\alpha>}(x) \frac{z^n}{n!} [(1+\alpha)(1-z) - x] = (1-2z+z^2) \sum_{n=0}^{\infty} L_{n+1}^{<\alpha>}(x) \frac{z^n}{n!}.$$

Din identificarea coeficienților puterilor lui z^n se obține formula de recurență

$$L_{n+1}^{<\alpha>}(x) - (2n+1+\alpha-x)L_n^{<\alpha>}(x) + n(n+\alpha)L_{n-1}^{<\alpha>}(x) = 0. \quad (5.33)$$

Ecuția diferențială a polinoamelor lui Laguerre. Derivând (5.31) după x se obține

$$-\frac{z}{1-z} \frac{1}{(1-z)^{\alpha+1}} e^{-\frac{xz}{1-z}} = \sum_{n=0}^{\infty} L_n^{<\alpha>'}(x) \frac{z^n}{n!}$$

sau

$$-\frac{1}{1-z} \sum_{n=0}^{\infty} L_n^{<\alpha>}(x) \frac{z^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} L_n^{<\alpha>'}(x) \frac{z^n}{n!}$$

Egalând coeficienții lui z^n rezultă egalitatea

$$L_n^{<\alpha>'}(x) + n L_{n-1}^{<\alpha>}(x) - n L_{n-1}^{<\alpha>'}(x) = 0. \quad (5.34)$$

Ecuția diferențială a polinoamelor Laguerre se obține eliminând $L_{n-1}^{<\alpha>}$ și $L_{n+1}^{<\alpha>}$ între (5.33) și (5.34).

În acest scop, explicităm $L_{n-1}^{<\alpha>}$ din (5.33)

$$L_{n-1}^{<\alpha>} = \frac{1}{n(n+\alpha)} [(2n+1+\alpha-x)L_n^{<\alpha>} - L_{n+1}^{<\alpha>}],$$

care substituit în (5.34) conduce la

$$L_{n+1}^{<\alpha>'} - L_{n+1}^{<\alpha>} + (2n+2+\alpha-x)L_n^{<\alpha>} - (n+1-x)L_n^{<\alpha>'} = 0.$$

Prin derivare, rezultă

$$L_{n+1}^{<\alpha>''} - L_{n+1}^{<\alpha>'} + (2n+3+\alpha-x)L_n^{<\alpha>'} - L_n^{<\alpha>} - (n+1-x)L_n^{<\alpha>''} = 0. \quad (5.35)$$

Pentru $n := n+1$, din (5.34) se găsește

$$L_{n+1}^{<\alpha>'} = (n+1) L_n^{<\alpha>'} - (n+1) L_n^{<\alpha>},$$

care substituit în (5.35) dă

$$xL_n^{<\alpha>''} + (1+\alpha-x)L_n^{<\alpha>'} + nL_n^{<\alpha>} = 0,$$

adică $L_n^{<\alpha>}$ este o soluție a ecuației diferențiale

$$xy'' + (1+\alpha-x)y' + ny = 0. \quad (5.36)$$

Teorema 5.10.1 *Au loc relațiile de ortogonalitate*

$$\int_0^{\infty} x^{\alpha} e^{-x} L_n^{<\alpha>}(x) L_k^{<\alpha>} dx = n! \Gamma(n + \alpha + 1) \delta_{n,k}$$

Demonstrație. Fie $n \neq k$. Scăzând egalitățile

$$\begin{aligned} x L_n^{<\alpha> \prime} + (1 + \alpha - x) L_n^{<\alpha>} + n L_n^{<\alpha>} &= 0, \\ x L_k^{<\alpha> \prime} + (1 + \alpha - x) L_k^{<\alpha>} + k L_k^{<\alpha>} &= 0, \end{aligned}$$

înmulțite în prealabil cu $x^{\alpha} e^{-x} L_k^{<\alpha>}$ și respectiv $x^{\alpha} e^{-x} L_n^{<\alpha>}$, se obține

$$\begin{aligned} x^{\alpha+1} e^{-x} (L_n^{<\alpha> \prime} L_k^{<\alpha>} - L_k^{<\alpha> \prime} L_n^{<\alpha>}) + x^{\alpha} e^{-x} (1 + \alpha - x) (L_n^{<\alpha> \prime} L_k^{<\alpha>} - L_k^{<\alpha> \prime} L_n^{<\alpha>}) + \\ + x^{\alpha} e^{-x} (n - k) L_n^{<\alpha>} L_k^{<\alpha>} = 0 \end{aligned}$$

sau

$$\frac{d}{dx} \left[x^{\alpha+1} e^{-x} (L_n^{<\alpha> \prime} L_k^{<\alpha>} - L_k^{<\alpha> \prime} L_n^{<\alpha>}) \right] + 2(n - k) x^{\alpha} e^{-x} L_n^{<\alpha>} L_k^{<\alpha>} = 0.$$

Prin integrare rezultă

$$\int_0^{\infty} x^{\alpha} e^{-x} L_n^{<\alpha>}(x) L_k^{<\alpha>}(x) dx = 0.$$

Integrând relațiile

$$\begin{aligned} L_{n+1}^{<\alpha>} - (2n + 1 + \alpha - x) L_n^{<\alpha>} + n(n + \alpha) L_{n-1}^{<\alpha>} &= 0 \\ L_n^{<\alpha>} - (2n - 1 + \alpha - x) L_{n-1}^{<\alpha>} + (n - 1)(n + \alpha - 1) L_{n-2}^{<\alpha>} &= 0 \end{aligned}$$

înmulțite în prealabil cu $x^{\alpha} e^{-x} L_{n-1}^{<\alpha>}$ și respectiv cu $x^{\alpha} e^{-x} L_n^{<\alpha>}$ se obțin egalitățile

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} x^{\alpha+1} e^{-x} L_n^{<\alpha>}(x) L_{n-1}^{<\alpha>}(x) dx + n(n + \alpha) \int_0^{\infty} x^{\alpha} e^{-x} [L_{n-1}^{<\alpha>}(x)]^2 dx &= 0 \\ \int_0^{\infty} x^{\alpha} e^{-x} [L_n^{<\alpha>}(x)]^2 dx + \int_0^{\infty} x^{\alpha+1} e^{-x} L_n^{<\alpha>}(x) L_{n-1}^{<\alpha>}(x) dx &= 0, \end{aligned}$$

de unde

$$\int_0^{\infty} x^{\alpha} e^{-x} [L_n^{<\alpha>}(x)]^2 dx = n(n + \alpha) \int_0^{\infty} x^{\alpha} e^{-x} [L_{n-1}^{<\alpha>}(x)]^2 dx.$$

Recursiv, rezultă

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} x^{\alpha} e^{-x} [L_n^{<\alpha>}(x)]^2 dx &= n!(\alpha + n)(\alpha + n - 1) \dots (\alpha + 1) \int_0^{\infty} x^{\alpha} e^{-x} dx = \\ &= n!(\alpha + n)(\alpha + n - 1) \dots (\alpha + 1) \Gamma(\alpha + 1) = n! \Gamma(\alpha + n + 1). \quad \blacksquare \end{aligned}$$

5.11 Polinoame Cebîșev

Polinoamele lui Cebîșev sunt polinoame ortogonale cu ponderea $\rho(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ în intervalul $I = [-1, 1]$.

Polinomul lui Cebîșev de gradul n , restricționat la intervalul $[-1, 1]$, este definit prin

$$T_n(x) = \cos n \arccos x.$$

Teorema 5.11.1 *Au loc afirmațiile*

(i) *Polinoamele lui Cebîșev satisfac formulele de recurență:*

$$\begin{aligned} T_{n+1}(x) &= 2xT_n(x) - T_{n-1}(x); \\ T_0(x) &= 1; \\ T_1(x) &= x. \end{aligned}$$

(ii) *Coefficientul lui x^n a lui $T_n(x)$ este 2^{n-1} și coefficientul lui x^{n-1} este 0.*

Teorema 5.11.2 *Au loc relațiile de ortogonalitate*

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 \frac{T_n(x)T_k(x)}{\sqrt{1-x^2}} dx &= 0, \quad \forall n \neq k, \quad n, k \in \mathbb{N}, \\ \int_{-1}^1 \frac{T_n^2(x)}{\sqrt{1-x^2}} dx &= \begin{cases} \frac{\pi}{2} & n \geq 1 \\ \pi & n = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

5.12 Formule de integrare numerică de tip Gauss

Fie $-\infty < a < b < \infty$. În cele ce urmează vom considera formule de integrare numerică de forma

$$\int_a^b \rho(x)f(x)dx = \sum_{i=1}^n A_i f(x_i) + R(f), \quad (5.37)$$

unde $\rho : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ este o funcție continuă, pozitivă numită pondere.

Formula de integrare numerică (5.37) are *gradul de exactitate* m dacă

$$R(1) = R(x) = R(x^2) = \dots = R(x^m) = 0 \quad R(x^{m+1}) \neq 0.$$

În consecință, pentru orice polinom $f \in \mathbb{P}_m$

$$\int_a^b \rho(x)f(x)dx = \sum_{i=1}^n A_i f(x_i).$$

Teorema 5.12.1 *Gradul de exactitate al formulei de integrare numerică (5.37) este cel mult $2n - 1$.*

Demonstrație. Utilizând formula de integrare numerică pentru funcția polinomială $f_0(x) = \prod_{i=1}^n (x - x_i)^2 \in \mathbb{P}_{2n}$ găsim

$$0 < \int_a^b \rho(x) f_0(x) dx = R(f_0). \quad \blacksquare$$

Formulele de integrare numerică de tip Gauss sunt formulele de forma (5.37) pentru care se atinge gradul maxim de exactitate.

Teorema 5.12.2 *Dacă $u \in \mathbb{P}_n$ este polinomul ortogonal, cu ponderea $\rho(x)$, în $[a, b]$, pe \mathbb{P}_{n-1} cu rădăcinile x_1, \dots, x_n , atunci formula de integrare numerică*

$$\int_a^b \rho(x) f(x) dx = \int_a^b \rho(x) L(\mathbb{P}_{n-1}; x_1, \dots, x_n; f) dx + R(f)$$

are gradul de exactitate $2n - 1$.

Demonstrație. Dacă $f \in \mathbb{P}_{n-1}$ atunci $f = L(\mathbb{P}_{n-1}; x_1, \dots, x_n; f)$, de unde

$$\int_a^b \rho(x) f(x) dx = \int_a^b \rho(x) L(\mathbb{P}_{n-1}; x_1, \dots, x_n; f) dx.$$

Fie $f \in \mathbb{P}_{2n-1}$. Dacă q, r sunt respectiv câtul și restul împărțirii lui f la u atunci $f = qu + r$ și $q, r \in \mathbb{P}_{n-1}$. Au loc egalitățile

$$\begin{aligned} L(\mathbb{P}_{n-1}; x_1, \dots, x_n; f)(x) &= L(\mathbb{P}_{n-1}; x_1, \dots, x_n; qu + r)(x) = \\ &= \sum_{i=1}^n [q(x_i)u(x_i) + r(x_i)]l_i(x) = \sum_{i=1}^n r(x_i)l_i(x) = L(\mathbb{P}_{n-1}; x_1, \dots, x_n; r)(x) \end{aligned}$$

și în consecință

$$\int_a^b \rho(x) L(\mathbb{P}_{n-1}; x_1, \dots, x_n; f)(x) dx = \int_a^b \rho(x) L(\mathbb{P}_{n-1}; x_1, \dots, x_n; r)(x) dx = \int_a^b \rho(x) r(x) dx.$$

Deoarece u ortogonal, cu ponderea $\rho(x)$, în $[a, b]$, pe \mathbb{P}_{n-1} , urmează că

$$\int_a^b \rho(x) f(x) dx = \int_a^b \rho(x) [q(x)u(x) + r(x)] dx =$$

$$\begin{aligned}
&= \int_a^b \rho(x)q(x)u(x)dx + \int_a^b \rho(x)r(x)dx = \\
&= \int_a^b \rho(x)L(\mathbb{P}_{n-1}; x_1, \dots, x_n; r)(x)dx = \int_a^b \rho(x)L(\mathbb{P}_{n-1}; x_1, \dots, x_n; f)(x)dx. \quad \blacksquare
\end{aligned}$$

Dacă ținem seama de expresia polinomului de interpolare Lagrange atunci formula de integrare numerică de tip Gauss devine

$$\int_a^b \rho(x)f(x)dx = \sum_{i=1}^n f(x_i) \int_a^b \rho(x)l_i(x)dx + R(f).$$

Astfel coeficienții formulei de integrare numerică sunt

$$A_i = \int_a^b \rho(x)l_i(x)dx, \quad i \in \{1, 2, \dots, n\}. \quad (5.38)$$

Această expresie a coeficienților este utilă în cazurile în care integrala se calculează analitic. Deoarece $l_i = \frac{u(x)}{(x-x_i)u'(x_i)} \in \mathbb{P}_{n-1} \Rightarrow l_i^2 \in \mathbb{P}_{2n-2}$, pentru coeficientul A_i găsim și exprimarea

$$0 < \int_a^b \rho(x)l_i(x)^2 dx = \sum_{j=1}^n A_j l_i^2(x_j) = A_i. \quad (5.39)$$

Teorema 5.12.3 Dacă $f \in C^{2n}[a, b]$ atunci există $\xi \in [a, b]$ astfel încât

$$\begin{aligned}
R(f) &= \int_a^b \rho(x)f(x)dx - \int_a^b \rho(x)L(\mathbb{P}_{n-1}; x_1, \dots, x_n; f)dx = \\
&= \frac{f^{(2n)}(\xi)}{(2n)!} \int_a^b \rho(x)u^2(x)dx.
\end{aligned}$$

Demonstrație. Notăm prin $H(x)$ polinomul de interpolare Lagrange-Hermite care satisface condițiile

$$\begin{aligned}
H(x_i) &= f(x_i) & i \in \{1, 2, \dots, n\}, \\
H'(x_i) &= f'(x_i) & i \in \{1, 2, \dots, n\}.
\end{aligned}$$

Atunci, ținând seama de restul polinomului de interpolare Lagrange-Hermite (2.3.4) există $\zeta(x) \in [a, b]$ astfel încât

$$f(x) = H(x) + \frac{f^{(2n)}(\zeta(x))}{(2n)!} u^2(x).$$

Înmulțind cu $\rho(x)$ și integrând găsim

$$R(f) = \int_a^b \rho(x)u^2(x) \frac{f^{(2n)}(\zeta(x))}{(2n)!} dx. \quad (5.40)$$

Într-adevăr, deoarece $H(x) \in \mathbb{P}_{2n-1}$, formula de integrare numerică a lui Gauss implică

$$\int_a^b \rho(x)H(x)dx = \sum_{i=1}^n A_i H(x_i) = \sum_{i=1}^n A_i f(x_i) = \int_a^b \rho(x)L(\mathbb{P}_{n-1}; x_1, \dots, x_n; f)(x)dx.$$

Funcția $x \mapsto f^{(2n)}(\zeta(x)) = (2n)! \frac{f(x)-H(x)}{u^2(x)}$ fiind continuă, putem aplica integralei din membrul drept din (5.40) teorema de medie a calculului integral. Astfel, există $\xi \in [a, b]$, astfel încât

$$R(f) = \frac{f^{(2n)}(\xi)}{(2n)!} \int_a^b \rho(x)u^2(x)dx. \quad \blacksquare$$

În general, nodurile formulilor de integrare numerică de tip Gauss – adică rădăcinile unor polinoame ortogonale – se calculează numeric.

Coefficienții unei formule de integrare numerică de tip Gauss se pot calcula utilizând rezultatul teoremei:

Teorema 5.12.4 *Dacă $(Q_n)_{n \in \mathbb{N}}$ este un șir de polinoame ortogonale cu ponderea ρ în intervalul I , atunci coeficienții formulei de integrare numerică de tip Gauss sunt*

$$A_i = \frac{a_n d_{n-1}^2}{a_{n-1} Q_n'(x_i) Q_{n-1}(x_i)} \quad i \in \{1, 2, \dots, n\},$$

unde $Q_k(x) = a_k x^k + \dots$ și $d_k^2 = \int_I \rho(x) Q_k^2(x) dx$.

Demonstrație. În acest caz $u(x) = \frac{1}{a_n} Q_n(x)$. Din formula Darboux-Christoffel

$$\sum_{k=0}^{n-1} \frac{Q_k(x)Q_k(y)}{d_k^2} = \frac{a_{n-1}}{a_n} \frac{1}{d_{n-1}^2} \frac{Q_n(x)Q_{n-1}(y) - Q_{n-1}(x)Q_n(y)}{x-y}$$

pentru $y = x_i$ $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ se obține

$$\sum_{k=0}^{n-1} \frac{Q_k(x)Q_k(x_i)}{d_k^2} = \frac{a_{n-1}}{a_n} \frac{1}{d_{n-1}^2} \frac{Q_n(x)Q_{n-1}(x_i)}{x-x_i}.$$

Înmulțind egalitatea de mai sus cu $\rho(x)$ și integrând, rezultă

$$\sum_{k=0}^{n-1} \frac{Q_k(x_i)}{d_k^2} \int_I \rho(x) Q_k(x) dx = \frac{a_{n-1}}{a_n} \frac{Q_{n-1}(x_i)}{d_{n-1}^2} \int_I \rho(x) \frac{Q_n(x)}{x - x_i} dx. \quad (5.41)$$

Datorită condițiilor de ortogonalitate

$$\int_I \rho(x) Q_k(x) dx = \delta_{k,0} \frac{d_0^2}{a_0}, \quad k \in \{0, 1, \dots, n-1\}.$$

Deoarece

$$\frac{Q_n(x)}{x - x_i} = a_n \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n (x - x_j) \in \mathbb{P}_{n-1},$$

integrala din membrul drept al lui (5.41) se calculează fără eroare prin aplicarea formulei de integrare numerică de tip Gauss:

$$\int_I \rho(x) \frac{Q_n(x)}{x - x_i} dx = \sum_{j=1}^n A_j \frac{Q_n(x)}{x - x_i} \Big|_{x=x_j} = A_i Q'_n(x_i).$$

Formula (5.41) devine

$$\frac{Q_0(x_i)}{d_0^2} \frac{d_0^2}{a_0} = 1 = \frac{a_{n-1}}{a_n} \frac{Q_{n-1}(x_i)}{d_{n-1}^2} A_i Q'_n(x_i),$$

de unde

$$A_i = \frac{a_n d_{n-1}^2}{a_{n-1} Q'_n(x_i) Q_{n-1}(x_i)}. \blacksquare$$

Cazul $\rho(x) = 1$.

În acest caz, polinoamele ortogonale sunt polinoamele lui Legendre.

Teorema 5.12.5 Pentru $\rho(x) = 1$ coeficienții formulei de integrare numerică Gauss sunt

$$A_i = \frac{(n!)^4}{((2n)!)^2} \frac{(b-a)^{2n+1}}{(x_i - a)(b - x_i)[u'(x_i)]^2} \quad i \in \{1, 2, \dots, n\}.$$

Demonstrație. Integrăm prin părți integrala din membrul stâng al formulei (5.39)

$$A_i = \int_a^b l_i^2(x) dx = \frac{1}{[u'(x_i)]^2} \int_a^b \left[\frac{u(x)}{x - x_i} \right]^2 dx = \quad (5.42)$$

$$= \frac{1}{[u'(x_i)]^2} \left[\frac{u^2(a)}{a-x_i} - \frac{u^2(b)}{b-x_i} + 2 \int_a^b \frac{u(x)}{x-x_i} u'(x) dx \right].$$

Funcția $\frac{u(x)}{x-x_i} u'(x)$ este polinom de grad cel mult $2n-2$ și atunci formula de integrare numerică Gauss calculează integrala ei fără eroare

$$\int_a^b \frac{u(x)}{x-x_i} u'(x) dx = \sum_{j=1}^n A_j \frac{u(x)}{x-x_i} u'(x)|_{x=x_j} = A_i [u'(x_i)]^2.$$

Relația (5.42) devine

$$A_i = \frac{1}{[u'(x_i)]^2} \left\{ \frac{u^2(a)}{a-x_i} - \frac{u^2(b)}{b-x_i} + 2A_i [u'(x_i)]^2 \right\},$$

de unde

$$A_i = \frac{1}{[u'(x_i)]^2} \left[\frac{u^2(b)}{b-x_i} - \frac{u^2(a)}{a-x_i} \right].$$

Utilizând expresia polinomului u se deduce formula din enunțul teoremei. ■

5.13 Formula dreptunghiului ($n=1$).

Pentru $n=1$ din Teorema 5.8.1 obținem

$$u(x) = \frac{1}{2} [(x-a)(x-b)]' = x - \frac{a+b}{2},$$

iar din (5.38)

$$A_1 = b-a.$$

Formula de integrare numerică a lui Gauss devine

$$\int_a^b f(x) dx = (b-a) f\left(\frac{a+b}{2}\right) + R(f),$$

și este numită formula dreptunghiului.

Evaluarea restului. Integrând identitatea

$$f(x) = f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f'\left(\frac{a+b}{2}\right) \left(x - \frac{a+b}{2}\right) + \frac{1}{2} f''(\eta(x)) \left(x - \frac{a+b}{2}\right)^2$$

găsim

$$\int_a^b f(x) dx = (b-a) f\left(\frac{a+b}{2}\right) + \frac{1}{2} \int_a^b f''(\eta(x)) \left(x - \frac{a+b}{2}\right)^2 dx.$$

Astfel expresia restului devine

$$\begin{aligned} R(f) &= \int_a^b f(x)dx - (b-a)f\left(\frac{a+b}{2}\right) = \frac{1}{2} \int_a^b f''(\eta(x))\left(x - \frac{a+b}{2}\right)^2 dx = \\ &= \frac{1}{2} f''(\xi) \int_a^b \left(x - \frac{a+b}{2}\right)^2 dx = \frac{(b-a)^3 f''(\xi)}{24}. \end{aligned}$$

Formula dreptunghiului este

$$\int_a^b f(x)dx = (b-a)f\left(\frac{a+b}{2}\right) + \frac{(b-a)^3 f''(\xi)}{24}.$$

Aplicarea practică a formulei dreptunghiului. Fie $m \in \mathbb{N}^*$. Împărțim intervalul $[a, b]$ în m părți prin punctele $a_i = a + ih, i = 0, 1, \dots, m$ ($h = \frac{b-a}{m}$) și utilizăm formula dreptunghiului pentru calculul integralei funcției în fiecare interval $[a_i, a_{i+1}], i = 0, 1, \dots, m-1$. Astfel

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x)dx &= \sum_{i=0}^{m-1} \int_{a_i}^{a_{i+1}} f(x)dx = \\ &= \sum_{i=0}^{m-1} \left[(a_{i+1} - a_i) f\left(\frac{a_{i+1} + a_i}{2}\right) + \frac{f''(\xi_i)(a_{i+1} - a_i)^3}{24} \right]. \end{aligned}$$

Repetând raționamentul de la metoda trapezelor, deducem

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{b-a}{m} \sum_{i=0}^{m-1} f\left(a + \left(i + \frac{1}{2}\right)h\right) + \frac{(b-a)^3 f''(\xi)}{24m^2}.$$

Astfel integrala se aproximează prin expresia

$$K_m(f) = \frac{b-a}{m} \sum_{i=0}^{m-1} f\left(a + \left(i + \frac{1}{2}\right)h\right).$$

¹Analog raționamentului efectuat la evaluarea restului formulei de integrare numerică a lui Simpson.

5.14 Cazuri speciale

5.14.1 Formula de integrare numerică Lobatto

În locul formulei de integrare numerică (5.37) considerăm formula

$$\int_a^b \rho(x)f(x)dx = Af(a) + \sum_{i=1}^{n-2} A_i f(x_i) + Bf(b) + R(f), \quad (5.43)$$

diferența constând în aceea că două noduri – extremitățile intervalului de integrare – sunt fixate.

Formula pentru care se atinge gradul maxim de exactitate se numește formula de integrare numerică Lobatto. Au loc următoarele rezultate.

Teorema 5.14.1 Gradul maxim de exactitate al formulei (5.43) este $2n - 3$.

Demonstrație. În cazul funcției $f_0(x) = (x-a)(x-b) \prod_{i=1}^{n-2} (x-x_i)^2 \in \mathbb{P}_{2n-2}$ restul este nenul. ■

Teorema 5.14.2 Dacă $u \in \mathbb{P}_{n-2}$ este polinomul ortogonal, cu ponderea $(x-a)(b-x)\rho(x)$, în $[a, b]$, pe \mathbb{P}_{n-3} cu rădăcinile x_1, \dots, x_{n-2} , atunci formula de integrare numerică

$$\int_a^b \rho(x)f(x)dx = \int_a^b \rho(x)L(\mathbb{P}_{n-1}; a, x_1, \dots, x_{n-2}, b; f)dx + R(f)$$

are gradul de exactitate $2n - 3$.

Demonstrație. Dacă $f \in \mathbb{P}_{n-1}$ atunci $f = L(\mathbb{P}_{n-1}; a, x_1, \dots, x_{n-2}, b; f)$, de unde

$$\int_a^b \rho(x)f(x)dx = \int_a^b \rho(x)L(\mathbb{P}_{n-1}; a, x_1, \dots, x_{n-2}, b; f)dx.$$

Fie $f \in \mathbb{P}_{2n-3}$. Dacă q, r sunt respectiv câtul și restul împărțirii lui f la $(x-a)(x-b)u(x)$ atunci $f = (x-a)(x-b)qu + r$ și $q \in \mathbb{P}_{n-3}, r \in \mathbb{P}_{n-1}$. Atunci

$$\begin{aligned} L(\mathbb{P}_{n-1}; a, x_1, \dots, x_{n-2}, b; f)(x) &= L(\mathbb{P}_{n-1}; a, x_1, \dots, x_{n-2}, b; (x-a)(x-b)qu+r)(x) = \\ &= L(\mathbb{P}_{n-1}; a, x_1, \dots, x_{n-2}, b; r)(x) \end{aligned}$$

și în consecință

$$\begin{aligned} \int_a^b \rho(x) L(\mathbb{P}_{n-1}; a, x_1, \dots, x_{n-2}, b; f)(x) dx &= \int_a^b \rho(x) L(\mathbb{P}_{n-1}; a, x_1, \dots, x_{n-2}, b; r)(x) dx = \\ &= \int_a^b \rho(x) r(x) dx. \end{aligned}$$

Deoarece u ortogonal, cu ponderea $(x-a)(b-x)\rho(x)$, în $[a, b]$, pe \mathbb{P}_{n-3} , urmează că

$$\begin{aligned} \int_a^b \rho(x) f(x) dx &= \int_a^b \rho(x) [(x-a)(x-b)q(x)u(x) + r(x)] dx = \\ &= \int_a^b (x-a)(b-x)\rho(x)q(x)u(x) dx + \int_a^b \rho(x)r(x) dx = \\ &= \int_a^b \rho(x) L(\mathbb{P}_{n-1}; a, x_1, \dots, x_{n-2}, b; r)(x) dx = \\ &= \int_a^b \rho(x) L(\mathbb{P}_{n-1}; a, x_1, \dots, x_{n-2}, b; f)(x) dx. \blacksquare \end{aligned}$$

Restul formulei de integrare numerică Lobatto se poate evalua prin:

Teorema 5.14.3 Dacă $f \in C^{2n-2}[a, b]$ atunci există $\xi \in [a, b]$ astfel încât

$$\begin{aligned} R(f) &= \int_a^b \rho(x) f(x) dx - \int_a^b \rho(x) L(\mathbb{P}_{n-1}; a, x_1, \dots, x_{n-2}, b; f) dx = \\ &= \frac{f^{(2n-2)}(\xi)}{(2n-2)!} \int_a^b (x-a)(x-b)\rho(x) u^2(x) dx, \end{aligned}$$

unde $u(x) = \prod_{i=1}^{n-2} (x-x_i)$.

Demonstrație. Procedând asemănător cu demonstrația teoremei (5.12.3), notăm prin $H(x)$ polinomul de interpolare Lagrange-Hermite care satisface condițiile

$$\begin{aligned} H(a) &= f(a), \\ H(x_i) &= f(x_i) \quad i \in \{1, 2, \dots, n-2\}, \\ H'(x_i) &= f'(x_i) \quad i \in \{1, 2, \dots, n-2\}, \\ H(b) &= f(b). \end{aligned}$$

Atunci, ținând seama de restul polinomului de interpolare Lagrange-Hermite (2.3.4) există $\zeta(x) \in [a, b]$ astfel încât

$$f(x) = H(x) + \frac{f^{(2n-2)}(\zeta(x))}{(2n-2)!} (x-a)(x-b)u^2(x). \quad (5.44)$$

Deoarece $H(x) \in \mathbb{P}_{2n-3}$, formula de integrare numerică a lui Lobatto implică

$$\begin{aligned} \int_a^b \rho(x)H(x)dx &= AH(a) + \sum_{i=1}^{n-2} A_i H(x_i) + BH(b) = \\ &= Af(a) + \sum_{i=1}^{n-1} A_i f(x_i) + Bf(b) = \int_a^b \rho(x)L(\mathbb{P}_{n-1}; a, x_1, \dots, x_{n-2}, b; f)(x)dx. \end{aligned}$$

Înmulțind (5.44) cu $\rho(x)$ și integrând găsim

$$R(f) = \int_a^b (x-a)(x-b)\rho(x)u^2(x) \frac{f^{(2n-2)}(\zeta(x))}{(2n-2)!} dx. \quad (5.45)$$

Funcția $x \mapsto f^{(2n-2)}(\zeta(x)) = (2n)! \frac{f(x)-H(x)}{u^2(x)}$ fiind continuă, putem aplica integralei din membrul drept din (5.45) teorema de medie a calculului integral. Astfel, există $\xi \in [a, b]$, astfel încât

$$R(f) = \frac{f^{(2n-2)}(\xi)}{(2n-2)!} \int_a^b (x-a)(x-b)\rho(x)u^2(x)dx. \quad \blacksquare$$

5.14.2 Formula de integrare numerică Radau

Dacă în formula (5.37) se fixează doar un nod – unul din extremitățile intervalului de integrare – atunci formula de integrare numerică are forma

$$\int_a^b \rho(x)f(x)dx = Af(a) + \sum_{i=1}^{n-1} A_i f(x_i) + R(f), \quad (5.46)$$

sau

$$\int_a^b \rho(x)f(x)dx = \sum_{i=1}^{n-1} A_i f(x_i) + Bf(b) + R(f). \quad (5.47)$$

Gradul maxim de exactitate al formulei de integrare numerică (5.46) sau (5.47) este $2n-2$.

În cazul atingerii gradului maxim de exactitate, (5.46) și (5.47) se numesc formulele de integrare numerică Radau.

Teorema 5.14.4 Dacă $u \in \mathbb{P}_{n-1}$ este polinomul ortogonal, cu ponderea $(x - a)\rho(x)$, în $[a, b]$, pe \mathbb{P}_{n-2} cu rădăcinile x_1, \dots, x_{n-1} , atunci formula de integrare numerică

$$\int_a^b \rho(x)f(x)dx = \int_a^b \rho(x)L(\mathbb{P}_{n-1}; a, x_1, \dots, x_{n-1}; f)dx + R(f)$$

are gradul de exactitate $2n-2$. Un rezultat analog are loc și pentru formula (5.47).

Teorema 5.14.5 Dacă $f \in C^{2n-1}[a, b]$ atunci există $\xi \in [a, b]$ astfel încât

$$\begin{aligned} R(f) &= \int_a^b \rho(x)f(x)dx - \int_a^b \rho(x)L(\mathbb{P}_{n-1}; a, x_1, \dots, x_{n-1}; f)dx = \\ &= \frac{f^{(2n-1)}(\xi)}{(2n-1)!} \int_a^b \rho(x)(x-a)u^2(x)dx, \end{aligned}$$

unde $u(x) = \prod_{i=1}^n (x - x_i)$.

5.14.3 Formula de cvadratură Gauss-Kronrod

O formulă de cvadratură de tip Gauss (5.37) cu n noduri are gradul de exactitate $2n - 1$

$$I(f) = G(f) = \sum_{i=1}^n A_i f(x_i); \quad \forall f \in \mathbb{P}_{2n-1}.$$

Pornind de la formula de cvadratură anterioară, o formulă de cvadratură Gauss-Kronrod cu $2n + 1$ noduri se construiește introducând $n + 1$ noduri noi

$$K_{2n+1}(f) = \sum_{i=1}^{2n+1} B_i f(x_i),$$

astfel încât

$$\begin{aligned} \{x_1, \dots, x_n\} &\subset \{y_1, \dots, y_{2n+1}\} \\ I(f) = K(f) &\quad \forall f \in \mathbb{P}_{3n+1} \end{aligned} \quad (5.48)$$

Cazul $n = 1$. Punctul de plecare îl reprezintă formula dreptunghiului, deci $x_1 = \frac{a+b}{2}$. Formula de cvadratură Gauss-Kronrod are forma

$$K_4(f) = B_1 f(p) + B_2 f\left(\frac{a+b}{2}\right) + B_3 f(q).$$

Parametrii formulei p, q, B_1, B_2, B_3 se determină din cerința $I(f) = K_4(f), \forall f \in \mathbb{P}_4$ (5.48). Particularizând $f = 1, x, x^2, x^3, x^4$ se obține sistemul algebric de ecuații neliniare

$$\begin{cases} B_1 + B_2 + B_3 = b - a \\ B_1 p + B_2 \frac{a+b}{2} + B_3 q = \frac{b^2 - a^2}{2} \\ B_1 p^2 + B_2 \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 + B_3 q^2 = \frac{b^3 - a^3}{3} \\ B_1 p^3 + B_2 \left(\frac{a+b}{2}\right)^3 + B_3 q^3 = \frac{b^4 - a^4}{4} \\ B_1 p^4 + B_2 \left(\frac{a+b}{2}\right)^4 + B_3 q^4 = \frac{b^5 - a^5}{5} \end{cases}$$

cu soluția

$$\begin{aligned} p &= \frac{a+b}{2} - \frac{\sqrt{15}}{10}(b-a) \\ q &= \frac{a+b}{2} + \frac{\sqrt{15}}{10}(b-a) \\ B_1 &= \frac{5}{18}(b-a) \\ B_2 &= \frac{4}{9}(b-a) \\ B_3 &= \frac{5}{18}(b-a) \end{aligned}$$

Pentru $a = -1, b = 1$ vom avea

$$p = -\frac{\sqrt{15}}{5}, \quad q = \frac{\sqrt{15}}{5}, \quad B_1 = B_3 = \frac{5}{9}, \quad B_2 = \frac{8}{9}.$$

5.15 Formule de integrare numerică bazate pe formula Euler-MacLaurin

5.15.1 Polinoamele și numerele lui Bernoulli

Polinoamele Bernoulli sunt definite prin

$$\sum_{k=0}^n \binom{n+1}{k} B_k(x) = (n+1)x^n, \quad n \in \mathbb{N}. \quad (5.49)$$

$B_n = B_n(0)$ se numesc numerele lui Bernoulli.

Din (5.49), pentru $n = 0$ și $n = 1$ se obțin

$$B_0(x) = 1 \quad B_1(x) = x - \frac{1}{2}$$

Polinoamele Bernoulli se bucură de proprietățile

Teorema 5.15.1 *Au loc relațiile:*

$$(i) \quad B'_n(x) = nB_{n-1}(x); \quad (5.50)$$

$$(ii) \quad B_n(x+1) - B_n(x) = nx^{n-1}; \quad (5.51)$$

$$(iii) \quad B_n(x) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} B_k x^{n-k}; \quad (5.52)$$

$$(iv) \quad B_n(1-x) = (-1)^n B_n(x). \quad (5.53)$$

Demonstrație. (i) Prin inducție după n , se demonstrează propoziția

$$P_n : B'_k(x) = kB_{k-1}(x), \quad \forall k \in \{1, 2, \dots, n\}$$

$\forall n \in \mathbb{N}^*$. În ipoteza că propoziția P_{n-1} este adevărată, pentru a justifica P_n este suficient de arătat $B'_n(x) = nB_{n-1}(x)$.

Derivând (5.49) rezultă

$$\sum_{k=1}^n \binom{n+1}{k} B'_k(x) = (n+1)nx^{n-1}.$$

Ținând seama de ipoteza inducției se obține

$$\sum_{k=1}^{n-1} \binom{n+1}{k} kB_{k-1}(x) + \binom{n+1}{n} B'_n(x) = (n+1)nx^{n-1}. \quad (5.54)$$

Deoarece $\binom{n+1}{k} k = (n+1) \binom{n}{k-1}$, relația (5.54) devine

$$(n+1) \sum_{k=1}^{n-1} \binom{n}{k-1} B_{k-1}(x) + (n+1)B'_n(x) = (n+1)nx^{n-1}$$

sau

$$\sum_{k=0}^{n-2} \binom{n}{k} B_k(x) + B'_n(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} B_k(x),$$

de unde egalitatea dorită.

(ii) Din (i) rezultă $B_n^{(k)}(x) = \frac{n!}{(n-k)!} B_{n-k}(x)$. Utilizând dezvoltarea tayloriană rezultă egalitățile succesive

$$\begin{aligned} B_n(x+1) &= \sum_{k=0}^n \frac{B_n^{(k)}(x)}{k!} = \sum_{k=0}^n \frac{n!}{k!(n-k)!} B_{n-k}(x) = \\ &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} B_{n-k}(x) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} B_k(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} B_k(x) + B_n(x). \end{aligned}$$

Utilizând (5.49), egalitatea anterioară devine

$$B_n(x+1) = B_n(x) + nx^{n-1}.$$

(iii) Din dezvoltarea tayloriană

$$B_n(y+h) = \sum_{k=0}^n \frac{B_n^{(k)}(y)}{k!} h^k = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} B_{n-k}(y) h^k,$$

pentru $y=0$ și $h=x$ rezultă

$$B_n(x) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} B_{n-k}(0) x^k = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} B_k(0) x^{n-k}.$$

(iv) Din (5.51), pentru $x := -x$, rezultă

$$B_n(1-x) = B_n(-x) + n(-1)^{n-1} x^{n-1}.$$

Utilizând din nou (5.51), egalitatea anterioară se poate scrie

$$B_n(1-x) - B_n(-x) = (-1)^{n-1} [B_n(1+x) - B_n(x)]$$

sau

$$(-1)^n B_{n+1}(1+x) - B_n(-x) = (-1)^n B_n(x) - B_n(1-x). \quad (5.55)$$

Definind polinomul $\varphi(x) = (-1)^n B_n(x) - B_n(1-x)$, egalitatea (5.55) se rescrie $\varphi(x+1) = \varphi(x)$, adică φ este o funcție periodică, cu perioada 1. Prin urmare φ este o funcție constantă

$$(-1)^n B_n(x) - B_n(1-x) = c_n.$$

Prin derivare se obține

$$(-1)^n B_n'(x) + B_n'(1-x) = 0$$

sau

$$(-1)^n B_{n-1}(x) + B_{n-1}(1-x) = 0.$$

Astfel $B_{n-1}(1-x) = (-1)^{n-1} B_{n-1}(x)$, relație echivalentă cu (5.53). ■

În consecință

Teorema 5.15.2 *Au loc egalitățile*

- (i) $B_n = B_n(0) = B_n(1)$, $n \geq 2$;
- (ii) Dacă n este un număr natural impar atunci $B_n = B_n(0) = B_n(1) = B_n(\frac{1}{2}) = 0$;
- (iii) $\int_0^1 B_n(x) dx = 0$, $n \in \mathbb{N}^*$.

Demonstrație. (i) În (5.51), se face $x = 0$.

(ii) Pentru $x = 0$, din (5.53) rezultă $B_n(1) = -B_n(0) = B_n(0)$, deci $B_n(0) = 0$.

(iii) Au loc egalitățile

$$\int_0^1 B_n(x) d(x) = \frac{1}{n+1} \int_0^1 B'_{n+1}(x) d(x) = \frac{1}{n+1} [B_{n+1}(1) - B_{n+1}(0)] = 0. \quad \blacksquare$$

Teorema 5.15.3 *Au loc afirmațiile*

- (i) $B_{4n+2}(x)$, $n \in \mathbb{N}$ este descrescătoare în intervalul $[0, \frac{1}{2}]$ și crescătoare în intervalul $[\frac{1}{2}, 1]$;
- (ii) Există $\xi \in (0, \frac{1}{2})$ astfel încât B_{4n+3} este crescătoare în $[0, \xi] \cup [1 - \xi, 1]$ și descrescătoare în $[\xi, 1 - \xi]$;
- (iii) $B_{4n}(x)$, $n \in \mathbb{N}^*$ este crescătoare în intervalul $[0, \frac{1}{2}]$ și descrescătoare în intervalul $[\frac{1}{2}, 1]$;
- (iv) Există $\xi \in (0, \frac{1}{2})$ astfel încât B_{4n+3} este descrescătoare în $[0, \xi] \cup [1 - \xi, 1]$ și crescătoare în $[\xi, 1 - \xi]$.

Demonstrație. Inductiv, deoarece $B'_2(x) = 2B_1(x) = 2x - 1$ are loc tabelul de variație

x		0	$\frac{1}{2}$	1
$B'_2(x)$		-	0	+
$B_2(x)$		\searrow		\nearrow

Presupunând că $B_{4n+2}(x)$ este descrescătoare în $[0, \frac{1}{2}]$ și crescătoare în $[\frac{1}{2}, 1]$, deoarece $\int_0^1 B_{4n+2}(x)dx = 0$, în mod necesar

$$B_{4n+2}(0) = B_{4n+2}(1) > 0 \quad \text{și} \quad B_{4n+2}\left(\frac{1}{2}\right) < 0.$$

Prin urmare există $\xi \in (0, \frac{1}{2})$ astfel încât $B_{4n+2}(\xi) = 0 = B_{4n+2}(1 - \xi)$.

Deoarece $B'_{4n+3}(x) = (4n+3)B_{4n+2}(x)$ are loc tabelul de variație

x		0	ξ	$\frac{1}{2}$	$1 - \xi$	1		
$B'_{4n+3}(x)$			+	0	-	0	+	
$B_{4n+3}(x)$		0	\nearrow	\searrow	0	\searrow	\nearrow	0

Din $B'_{4n+4}(x) = (4n+4)B_{4n+3}(x)$ rezultă tabelul de variație

x		0	$\frac{1}{2}$	1	
$B'_{4n+4}(x)$			+	0	-
$B_{4n+4}(x)$		\nearrow	\searrow		

Condiția $\int_0^1 B_{4(n+1)}(x)dx = 0$ implică $B_{4(n+1)}(0) = B_{4(n+1)}(1) < 0$ și $B_{4(n+1)}(\frac{1}{2}) > 0$, adică există $\xi \in (0, \frac{1}{2})$ astfel încât $B_{4(n+1)}(\xi) = 0 = B_{4(n+1)}(1 - \xi)$.

Din $B'_{4(n+1)+1}(x) = (4n+5)B_{4(n+1)}(x)$ rezultă tabelul de variație

x		0	ξ	$\frac{1}{2}$	$1 - \xi$	1		
$B'_{4(n+1)+1}(x)$			-	0	+	0	-	
$B_{4(n+1)+1}(x)$		0	\searrow	\nearrow	0	\nearrow	\searrow	0

Egalitatea $B'_{4(n+1)+2}(x) = (4n+6)B_{4(n+1)+1}(x)$ implică

x		0	$\frac{1}{2}$	1	
$B'_{4(n+1)+2}(x)$			-	0	+
$B_{4(n+1)+2}(x)$		\searrow	\nearrow		

Tabelele de variație în cazul polinoamelor Bernoulli de indice par implică

Teorema 5.15.4 $B_{2n}(x) - B_{2n}(0)$ păstrează semn constant în intervalul $[0, 1]$.

5.15.2 Formula Euler-MacLaurin

Fie $f \in C^{2n}[a, a+h]$. În urma a $2n$ integrări succesive prin părți se obține

$$\int_a^{a+h} f(x)dx = h \int_0^1 f(a+th)dt =$$

$$\begin{aligned}
&= h \left[f(a+th)B_1(t) \Big|_0^1 - h \int_0^1 f'(a+th)B_1(t)dt \right] = \\
&= \frac{h}{2} [f(a+h) + f(a)] - h^2 \left[f'(a+th) \frac{B_2(t)}{2} \Big|_0^1 - h \int_0^1 f''(a+th) \frac{B_2(t)}{2} dt \right] = \\
&= \frac{h}{2} [f(a+h) + f(a)] - \frac{h^2 B_2(0)}{2} [f'(a+h) - f'(a)] - \\
&\quad - \frac{h^3}{2} \left[f''(a+th) \frac{B_3(t)}{3} \Big|_0^1 - h \int_0^1 f^{(3)}(a+th) \frac{B_3(t)}{3} dt \right] = \dots \\
&= \frac{h}{2} [f(a+h) + f(a)] - \sum_{k=1}^{n-1} \frac{h^{2k} B_{2k}}{(2k)!} [f^{(2k-1)}(a+h) - f^{(2k-1)}(a)] - \\
&\quad - \frac{h^{2n} B_{2n}}{(2n)!} [f^{(2n-1)}(a+h) - f^{(2n-1)}(a)] + \frac{h^{2n+1}}{(2n)!} \int_0^1 f^{(2n)}(a+th) B_{2n}(t) dt.
\end{aligned}$$

Ținând seama de egalitatea

$$f^{(2n-1)}(a+h) - f^{(2n-1)}(a) = h \int_0^1 f^{(2n)}(a+th) dt$$

egalitatea anterioară devine

$$\begin{aligned}
\int_a^{a+h} f(x) dx &= \frac{h}{2} [f(a+h) + f(a)] - \\
&- \sum_{k=1}^{n-1} \frac{h^{2k} B_{2k}}{(2k)!} [f^{(2k-1)}(a+h) - f^{(2k-1)}(a)] + \frac{h^{2n+1}}{(2n)!} \int_0^1 f^{(2n)}(a+th) [B_{2n}(t) - B_{2n}(0)] dt.
\end{aligned} \tag{5.56}$$

Deoarece $B_{2n}(t) - B_{2n}(0)$ păstrează semn constant în intervalul $[0, 1]$ se poate aplica teorema de medie a calculului integral, ultimul termen din (5.56) transformându-se în

$$\begin{aligned}
&\int_0^1 f^{(2n)}(a+th) [B_{2n}(t) - B_{2n}(0)] dt = \\
&= f^{(2n)}(\xi) \int_0^1 [B_{2n}(t) - B_{2n}(0)] dt = -B_{2n} f^{(2n)}(\xi).
\end{aligned}$$

cu $\xi \in (a, a+h)$.

Formula (5.56) devine

$$\int_a^{a+h} f(x) dx = \frac{h}{2} [f(a+h) + f(a)] - \tag{5.57}$$

$$-\sum_{k=1}^{n-1} \frac{h^{2k} B_{2k}}{(2k)!} [f^{(2k-1)}(a+h) - f^{(2k-1)}(a)] - \frac{h^{2n+1} B_{2n}}{(2n)!} f^{(2n)}(\xi).$$

Teorema 5.15.5 (Formula Euler-MacLaurin) Dacă $f \in C^{2n}[a, a+mh]$, $m \in \mathbb{N}^*$ atunci

$$\int_a^{a+mh} f(x) dx = h \sum_{j=0}^m f(a+jh) - \frac{h}{2} [f(a+h) + f(a)] - \quad (5.58)$$

$$-\sum_{k=1}^{n-1} \frac{h^{2k} B_{2k}}{(2k)!} [f^{(2k-1)}(a+mh) - f^{(2k-1)}(a)] - \frac{mh^{2n+1} B_{2n}}{(2n)!} f^{(2n)}(\xi),$$

unde $\xi \in (a, a+mh)$.

Demonstrație. Utilizând (5.57) avem

$$\begin{aligned} \int_a^{a+mh} f(x) dx &= \sum_{j=0}^{m-1} \int_{a+jh}^{a+(j+1)h} f(x) dx = \\ &= \sum_{j=0}^{m-1} \left\{ \frac{h}{2} [f(a+jh) + f(a+(j+1)h)] - \right. \\ &\quad \left. - \sum_{k=1}^{n-1} \frac{h^{2k} B_{2k}}{(2k)!} [f^{(2k-1)}(a+(j+1)h) - f^{(2k-1)}(a+jh)] - \frac{h^{2n+1} B_{2n}}{(2n)!} f^{(2n)}(\xi_j) \right\} = \\ &= h \left[\frac{1}{2} f(a) + \sum_{j=1}^{m-1} f(a+jh) + \frac{1}{2} f(a+mh) \right] - \\ &\quad - \sum_{k=1}^{n-1} \frac{h^{2k} B_{2k}}{(2k)!} [f^{(2k-1)}(a+mh) - f^{(2k-1)}(a)] - m \frac{h^{2n+1} B_{2n}}{(2n)!} \frac{\sum_{j=0}^{m-1} f^{(2n)}(\xi_j)}{m}, \end{aligned}$$

unde $\xi_j \in (a+jh, a+(j+1)h)$.

Datorită proprietății Darboux a funcției $f^{(2n)}(x)$, există $\xi \in (a, a+mh)$ astfel încât $\frac{1}{m} \sum_{j=0}^{m-1} f^{(2n)}(\xi_j) = f^{(2n)}(\xi)$, de unde (5.58) ■

5.15.3 Formule de integrare Euler-MacLaurin

Dacă $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ este o funcție care se anulează, împreună cu derivatele sale în a și b atunci potrivit formulei Euler-MacLaurin

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x) dx &= h \sum_{j=0}^m f(a + jh) - \frac{h}{2} [f(a+h) + f(a)] - \\ &- \sum_{k=1}^{n-1} \frac{h^{2k} B_{2k}}{(2k)!} [f^{(2k-1)}(a+mh) - f^{(2k-1)}(a)] - \frac{mh^{2n+1} B_{2n}}{(2n)!} f^{(2n)}(\xi) = \\ &= h \sum_{j=1}^{m-1} f(a + jh) - (b-a) \frac{h^{2n} B_{2n}}{(2n)!} f^{(2n)}(\xi) \approx h \sum_{j=1}^{m-1} f(a + jh), \end{aligned} \quad (5.59)$$

unde $h = \frac{b-a}{m}$, $m \in \mathbb{N}^*$.

Fie $f : (-1, 1) \rightarrow \mathbb{R}$ o funcție indefinit derivabilă. Pentru calculul integralei

$$\int_{-1}^1 f(x) dx$$

acesta se transformă într-o integrală pe $(-\infty, \infty)$, printr-o schimbare de variabilă $x = g(t)$, unde g este o funcție indefinit derivabilă cu proprietatea că g' împreună cu derivatele ei de ordin superior tind repede către 0 pentru $t \rightarrow \infty$.

Astfel

$$\int_{-1}^1 f(x) dx = \int_{-\infty}^{\infty} f(g(t)) g'(t) dt = h \sum_{j=-\infty}^{\infty} w_j f(x_j) + R,$$

unde $x_j = g(jh)$ și $w_j = g'(jh)$.

Practic, potrivit (5.59), calculul integralei revine la evaluarea sumei

$$h \sum_{|j| < M} w_j f(x_j).$$

Variante uzuale pentru funcția g sunt

- $g(t) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^t e^{-s^2} ds = \operatorname{erf}(t)$;
- $g(t) = \tanh\left(\frac{\pi}{2} \sinh t\right)$, $g'(t) = \frac{\pi}{2} \frac{\cosh t}{\cosh^2\left(\frac{\pi}{2} \sinh t\right)}$.

Algoritmul lui Romberg. Rescriem formula Euler-MacLaurin (5.58) sub forma

$$\int_a^b f(x)dx = h \left[\frac{1}{2}f(a) + \sum_{j=1}^{m-1} f(a + jh) + \frac{1}{2}f(b) \right] - \sum_{k=1}^{n-1} \frac{h^{2k} B_{2k}}{(2k)!} [f^{(2k-1)}(b) - f^{(2k-1)}(a)] - (b-a) \frac{h^{2n} B_{2n}}{(2n)!} f^{(2n)}(\xi),$$

unde $h = \frac{b-a}{m}$, $\xi \in (a, b)$.

Definind $\varphi(h) = h[\frac{1}{2}f(a) + \sum_{j=1}^{m-1} f(a + jh) + \frac{1}{2}f(b)]$ se obține o formulă de tip (4.4). Aplicând extrapolarea Richardson se obțin aproximări de ordin superior a integralei. Această aplicare a extrapolării Richardson la metoda trapezelor definește algoritmul lui Romberg.

Probleme și teme de seminar

P 5.1 Să se calculeze restul în formula trapezului fără particularizarea rezultatului teoremei 5.3.3.

R. Pentru evaluarea restului

$$R(f) = \int_a^b f(x)dx - \frac{1}{2}(b-a)[f(a) + f(b)]$$

introducem funcția

$$\varphi(h) = \int_a^{a+h} f(x)dx - \frac{h}{2}[f(a) + f(a+h)]$$

și observăm că $\varphi(b-a) = R(f)$. Derivatele de ordinul întâi și doi ale lui φ sunt

$$\begin{aligned} \varphi'(h) &= \frac{1}{2}[f(a+h) - f(a)] - \frac{h}{2}f'(a+h) \\ \varphi''(h) &= -\frac{h}{2}f''(a+h) \end{aligned}$$

și exprimând funcția φ prin polinomul lui Taylor cu restul sub formă integrală ²

² Pentru o funcție f formula de reprezentare prin polinomul lui Taylor cu restul sub formă integrală este:

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + \int_a^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)dt.$$

Formula rezultă în urma a n integrări prin părți a integralei din membrul drept.

obținem

$$\varphi(h) = \varphi(0) + \frac{\varphi'(0)}{1!}h + \int_0^h (h-t)\varphi''(t)dt = -\frac{1}{2} \int_0^h (h-t)f''(a+t)dt.$$

Aplicând prima teoremă de medie a calculului integral, găsim

$$\varphi(h) = -\frac{f''(\xi)}{2} \int_0^h (h-t)dt = -\frac{f''(\xi)h^3}{12},$$

unde $\xi \in (a, a+h)$.

În particular, pentru $h = b - a$, obținem

$$\varphi(b-a) = R(f) = -\frac{f''(\xi)(b-a)^3}{12}.$$

P 5.2 Să se calculeze restul în formula lui Simpson fără particularizarea rezultatului teoremei 5.3.3.

R. Expresia restului este

$$R(f) = \int_a^b f(x)dx - \frac{1}{6}(b-a)[f(a) + 4f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b)].$$

Introducem funcția

$$\varphi(h) = \int_{c-h}^{c+h} f(x)dx - \frac{h}{3}[f(c-h) + 4f(c) + f(c+h)],$$

unde $c = \frac{a+b}{2}$ și observăm că $\varphi\left(\frac{b-a}{2}\right) = R(f)$. Evaluarea restului se obține asemănător cu metoda utilizată în cazul formulei trapezului. Calculăm derivatele funcției φ

$$\begin{aligned} \varphi'(h) &= f(c+h) + f(c-h) - \frac{1}{3}[f(c-h) + 4f(c) + f(c+h)] - \frac{h}{3}[f'(c+h) - f'(c-h)] = \\ &= \frac{2}{3}[f(c-h) - 2f(c) + f(c+h)] - \frac{h}{3}[f'(c+h) - f'(c-h)]; \end{aligned}$$

$$\varphi''(h) = \frac{1}{3}[f'(c+h) - f'(c-h)] - \frac{h}{3}[f''(c+h) + f''(c-h)];$$

$$\varphi^{(3)}(h) = -\frac{h}{3}[f^{(3)}(c+h) - f^{(3)}(c-h)] = -\frac{2h^2}{3}f^{(4)}(\eta(h)) \quad c-h < \eta < c+h;$$

și prin urmare

$$\varphi(h) = \varphi(0) + \frac{\varphi'(0)}{1!}h + \frac{\varphi''(0)}{2!}h^2 + \int_0^h \frac{(h-t)^2}{2}\varphi^{(3)}(t)dt = \frac{1}{2} \int_0^h (h-t)^2\varphi^{(3)}(t)dt =$$

$$= -\frac{1}{3} \int_0^h (h-t)^2 t^2 f^{(4)}(\eta(t)) dt.$$

Din egalitatea $f^{(4)}(\eta(t)) = \frac{f^{(3)}(c+t) - f^{(3)}(c-t)}{2t}$ rezultă că funcția $t \mapsto f^{(4)}(\eta(t))$ este continuă în $[0, h]$. Aplicând teorema de medie a calculului integral găsim

$$\varphi(h) = -\frac{h^5}{90} f^{(4)}(\xi),$$

unde $\xi \in (c-h, c+h)$.

În particular, pentru $h = \frac{b-a}{2}$, găsim

$$\varphi(h) = -\frac{(b-a)^5}{2880} f^{(4)}(\xi).$$

P 5.3 Să se demonstreze formulele

1. $\int_0^1 f(x) dx = \frac{1}{2}[f(0) + f(1)] - \frac{1}{2} \int_0^1 f''(x)x(1-x) dx;$
2. $\int_0^1 f(x) dx = \frac{1}{6}[f(0) + 4f(\frac{1}{2}) + f(1)] - \frac{1}{6} \int_0^{\frac{1}{2}} (\frac{1}{2}-x)^2 x [f^{(3)}(\frac{1}{2}+x) - f^{(3)}(\frac{1}{2}-x)] dx.$

R.

1. $\varphi(x) = \int_0^x f(t) dt - \frac{x}{2}(f(0) + f(x)).$
2. $\varphi(x) = \int_{\frac{1}{2}-x}^{\frac{1}{2}+x} f(t) dt - \frac{x}{3}(f(\frac{1}{2}-x) + 4f(\frac{1}{2}) + f(\frac{1}{2}+x)).$

P 5.4 Să se deducă formula de integrare numerică de tip Gauss

$$\int_{-1}^1 \frac{f(x)}{\sqrt{1-x^2}} dx = \frac{\pi}{n+1} \sum_{k=0}^n f\left(\cos \frac{(2k+1)\pi}{2(n+1)}\right) + R(f).$$

R. Nodurile formulei de integrare numerică sunt rădăcinile polinomului lui Cebîșev $T_{n+1}(x)$. În consecință $u(x) = \frac{1}{2^n} T_{n+1}(x)$. Dacă $t_k = \frac{(2k+1)\pi}{2(n+1)}$, $x_k = \cos t_k$ atunci $u'(x_k) = \frac{(-1)^k (n+1)}{2^n \sin t_k}$ și

$$A_k = \int_{-1}^1 \frac{u(x)}{(x-x_k)u'(x_k)} dx = \frac{(-1)^k \sin t_k}{n+1} \int_0^\pi \frac{\cos(n+1)t}{\cos t - \cos t_k} dt.$$

Integralele de tipul celui de mai sus se calculează aplicând teorema semireziduurilor

$$I_\nu = \int_0^\pi \frac{\cos \nu t}{\cos t - \cos a} dt = \frac{1}{2} \int_{-\pi}^\pi \frac{\cos \nu t}{\cos t - \cos a} dt = \frac{1}{2} \int_{-\pi}^\pi \frac{(\cos t + i \sin t)^\nu}{\cos t - \cos a} dt =$$

$$\frac{1}{i} \int_{|z|=1} \frac{z^\nu}{z^2 - 2z \cos a + 1} dz = \frac{\pi \sin \nu a}{\sin a}.$$

P 5.5 Dacă $C_{n,i} = \frac{(-1)^{n-i}}{n! (n-i)!} \int_0^n t(t-1)\dots(t-i+1)(i-i-1)\dots(t-n) dt$ este un număr Cotes atunci $\lim_{n \rightarrow \infty} C_{n,2} = \infty$.

R. Notând $h_{n,k} = \frac{1}{2n(n-2)!} \int_k^{k+1} t(t-1)(t-3)\dots(t-n) dt$ au loc evaluările:

•

$$|h_{n,1}| = \frac{1}{2n(n-2)!} \left| \int_1^2 t(t-1)(t-3)\dots(t-n) dt \right| =$$

$$= \frac{1}{2n(n-2)!} \int_1^2 t(t-1)(3-t)\dots(n-t) dt \leq \frac{2(n-1)!}{2n(n-2)!} = \frac{n-1}{n}.$$

•

$$|h_{n,n-1}| = \frac{1}{2n(n-2)!} \left| \int_{n-1}^n t(t-1)(t-3)\dots(t-n) dt \right| =$$

$$= \frac{1}{2n(n-2)!} \int_{n-1}^n t(t-1)(t-3)\dots(t-n+1)(n-t) dt \leq$$

$$\leq \frac{1}{2n(n-2)!} \frac{n!}{n-2} = \frac{n-1}{2(n-2)}.$$

• Pentru $k \in \{2, 3, \dots, n-2\}$

$$|h_{n,k}| = \frac{1}{2n(n-2)!} \left| \int_k^{k+1} t(t-1)(t-3)\dots(t-n) dt \right| =$$

$$= \frac{1}{2n(n-2)!} \int_{n-1}^n t(t-1)(t-3)\dots(t-k)(k+1-t)\dots(n-t) dt \leq$$

$$\leq \frac{1}{2n(n-2)!} \frac{(k+1)!(n-k)!}{k-1} = \frac{k-1}{k+1} \frac{k!(n-k)!}{2(n-2)!} \frac{1}{n}.$$

Deoarece

$$\frac{k+1}{k-1} \leq 3, \quad \frac{k!(n-k)!}{2(n-2)!} = \frac{\binom{n}{2}}{\binom{n}{k}} \leq 1$$

rezultă $|h_{n,k}| \leq \frac{3}{n}$.

•

$$\begin{aligned} |h_{n,0}| &= \frac{1}{2n(n-2)!} \left| \int_0^1 t(t-1)(t-3)\dots(t-n)dt \right| = \\ &= \frac{1}{2n(n-2)!} \int_0^1 t(1-t)(3-t)\dots(n-t)dt \geq \\ &\geq \frac{1}{2n(n-2)!} \int_{\frac{1}{3}}^{\frac{2}{3}} t(1-t)(3-t)\dots(n-t)dt \geq \\ &= \frac{1}{2n(n-2)!} \frac{1}{3} \frac{1}{3} \left(3 - \frac{2}{3}\right) \dots \left(n - \frac{1}{3}\right) \frac{1}{3} = \frac{1}{54n(n-2)!} \left(2 + \frac{1}{3}\right) \left(3 + \frac{1}{3}\right) \dots \left(n - 1 + \frac{1}{3}\right). \end{aligned}$$

Dar inegalitatea $(x+2)(x+3)\dots(x+n-1) =$

$$\begin{aligned} &= x^{n-1} + \dots + [2 \cdot 3 \dots (n-2) + \dots + 3 \cdot 4 \dots (n-1)]x + (n-1)! \geq \\ &\geq (n-1)! \left(\frac{1}{n-1} + \frac{1}{n-2} + \dots + \frac{1}{2} \right) x, \end{aligned}$$

particularizată pentru $x = \frac{1}{3}$ dă

$$\left(2 + \frac{1}{3}\right) \left(3 + \frac{1}{3}\right) \dots \left(n - 1 + \frac{1}{3}\right) \geq (n-1)! \left(\frac{1}{n-1} + \frac{1}{n-2} + \dots + \frac{1}{2} \right) \frac{1}{3}.$$

În consecință $|h_{n,0}| \geq \frac{n-1}{162n} \left(\frac{1}{n-1} + \frac{1}{n-2} + \dots + \frac{1}{2} \right) \geq \frac{n-1}{162n} \ln \frac{n}{2}$.

Au loc inegalitățile

$$\begin{aligned} |C_{n,2}| &= \frac{1}{2n(n-2)!} \left| \int_0^n t(t-1)(t-3)\dots(t-n)dt \right| = \left| \sum_{k=0}^{n-1} h_{n,k} \right| \geq \\ &\geq |h_{n,0}| - \sum_{k=1}^{n-1} |h_{n,k}| \geq \frac{n-1}{162n} \ln \frac{n}{2} - \frac{n-1}{n} - (n-3) \frac{3}{n} - \frac{n-1}{2(n-2)} \rightarrow \infty, n \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

P 5.6 Fie $h = \frac{b-a}{n}$. Dacă $\sigma_n = (b-a) \sum_{i=0}^n C_{n,i} \delta_{a+ih}$ este funcționala din $C^*[a, b]$ corespunzătoare formulei de integrare numerică Newton-Côtes

$$\int_a^b f(x) dx = (b-a) \sum_{i=0}^n C_{n,i} f(a+ih) + R_n(f),$$

atunci șirul de funcționale $(\sigma_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ nu converge în topologia slabă din $C^*[a, b]$ către funcționala $I(f) = \int_a^b f(x) dx$.

P 5.7 Să se arate că șirul funcționalelor $(I_m)_{m \in \mathbb{N}^*}$, $(J_m)_{m \in \mathbb{N}^*}$, $(K_m)_{m \in \mathbb{N}^*}$ definite prin schema de aplicare practică a formulei trapezului, Simpson, respectiv dreptunghiului converge punctual către funcționala I .

P 5.8 Să se deducă formula de integrare numerică Gauss-Hermite

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} f(x) dx = \sum_{j=1}^n A_j f(x_j) + R(f),$$

unde x_1, \dots, x_n sunt rădăcinile polinomului lui Hermite $H_n(x)$ iar $A_i = \frac{2^{n-1} n! \sqrt{\pi}}{n^2 H_{n-1}^2(x_i)}$.

R. Polinoamele lui Hermite sunt ortogonale în \mathbb{R} cu ponderea e^{-x^2} , coeficientul termenului dominant al lui H_k este $a_k = 2^k$ iar $d_k^2 = 2^k k! \sqrt{\pi}$.

Potrivit Teoremei 5.12.4

$$A_i = \frac{a_n d_{n-1}^2}{a_{n-1} Q'_n(x_i) Q_{n-1}(x_i)} = \frac{2^n 2^{n-1} (n-1)! \sqrt{\pi}}{2^{n-1} H'_n(x_i) H_{n-1}(x_i)}$$

și se ține seama de egalitatea $H'_n(x) = 2n H_{n-1}(x)$.

P 5.9 Să se deducă formula de integrare numerică Gauss-Laguerre

$$\int_0^{\infty} e^{-x} f(x) dx = \sum_{j=1}^n A_j f(x_j) + R(f),$$

unde x_1, \dots, x_n sunt rădăcinile polinomului lui Laguerre $L_n(x) = L_n^{<0>}(x)$ iar $A_i = -\frac{[(n-1)!]^2}{L_{n-1}(x_i) L'_n(x_i)}$.

R. Polinoamele lui Laguerre $L_n(x)$ sunt ortogonale în $(0, \infty)$ cu ponderea e^{-x} , coeficientul termenului dominant a lui L_k este $a_k = (-1)^k$ iar $d_k^2 = k!\Gamma(k+1) = (k!)^2$.

Potrivit Teoremei 5.12.4

$$A_i = \frac{a_n d_{n-1}^2}{a_{n-1} Q_n'(x_i) Q_{n-1}(x_i)} = -\frac{[(n-1)!]^2}{L_n'(x_i) L_{n-1}(x_i)}.$$

P 5.10 Să se arate că șirul polinoamelor $(Q_n)_{n \in \mathbb{N}}$ definit prin formulele de recurență

$$\begin{aligned} Q_0(x) &= 1 \\ Q_1(x) &= 2x \\ Q_{n+1}(x) &= 2xQ_n(x) - Q_{n-1}(x) \end{aligned}$$

definește un șir de polinoame ortogonale în $[-1, 1]$ cu ponderea $\rho(x) = \sqrt{1-x^2}$.

R. Fie $x \in [-1, 1]$ fixat. Interpretând formula de recurență ca o ecuație cu diferențe, ecuația caracteristică $r^2 - 2xr + 1 = 0$ are soluțiile $r = x \pm i\sqrt{1-x^2}$. Pentru $x = \cos t$, se deduce $Q_n(x) = C_1 \cos nt + C_2 \sin nt$. Condițiile inițiale conduc la $C_1 = 1$ și $C_2 = \frac{\cos t}{\sin t}$, de unde $Q_n(x) = \frac{\sin(n+1)t}{\sin t}$. Pentru $k \neq n$ rezultă

$$\int_{-1}^1 \sqrt{1-x^2} Q_n(x) Q_k(x) dx = \int_0^\pi \sin(n+1)t \sin(k+1)t dt = 0.$$

P 5.11 Fie $\tilde{\mathbb{P}}_n = \{P \in \mathbb{P}_n : P(x) = x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_{n-1} x + a_n; P \in \mathbb{R}[X]\}$. Să se arate că:

1.

$$\inf_{P \in \tilde{\mathbb{P}}_n} \sup_{x \in [-1, 1]} |P(x)| = \sup_{x \in [-1, 1]} \left| \frac{1}{2^{n-1}} T_n(x) \right| = \frac{1}{2^{n-1}}.$$

2.

$$\inf_{P \in \tilde{\mathbb{P}}_n} \int_{-1}^1 P^2(x) dx = \int_{-1}^1 L_n^2(x) dx = \frac{2}{2n+1},$$

$$\text{unde } L_n(x) = \frac{n!}{(2n)!} [(x^2 - 1)^n]^{(n)}.$$

R. 1. $\sup_{x \in [-1, 1]} \left| \frac{1}{2^{n-1}} T_n(x) \right| = \frac{1}{2^{n-1}}$. Presupunând prin absurd că există $P \in \tilde{\mathbb{P}}_n$ astfel încât $\sup_{x \in [-1, 1]} |P(x)| < \frac{1}{2^{n-1}}$ funcția $R(x) = P(x) - \frac{1}{2^{n-1}} T_n(x) \in \mathbb{P}_{n-1}$ avea n rădăcini situate în intervalele $[x_k, x_{k+1}]$, $k \in \{0, \dots, n-1\}$, unde $x_k = \cos \frac{k\pi}{n}$. $R(x_k) = P(x_k) - \frac{(-1)^k}{2^{n-1}}$.

2. Orice polinom $P \in \tilde{\mathbb{P}}_n$ se poate reprezenta sub forma $P(x) = \sum_{k=0}^{n-1} a_k L_k(x) + L_n(x)$, $a_0, \dots, a_{n-1} \in \mathbb{R}$. Ținând seama de ortogonalitatea polinoamelor lui Legendre, are loc egalitatea

$$\int_{-1}^1 P^2(x) dx = \int_{-1}^1 L_n^2(x) dx + \sum_{k=0}^{n-1} a_k^2 \int_{-1}^1 L_k^2(x) dx.$$

P 5.12 Să se arate că

$$\frac{x}{e^x - 1} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{B_k}{k!} x^k,$$

unde B_k , $k \in \mathbb{N}$ sunt numerele lui Bernoulli.

SCHEIBER ERNEST

SCHEIBER ERNEST

SCHEIBER ERNEST

SCHEIBER ERNEST

SCHEIBER ERNEST SCHEIBER ERNEST

SCHEIBER ERNEST SCHEIBER ERNEST

Capitolul 6

Rezolvarea numerică a problemelor Cauchy

Ne ocupăm de rezolvarea numerică a problemei Cauchy

$$\begin{cases} \dot{x}(t) - f(t, x(t)) = 0, & t \in [0, T] \\ \dot{x}(0) = x^0 \end{cases} \quad (6.1)$$

unde $f : [0, T] \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ este o funcție cu proprietăți care să asigure existența și unicitatea soluției în intervalul precizat.

Problema Cauchy se rescrie sub forma operațională

$$\mathcal{L}(x) = \varphi, \quad (6.2)$$

unde $\mathcal{L} : C^1[0, T] \rightarrow C[0, T] \times \mathbb{R}^n$ este definit prin

$$\mathcal{L}(x) = \begin{cases} \dot{x}(t) - f(t, x(t)), & t \in [0, T] \\ \dot{x}(0) = x^0 \end{cases},$$

iar

$$\varphi = \begin{cases} 0, & t \in [0, T] \\ x^0 \end{cases}.$$

Forma operațională (6.2) cuprinde o clasă mult mai largă de probleme și constituie un cadru în care se pot formula și studia metode de rezolvare aproximativă.

Pentru simplitate, considerăm forma operațională (6.2) ca o ecuație având necunoscuta x , o funcție reală ($n = 1$), definită în intervalul fixat $[0, T]$.

6.1 Metode de discretizare

Rezolvarea prin discretizare a ecuației (6.2) constă în construirea unei aproximații

$$u_h = (u_0, u_1, \dots, u_n)$$

a soluției $x(t)$ pe o rețea de puncte $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n = T$, unde u_i este o aproximație pentru $x(t_i)$, $i = 0, 1, \dots, n$ iar h reprezintă norma rețelei de puncte $h = \max_{0 \leq i \leq n-1} t_{i+1} - t_i$.

În acest scop ecuația inițială se înlocuiește cu o altă ecuație

$$\mathcal{L}_h(u_h) = \varphi_h, \quad (6.3)$$

numită schemă de calcul.

Exemplu. Schema de calcul Euler. fie $n \in \mathbb{N}^*$, $h = \frac{T}{n}$ și rețeaua echidistantă $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n = T$ cu $t_i = ih$, $i = 0, 1, \dots, n$. În punctul t_i , aproximăm derivata funcției prin diferența finită progresivă

$$\dot{x}(t_i) \simeq \frac{x(t_i + h) - x(t_i)}{h} = \frac{x(t_{i+1}) - x(t_i)}{h}$$

și substituim în ecuația diferențială (6.1). Membrul stâng al ecuației (6.1) devine

$$\frac{x(t_{i+1}) - x(t_i)}{h} - f(t_i, x(t_i))$$

care în general nu mai este 0. Notăm prin u_0, u_1, \dots, u_n numerele care puse, respectiv în locul necunoscutelor $x(t_0), x(t_1), \dots, x(t_n)$ satisfac egalitățile

$$\begin{cases} \frac{u_{i+1} - u_i}{h} - f(t_i, u_i) = 0, & i = 0, 1, \dots, n-1 \\ u_0 = x^0 \end{cases} . \quad (6.4)$$

Relațiile (6.4) reprezintă schema de calcul Euler.

În acest caz operatorul \mathcal{L} este definit prin

$$\mathcal{L}_h(u_h) = \begin{cases} \frac{u_{i+1} - u_i}{h} - f(t_i, u_i), & i = 0, 1, \dots, n-1 \\ u_0 \end{cases}, \quad u_h = (u_0, \dots, u_n),$$

iar

$$\varphi_h = \begin{cases} 0, & i = 0, 1, \dots, n-1 \\ x^0 \end{cases} .$$

Relațiile (6.4) formează totodată un sistem algebric de $n + 1$ ecuații neliniare cu $n + 1$ necunoscute care însă se poate rezolva ușor prin recurență

$$\begin{aligned} u_0 &= x^0 \\ u_{i+1} &= u_i + hf(t_i, u_i) \quad i = 0, 1, \dots, n-1. \end{aligned}$$

Problema care se ridică este de a vedea în ce condiții ansamblul de numere u_h reprezintă aproximații "rezonabile" pentru $x(t_0), x(t_1), \dots, x(t_n)$.

Să presupunem că \mathcal{L} este definit între spațiile normate $(X, \|\cdot\|)$ și $(Y, \|\cdot\|)$, iar \mathcal{L}_h este definit între $(X_h, \|\cdot\|_h)$ și $(Y_h, \|\cdot\|_h)$.

Soluția u_h a ecuației $\mathcal{L}_h(u_h) = \varphi_h$ converge către soluția x a ecuației $\mathcal{L}(x) = \varphi$ dacă

$$\lim_{h \downarrow 0} \|u_h - [x]_h\|_h = 0,$$

unde $[x]_h = (x(t_0), x(t_1), \dots, x(t_n))$ reprezintă restricția lui x la rețeaua de puncte. Dacă există constantele pozitive C și α astfel încât $\|u_h - [x]_h\|_h \leq Ch^\alpha$ atunci convergența este de ordin α .

Studiul convergenței soluției aproximative este legat de proprietățile de consistență și stabilitate ale schemei de calcul.

Schema de calcul $\mathcal{L}_h(u_h) = \varphi_h$ este consistentă dacă

$$\lim_{h \downarrow 0} \|\delta\varphi_h\|_h = 0,$$

unde $\delta\varphi_h = \mathcal{L}_h([x]_h) - \varphi_h$. Dacă există constantele C_1 și α astfel încât $\|\delta\varphi_h\|_h \leq C_1 h^\alpha$ atunci schema de calcul este consistentă de ordin α .

Schema de calcul $\mathcal{L}_h(u_h) = \varphi_h$ este stabilă dacă există constantele pozitive C_2, h_0 și δ astfel încât

$$\forall h \in (0, h_0), \forall \varepsilon_h \in Y_h, \|\varepsilon_h\|_h \leq \delta \Rightarrow \|y_h - z_h\|_h \leq C_2 \|\varepsilon_h\|_h,$$

unde y_h și z_h verifică relațiile $\mathcal{L}_h(z_h) = \mathcal{L}_h(y_h) + \varepsilon_h$.

Legătura dintre cele trei noțiuni introduse este formulată în teorema următoare:

Teorema 6.1.1 Dacă schema de calcul $\mathcal{L}_h(u_h) = \varphi_h$ este stabilă și consistentă de ordin α atunci convergența este de ordin α .

Demonstrație. Deoarece schema de calcul este consistentă de ordin α au loc relațiile $\mathcal{L}_h[x]_h = \varphi_h + \delta\varphi_h$ și $\|\delta\varphi_h\|_h \leq C_1 h^\alpha$.

Pentru h suficient de mic, dacă $\mathcal{L}_h u_h = \varphi_h$, din stabilitatea schemei de calcul urmează că $\|[x]_h - u_h\|_h \leq C_2 \|\delta \varphi_h\|_h \leq C_1 C_2 h^\alpha$, de unde rezultă convergența de ordin α a schemei de calcul. ■

În cazul schemelor de calcul liniare, (adică cu operatorul \mathcal{L}_h liniar), stabilitatea se poate caracteriza prin

Teorema 6.1.2 *Dacă operatorul \mathcal{L}_h este liniar atunci schema de calcul $\mathcal{L}_h u_h = \varphi_h$ este stabilă dacă și numai dacă există o constantă $C \geq 0$ astfel încât*

$$\|u_h\|_h \leq C \|\varphi_h\|_h, \quad \forall \varphi_h \in Y_h.$$

Demonstrație. În ipoteza stabilității, există $h_0, \delta, C > 0$ astfel încât dacă $h \in (0, h_0), \varepsilon_h \in Y_h, \|\varepsilon_h\|_h \leq \delta, \mathcal{L}_h(u_h) = \varphi_h, \mathcal{L}_h(z_h) = \varphi_h + \varepsilon_h$ atunci $\|z_h - u_h\|_h \leq C \|\varepsilon_h\|_h$. Din liniaritatea schemei de calcul rezultă $\mathcal{L}_h(z_h - u_h) = \varepsilon_h$.

Rescriem aceasta implicație prin: dacă $\varphi_h \in Y_h, \|\varphi_h\|_h \leq \delta, \mathcal{L}_h(u_h) = \varphi_h$ atunci $\|u_h\|_h \leq C \|\varphi_h\|_h$.

Fie $\varphi_h \in Y_h$. Dacă $\|\varphi_h\|_h \leq \delta$ atunci inegalitatea teoremei este verificată. Dacă $\|\varphi_h\|_h > \delta$ atunci pentru $\tilde{\varphi}_h = \frac{\delta}{2\|\varphi_h\|_h} \varphi_h, \mathcal{L}_h(u_h) = \tilde{\varphi}_h$ au loc relațiile $\|\tilde{\varphi}_h\|_h = \frac{\delta}{2}$ și în consecință $\|\tilde{u}_h\|_h \leq C \|\tilde{\varphi}_h\|_h$ de unde, pentru $u_h = \frac{2}{\delta} \tilde{u}_h$ se deduc relațiile $\mathcal{L}_h(u_h) = \varphi_h$ și $\|u_h\|_h \leq C \|\varphi_h\|_h$.

Implicația inversă este imediată. ■

În cele ce urmează vom studia schema de calcul Euler. În \mathbb{R}^{n+1} folosim norma lui Cebâșev $\|x\| = \max\{|x_1|, \dots, |x_{n+1}|\}$. Au loc următoarele rezultate:

Teorema 6.1.3 *Dacă funcția f admite derivate parțiale de ordinul întâi mărginite, atunci schema de calcul este consistentă de ordinul întâi.*

Demonstrație. Existența derivatelor parțiale ale funcției f asigură existența derivatei de ordinul al doilea a soluției problemei Cauchy (6.1), iar din mărginirea derivatelor parțiale rezultă existența unei constante $M_2 > 0$, astfel încât $|\ddot{x}(t)| \leq M_2, \forall t \in [0, T]$.

Din egalitățile $x(t_{i+1}) = x(t_i + h) = x(t_i) + h\dot{x}(t_i) + \frac{h^2}{2}\ddot{x}(c_i), c_i \in (t_i, t_{i+1}), i \in \{0, 1, \dots, n-1\}$, rezultă

$$\frac{x(t_{i+1}) - x(t_i)}{h} = \dot{x}(t_i) + \frac{h}{2}\ddot{x}(c_i), \quad i \in \{0, 1, \dots, n-1\}.$$

Atunci

$$\mathcal{L}([x]_h) = \begin{cases} \frac{x(t_{i+1}) - x(t_i)}{h} - f(t_i, x(t_i)), & i \in \{0, 1, \dots, n-1\} \\ x(t_0) \end{cases} =$$

$$\begin{aligned}
&= \begin{cases} \frac{h}{2}\ddot{x}(c_i), & i \in \{0, 1, \dots, n-1\} \\ 0 & \end{cases} = \\
&= \begin{cases} 0, & i \in \{0, 1, \dots, n-1\} \\ x^0 & \end{cases} + \begin{cases} \frac{h}{2}\ddot{x}(c_i), & i \in \{0, 1, \dots, n-1\} \\ 0 & \end{cases}.
\end{aligned}$$

Recunoaștem φ_h în primul termen și în consecință al doilea termen este $\delta\varphi_h$. Prin urmare

$$\|\delta\varphi_h\| = \max_{0 \leq i \leq n-1} \frac{h}{2} |\ddot{x}(c_i)| \leq \frac{M_2}{2} h. \quad \blacksquare$$

Pentru demonstrarea stabilității schemei de calcul Euler vom avea nevoie de următorul rezultat:

Teorema 6.1.4 *Dacă termenii șirului de numere reale, nenegative $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ satisfac inegalitățile*

$$z_{n+1} \leq az_n + b, \quad n \in \mathbb{N},$$

cu $a, b > 0, a > 1$ atunci

$$z_n \leq a^n z_0 + b \frac{a^n - 1}{a - 1} \leq a^n \left(z_0 + \frac{b}{a - 1} \right).$$

Demonstrație. Au loc inegalitățile

$$\begin{aligned}
z_n &\leq az_{n-1} + b \leq a(az_{n-2} + b) + b = a^2 z_{n-2} + b(1 + a) \leq \\
&\leq a^n z_0 + b(1 + a + \dots + a^{n-1}) = a^n z_0 + b \frac{a^n - 1}{a - 1}. \quad \blacksquare
\end{aligned}$$

Teorema 6.1.5 *Dacă funcția f este lipschitziană în x , adică există $L > 0$, astfel încât $|f(t, x) - f(t, y)| \leq L|x - y|, \forall x, y \in \mathbb{R}$ atunci schema de calcul Euler este stabilă.*

Demonstrație. Fie $\varepsilon_n = \begin{cases} \varepsilon_i & i \in \{0, 1, \dots, n-1\} \\ \varepsilon & \end{cases}$ și sistemele $\mathcal{L}_h(u_h) = \varphi_h, \mathcal{L}_h(z_h) = \varphi_h + \varepsilon_h$:

$$\begin{cases} \frac{u_{i+1} - u_i}{h} - f(t_i, u_i) = 0, & i = 0, 1, \dots, n-1 \\ u_0 = x^0 \end{cases}. \quad (6.5)$$

$$\begin{cases} \frac{z_{i+1} - z_i}{h} - f(t_i, z_i) = \varepsilon_i, & i = 0, 1, \dots, n-1 \\ z_0 = x^0 + \varepsilon \end{cases}. \quad (6.6)$$

Introducem vectorul $w_h = z_h - u_h = (w_i)_{0 \leq i \leq n}$ și scăzând ecuațiile lui (6.5) din ecuațiile corespunzătoare lui (6.6) găsim

$$\begin{cases} \frac{w_{i+1} - w_i}{h} - [f(t_i, z_i) - f(t_i, u_i)] = \varepsilon_i, & i = 0, 1, \dots, n-1 \\ w_0 = \epsilon \end{cases} \quad (6.7)$$

Atunci

$$w_{i+1} = w_i + h[f(t_i, z_i) - f(t_i, u_i)] + h\varepsilon_i \quad i \in \{0, 1, \dots, n-1\}.$$

În normă, vom avea

$$|w_{i+1}| \leq |w_i| + h|f(t_i, z_i) - f(t_i, u_i)| + h|\varepsilon_i| \leq (1 + hL)|w_i| + h\|\varepsilon_h\|_h,$$

unde $\|\varepsilon_h\|_h = \max\{|\varepsilon_0|, \dots, |\varepsilon_{n-1}|, |\varepsilon|\}$. Utilizând inegalitatea Teoremei 6.1.4 obținem

$$\begin{aligned} |w_i| &\leq (1 + hL)^i \left(|w_0| + \frac{h\|\varepsilon_h\|_h}{(1 + hL) - 1} \right) \leq e^{ihL} \left(1 + \frac{1}{L} \right) \|\varepsilon_h\|_h \leq \\ &\leq e^{TL} \left(1 + \frac{1}{L} \right) \|\varepsilon_h\|_h, \quad i \in \{0, 1, \dots, n\}. \end{aligned}$$

Din inegalitatea de mai sus deducem

$$\|z_h - u_h\|_h = \|w_h\|_h = \max_{0 \leq i \leq n} |w_i| \leq e^{TL} \left(1 + \frac{1}{L} \right) \|\varepsilon_h\|_h,$$

adică inegalitatea din definiția stabilității. Constanta C corespunzătoare este $e^{TL} \left(1 + \frac{1}{L} \right)$. ■

Din consistența și stabilitatea schemei de calcul Euler deducem teorema de convergență:

Teorema 6.1.6 *Dacă*

1. funcția f este lipschitziană în x , adică există $L > 0$ astfel încât $|f(t, x) - f(t, y)| \leq L|x - y|$, $\forall x, y$.
2. Soluția problemei Cauchy (6.1) este de două ori derivabilă, având derivata de ordinul doi mărginită, $|\ddot{x}(t)| \leq M$, $\forall t \in [0, T]$;

atunci soluția discretă construită cu ajutorul schemei de calcul Euler converge către soluția problemei lui Cauchy, ordinul de convergență fiind 1.

Mai mult are loc următoarea formulă de evaluare *a priori* a erorii

$$\|u_h - [u]_h\| \leq \frac{M_2}{2} e^{TL} \left(1 + \frac{1}{L}\right) h \quad (6.8)$$

O demonstrație directă a teoremei de convergență 6.1.6 este

Notăm $x_i = x(t_i)$ și $e_i = x_i - u_i$, $i = 0, 1, \dots, n$. Observăm că $e_0 = 0$. Au loc relațiile

$$x_{i+1} = x(t_{i+1}) = x(t_i + h) = x(t_i) + h\dot{x}(t_i) + \frac{h^2}{2}\ddot{x}(\xi_i) =$$

$$x_i + hf(t_i, x_i) + \frac{h^2}{2}\ddot{x}(\xi_i)$$

și

$$u_{i+1} = u_i + hf(t_i, u_i)$$

din care, prin scădere, obținem

$$e_{i+1} = e_i + h[f(t_i, x_i) - f(t_i, u_i)] + \frac{h^2}{2}\ddot{x}(\xi_i).$$

Aplicând valoarea absolută, rezultă

$$\begin{aligned} |e_{i+1}| &\leq |e_i| + h|f(t_i, x_i) - f(t_i, u_i)| + \frac{h^2}{2}|\ddot{x}(\xi_i)| \leq \\ &\leq |e_i| + hL|x_i - u_i| + \frac{h^2}{2}M = (1 + hL)|e_i| + \frac{h^2}{2}M. \end{aligned}$$

Folosind Teorema 6.1.4 rezultă

$$|e_i| \leq (1 + hL)^i [|e_0| + \frac{h^2}{2}M] \leq e^{ihL} \frac{M}{2L} h \leq e^{TL} \frac{M}{2L} h.$$

Prin urmare

$$\|[x]_h - u_h\| = \max\{|e_i| : i = 0, 1, \dots, n\} \leq e^{ihL} \frac{M}{2L} h \leq e^{TL} \frac{M}{2L} h. \quad \blacksquare$$

Aplicație. Să se calculeze utilizând schema de calcul Euler valoarea funcției $x(t)$ în punctul $t = \frac{1}{75}$ cu eroarea $\varepsilon = 0.01$, știind că $x(t)$ este soluția problemei Cauchy

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = \frac{1}{2} - \frac{1}{3}tx^2, \\ \dot{x}(0) = x^0. \end{cases}$$

Nu se ține seama de erorile de rotunjire.

Să presupunem că $f(t, x) = \frac{1}{2} - \frac{1}{3}tx^2$ este definită în pătratul $D = [0, 1] \times [0, 1]$. Atunci $\sup\{|f(t, x)| : (t, x) \in D\} \leq \frac{5}{6}$ și potrivit teoremei de existență și unicitate, problema Cauchy are soluție unică în intervalul $|t| \leq \min\{1, \frac{6}{5}\} = 1$.

Alegem $T = 1$. Determinăm parametrii L și M care intervin în Teorema 6.1.6.

$$|f(t, x) - f(t, y)| = \frac{1}{3}|t||x^2 - y^2| \leq \frac{2}{3}|x - y|.$$

Alegem $L = 1$.

$$\begin{aligned} \ddot{x}(t) &= \frac{d}{dt}f(t, x(t)) = \frac{d}{dt}\left[\frac{1}{2} - \frac{1}{3}tx^2(t)\right] = \\ &= -\frac{1}{3}[x^2(t) + 2tx(t)\dot{x}(t)] = -\frac{1}{3}x^2(t) - \frac{1}{3}tx(t) + \frac{2}{9}t^2x^3(t). \end{aligned}$$

Urmează că

$$\sup\{|\ddot{x}(t)| : |t| \leq 1\} \leq \frac{8}{9}.$$

Alegem $M = \frac{8}{9}$.

Trebuie să determinăm pasul $h > 0$ astfel încât să existe $p \in \mathbb{N}$ care să satisfacă relațiile

$$ph = \frac{1}{75}$$

și

$$|u_p - x(t_p)| \leq \|u_h - [x]_h\| \leq e^{TL} \frac{M}{2L} h \leq 3^{TL} \frac{M}{2L} h < \varepsilon.$$

Rezultă că p este cel mai mic număr natural care satisface inegalitatea

$$h = \frac{1}{75p} \leq \frac{2L\varepsilon}{3^{TL}M}.$$

Substituind cu valori numerice, găsim $p = 2$ și deci $h = \frac{1}{150}$. În final

$$\begin{aligned} u_0 &= 0, \\ u_1 &= u_0 + hf(t_0, u_0) = \frac{1}{300}, \\ u_2 &= u_1 + hf(t_1, u_1) \simeq 0.0067. \end{aligned}$$

6.2 Scheme de calcul de tip Runge - Kutta

Pentru rezolvarea problemei Cauchy (6.1) considerăm schema de calcul

$$\begin{cases} \frac{u_{i+1} - u_i}{h} - F_m(h, t_i, u_i; f) = 0 & i = 0, 1, \dots, n-1 \\ u_0 = x^0 \end{cases} \quad (6.9)$$

$$= x(t+h) - x(t) - h[p_1 f(t, x(t)) + p_2 f(t + \alpha_2 h, x(t) + \beta_{21} h f(t, x(t)))] = 0.$$

Presupunem că soluția problemei Cauchy admite toate derivatele necesare calculelor următoare. Calculăm

$$\begin{aligned} \varphi'_2(h) &= \dot{x}(t+h) - [p_1 f(t, x(t)) + p_2 f(t + \alpha_2 h, x(t) + \beta_{21} h f(t, x(t)))] - \\ &\quad - h p_2 \left[\frac{\partial f}{\partial t} \alpha_2 + \frac{\partial f}{\partial x} \beta_{21} f(t, x(t)) \right],^1 \\ \varphi''_2(h) &= \ddot{x}(t+h) - 2p_2 \left[\frac{\partial f}{\partial t} \alpha_2 + \frac{\partial f}{\partial x} \beta_{21} f(t, x(t)) \right] - \\ &\quad - h p_2 \left[\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} \alpha_2^2 + 2 \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial x} \alpha_2 \beta_{21} f(t, x(t)) + \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \beta_{21}^2 f^2(t, x(t)) \right]. \end{aligned}$$

Rezultă

$$\begin{aligned} \varphi_2(0) &= 0; \\ \varphi'_2(0) &= \dot{x}(t) - p_1 f(t, x(t)) - p_2 f(t, x(t)) = (1 - p_1 - p_2) f(t, x(t)); \\ \varphi''_2(0) &= \ddot{x}(t) - 2p_2 \left[\alpha_2 \frac{\partial f}{\partial x}(t, x(t)) + \frac{\partial f}{\partial t}(t, x(t)) \beta_{21} f(t, x(t)) \right] = \\ &= (1 - 2p_2 \alpha_2) \frac{\partial f}{\partial t}(t, x(t)) + (1 - 2p_2 \beta_{21}) \frac{\partial f}{\partial x}(t, x(t)) f(t, x(t)). \end{aligned}$$

$h = 0$ este soluție triplă dacă coeficienții termenilor care conțin pe f și derivatele sale parțiale sunt nule. Obținem sistemul algebric neliniar

$$\begin{aligned} 1 - p_1 - p_2 &= 0 \\ 1 - 2p_2 \alpha_2 &= 0 \\ 1 - 2p_2 \beta_{21} &= 0 \end{aligned}$$

Două soluții ale acestui sistem sunt:

1. $p_1 = 0, p_2 = 1, \alpha_2 = \beta_{21} = \frac{1}{2}$. În acest caz schema de calcul este

$$\begin{cases} \frac{u_{i+1} - u_i}{h} - f\left(t_i + \frac{h}{2}, u_i + \frac{h}{2} f(t_i, u_i)\right) = 0 & i = 0, 1, \dots, n-1 \\ u_0 = x^0 \end{cases} \quad (6.11)$$

și este cunoscută sub numele de schema Euler îmbunătățită.

2. $p_1 = p_2 = \frac{1}{2}, \alpha_2 = \beta_{21} = 1$. Schema de calcul este

$$\begin{cases} \frac{u_{i+1} - u_i}{h} - \frac{1}{2} f(t_i, u_i) - \frac{1}{2} f(t_{i+1}, u_i + h f(t_i, u_i)) = 0 & i = 0, 1, \dots, n-1 \\ u_0 = x^0 \end{cases}$$

¹Pentru simplificare ometem scrierea argumentelor.

Tabelele Butcher corespunzătoare sunt

0	0	0
$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
	0	1

0	0	0
1	1	0
	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$

Pentru $m = 4$ se obține schema de calcul Runge

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{u_{i+1} - u_i}{h} - \frac{1}{6}[k_1(h) + 2k_2(h) + 2k_3(h) + k_4(h)] = 0, \quad i = 0, 1, \dots, n-1 \\ k_1(h) = f(t_i, u_i) \\ k_2(h) = f(t_i + \frac{h}{2}, u_i + \frac{h}{2}k_1(h)) \\ k_3(h) = f(t_i + \frac{h}{2}, u_i + \frac{h}{2}k_2(h)) \\ k_4(h) = f(t_i + h, u_i + hk_3(h)) \\ u_0 = x^0 \end{array} \right. \quad (6.12)$$

cu tabela Butcher

0	0	0	0	0
$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	0	0
$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	0	0
1	$\frac{1}{2}$	0	1	0
	$\frac{1}{6}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{6}$

Pentru a justifica stabilitatea schemei de calcul de tip Runge – Kutta stabilim

Teorema 6.2.1 Dacă funcția $f(t, x)$ este lipschitziană în x ($\exists L > 0$, astfel încât $|f(t, x) - f(t, y)| \leq L|x - y|$, $\forall x, y \in \mathbb{R}$) atunci funcția $F_m(h, t, x; f)$ este lipschitziană în x .

Demonstrație. Pentru simplitate, considerăm $m = 2$, adică

$$F_m(h, t, x; f) = F_2(h, t, x; f) = p_1 f(t, x) + p_2 f(t + \alpha_2 h, x + \beta_{2,1} h f(t, x)).$$

În acest caz

$$\begin{aligned} & |F_2(h, t, y; f) - F_2(h, t, x; f)| \leq \\ & \leq |p_1| |f(t, y) - f(t, x)| + |p_2| |f(t + \alpha_2 h, y + \beta_{2,1} h f(t, y)) - f(t + \alpha_2 h, x + \beta_{2,1} h f(t, x))|. \end{aligned}$$

Datorită ipotezei făcute rezultă succesiv

$$|F_2(h, t, y; f) - F_2(h, t, x; f)| \leq$$

$$\begin{aligned} &\leq |p_1| L|y - x| + |p_2| L|y + \beta_{2,1}hf(t, y) - x - \beta_{2,1}hf(t, x)| \leq \\ &\leq L(|p_1| + |p_2| + |\beta_{2,1}|hL)|y - x| \leq M|y - x|, \end{aligned}$$

unde $M = L(|p_1| + |p_2| + |\beta_{2,1}|hL)$. ■

Prin urmare are loc o teoremă de stabilitate a cărei demonstrație este identică cu demonstrația Teoremei 6.1.5.

Teorema 6.2.2 *Dacă funcția f este lipschitziană în x , adică există $L > 0$, astfel încât $|f(t, x) - f(t, y)| \leq L|x - y|, \forall x, y \in \mathbb{R}$ atunci o schemă de calcul de tip Runge - Kutta este stabilă.*

În consecință

Teorema 6.2.3 *Dacă*

- funcția $f(t, x)$ este lipschitziană în x ;
- schema de calcul de tip Runge - Kutta este consistentă de ordin p

atunci atunci soluția discretă construită cu ajutorul schemei de calcul de tip Runge - Kutta converge către soluția problemei lui Cauchy, ordinul de convergență fiind p .

6.3 Scheme de calcul de tip Adams

Ecuția diferențială (6.1) este echivalentă cu ecuația integrală

$$x(t) = x(\tilde{t}) + \int_{\tilde{t}}^t f(s, x(s))ds \quad 0 \leq \tilde{t} < t \leq T.$$

Ideea schemelor de calcul de tip Adams constă în înlocuirea funcției $\varphi(s) = f(s, x(s))$ printr-un polinom de interpolare

$$N_r(\varphi)(s) = \sum_{i=0}^r (t-a)(t-a+h) \dots (t-a+(i-1)h) \frac{\nabla_h^i \varphi(a)}{i!h^i}.$$

Soluția aproximativă u satisface ecuația

$$u(t) = u(\tilde{t}) + \int_{\tilde{t}}^t N_r(\varphi)(s)ds. \quad (6.13)$$

Fie $h = \frac{T}{n}$ și rețraua de puncte echidistante $t_i = ih$, $i = 0, 1, \dots, n$. Particularizăm relația (6.13) luând t, \tilde{t}, a egale, respectiv cu t_{k+p}, t_{k-q}, t_k și obținem

$$u_{k+p} = u_{k-q} + \sum_{i=0}^r \frac{\nabla_h^i \varphi(t_k)}{i!h^i} \int_{t_{k-q}}^{t_{k+p}} (s-t_k)(s-t_k+h) \dots (s-t_k+(i-1)h) ds, \quad (6.14)$$

unde $u_i = u(t_i)$, $i = 0, 1, \dots, n$.

Prin schimbarea de variabilă $s - t_k = zh$ integrala din (6.14) devine

$$\int_{t_{k-q}}^{t_{k+p}} (s-t_k)(s-t_k+h) \dots (s-t_k+(i-1)h) ds = h^{i+1} \int_{-q}^p z(z+1) \dots (z+i-1) dz.$$

Înlocuind în (6.14) găsim

$$u_{k+p} = u_{k-q} + \sum_{i=0}^r \frac{h^{i+1} \nabla_h^i \varphi(t_k)}{i!h^i} \int_{-q}^p z(z+1) \dots (z+i-1) dz.$$

sau

$$u_{k+p} = u_{k-q} + \sum_{i=0}^r \alpha_i \nabla_h^i \varphi(t_k),$$

unde

$$\begin{aligned} \alpha_0 &= p+q \\ \alpha_i &= \frac{1}{i!} \int_{-q}^p z(z+1) \dots (z+i-1) dz, \quad i = 1, 2, \dots, r. \end{aligned}$$

Utilizând formula de dezvoltare a diferențelor finite regresive obținem

$$u_{k+p} = u_{k-q} + h \sum_{i=0}^r \alpha_i \sum_{j=0}^i \binom{i}{j} (-1)^j \varphi(t_k - j),$$

unde $\varphi(t_j) = f(t_j, u_j)$. Permutând însumările găsim

$$u_{k+p} = u_{k-q} + h \sum_{j=0}^r \beta_j f(t_{k-j}, u_{k-j}), \quad (6.15)$$

cu

$$\beta_j = (-1)^j \left[\binom{j}{j} \alpha_j + \binom{j+1}{j} \alpha_{j+1} + \dots + \binom{r}{j} \alpha_r \right]. \quad (6.16)$$

Cazuri particulare importante. 1. *Schema Adams - Bashforth.* Particularizăm (6.15), alegând $p = 1, q = 0$. Se obțin relațiile

$$u_{k+1} = u_k + h \sum_{j=0}^r \beta_j f(t_{k-j}, u_{k-j}), \quad k = r, \dots, n-1; \quad (6.17)$$

unde β_j sunt dați de formulele (6.16) cu $\alpha_0 = 1, \alpha_i = \frac{1}{i!} \int_0^1 z(z+1)\cdots(z+i-1)dz$.
Tabelul coeficienților β_j .

	Numărător						Numitor
$r j$	0	1	2	3	4	5	
1	3	-1					2
2	23	-16	5				12
3	55	-59	37	-9			24
4	1901	-2774	2616	-1274	251		720
5	4277	-7927	9982	-7298	2877	-475	1440

2. *Schema Adams - Moulton*. Alegând $p = 0, q = 1$ în (6.15) se obțin formulele

$$u_k = u_{k-1} + h \sum_{j=0}^r \beta_j f(t_{k-j}, u_{k-j}), \quad k = r - 1, \dots, n; \quad (6.18)$$

unde β_j sunt dați de formulele (6.16) cu $\alpha_0 = 1, \alpha_i = \frac{1}{i!} \int_{-1}^0 z(z+1)\cdots(z+i-1)dz$.
Tabelul coeficienților β_j .

	Numărător						Numitor
$r j$	0	1	2	3	4	5	
1	1	1					2
2	5	8	-1				12
3	9	19	-5	1			24
4	251	646	264	106	-19		720
5	475	1427	-798	482	-173	27	1440

Schema de calcul Adams - Bashforth este *explicită* în sensul că în formula (6.17), elementele membrului drept sunt cunoscute și u_{k+1} se calculează nemijlocit.

Schema de calcul Adams - Moulton este *implicită* în sensul că în formula (6.18), pentru $j = 0$ apare factorul $f(t_k, u_k)$, iar u_k este necunoscut. Astfel u_k se obține ca soluția unei ecuații.

Schemele de tip Adams se numesc scheme de calcul *cu mai mulți pași (multi-pas)*, în timp ce schemele de calcul de tip Runge - Kutta sunt scheme *cu un singur pas (unipas)*. Un avantaj din punct de vedere al calculelor pentru schemele de calcul de tip Adams este faptul că folosesc valorile lui f doar în nodurile anterioare,

în timp ce la schemele de calcul de tip Runge - Kutta este nevoie de valorile lui f în diverse puncte intermediare.

Pentru pornirea unei scheme de calcul de tip adams trebuie cunoscute în prealabil u_0, u_1, \dots, u_r , aproximații care se determină pe o altă cale - de exemplu utilizând o schemă de calcul de tip Runge - Kutta. Determinarea acestor valori se numește *procedeu inițial*.

Pentru a studia consistența unei scheme de calcul de tip Adams rescriem formula (6.15) sub forma

$$a_p u_{k+p} + a_{p-1} u_{k+p-1} + \dots + a_0 u_k - \quad (6.19)$$

$$-h[b_p f(t_{k+p}, u_{k+p}) + b_{p-1} f(t_{k+p-1}, u_{k+p-1}) + \dots + b_0 f(t_k, u_k)] = 0.$$

Fie x soluția problemei Cauchy și presupunând că au loc dezvoltările Tayloriene

$$\begin{aligned} x_{k+s} &= x_k + \frac{sh}{1!} \dot{x}_k + \frac{(sh)^2}{2!} \ddot{x}_k + \dots \\ \dot{x}_{k+s} &= \dot{x}_k + \frac{sh}{1!} \ddot{x}_k + \frac{(sh)^2}{2!} x_k^{(3)} + \dots \end{aligned}$$

atunci

$$\begin{aligned} &a_p x_{k+p} + a_{p-1} x_{k+p-1} + \dots + a_0 x_k - \\ &-h[b_p f(t_{k+p}, x_{k+p}) + b_{p-1} f(t_{k+p-1}, x_{k+p-1}) + \dots + b_0 f(t_k, x_k)] = \\ &a_p x_{k+p} + a_{p-1} x_{k+p-1} + \dots + a_0 x_k - h[b_p \dot{x}_{k+p} + b_{p-1} \dot{x}_{k+p-1} + \dots + b_0 \dot{x}_k] = \\ &= C_0 x_k + C_1 h \dot{x}_k + C_2 h^2 \ddot{x}_k + \dots + C_m h^m x_k^{(m)} + \dots \end{aligned}$$

unde

$$\begin{aligned} C_0 &= a_0 + a_1 + \dots + a_p \\ C_1 &= C_0 = a_1 + 2a_2 + \dots + pa_p - (b_0 + b_1 + \dots + b_p) \\ C_2 &= \frac{1}{2!}(a_1 + 2^2 a_2 + \dots + p^2 a_p) - (b_1 + 2b_2 + \dots + pb_p) \\ C_m &= \frac{1}{m!}(a_1 + 2^m a_2 + \dots + p^m a_p) - \frac{1}{(m-1)!}(b_1 + 2^{m-1} b_2 + \dots + p^{m-1} b_p). \end{aligned}$$

Schema de calcul de tip Adams (6.19) este consistentă de ordin m dacă $C_0 = C_1 = \dots = C_m = 0$ și $C_{m+1} \neq 0$.

Exemplificăm în cazul schemei de calcul Adams - Bashforth cu $r = 1$

$$u_{k+1} = u_k + h\left[\frac{3}{2}f(t_k, u_k) - \frac{1}{2}f(t_{k-1}, u_{k-1})\right].$$

Schema de calcul se rescrie sub forma

$$u_{k+2} - u_{k+1} - h\left[\frac{3}{2}f(t_{k+1}, u_{k+1}) - \frac{1}{2}f(t_k, u_k)\right] = 0$$

deci $p = 2$ și $a_2 = 1, a_1 = -1, a_0 = 0, b_2 = 0, b_1 = \frac{3}{2}, b_0 = \frac{1}{2}$. Rezultă

$$\begin{aligned} C_0 &= a_0 + a_1 + a_2 = 0 \\ C_1 &= a_1 + 2a_2 - (b_0 + b_1 + b_2) = 0 \\ C_2 &= \frac{1}{2}(a_1 + 2^2a_2) - (b_1 + 2b_2) = 0 \\ C_3 &= \frac{1}{3!}(a_1 + 2^3a_2) - \frac{1}{2}(b_1 + 2^2b_2) = \frac{5}{12}. \end{aligned}$$

6.4 Schema de calcul predictor - corector

Schemele de tip predictor - corector se obțin prin combinarea dintre două scheme de tip Adams: una explicită

$$u_{k+1} = u_k + h \sum_{i=0}^p a_i f(t_{k-j}, u_{k-j}), \quad k \geq p$$

și una implicită

$$u_{k+1} = u_k + h \sum_{j=0}^q b_j f(t_{k+1-j}, u_{k+1-j}), \quad k \geq q - 1.$$

Se valorifică astfel proprietățile schemei de calcul implicite într-o procedură explicită de calcul. Procedura $P(EC)^mE$ de combinarea celor două scheme, pentru un pas $k \geq s = \max\{p, q - 1\}$, este

P: $u_{k+1}^0 = u_k + h \sum_{i=0}^p a_i f(t_{k-j}, u_{k-j});$

Pentru $s=1:m$ executa

| E: Calculează $f_{k+1}^{s-1} = f(t_{k+1}, u_{k+1}^{s-1})$
 | C: $u_{k+1}^s = u_k + hb_0 f_{k+1}^{s-1} + h \sum_{j=1}^q b_j f(t_{k+1-j}, u_{k+1-j}),$

| □

E: $u_{k+1} = u_{k+1}^m; f_{k+1} = f(t_{k+1}, u_{k+1})$

Așadar, pentru pornirea schemei de tip predictor - corector este nevoie de determinarea aproximațiilor u_0, u_1, \dots, u_s (procedeul inițial).

Pentru procedura $PECE$ ($m = 1$) are loc următoarea teoremă simplă de convergență:

Teorema 6.4.1 *Dacă*

- funcția $f(t, x)$ este lipschitziană în x ; $\exists L > 0$ astfel încât $|f(t, y) - f(t, x)| \leq L|y - x|, \forall x, y \in \mathbb{R}$;

- *procedeuul inițial este convergent, adică $\lim_{h \rightarrow 0} \max_{0 \leq i \leq s} |x_i - u_i| = 0$;*
- *schemele de calcul de Adams explicită și implicită utilizate sunt consistente*

atunci soluția discretă construită cu ajutorul schemei de calcul de tip predictor–corector converge către soluția problemei lui Cauchy.

Demonstrație. Procedura PECE a schema de calcul predictor–corector se poate scrie prin

$$u_{k+1}^* = u_k + h \sum_{i=0}^p a_i f(t_{k-j}, u_{k-j}), \quad (6.20)$$

$$u_{k+1} = u_k + h b_0 f(t_{k+1}, u_{k+1}^*) + h \sum_{j=1}^q b_j f(t_{k+1-j}, u_{k+1-j}). \quad (6.21)$$

pentru $k \in \{s, \dots, n-1\}$. Consistența celor două scheme de calcul de tip Adams cu care s-a construit schema de calcul predictor corector se exprimă prin existența numerelor $\alpha, \beta \in \mathbb{N}^*$ și $C_1, C_2 > 0$ astfel încât

$$x_{k+1} = x_k + h \sum_{i=0}^p a_i f(t_{k-j}, x_{k-j}) + h^{\alpha+1} \tau_{k+1}^*, \quad (6.22)$$

$$x_{k+1} = x_k + h \sum_{j=0}^q b_j f(t_{k+1-j}, x_{k+1-j}) + h^{\beta+1} \tau_{k+1} \quad (6.23)$$

pentru $k \in \{s, \dots, n-1\}$ și

$$\max_j |\tau_j^*| \leq C_1 \quad \max_j |\tau_j| \leq C_2.$$

Dacă $x_{k+1}^* \stackrel{def}{=} x_{k+1} - h^{\alpha+1} \tau_{k+1}^*$ atunci egalitatea (6.22) devine

$$x_{k+1}^* = x_k + h \sum_{i=0}^p a_i f(t_{k-j}, x_{k-j}). \quad (6.24)$$

Introducem notațiile

$$\begin{aligned} e_j^* &= x_j^* - u_j^*, & e_j &= x_j - u_j, \\ A &= \sum_{i=0}^p |a_i|, & B &= \sum_{j=0}^q |b_j|, \\ w_j &= \max\{|e_0|, \dots, |e_j|\}. \end{aligned}$$

Scăzând (6.20) din (6.24) și (6.21) din (6.23) obținem respectiv

$$\begin{aligned} e_{k+1}^* &= e_k + h \sum_{i=0}^p a_i [f(t_{k-j}, x_{k-j}) - f(t_{k-i}, u_{k-i})] \\ e_{k+1} &= e_k + hb_0 [f(t_{k+1}, x_{k+1}) - f(t_{k+1}, u_{k+1}^*)] + \\ &\quad + h \sum_{j=1}^q b_j [f(t_{k+1-j}, x_{k+1-j}) - f(t_{k+1-j}, u_{k+1-j})] + h^{\beta+1} \tau_{k+1} \end{aligned}$$

În valoare absolută, din egalitățile de mai sus rezultă

$$\begin{aligned} |e_{k+1}^*| &\leq |e_k| + h \sum_{i=0}^p |a_i| |f(t_{k-j}, x_{k-j}) - f(t_{k-i}, u_{k-i})| \leq \\ &\leq |e_k| + hL \sum_{i=0}^p |a_i| |e_{k-i}|, \end{aligned} \quad (6.25)$$

$$\begin{aligned} |e_{k+1}| &\leq |e_k| + h|b_0| |f(t_{k+1}, x_{k+1}) - f(t_{k+1}, u_{k+1}^*)| + \\ &\quad + h \sum_{j=1}^q |b_j| |f(t_{k+1-j}, x_{k+1-j}) - f(t_{k+1-j}, u_{k+1-j})| + h^{\beta+1} |\tau_{k+1}| \leq \\ &\leq |e_k| + h|b_0|L|x_{k+1} - u_{k+1}^*| + hL \sum_{j=1}^q |b_j| |e_{k-j+1}| + C_2 h^{\beta+1} \end{aligned} \quad (6.26)$$

Ținând seama de definiția lui x_{k+1}^* și de (6.25) deducem

$$\begin{aligned} |x_{k+1} - u_{k+1}^*| &\leq |x_{k+1} - x_{k+1}^*| + |x_{k+1}^* - u_{k+1}^*| = h^{\alpha+1} |\tau_{k+1}^*| + |e_{k+1}^*| \leq \\ &\leq C_1 h^{\alpha+1} + |e_k| + hL \sum_{i=0}^p |a_i| |e_{k-i}|. \end{aligned}$$

Utilizăm această inegalitate în (6.26) care devine

$$\begin{aligned} |e_{k+1}| &\leq |e_k| + h|b_0|L(C_1 h^{\alpha+1} + |e_k| + hL \sum_{i=0}^p |a_i| |e_{k-i}|) + \\ &\quad + hL \sum_{j=1}^q |b_j| |e_{k-j+1}| + C_2 h^{\beta+1}. \end{aligned}$$

Folosind definiția lui w_k și aranjând termenii deducem

$$|e_{k+1}| \leq (1 + hLB + h^2 L^2 |b_0| A) w_k + C_1 L |b_0| h^{\alpha+2} + C_2 h^{\beta+1}. \quad (6.27)$$

Prin urmare

$$w_{k+1} \leq (1 + hLB + h^2L^2|b_0|A)w_k + C_1L|b_0|h^{\alpha+2} + C_2h^{\beta+1}.$$

Potricit Teoremei 6.1.4, inegalitățile anterioare implică

$$\begin{aligned} w_k &\leq (1 + hLB + h^2L^2|b_0|A)^k(w_0 + \frac{C_1L|b_0|h^{\alpha+2} + C_2h^{\beta+1}}{(1 + hLB + h^2L^2|b_0|A) - 1}) \leq \\ &\leq e^{hk(LB+hL^2|b_0|A)}(w_s + \frac{C_1h^{\alpha+1}|b_0|L + C_2h^\beta}{LB}) \leq \\ &\leq e^{T(LB+TL^2|b_0|A)}(w_s + \frac{C_1h^{\alpha+1}|b_0|L + C_2h^\beta}{LB}). \end{aligned}$$

Din ultima inegalitate deducem

$$\begin{aligned} \|[x]_h - u_h\|_h &= \max_{0 \leq i \leq n} |x_i - u_i| = \max_{0 \leq i \leq n} |e_i| = w_n \leq \\ &\leq e^{T(LB+TL^2|b_0|A)}(w_s + \frac{C_1h^{\alpha+1}|b_0|L + C_2h^\beta}{LB}) \rightarrow 0, \end{aligned}$$

when $h \rightarrow 0$. ■

Observație. Dacă considerăm schemele de calcul ca formule matriceale atunci ele se pot utiliza la integrarea problemelor Cauchy corespunzătoare sistemelor de ecuații diferențiale.

6.5 A-stabilitatea schemelor de calcul

A-stabilitatea permite evaluarea tăriei unei scheme de calcul pentru rezolvarea unei probleme Cauchy. Pentru definirea acestei noțiuni se consideră problem de test

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \lambda x, & \lambda \in C, \\ x(0) &= x^0 \end{aligned} \tag{6.28}$$

a cărei soluție este $x(t) = e^{\lambda t}x^0$. Dacă $\Re\lambda < 0$ atunci $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = 0$.

Aplicăm schema de calcul $\mathcal{L}_h u_h = f_h$ pentru rezolvarea problemei (6.28).

Se numește *domeniu de A-stabilitate* mulțimea elementelor $z = \lambda h \in C$, $h > 0$, $\lambda \in C$ cu proprietatea că soluția $u_h = (u_i)_{0 \leq i \leq n_h}$ a schemei de calcul este mărginită pentru orice $h > 0$.

Schema de calcul $\mathcal{L}_h u_h = f_h$ este *A-stabilă* dacă semiplanul $\{z \in C : \Re z < 0\}$ este inclus în domeniul de A-stabilitate a schemei de calcul.

Aplicând o schemă de calcul de tip Runge-Kutta problemei (6.28) se obține o relație de forma

$$u_{i+1} = R(z)u_i \quad z = \lambda h.$$

Funcția $R(z)$ se numește funcția de stabilitate.

O schemă de calcul de tip Runge-Kutta este *tare A-stabilă* dacă

1. este A-stabilă;
2. $\lim_{z \rightarrow \infty} |R(z)| < 1$.

O schemă de calcul de tip Runge-Kutta este *L A-stabilă* dacă

1. este A-stabilă;
2. $\lim_{z \rightarrow \infty} |R(z)| = 0$.

Aplicații. Analizăm natura A-stabilității mai multor scheme de calcul.

1. Schema de calcul Euler (6.4). Dacă substituim $f(t_i, u_i) = \lambda u_i$ în (6.4) atunci deducem formula de recurență $u_{i+1} = (1 + \lambda h)u_i = (1 + z)u_i$ de unde rezultă că $u_i = (1 + z)^i u_0$. Prin urmare funcția de stabilitate este $R(z) = 1 + z$. Șirul $(u_i)_{i \in \mathbb{N}}$ este mărginit doar dacă $|R(z)| = |1 + z| \leq 1$. Mulțimea de A-stabilitate este în acest caz discul cu centrul în -1 și rază 1 (Fig. 1).
2. Schema de calcul Euler îmbunătățită (6.11). Analog se obține $R(z) = 1 + z + \frac{z^2}{2}$. Mulțimea de A-stabilitate este interiorul domeniului delimitat de conturul punctiform din Fig. 1.
3. Schema de calcul Runge - Kutta (m=4), (6.12). În acest caz $R(z) = 1 + z + \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{6} + \frac{z^4}{24}$ iar mulțimea de A-stabilitate este domeniul mărginit de linia întreruptă din Fig. 1.

Observăm că nici una din schemele de calcul de tip Runge - Kutta explicită nu este A-stabilă.

4. În cazul schemei de calcul implicite

$$\begin{cases} \frac{u_i - u_{i-1}}{h} - f(t_i, u_i) = 0, & i = 1, 1, \dots, n \\ u_0 = x^0 \end{cases},$$

pentru problema de test deducem

$$u_i = \frac{1}{1 - \lambda h} u_{i-1} = \frac{1}{1 - z} u_{i-1} = \left(\frac{1}{1 - z} \right)^i u_0.$$

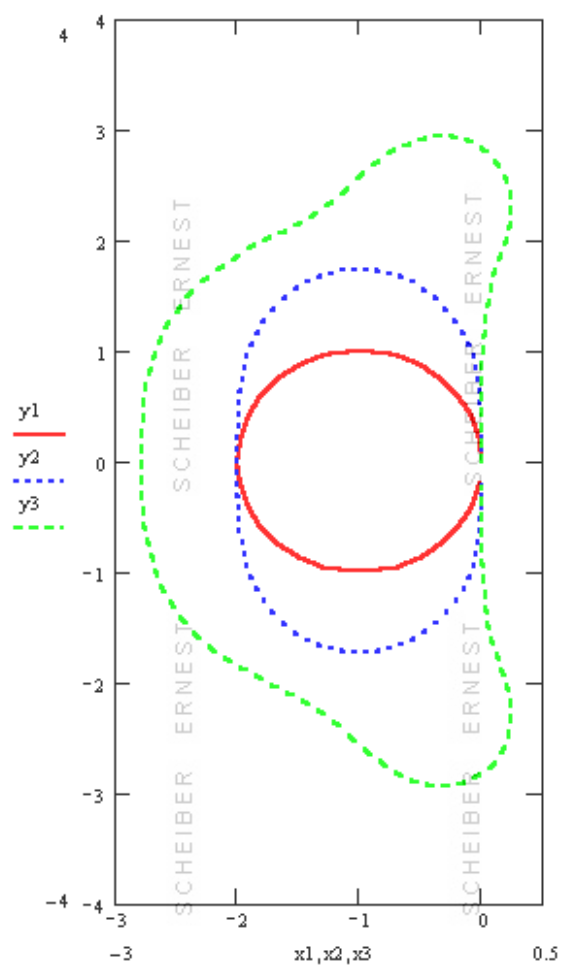


Fig. 1. Mulțimea de A-stabilitate a schemelor Runge–Kutta.

Din condiția de mărginirea șirului $(u_i)_i : |\frac{1}{1-z}| \leq 1$, obținem că mulțimea de A-stabilitate este $|z - 1| \geq 1$, adică exteriorul discului cu centrul în 1 și de rază 1. Astfel această schemă de calcul este A-stabilă.

5. Utilizând schemă de calcul de tip Adams scrisă sub forma

$$a_p u_{k+p} + a_{p-1} u_{k+p-1} + \dots + a_0 u_k -$$

$$-h[b_p f(t_{k+p}, u_{k+p}) + b_{p-1} f(t_{k+p-1}, u_{k+p-1}) + \dots + b_0 f(t_k, u_k)] = 0.$$

pentru rezolvarea problemei test ajungem la ecuația cu diferențe

$$(a_p - zb_p)u_{k+p} + (a_{p-1} - zb_{p-1})u_{k+p-1} + \dots + (a_1 - zb_1)u_{k+1} + (a_0 - zb_0)u_k = 0.$$

Ecuația caracteristică corespunzătoare este

$$\rho(x) - z\sigma(x) = 0$$

unde

$$\begin{aligned}\rho(x) &= a_p x^p + a_{p-1} x^{p-1} + \dots + a_1 x + a_0, \\ \sigma(x) &= b_p x^p + b_{p-1} x^{p-1} + \dots + b_1 x + b_0.\end{aligned}$$

Soluția ecuației cu diferențe este mărginită dacă are loc *condiția rădăcinii*: Rădăcinile polinomului caracteristic sunt în modul subunitare, iar cele de modul 1 sunt rădăcini simple.

Fig. 2 și Fig. 3 prezintă frontierele mulțimilor de A-stabilitate pentru schemele de calcul Adams – Bashforth ($r=1,2,3,4$) și respectiv Adams – Moulton ($r=2,3,4$). În fiecare caz mulțimea de A-stabilitate este exteriorul domeniului marginit de curbele desenate.

Din analiza graficelor se observă că nici una din schemele de calcul de tip Adams tratate nu este A-stabilă.

Detalii privind construirea acestor grafice se găsesc în Anexa C.

6.6 Rezolvarea unui sistem algebric de ecuații neliniare prin integrarea unei probleme Cauchy

Reducem rezolvarea unui sistem algebric de ecuații neliniare

$$\begin{cases} f_1(x_1, \dots, x_n) & = 0 \\ \dots\dots\dots \\ f_n(x_1, \dots, x_n) & = 0 \end{cases} \quad (6.29)$$

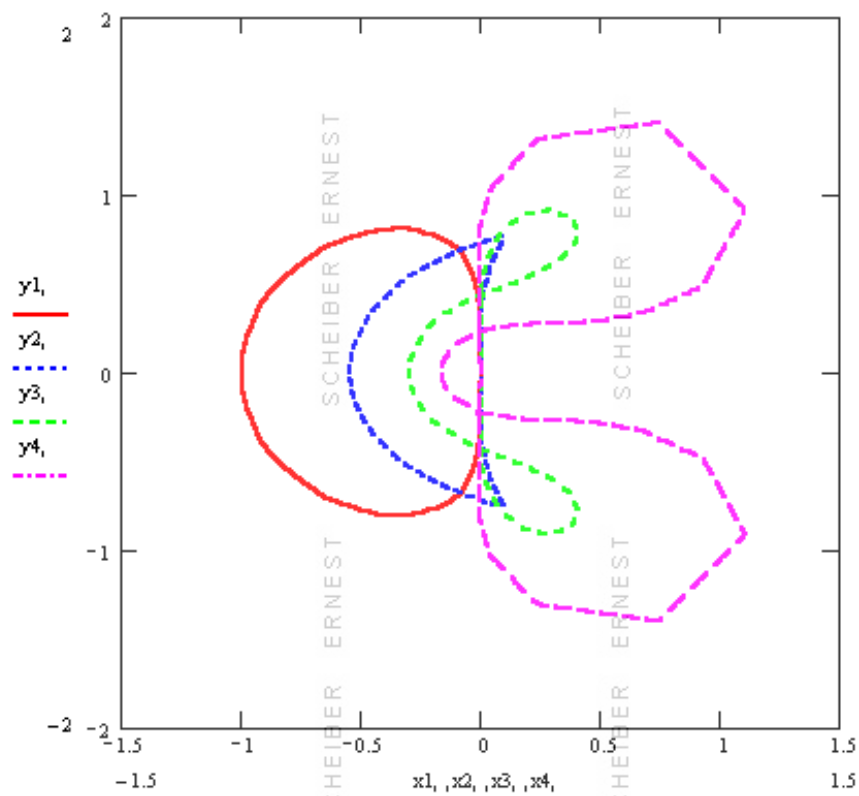


Fig. 2. Mulțimea de A-stabilitate a schemelor Adams–Bashforth.

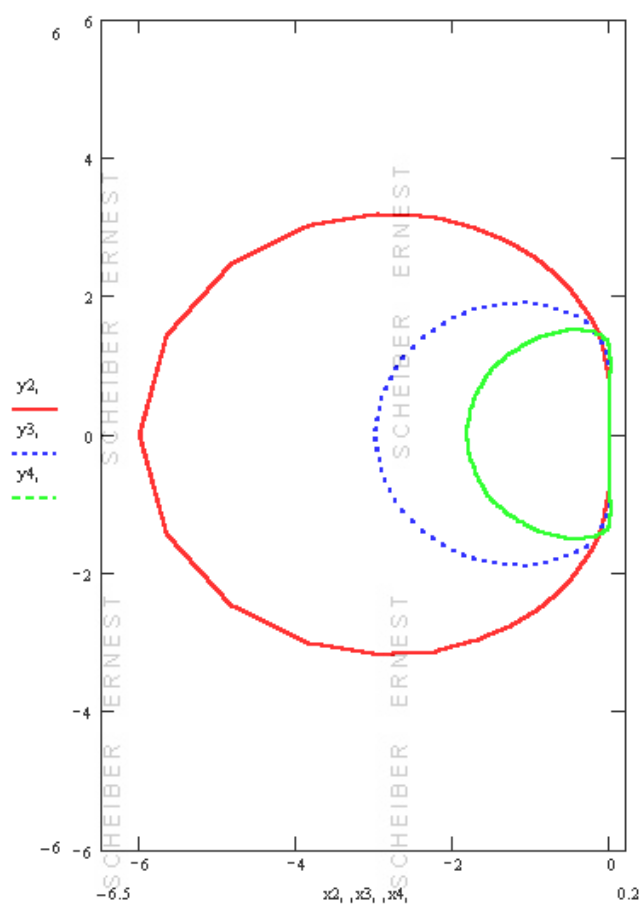


Fig. 3. Mulțimea de A-stabilitate a schemelor Adams–Moulton.

la integrarea unei probleme Cauchy. Pentru simplificarea scrierii rescriem sistemul (6.29) sub formă concentrată $f(x) = 0$ cu

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \quad f(x) = \begin{pmatrix} f_1(x_1, \dots, x_n) \\ \vdots \\ f_n(x_1, \dots, x_n) \end{pmatrix}.$$

Indicăm două variante de transformare a sistemului $f(x) = 0$ la integrarea unei probleme Cauchy de forma

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= \varphi(t, x(t)), \\ x(0) &= x^0. \end{aligned}$$

Varianta 1. Fie $x^0 \in R^n$ și $\varphi(t, x) = f(x) - (1-t)f(x^0)$. Dacă x_* este o soluție a sistemului (6.29) atunci

$$\varphi(0, x^0) = 0 \quad \text{și} \quad \varphi(1, x_*) = 0.$$

Fie $x(t)$ o curbă din R^n care unește x^0 cu x_* astfel încât

$$\varphi(t, x(t)) = 0, \quad t \in [0, 1]. \quad (6.30)$$

Derivând (6.30) găsim

$$\frac{d}{dt} \varphi(t, x(t)) = f'_x(x(t)) \dot{x}(t) + f(x^0) = 0,$$

de unde

$$\dot{x}(t) = -[f'_x(x(t))]^{-1} f(x^0) - \frac{1}{1-t} [f'_x(x(t))]^{-1} f(x(t)), \quad t \in [0, 1).$$

În concluzie, rezolvarea sistemului algebric de ecuații neliniare $f(x) = 0$ revine la integrarea problemei Cauchy

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -\frac{1}{1-t} [f'_x(x)]^{-1} f(x), \quad t \in [0, 1); \\ x(0) &= x^0. \end{aligned}$$

Varianta 2. Dacă $\varphi(t, x) = f(x) - e^{-t} f(x^0)$ atunci

$$\varphi(0, x^0) = 0 \quad \text{și} \quad \lim_{t \rightarrow \infty} \varphi(t, x_*) = 0.$$

Procedând analog, fie $x(t)$ o curbă din R^n ce unește x^0 și x_* și care satisface egalitatea $\varphi(t, x(t)) = 0$, $t \geq 0$. În urma derivării se deduce problema Cauchy

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -[f'_x(x)]^{-1} f(x), \quad t > 0; \\ x(0) &= x^0. \end{aligned}$$

Probleme și teme de seminar

P 6.1 Pentru rezolvarea problemei Cauchy

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= \varphi(t, x(t)) & t \in [0, T], \\ x(0) &= x^0\end{aligned}$$

se consideră schema de calcul implicită

$$\begin{cases} \frac{u_i - u_{i-1}}{h} - \varphi(t_i, u_i) = 0 & i = 1, 2, \dots, n, \\ u_0 = x^0. \end{cases} \quad (h = \frac{T}{n})$$

1. Să se studieze consistența schemei de calcul.
2. În ipoteza în care funcția φ este lipschitziană în x , să se demonstreze stabilitatea schemei de calcul.

P 6.2 Pentru rezolvarea problemei Cauchy

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= \varphi(t, x(t)), & t \in [0, T], \\ x(0) &= x^0;\end{aligned}$$

se consideră schema de calcul a termenului median

$$\begin{cases} \frac{u_{i+1} - u_{i-1}}{2h} - \varphi(t_i, u_i) = 0, & i = 1, 2, \dots, n-1, \\ u_0 = x^0, \\ u_1 \text{ se calculează printr-un procedeu inițial.} \end{cases} \quad (h = \frac{T}{n})$$

1. Să se studieze consistența schemei de calcul.
2. În ipoteza în care funcția φ este lipschitziană în x , să se demonstreze stabilitatea schemei de calcul.

P 6.3 Pentru rezolvarea problemei bilocale liniare

$$\begin{aligned}\ddot{x}(t) - p(t)\dot{x}(t) - q(t)x(t) &= r(t), & t \in [a, b], \\ x(a) &= \alpha, \\ x(b) &= \beta;\end{aligned}$$

se consideră schema de calcul

$$\begin{cases} \frac{u_{i+1} - 2u_i + u_{i-1}}{h^2} - p(t_i)\frac{u_{i+1} - u_{i-1}}{2h} - q(t_i)u_i = r(t_i), & i = 1, 2, \dots, n-1, \\ u_0 = \alpha, \\ u_n = \beta, \end{cases} \quad (h = \frac{b-a}{n})$$

unde $p, q, r \in C[a, b]$.

1. Să se studieze consistența schemei de calcul.
2. În ipoteza $q(t) \geq q_* > 0$, să se demonstreze stabilitatea schemei de calcul.
3. În ipoteza $q(t) \geq q_* > 0$, să se demonstreze că scheme de calcul are soluție unică.

P 6.4 Pentru rezolvarea problemei bilocale neliniare

$$\begin{aligned} \ddot{x}(t) &= f(t, x(t)), & t \in [0, T], \\ x(a) &= \alpha, \\ x(b) &= \beta; \end{aligned}$$

se consideră schema de calcul

$$\begin{cases} \frac{u_{i+1} - 2u_i + u_{i-1}}{h^2} = f(t_i, u_i), & i = 1, 2, \dots, n-1, & (h = \frac{T}{n}) \\ u_0 = \alpha, \\ u_n = \beta. \end{cases}$$

1. Să se arate că dacă șirul $(w_i)_{0 \leq i \leq n}$ satisface condițiile

$$\begin{aligned} w_0 &\leq 0 \\ w_{i+1} - (2 + a_i)w_i + w_{i-1} &= b_i \quad i = 1, 2, \dots, n-1, & a_i, b_i \geq 0 \\ w_n &\leq 0 \end{aligned}$$

atunci $w_i \leq 0, \forall i \in \{0, 1, \dots, n\}$.

2. Să se demonstreze ca dacă $\sup_{t \in [0, T]} |x^{(4)}| \leq M_4 < +\infty$ și $\frac{\partial f(t, x)}{\partial x} \geq 0, \forall (t, x) \in [0, T] \times R$, atunci

$$|x_i - u_i| \leq \frac{M_4 h^2}{24} t_i (T - t_i) \leq \frac{M_4 h^2 T^2}{96} \quad \forall i \in \{0, 1, \dots, n\}.$$

SCHEIBER ERNEST SCHEIBER ERNEST

SCHEIBER ERNEST SCHEIBER ERNEST

Capitolul 7

Metoda celor mai mici pătrate

Problema aproximării unei funcții printr-o altă funcție dintr-o clasă *convenabilă* prin metoda celor mai mici pătrate este prezentată în mai multe ipostaze.

7.1 Construirea unei funcții de aproximare prin metoda celor mai mici pătrate

Cazul discret. Reluăm problema aproximării unei funcții cunoscută prin valorile y_1, y_2, \dots, y_n date respectiv în punctele x_1, x_2, \dots, x_n , distincte două câte două.

Pentru n mare, aproximația dată de o funcție de interpolare este improprie utilizării în cazul în care interesează expresia funcției obținute. Un alt mod de aproximare este furnizat de metoda celor mai mici pătrate.

Fie $m \in \mathbb{N}, m < n$. O funcție $F(x, c_1, \dots, c_m)$, fixată de parametrii c_1, \dots, c_m reprezintă o aproximație construită prin metoda celor mai mici pătrate dacă

$$\begin{aligned} & \sum_{k=1}^n [F(x_k, c_1, \dots, c_m) - y_k]^2 = \\ & = \inf \left\{ \sum_{k=1}^n [F(x_k, \lambda_1, \dots, \lambda_m) - y_k]^2 \quad : \quad \lambda_1, \dots, \lambda_m \in \mathbb{R} \right\} \end{aligned}$$

Ansamblul format din parametrii (c_1, \dots, c_m) definește un punct de minim al funcției

$$\Phi(\lambda_1, \dots, \lambda_m) = \sum_{k=1}^n [F(x_k, \lambda_1, \dots, \lambda_m) - y_k]^2, \quad (7.1)$$

și este o soluție a sistemului algebric (condiția necesară de optimalitate)

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \lambda_i} = 0, \quad i = 1, 2, \dots, m. \quad (7.2)$$

Studiem **cazul liniar**. Fie $\varphi_1(x), \dots, \varphi_m(x)$ funcții liniar independente și

$$F(x, \lambda_1, \dots, \lambda_m) = \lambda_1 \varphi_1(x) + \dots + \lambda_m \varphi_m(x).$$

În acest caz, sistemul (7.2) devine un sistem algebric de m ecuații liniare cu m necunoscute

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \lambda_i}(c_1, \dots, c_m) = 2 \sum_{k=1}^n [c_1 \varphi_1(x_k) + \dots + c_m \varphi_m(x_k) - y_k] \varphi_i(x_k) = 0, \quad (7.3)$$

$$i = 1, 2, \dots, m.$$

Utilizând notațiile

$$a_{i,j} = \sum_{k=1}^n \varphi_i(x_k) \varphi_j(x_k) \quad b_i = \sum_{k=1}^n y_k \varphi_i(x_k) \quad (7.4)$$

sistemul (7.3) se scrie

$$\sum_{j=1}^m a_{i,j} c_j = b_i \quad i = 1, 2, \dots, m. \quad (7.5)$$

Matricea $(a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq m}$ a coeficienților dați de formula (7.4) se numește matricea Gram asociată problemei de aproximare prin metoda celor mai mici pătrate considerată.

Astfel pentru obținerea aproximației dorite trebuie parcurși următorii pași:

1. Se alege $m \in \mathbb{N}^*$ și funcțiile liniar independente $\varphi_1(x), \dots, \varphi_m(x)$.
2. Se calculează, conform formulelor (7.4) coeficienții $(a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq m}$ și $(b_i)_{1 \leq i \leq m}$.
3. Se rezolvă sistemul algebric de ecuații liniare (7.5), rezultând coeficienții c_1, c_2, \dots, c_m .
4. Se formează funcția de aproximare

$$F(x, c_1, \dots, c_m) = c_1 \varphi_1(x) + \dots + c_m \varphi_m(x).$$

Expresia funcției de aproximare poate fi pus sub o formă matriceală. Fie matricele U și Y definite prin

$$U = \begin{pmatrix} \varphi_1(x_1) & \varphi_1(x_2) & \dots & \varphi_1(x_n) \\ \varphi_2(x_1) & \varphi_2(x_2) & \dots & \varphi_2(x_n) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \varphi_m(x_1) & \varphi_m(x_2) & \dots & \varphi_m(x_n) \end{pmatrix} \quad Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \dots \\ y_n \end{pmatrix}.$$

Prin calcul direct obținem egalitățile matriceale

$$U \cdot U^T = \left(\sum_{k=1}^n \varphi_i(x_k) \varphi_j(x_k) \right)_{1 \leq i, j \leq m} = (a_{i,j})_{1 \leq i, j \leq m}$$

și

$$U \cdot Y = \left(\sum_{k=1}^n \varphi_i(x_k) y_k \right)_{1 \leq i \leq m} = (b_i)_{1 \leq i \leq m}.$$

Sistemul (7.5) se poate scrie

$$U \cdot U^T \cdot \begin{pmatrix} c_1 \\ \dots \\ c_m \end{pmatrix} = U \cdot Y;$$

de unde

$$\begin{pmatrix} c_1 \\ \dots \\ c_m \end{pmatrix} = (U \cdot U^T)^{-1} \cdot U \cdot Y,$$

iar expresia funcției de aproximare este

$$F(x) = \left\langle (U \cdot U^T)^{-1} \cdot U \cdot Y, \begin{pmatrix} \varphi_1(x) \\ \dots \\ \varphi_m(x) \end{pmatrix} \right\rangle,$$

unde prin $\langle \cdot, \cdot \rangle$ s-a notat produsul scalar din \mathbb{R}^n .

Fie vectorii

$$u_i = \begin{pmatrix} \varphi_i(x_1) \\ \varphi_i(x_2) \\ \vdots \\ \varphi_i(x_n) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n \quad i \in \{1, \dots, m\}.$$

Teorema 7.1.1 Dacă vectorii u_1, \dots, u_m sunt liniar independenți atunci matricea sistemului algebric de ecuații liniare (7.5) este nesingulară.

Demonstrația 1. Aplicând vectorilor liniar independenți u_1, \dots, u_m procedeul de ortogonalizare Gram - Schmidt obținem vectorii

$$v_i = \sum_{p=1}^m \alpha_{i,p} u_p = [u_1 \dots u_m] \begin{pmatrix} \alpha_{i,1} \\ \vdots \\ \alpha_{i,m} \end{pmatrix}, \quad i \in \{1, \dots, m\},$$

astfel încât $v_i^T v_j = \delta_{i,j}, \forall i, j \in \{1, \dots, m\}$, unde $\delta_{i,j}$ reprezintă simbolul lui Kronecker. Ansamblul acestor relații se poate scrie matriceal

$$V = [v_1 \dots v_m] = [u_1 \dots u_m] \Phi = U^T \Phi \quad \text{unde } \Phi = \begin{pmatrix} \alpha_{1,1} & \dots & \alpha_{m,1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{1,m} & \dots & \alpha_{m,m} \end{pmatrix}.$$

Datorită condițiilor de ortogonalitate $V^T V = I_m$. Pe de altă parte $V^T V = \Phi^T U U^T \Phi$. În consecință $|\Phi^T U U^T \Phi| = |\Phi|^2 |U U^T| = 1$, deci $|U U^T| \neq 0$. ■

Demonstrația 2. Matricea $U U^T$ este simetrică și pozitivă. Este suficient să se arate că este strict pozitivă, caz în care $U U^T c = 0 \Rightarrow c = 0$.

Liniar independența liniilor lui U , adică a coloanelor lui U^T se exprimă prin

$$\sum_{i=1}^m c_i u_i^T = 0 \quad \Rightarrow c = (c_1 \dots c_m)^T = 0$$

sau

$$U^T c = 0 \Rightarrow c = 0 \quad \text{sau} \quad c \neq 0 \Rightarrow U^T c \neq 0.$$

Prin urmare $\langle U U^T c, c \rangle = \|U^T c\|_2^2 > 0, \forall c \in \mathbb{R}^m, c \neq 0$.

Are loc și proprietatea reciprocă, dacă matricea $U U^T$ este nesingulară, deci strict pozitivă, atunci liniile lui U sunt liniar independente. Într-adevăr, dacă $U^T c = 0$ atunci $U U^T c = 0$ și în consecință $c = 0$. ■

Utilizând notațiile introduse, problema inițială se poate reformula prin

$$\Phi(\lambda) = \|y - U^T \lambda\|_2^2 \rightarrow \min, \quad (7.6)$$

unde $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_m)^T$.

Această formă conduce la dezvoltarea rezolvării sistemelor algebrice de ecuații liniare în sensul celor mai mici pătrate.

Cazul neliniar.

Introducem notațiile $r_k(\lambda_1, \dots, \lambda_m) = F(x_k, \lambda_1, \dots, \lambda_m) - y_k$, $k = 1, 2, \dots, n$.

Rescriem funcționala de minimizat (7.1) sub forma

$$f(\lambda) = \frac{1}{2}\Phi(\lambda) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n r_i^2(\lambda) = \frac{1}{2} \|r(\lambda)\|_2^2,$$

unde

$$\lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_m \end{pmatrix} \quad r(\lambda) = \begin{pmatrix} r_1(\lambda) \\ \vdots \\ r_n(\lambda) \end{pmatrix}.$$

Pentru început să calculăm gradientul și hessianul funcției $f(\lambda)$

$$f'(\lambda) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f(\lambda)}{\partial \lambda_1} \\ \vdots \\ \frac{\partial f(\lambda)}{\partial \lambda_m} \end{pmatrix}, \quad H(\lambda) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f(\lambda)}{\partial \lambda_1^2} & \cdots & \frac{\partial^2 f(\lambda)}{\partial \lambda_m \partial \lambda_1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 f(\lambda)}{\partial \lambda_1 \partial \lambda_m} & \cdots & \frac{\partial^2 f(\lambda)}{\partial \lambda_m^2} \end{pmatrix}.$$

În acest scop notăm

$$J(\lambda) = \begin{pmatrix} \frac{\partial r_1(\lambda)}{\partial \lambda_1} & \cdots & \frac{\partial r_1(\lambda)}{\partial \lambda_m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial r_n(\lambda)}{\partial \lambda_1} & \cdots & \frac{\partial r_n(\lambda)}{\partial \lambda_m} \end{pmatrix}, \quad r_k''(\lambda) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 r_k(\lambda)}{\partial \lambda_1^2} & \cdots & \frac{\partial^2 r_k(\lambda)}{\partial \lambda_m \partial \lambda_1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 r_k(\lambda)}{\partial \lambda_1 \partial \lambda_m} & \cdots & \frac{\partial^2 r_k(\lambda)}{\partial \lambda_m^2} \end{pmatrix},$$

$k = 1, 2, \dots, n$.

Din $\frac{\partial f(\lambda)}{\partial \lambda_k} = \sum_{i=1}^n r_i(\lambda) \frac{\partial r_i(\lambda)}{\partial \lambda_k}$ rezultă

$$f'(\lambda) = J^T(\lambda)r(\lambda),$$

iar din $\frac{\partial^2 f(\lambda)}{\partial \lambda_j \partial \lambda_k} = \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial r_i(\lambda)}{\partial \lambda_j} \frac{\partial r_i(\lambda)}{\partial \lambda_k} + r_i(\lambda) \frac{\partial^2 r_i(\lambda)}{\partial \lambda_j \partial \lambda_k} \right)$ rezultă

$$H(\lambda) = J^T(\lambda)J(\lambda) + \sum_{i=1}^n r_i(\lambda)r_i''(\lambda).$$

Rezolvarea sistemului algebric de ecuații neliniare $f'(\lambda) = 0$, (7.2), prin metoda Newton-Kantorovici conduce la șirul de aproximații

$$\lambda^{(k+1)} = \lambda^{(k)} - [H(\lambda^{(k)})]^{-1} f'(\lambda^{(k)}), \quad k \in \mathbb{N}, \quad (7.7)$$

și este cunoscută sub numele de metoda Gauss-Newton.

Utilizarea metodei gradientului pentru minimizarea funcției $f(\lambda)$ conduce la Șirul de aproximații

$$\lambda^{(k+1)} = \lambda^{(k)} - \mu_k f'(\lambda^{(k)}), \quad k \in \mathbb{N}. \quad (7.8)$$

Metoda Levenberg-Marquardt este o combinație empirică a formulelor (7.7) și (7.8)

$$\lambda^{(k+1)} = \lambda^{(k)} - [H(\lambda^{(k)}) + \mu_k \text{diag} H(\lambda^{(k)})]^{-1} f'(\lambda^{(k)}), \quad k \in \mathbb{N}. \quad (7.9)$$

Cazul continuu. Fie $I \subseteq \mathbb{R}$ un interval, $\rho \in C(I)$ o funcție pondere, $\rho(x) > 0$, $\forall x \in I$. În $C(I)$ se definește produsul scalar

$$\langle f, g \rangle = \int_I \rho(x) f(x) g(x) dx.$$

Dându-se $(p_k)_{k \in \mathbb{N}}$ un șir de polinoame ortogonale în intervalul I cu ponderea ρ , numărul $n \in \mathbb{N}$ și $f \in C(I)$, se pune problema determinării polinomului $\varphi(x) = \sum_{k=0}^n c_k p_k(x)$ care minimizează funcționala

$$\varphi \mapsto \|f - \varphi\|_2^2 = \langle f - \varphi, f - \varphi \rangle.$$

Calculăm

$$\begin{aligned} \Phi(c_0, c_1, \dots, c_n) &= \|f - \varphi\|_2^2 = \langle f - \sum_{k=0}^n c_k p_k, f - \sum_{k=0}^n c_k p_k \rangle = \\ &= \langle f, f \rangle - 2 \sum_{k=0}^n c_k \langle f, p_k \rangle + \sum_{k=0}^n c_k^2 \langle p_k, p_k \rangle. \end{aligned}$$

Condițiile de optimalitate sunt

$$\frac{1}{2} \frac{\partial \Phi}{\partial c_i} = -\langle f, p_i \rangle + c_i \langle p_i, p_i \rangle = 0, \quad i = 0, 1, \dots, n.$$

Astfel $c_i = \frac{\langle f, p_i \rangle}{\langle p_i, p_i \rangle}$ și $\varphi(x) = \sum_{k=0}^n \frac{\langle f, p_k \rangle}{\langle p_k, p_k \rangle} p_k$. Utilizând acest rezultat, avem

$$\begin{aligned} \|f - \varphi\|_2^2 &= \langle f, f \rangle - \sum_{k=0}^n \frac{\langle f, p_k \rangle^2}{\langle p_k, p_k \rangle} = \langle f, f \rangle - \langle \varphi, \varphi \rangle = \\ &= \|f\|_2^2 - \|\varphi\|_2^2, \end{aligned} \quad (7.10)$$

relație ce amintește de teorema lui Pitagora.

Teorema 7.1.2 *Dacă $I = [a, b]$ este un interval compact atunci are loc egalitatea lui Parseval*

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\langle f, p_k \rangle^2}{\langle p_k, p_k \rangle} = \|f\|_2^2.$$

Demonstrație. Din (7.10) rezultă convergența seriei $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\langle f, p_k \rangle^2}{\langle p_k, p_k \rangle}$.

Potrivit Teoremei Weierstrass, pentru orice $f \in C[a, b]$ și orice $\varepsilon > 0$ există un polinom P astfel încât $|f(x) - P(x)| < \varepsilon$, $\forall x \in [a, b]$. Atunci

$$\|f - P\|_2^2 = \int_a^b \rho(x)(f(x) - P(x))^2 dx < C\varepsilon^2,$$

unde $C = \int_a^b \rho(x) dx$.

Dacă n este gradul polinomului P , atunci din definiția elementului de aproximare de gradul n , construit prin metoda celor mai mici pătrate, rezultă

$$\|f - \varphi\|_2^2 \leq \|f - P\|_2^2 < C\varepsilon^2$$

și ținând cont de (7.10),

$$0 \leq \|f\|_2^2 - \sum_{k=0}^n \frac{\langle f, p_k \rangle^2}{\langle p_k, p_k \rangle} < C\varepsilon^2,$$

adică $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n \frac{\langle f, p_k \rangle^2}{\langle p_k, p_k \rangle} = \|f\|_2^2$. ■

Teorema anterioară sugerează ideea determinării lui n . Pentru $\varepsilon > 0$ dat, n se determină astfel încât să fie satisfăcută inegalitatea $\|f\|_2^2 - \sum_{k=0}^n \frac{\langle f, p_k \rangle^2}{\langle p_k, p_k \rangle} < \varepsilon$.

7.2 Polinom trigonometric de aproximare construit prin metoda celor mai mici pătrate

Fie $C_{2\pi}$ spațiul liniar al funcțiilor continue, periodice, cu perioada 2π și

$$\mathcal{T}_m = \left\{ T(x) = \frac{\alpha_0}{2} + \sum_{j=1}^m (\alpha_j \cos jx + \beta_j \sin jx) : \alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_m, \beta_1, \dots, \beta_m \in \mathbb{R} \right\}$$

mulțimea polinoamelor trigonometrice de grad m .

Pentru o funcție $f \in C_{2\pi}$ determinăm un polinom trigonometric de grad m ,

$$T_0(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{j=1}^m (a_j \cos jx + b_j \sin jx)$$

astfel încât

$$\int_0^{2\pi} [T_0(x) - f(x)]^2 dx = \inf \left\{ \int_0^{2\pi} [T(x) - f(x)]^2 dx : T \in \mathcal{T}_m \right\}.$$

Notând

$$F(\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_m, \beta_1, \dots, \beta_m) = \int_0^{2\pi} [T(x) - f(x)]^2 dx,$$

condițiile de optimalitate sunt

$$\frac{\partial F}{\partial \alpha_0} = 0 \quad \frac{\partial F}{\partial \alpha_k} = 0 \quad \frac{\partial F}{\partial \beta_k} = 0 \quad k \in \{1, \dots, m\}.$$

Calculând derivatele, obținem ecuațiile:

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial \alpha_0} &= 2 \int_0^{2\pi} \left[\frac{\alpha_0}{2} + \sum_{j=1}^m (\alpha_j \cos jx + \beta_j \sin jx) - f(x) \right] dx = 0; \\ \frac{\partial F}{\partial \alpha_k} &= 2 \int_0^{2\pi} \left[\frac{\alpha_0}{2} + \sum_{j=1}^m (\alpha_j \cos jx + \beta_j \sin jx) - f(x) \right] \cos kx dx = 0; \\ \frac{\partial F}{\partial \beta_k} &= 2 \int_0^{2\pi} \left[\frac{\alpha_0}{2} + \sum_{j=1}^m (\alpha_j \cos jx + \beta_j \sin jx) - f(x) \right] \sin kx dx = 0; \end{aligned}$$

Deoarece

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} \sin jx dx &= \int_0^{2\pi} \cos jx dx = \int_0^{2\pi} \sin kx \cos jx dx = 0, \\ \int_0^{2\pi} \sin jx \sin kx dx &= \int_0^{2\pi} \cos jx \cos kx dx = \pi \delta_{j,k} \end{aligned}$$

rezultă

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) dx, \\ a_k &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \cos kx dx \quad b_k = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \sin kx dx \quad k \in \{1, \dots, m\}. \end{aligned}$$

Astfel polinomul trigonometric de aproximare construit prin metoda celor mai mici pătrate coincide cu polinomul trigonometric ce rezultă în urma trunchierii seriei Fourier atașat funcției f .

7.3 Metoda celor mai mici pătrate în spații prehilbertiene

Fie X un spațiu prehilbertian peste corpul $K = \mathbb{R} \vee \mathbb{C}$, $(w_j)_{1 \leq j \leq n}$ o familie de elemente ortogonale

$$\langle w_j, w_k \rangle = d_j^2 \delta_{j,k}, \quad \forall j, k \in \{1, \dots, n\}.$$

și subspațiul $W = \text{span}\{w_1, \dots, w_n\}$.

Ne propunem să calculăm elementul de aproximație $y = \sum_{j=1}^n c_j w_j$ a unui element $x \in X$, determinat prin metoda celor mai mici pătrate:

$$\left\| \sum_{j=1}^n c_j w_j - x \right\|^2 = \inf \left\{ \left\| \sum_{j=1}^n \lambda_j w_j - x \right\|^2 : \lambda_j \in K, 1 \leq j \leq n \right\}.$$

Problema revine la minimizarea funcționalei $\Phi(\lambda_1, \dots, \lambda_n) = \left\| \sum_{j=1}^n \lambda_j w_j - x \right\|^2$.

Pentru $w_0 = \sum_{j=1}^n \frac{1}{d_j^2} \langle x, w_j \rangle w_j$ au loc egalitățile

$$\langle w_0 - x, w_k \rangle = 0, \quad \forall k \in \{1, \dots, n\}.$$

Într-adevăr

$$\langle w_0 - x, w_k \rangle = \sum_{j=1}^n \frac{1}{d_j^2} \langle x, w_j \rangle \langle w_j, w_k \rangle - \langle x, w_k \rangle = 0.$$

Au loc egalitățile

$$\begin{aligned} \Phi(\lambda_1, \dots, \lambda_n) &= \left\| \sum_{j=1}^n \lambda_j w_j - w_0 + w_0 - x \right\|^2 = \left\| \sum_{j=1}^n \left(\lambda_j - \frac{1}{d_j^2} \langle x, w_j \rangle \right) w_j + w_0 - x \right\|^2 = \\ &= \left\langle \sum_{j=1}^n \left(\lambda_j - \frac{1}{d_j^2} \langle x, w_j \rangle \right) w_j + w_0 - x, \sum_{k=1}^n \left(\lambda_k - \frac{1}{d_k^2} \langle x, w_k \rangle \right) w_k + w_0 - x \right\rangle = \\ &= \sum_{j=1}^n \left| \lambda_j - \frac{1}{d_j^2} \langle x, w_j \rangle \right|^2 + 2\Re \left(\sum_{j=1}^n \left(\lambda_j - \frac{1}{d_j^2} \langle x, w_j \rangle \right) \langle w_0 - x, w_j \rangle \right) + \|w_0 - x\|^2 = \\ &= \sum_{j=1}^n \left| \lambda_j - \frac{1}{d_j^2} \langle x, w_j \rangle \right|^2 + \|w_0 - x\|^2. \end{aligned}$$

Pentru $\lambda_j = \frac{1}{d_j^2} \langle x, w_j \rangle$, $j \in \{1, \dots, n\}$ se obține valoarea minimă a funcționalei Φ . Astfel elementul de aproximare căutat este

$$y = \sum_{j=1}^n \frac{1}{d_j^2} \langle x, w_j \rangle w_j. \quad (7.11)$$

Probleme și teme de seminar

P 7.1 Dându-se punctele $P_i(x_i, y_i)$, $i \in \{1, 2, \dots, n\}$, să se determine dreapta Δ care minimizează suma pătratelor distanțelor de la punctul P_i la Δ .

R. Alegând parametrii:

- d distanța de la origine la dreapta Δ ;
- α unghiul format de perpendiculara din origine pe dreapta Δ cu semiaxa pozitivă a axei Ox

ecuația dreptei Δ este

$$x \cos \alpha + y \sin \alpha - d = 0.$$

Problema de optimizare devine

$$\min_{\alpha, d} \sum_{i=1}^n (x_i \cos \alpha + y_i \sin \alpha - d)^2.$$

Condițiile de optimalitate conduc la sistemul algebric neliniar

$$\begin{cases} (\sum_{i=0}^n x_i y_i) \cos 2\alpha + \frac{1}{2} (\sum_{i=0}^n (y_i^2 - x_i^2)) \sin 2\alpha + \\ + d (\sum_{i=0}^n x_i) \sin \alpha - d (\sum_{i=0}^n y_i) \cos \alpha & = 0 \\ (\sum_{i=0}^n x_i) \cos \alpha + (\sum_{i=0}^n y_i) \sin \alpha - nd & = 0. \end{cases}$$

P 7.2 Fie $f \in C[0, 1]$. Să se pună în evidență matricea Gram corespunzătoare sistemului algebric de ecuații liniare ce rezultă în cazul în care elementul de aproximare construit prin metoda celor mai mici pătrate are forma $\varphi(x) = \sum_{k=0}^n c_k x^k$.

P 7.3 Fie $f(x) = 2x - 1$ și $\varepsilon > 0$. Utilizând metoda celor mai mici pătrate să se determine funcția de aproximare $q(x) = \sum_{k=0}^n a_k \cos k\pi x$ astfel încât să fie satisfăcută condiția $\int_0^1 [f(x) - q(x)]^2 dx < \varepsilon$.

R. Fie $q_k(x) = \cos k\pi x$, $k \in \{0, 1, \dots, n\}$. Au loc egalitățile

$$\int_0^1 q_0(x)^2 dx = 1, \quad \int_0^1 q_1(x)^2 dx = \frac{1}{2}, \quad k \in \{1, 2, \dots, n\},$$

$$\int_0^1 q_k(x) q_j(x) dx = 0.$$

Metoda celor mai mici pătrate dă

$$a_0 = \int_0^1 f(x)q_0(x)dx, \quad a_k = 2 \int_0^1 f(x)q_k(x)dx, \quad k \in \{1, 2, \dots, n\}.$$

Inegalitatea

$$\int_0^1 [f(x) - q(x)]^2 dx = \frac{1}{3} - a_0^2 - \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n a_k^2 < \varepsilon$$

servește la determinarea lui n .

SCHEIBER ERNEST

SCHEIBER ERNEST

SCHEIBER ERNEST

SCHEIBER ERNEST

SCHEIBER ERNEST SCHEIBER ERNEST

SCHEIBER ERNEST SCHEIBER ERNEST

Capitolul 8

Transformarea Fourier discretă

Notăm prin \mathbb{C}_n mulțimea șirurilor de numere complexe, periodice cu perioada n :

$$\mathbb{C}_n = \{x = (x_k)_{k \in \mathbb{Z}} : x_k \in \mathbb{C}, x_k = x_{k+n}, \forall k \in \mathbb{Z}\}.$$

Un șir $x \in \mathbb{C}_n$ este determinat de elementele x_0, x_1, \dots, x_{n-1} , restul elementelor se obțin prin periodicitate. Se va folosi notația $x = (x_k)_{0 \leq k \leq n-1} \in \mathbb{C}_n$.

8.1 Transformata Fourier discretă

Transformarea Fourier discretă (TFD) este un operator liniar $F : \mathbb{C}_n \rightarrow \mathbb{C}_n$ definit prin

$$y = F(x), \quad x = (x_k)_{0 \leq k \leq n-1} \quad y = (y_k)_{0 \leq k \leq n-1}$$
$$y_k = \sum_{j=0}^{n-1} x_j w^{-kj} \quad 0 \leq k \leq n-1, \quad (8.1)$$

unde $w = e^{i\frac{2\pi}{n}}$. Șirul y se numește transformata Fourier discretă a șirului x .

Transforma Fourier discretă inversă. Presupunem că în relațiile (8.1) este cunoscută transformata Fourier discretă (șirul imagine) $y = (y_k)_{0 \leq k \leq n-1}$ și vom determina șirul original $x = (x_k)_{0 \leq k \leq n-1}$.

Înmulțind relațiile (8.1), respectiv cu w^{kp} , $k = 0, 1, \dots, n-1$ și adunând obținem

$$\sum_{k=0}^{n-1} y_k w^{kp} = \sum_{j=0}^{n-1} x_j \sum_{k=0}^{n-1} w^{k(p-j)}$$

și folosind (9.8) rezultă

$$x_p = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} y_k w^{kp}.$$

Teorema 8.1.1 Dacă $n = 2^m$ și $x = (x_j)_{j \in \mathbb{Z}}$ este un șir periodic, cu perioada n , de numere reale, atunci $y_{n-k} = \bar{y}_k$, $k \in \{0, \dots, n-1\}$, unde $y = F_n(x) = (y_k)_{k \in \mathbb{Z}}$ și \bar{y}_k este conjugatul lui y_k .

Demonstrație. Fie $k \in \{0, 1, \dots, \frac{n}{2}\}$. Atunci

$$y_{n-k} = \sum_{j=0}^{n-1} x_j w^{-(n-k)j} = \sum_{j=0}^{n-1} x_j w^{kj} = \bar{y}_k. \blacksquare$$

Astfel TFD a unui șir de numere reale $x = (x_j)_{j \in \mathbb{Z}}$ cu perioada $n = 2^m$ este definit de $\frac{n}{2} + 1 = 2^{m-1} + 1$ numere complexe $\{y_0, y_1, \dots, y_{\frac{n}{2}}\}$.

Teorema 8.1.2 Dacă $x = (x_k)_{k \in \mathbb{Z}}$ și $y = (y_k)_{k \in \mathbb{Z}}$ sunt două șiruri din \mathbb{C}_n având transformatele Fourier discrete șirurile $X = (X_k)_{k \in \mathbb{Z}} = F_n(x)$ și respectiv $Y = (Y_k)_{k \in \mathbb{Z}}$ atunci au loc egalitățile

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{n-1} x_k \bar{y}_k &= n \sum_{k=0}^{n-1} X_k \bar{Y}_k, \\ \sum_{k=0}^{n-1} |x_k|^2 &= n \sum_{k=0}^{n-1} |X_k|^2. \end{aligned}$$

Demonstrație. Prima relație rezultă din

$$\sum_{k=0}^{n-1} X_k \bar{Y}_k = \sum_{k=0}^{n-1} X_k \sum_{j=0}^{n-1} \bar{y}_j w^{jk} = n \sum_{j=0}^{n-1} \bar{y}_j \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} X_k w^{jk} = n \sum_{j=0}^{n-1} x_j \bar{y}_j.$$

A doua relație rezultă din prima pentru $y = x$. \blacksquare

Produsul de convoluție.¹ Dacă $x, y \in \mathbb{C}_n$ atunci produsul lor de convoluție $z = x * y$ este șirul $z = (z_k)_{k \in \mathbb{Z}}$ definit prin

$$z_k = \sum_{j=0}^{n-1} x_j y_{k-j} \quad \forall k \in \mathbb{Z}.$$

Legat de produsul de convoluție au loc următoarele proprietăți ale transformării Fourier discretă

¹A nu se confunda cu noțiunea omonimă definită la transformarea z din Cap. 1.

Teorema 8.1.3 *Au loc egalitățile:*

1. $F(x * y) = F(x) \cdot F(y)$;
2. $F^{-1}(x * y) = nF^{-1}(x) \cdot F^{-1}(y)$;
3. $F(x) * F(y) = nF(x \cdot y)$.

Demonstrație. Fie $x = (x_k)_{k \in \mathbb{Z}}, y = (y_k)_{k \in \mathbb{Z}} \in \mathbb{C}_n$.

1. Dacă

$$\begin{aligned} F(x) = X &= (X_k)_{k \in \mathbb{Z}} & F(y) = Y &= (Y_k)_{k \in \mathbb{Z}}, \\ u = x * y &= (u_k)_{k \in \mathbb{Z}} & F(u) = U &= (U_k)_{k \in \mathbb{Z}}. \end{aligned}$$

atunci au loc egalitățile

$$U_k = \sum_{j=0}^{n-1} u_j w^{-kj} = \sum_{j=0}^{n-1} \left(\sum_{s=0}^{n-1} x_s y_{j-s} \right) w^{-kj} = \sum_{s=0}^{n-1} x_s w^{-sk} \sum_{j=0}^{n-1} y_{j-s} w^{-k(j-s)}.$$

Prin schimbarea de indice $l = j - s$ suma interioară devine

$$\sum_{j=0}^{n-1} y_{j-s} w^{-k(j-s)} = \sum_{l=-s}^{n-1-s} y_l w^{-kl} = \sum_{l=-s}^{-1} y_l w^{-kl} + \sum_{l=0}^{n-1-s} y_l w^{-kl}.$$

Ținând seama de periodicitatea șirului y și de definiția lui w

$$\sum_{l=-s}^{-1} y_l w^{-kl} = \sum_{l=-s}^{-1} y_{l+n} w^{-k(l+n)} = \sum_{l=n+s}^{n-1} y_l w^{-kl}.$$

Așadar $\sum_{j=0}^{n-1} y_{j-s} w^{-k(j-s)} = \sum_{l=0}^{n-1} y_l w^{-kl}$ și în consecință

$$U_k = \sum_{s=0}^{n-1} x_s w^{-sk} \sum_{l=0}^{n-1} y_l w^{-kl} = X_k \cdot Y_k.$$

2. Procedând asemănător, dacă

$$\begin{aligned} F^{-1}(x) = X &= (X_k)_{k \in \mathbb{Z}} & F^{-1}(y) = Y &= (Y_k)_{k \in \mathbb{Z}}, \\ u = x * y &= (u_k)_{k \in \mathbb{Z}} & F^{-1}(u) = U &= (U_k)_{k \in \mathbb{Z}}. \end{aligned}$$

atunci au loc egalitățile

$$U_k = \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} u_j w^{kj} = \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} \left(\sum_{s=0}^{n-1} x_s y_{j-s} \right) w^{kj} = \frac{1}{n} \sum_{s=0}^{n-1} x_s w^{sk} \sum_{j=0}^{n-1} y_{j-s} w^{k(j-s)} =$$

$$= n \left(\frac{1}{n} \sum_{s=0}^{n-1} x_s w^{sk} \right) \left(\frac{1}{n} \sum_{l=0}^{n-1} y_l w^{kl} \right) = n X_k \cdot Y_k.$$

3. Dacă

$$\begin{aligned} F(x) = X = (X_k)_{k \in \mathbb{Z}} & \quad F(y) = Y = (Y_k)_{k \in \mathbb{Z}}, \\ u = xy = (x_k y_k)_{k \in \mathbb{Z}} & \quad F(u) = U = (U_k)_{k \in \mathbb{Z}}. \end{aligned}$$

atunci au loc egalitățile

$$(X * Y)_k = \sum_{j=0}^{n-1} X_j Y_{k-j} = \sum_{j=0}^{n-1} \left(\sum_{s=0}^{n-1} x_s w^{-js} \right) Y_{k-j} = \sum_{s=0}^{n-1} x_s w^{-sk} \sum_{j=0}^{n-1} Y_{k-j} w^{s(k-j)}.$$

Prin schimbarea de indice $l = k - j$ suma interioară devine

$$\sum_{j=0}^{n-1} Y_{k-j} w^{s(k-j)} = \sum_{l=k+1-n}^k Y_l w^{sl} = \sum_{l=k+1-n}^{-1} Y_l w^{sl} + \sum_{l=0}^k Y_l w^{sl}.$$

Ținând seama de periodicitatea șirului Y și de definiția lui w

$$\sum_{l=k+1-n}^{-1} Y_l w^{sl} = \sum_{l=k+1-n}^{-1} Y_{l+n} w^{s(l+n)} = \sum_{l=k+1}^{n-1} Y_l w^{sl}.$$

Așadar $\sum_{j=0}^{n-1} Y_{k-j} w^{s(k-j)} = \sum_{l=0}^{n-1} Y_l w^{sl} = n y_s$ și în consecință

$$(X * Y)_k = n \sum_{s=0}^{n-1} x_s y_s w^{-sk} = n \sum_{s=0}^{n-1} u_s w^{-sk} = n U_k.$$

8.2 Algoritmul transformării Fourier discretă rapidă

Fie $n = 2^m$ și pentru simplificarea expunerii alegem $m = 3$. Dacă $k, j \in \{0, 1, \dots, 2^m - 1 = 7\}$ atunci au loc reprezentările $k = k_2 2^2 + k_1 2 + k_0, j = j_2 2^2 + j_1 2 + j_0$ unde $k_0, k_1, k_2, j_0, j_1, j_2$ sunt cifre binare. Folosim notațiile $y_k = y(k_2, k_1, k_0)$ și $x_j = x(j_2, j_1, j_0)$.

Transformarea Fourier discretă a șirului x devine

$$\begin{aligned} y_k = y(k_2, k_1, k_0) &= \sum_{j=0}^7 x_j w^{-kj} = \sum_{j_0=0}^1 \sum_{j_1=0}^1 \sum_{j_2=0}^1 w^{-k(j_2 2^2 + j_1 2 + j_0)} x(j_2, j_1, j_0) = \\ &= \sum_{j_0=0}^1 w^{-k j_0} \sum_{j_1=0}^1 w^{-2k j_1} \sum_{j_2=0}^1 x_j w^{-2^2 k j_2} x(j_2, j_1, j_0). \end{aligned}$$

Observând că $w^{-2^2kj_2} = w^{-4k_0j_2}$, $w^{-2kj_1} = w^{-2(2k_1+k_0)j_1}$, $w^{-kj_0} = w^{-(4k_2+2k_1+k_0)j_0}$ suma interioară este

$$\sum_{j_2=0}^1 x(j_2, j_1, j_0) w^{-2^2kj_2} = \sum_{j_2=0}^1 x(j_2, j_1, j_0) w^{-4k_0j_2} = x_1(k_0, j_1, j_0).$$

Rezultă

$$y_k = y(k_2, k_1, k_0) = \sum_{j_0=0}^1 w^{-kj_0} \sum_{j_1=0}^1 w^{-2(2k_1+k_0)j_1} x_1(k_0, j_1, j_0).$$

Dacă notăm $x_2(k_0, k_1, j_0) = \sum_{j_1=0}^1 w^{-2(2k_1+k_0)j_1} x_1(k_0, j_1, j_0)$ atunci, în final, avem

$$\begin{aligned} y_k &= y(k_2, k_1, k_0) = \sum_{j_0=0}^1 w^{-kj_0} x_2(k_0, k_1, j_0) = \\ &= \sum_{j_0=0}^1 w^{-(4k_2+2k_1+k_0)j_0} x_2(k_0, k_1, j_0) = x_3(k_0, k_1, k_2). \end{aligned}$$

În consecință, pentru calculul transformării Fourier discretă, în loc să calculăm succesiv elementele șirului $y = (y_k)_k$, calculăm coloanele tabelului

$$\begin{array}{llll} x_0 = x(0, 0, 0) & x_1(0, 0, 0) & x_2(0, 0, 0) & x_3(0, 0, 0) = y(0, 0, 0) = y_0 \\ x_1 = x(0, 0, 1) & x_1(0, 0, 1) & x_2(0, 0, 1) & x_3(0, 0, 1) = y(1, 0, 0) = y_4 \\ x_2 = x(0, 1, 0) & x_1(0, 1, 0) & x_2(0, 1, 0) & x_3(0, 1, 0) = y(0, 1, 0) = y_2 \\ x_3 = x(0, 1, 1) & x_1(0, 1, 1) & x_2(0, 1, 1) & x_3(0, 1, 1) = y(1, 1, 0) = y_6 \\ x_4 = x(1, 0, 0) & x_1(1, 0, 0) & x_2(1, 0, 0) & x_3(1, 0, 0) = y(0, 0, 1) = y_1 \\ x_5 = x(1, 0, 1) & x_1(1, 0, 1) & x_2(1, 0, 1) & x_3(1, 0, 1) = y(1, 0, 1) = y_5 \\ x_6 = x(1, 1, 0) & x_1(1, 1, 0) & x_2(1, 1, 0) & x_3(1, 1, 0) = y(0, 1, 1) = y_3 \\ x_7 = x(1, 1, 1) & x_1(1, 1, 1) & x_2(1, 1, 1) & x_3(1, 1, 1) = y(1, 1, 1) = y_7 \end{array}$$

Astfel numărul adunărilor efectuate este $8 \cdot 3$ sau $nm = n \log_2 n$, în cazul general, față de $8 \cdot 8$, respectiv n^2 , adunări necesare calculării succesive a elementelor șirului y .

8.3 Aplicații ale transformatei Fourier discretă

8.3.1 Calculul coeficienților Fourier

Fie $f \in \mathbb{C}_{2\pi}$, o funcție continuă și periodică de perioadă 2π . Dacă are loc dezvoltarea în serie Fourier

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kx + b_k \sin kx) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} c_k e^{ikx}$$

având coeficienții

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) dx \quad a_k = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \cos kx dx \quad b_k = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \sin kx dx$$

pentru $k \in \mathbb{N}^*$, respectiv

$$c_k = \frac{a_k - ib_k}{2} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x) e^{-ikx} dx, \quad c_{-k} = \overline{c_k}, \quad k \in \mathbb{N}. \quad (8.2)$$

Aproximăm integrala din (8.2) prin formula trapezelor. Dacă $n \in \mathbb{N}^*$ este parametrul de discretizare atunci se obține

$$c_k \approx \frac{1}{2\pi} \frac{2\pi}{2n} \left[f(0) + 2 \sum_{j=1}^{n-1} f\left(\frac{2\pi}{n}j\right) e^{-ik\left(\frac{2\pi}{n}j\right)} + f(2\pi) e^{-ik2\pi} \right].$$

Datorită periodicității funcțiilor f și e^z , din relația de mai sus deducem

$$c_k \approx \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} f\left(\frac{2\pi}{n}j\right) e^{-ik\left(\frac{2\pi}{n}j\right)} = \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} f\left(\frac{2\pi}{n}j\right) w^{-jk}. \quad (8.3)$$

Astfel, șirul $c = (c_k)_{0 \leq k \leq n-1}$ este aproximat de $\frac{1}{n} F_n(y)$, unde $y = (y_j)_{0 \leq j \leq n-1}$, $y_j = f\left(\frac{2\pi}{n}j\right)$.

Există o altă legătură între coeficienții Fourier ale unei funcții și transformata Fourier discretă a șirului valorilor ei pe o mulțime echidistantă de noduri.

Teorema 8.3.1 Fie $n \in \mathbb{N}^*$. Dacă

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{j=1}^{\infty} (a_j \cos jt + b_j \sin jt) = \sum_{j \in \mathbb{Z}} c_j e^{ijt},$$

cu $c_j = \frac{a_j - b_j}{2}$, $c_j = \overline{c_j}$, $j \in \mathbb{N}$ și

$$y = F_n(x), \quad \text{unde } x \in \mathbb{C}_n, \quad x = (x_j)_{0 \leq j \leq n-1}, \quad x_j = f\left(j \frac{2\pi}{n}\right),$$

atunci

$$y_k = n \left(c_k + \sum_{s=1}^{\infty} (c_{k+sn} + c_{k-sn}) \right), \quad k \in \{0, 1, \dots, n-1\}.$$

Demonstrație. Din nou, notăm $t_j = j \frac{2\pi}{n}$, $j \in \{0, 1, \dots, n-1\}$ și $w = e^{i \frac{2\pi}{n}}$.
Atunci

$$x_j = f(t_j) = \sum_{\mu \in \mathbb{Z}} c_\mu e^{i\mu t_j} = \sum_{\mu \in \mathbb{Z}} c_\mu w^{\mu j}$$

de unde se obține

$$y_k = \sum_{j=0}^{n-1} x_j w^{-kj} = \sum_{j=0}^{n-1} \left(\sum_{\mu=0}^{\infty} c_\mu w^{\mu j} \right) w^{-kj} = \sum_{\mu=0}^{\infty} c_\mu \sum_{j=0}^{n-1} w^{(\mu-k)j}.$$

Dacă $\mu - k$ este multiplu de n atunci suma interioară este n , iar în caz contrar 0.
Pentru $\mu - k = sn$ se găsește

$$y_k = n \sum_{s \in \mathbb{Z}} c_{k+sn} = n \left(c_k + \sum_{s=1}^{\infty} (c_{k+sn} + c_{k-sn}) \right). \quad \blacksquare$$

8.3.2 Calculul coeficienților Laurent

Dacă f este o funcție olomorfa în discul unitate având pe 0 ca punct singular izolat, atunci are loc dezvoltarea Laurent

$$f(z) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} a_k z^k$$

unde

$$a_k = \frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta|=1} \frac{f(\zeta)}{\zeta^{k+1}} d\zeta = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(e^{ix}) e^{-ikx} dx.$$

Calculând integrala de mai sus cu formula trapezelor deducem

$$a_k \approx \frac{1}{2\pi} \frac{2\pi}{2n} \left[f(1) + 2 \sum_{j=1}^{n-1} f\left(e^{i \frac{2\pi}{n} j}\right) e^{-ik \left(\frac{2\pi}{n} j\right)} + f\left(e^{i 2\pi}\right) e^{-ik 2\pi} \right].$$

Periodicitatea funcției e^z implică

$$a_k \approx \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} f(e^{i\frac{2\pi}{n}j}) e^{-ik(\frac{2\pi}{n}j)} = \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} f(e^{i\frac{2\pi}{n}j}) \omega^{-jk}. \quad (8.4)$$

Prin urmare, șirul $a = (a_k)_{0 \leq k \leq n-1}$ este aproximat de $\frac{1}{n} F_n(y)$, unde $y = (y_j)_{0 \leq j \leq n-1}$, $y_j = f(e^{i\frac{2\pi}{n}j})$.

Partea principală a dezvoltării Laurent a funcției $f(z)$ calculată este $a_{-1} = a_{n-1}$, $a_{-2} = a_{n-2}, \dots, a_{-(n-1)} = a_1$.

8.3.3 Determinarea funcției analitice cunoscând partea reală

Fie $D \subset \mathbb{C}$ un domeniu care conține discul unitate și $u(x, y)$ partea reală a unei funcții analitice $f(z)$, $z = x + iy$. Se cere determinarea părții imaginare $v(x, y)$ a lui $f(z)$, cu $v(0, 0) = 0$.

Definim $\alpha(t) = u(\cos t, \sin t) = u(e^{it})$ și dacă dezvoltarea Fourier a funcției $\alpha(t)$ este

$$\begin{aligned} \alpha(t) &= \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kx + b_k \sin kx) = \\ &= \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left(a_k \frac{e^{ikt} + e^{-ikt}}{2} + b_k \frac{e^{ikt} - e^{-ikt}}{2i} \right) = \\ &= \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{a_k - ib_k}{2} e^{ikt} + \frac{a_k + ib_k}{2} e^{-ikt} \right) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} c_k e^{ikt}, \end{aligned}$$

cu $c_0 = \frac{a_0}{2} \in \mathbb{R}$, $c_k = \frac{a_k - ib_k}{2}$, $c_{-k} = \bar{c}_k$, $k \in \mathbb{N}^*$.

Atunci $f(z) = c_0 + 2 \sum_{k=1}^{\infty} c_k z^k$. Într-adevăr, din $f(e^{it}) = c_0 + 2 \sum_{k=1}^{\infty} c_k e^{ikt}$ găsim

$$\begin{aligned} \Re f(e^{it}) &= \frac{f(e^{it}) + \overline{f(e^{it})}}{2} = c_0 + \sum_{k=1}^{\infty} c_k e^{ikt} + \sum_{k=1}^{\infty} \bar{c}_k e^{-ikt} = \\ &= c_0 + \sum_{k=1}^{\infty} c_k e^{ikt} + \sum_{k=1}^{\infty} c_{-k} e^{-ikt} = c_0 + \sum_{k=1}^{\infty} c_k e^{ikt} + \sum_{k=1}^{\infty} \bar{c}_k e^{-ikt} = \alpha(t). \end{aligned}$$

Restricția părții imaginare la cercul unitate este

$$\beta(t) = v(e^{it}) = \Im f(e^{it}) = \frac{f(e^{it}) - \overline{f(e^{it})}}{2i} = \frac{1}{i} \left(\sum_{k=1}^{\infty} c_k e^{ikt} - \sum_{k=1}^{\infty} \bar{c}_k e^{-ikt} \right) =$$

$$= -i \left(\sum_{k=1}^{\infty} c_k e^{ikt} - \sum_{k=1}^{\infty} c_{-k} e^{-ikt} \right) = \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \sin kt - b_k \cos kt).$$

Astfel coeficienții Fourier a funcției $\beta(t)$ sunt

$$d_k = \begin{cases} -ic_k & \text{dacă } k > 0 \\ 0 & \text{dacă } k = 0 \\ ic_k = i\bar{c}_{-k} & \text{dacă } k < 0 \end{cases} \quad (8.5)$$

Operatorul $\alpha(t) \rightarrow \beta(t)$ se numește operatorul de conjugare. Expresia integrală a acestui operator este

$$\beta(t) = K(\alpha)(t) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \alpha(s) \cot \frac{t-s}{2} ds$$

Metoda numerică pentru calculul funcției β constă din

1. Se fixează un număr natural par $n = 2m, m \in \mathbb{N}^*$.
2. Se calculează coeficienții Fourier $c = (c_k)_{0 \leq k \leq n-1}$ a funcției $\alpha(t)$. Utilizând metoda dezvoltată anterior,

$$c = \frac{1}{n} F_n(\alpha)$$

unde $\alpha = (\alpha(\frac{2\pi k}{n}))_{0 \leq k \leq n-1}$.

3. Utilizând relațiile (8.5) se construiește vectorul coeficienților Fourier a funcției $\beta(t)$

$$d = (0, -ic_1, \dots, -ic_{m-1}, i\bar{c}_{m-1}, \dots, i\bar{c}_1)$$

4. Se calculează valorile funcției $\beta(t)$ în punctele $\frac{2\pi k}{n}, k \in \{0, 1, \dots, n-1\}$,

$$\beta = (\beta(\frac{2\pi k}{n}))_{0 \leq k \leq n-1} = nF_n^{-1}(d).$$

8.3.4 Calculul integralei Cauchy

Fie $\Gamma = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$ și funcția $h : \Gamma \rightarrow \mathbb{C}$. Notăm prin $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ funcția definită prin

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{h(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta, \quad (8.6)$$

numită integrala Cauchy. Prin schimbarea de variabilă $\zeta = e^{it}$, integrala din (8.6) devine

$$f(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{h(e^{it})}{1 - ze^{-it}} dt. \quad (8.7)$$

Dacă $|z| < 1$ atunci are loc dezvoltarea

$$\frac{1}{1 - ze^{-it}} = \sum_{j=0}^{\infty} z^j e^{-ijt}$$

și (8.7) devine

$$f(z) = \frac{1}{2\pi} \sum_{j=0}^{\infty} z^j \int_0^{2\pi} h(e^{it}) e^{-ijt} dt = \sum_{j=0}^{\infty} c_j z^j,$$

unde $c_j = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} h(e^{it}) e^{ijt} dt$.

Folosim formula trapezelor pentru calculul lui c_j . Dacă $n \in \mathbb{N}^*$ este parametrul metodei trapezelor, atunci găsim

$$\begin{aligned} c_j &\approx \frac{1}{2\pi} \frac{2\pi}{2n} \left[h(1) + 2 \sum_{k=1}^{n-1} h(e^{i\frac{2\pi}{n}k}) e^{-ij\frac{2\pi}{n}k} + h(1) e^{-ij2\pi} \right] = \\ &= \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} h(e^{i\frac{2\pi}{n}k}) w^{-jk}, \end{aligned}$$

adică secvența $(c_0, c_1, \dots, c_{n-1})$ este aproximată de $d = \frac{1}{n} F_n(\varphi)$, cu $\varphi = (\varphi_j)_{0 \leq j \leq n-1}$, $\varphi_j = h(e^{i\frac{2\pi}{n}j})$.

În final $f(z) \approx \sum_{j=0}^{n-1} d_j z^j$.

8.4 Transformarea cosinus discretă

Definiție 8.4.1 Fie $x = (x_j)_{0 \leq j \leq n-1} \in \mathbb{C}_n$. Șirul $y \in \mathbb{C}_n$, transformata cosinus discretă - TCD - a lui x , este definit prin

$$y = F_n^c(x), \quad y = (y_k)_{0 \leq k \leq n-1} \quad y_k = \sum_{j=0}^{n-1} x_j \cos\left(j + \frac{1}{2}\right) \frac{k\pi}{n}, \quad k \in \{0, 1, \dots, n-1\}. \quad (8.8)$$

Astfel TCD se poate reprezenta prin produsul matriceal

$$\begin{pmatrix} y_0 \\ \vdots \\ y_{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{0,0} & \cdots & a_{0,n-1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n-1,0} & \cdots & a_{n-1,n-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ \vdots \\ x_{n-1} \end{pmatrix},$$

unde $a_{k,j} = \cos\left(j + \frac{1}{2}\right)\frac{k\pi}{n}$.

Teorema 8.4.1 *Are loc egalitatea*

$$AA^T = \begin{pmatrix} n & & & \\ & \frac{n}{2} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \frac{n}{2} \end{pmatrix} \quad (8.9)$$

sau

$$\sum_{j=0}^{n-1} a_{p,j} a_{q,j} = \delta_{p,q} c_p \quad \text{unde} \quad c_p = \begin{cases} n & \text{dacă } p = 0 \\ \frac{n}{2} & \text{dacă } p > 0 \end{cases}$$

Demonstrație. Egalitățile

$$\begin{aligned} \cos a + \cos 2a + \cdots + \cos na &= \frac{\sin \frac{na}{2}}{\sin \frac{a}{2}} \cos \frac{(n+1)a}{2} \\ \sin a + \sin 2a + \cdots + \sin na &= \frac{\sin \frac{na}{2}}{\sin \frac{a}{2}} \sin \frac{(n+1)a}{2} \end{aligned}$$

implică

$$\sum_{j=0}^{n-1} \cos\left(j + \frac{1}{2}\right)a = \frac{\sin na}{2 \sin \frac{a}{2}}$$

Atunci

$$\begin{aligned} S_{p,q} &= \sum_{j=0}^{n-1} a_{p,j} a_{q,j} = \sum_{j=0}^{n-1} \cos\left(j + \frac{1}{2}\right)\frac{p\pi}{n} \cos\left(j + \frac{1}{2}\right)\frac{q\pi}{n} = \\ &= \frac{1}{2} \sum_{j=0}^{n-1} \left[\cos\left(j + \frac{1}{2}\right)\frac{(p+q)\pi}{n} + \cos\left(j + \frac{1}{2}\right)\frac{(p-q)\pi}{n} \right]. \end{aligned}$$

Dacă $p \neq q$ atunci suma de mai sus devine

$$S_{p,q} = \frac{1}{2} \left[\frac{\sin \pi(p+q)}{2 \sin \frac{\pi(p+q)}{n}} + \frac{\sin \pi(p-q)}{2 \sin \frac{\pi(p-q)}{n}} \right] = 0.$$

Dacă $p = q > 0$ atunci

$$S_{p,p} = \frac{1}{2} \sum_{j=0}^{n-1} \cos\left(j + \frac{1}{2}\right) \frac{2p\pi}{n} + \frac{n}{2} = \frac{\sin 2p\pi}{4 \sin \frac{2p\pi}{n}} + \frac{n}{2} = \frac{n}{2}.$$

Dacă $p = q = 0$ atunci $S_{0,0} = n$. ■

Din teorema anterioară rezultă că

$$A^{-1} = A^T \begin{pmatrix} \frac{1}{n} & & & \\ & \frac{2}{n} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \frac{2}{n} \end{pmatrix}.$$

Astfel transformarea cosinus discretă inversă (TCDI) este dată de

$$x_k = d_k \sum_{j=0}^{n-1} y_j \cos\left(k + \frac{1}{2}\right) \frac{j\pi}{n}, \quad k \in \{0, 1, \dots, n-1\},$$

$$\text{cu } d_k = \begin{cases} \frac{1}{n} & \text{dacă } k = 0 \\ \frac{2}{n} & \text{dacă } k > 0 \end{cases}.$$

O legătură între TFD și TCD

Fie $x = (x_j)_{0 \leq j \leq n-1} \in \mathbb{C}_n$ și șirul $z \in \mathbb{C}_{4n}$ definit prin

$$z_k = \begin{cases} 0 & \text{dacă } k = 0, 2, \dots, 2n, \dots, 4n-2 \\ x_s & \text{dacă } k = 2s+1, \quad s = 0, 1, \dots, n-1 \\ x_s & \text{dacă } k = 4n-1-2s, \quad s = 0, 1, \dots, n-1 \end{cases}$$

De exemplu, pentru $n = 3$, dacă $x = \begin{array}{|c|c|c|} \hline 0 & 1 & 2 \\ \hline x_0 & x_1 & x_2 \\ \hline \end{array}$ atunci

$$z = \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|c|c|c|c|c|c|} \hline 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 \\ \hline 0 & x_0 & 0 & x_1 & 0 & x_2 & 0 & x_2 & 0 & x_1 & 0 & x_0 \\ \hline \end{array}$$

Teorema 8.4.2 *Cu notațiile de mai sus, primele n componente ale transformării Fourier discrete a șirului z coincid cu dublul transformării cosinus discrete a șirului x .*

Demonstrație. Fie $Z = (Z_k)_{0 \leq k \leq 4n-1}$ TFD a șirului z . Dacă $w = e^{i\frac{2\pi}{4n}} = e^{i\frac{\pi}{2n}}$ atunci

$$\begin{aligned} Z_k &= \sum_{j=0}^{4n-1} z_j w^{-jk} = \sum_{j=0}^{2n-1} z_{2j+1} w^{-(2j+1)k} = \\ &= \sum_{j=0}^{n-1} z_{2j+1} w^{-(2j+1)k} + \sum_{j=n}^{2n-1} z_{2j+1} w^{-(2j+1)k}. \end{aligned}$$

Schimbând, în a doua sumă, indicele de sumare $j = 2n - 1 - s$ și ținând seama de definiția șirului z , expresia de mai sus devine

$$\begin{aligned} Z_k &= \sum_{s=0}^{n-1} x_s w^{-(2s+1)k} + \sum_{s=0}^{n-1} x_s w^{-(4n-1-2s)k} = \sum_{s=0}^{n-1} x_s (w^{-(2s+1)k} + w^{(2s+1)k}) = \\ &= 2 \sum_{s=0}^{n-1} x_s \cos\left(s + \frac{1}{2}\right) \frac{k\pi}{n} = 2y_k, \quad k \in \{0, 1, \dots, n-1\}. \quad \blacksquare \end{aligned}$$

Probleme și teme de seminar

P 8.1 Corelația a două șiruri $x, y \in \mathbb{C}_n$ se definește prin

$$x \hat{*} y = z \in \mathbb{C}_n \text{ cu } z_k = \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} x_j y_{k+j}, \quad z = \|(z_k)_{0 \leq k \leq n-1}\|.$$

Să se demonstreze egalitățile

1. $F_n(x \hat{*} y) = \frac{1}{n} \overline{F_n(\bar{x})} F_n(y)$;
2. $F_n^{-1}(x \hat{*} y) = \frac{1}{n} \overline{F_n^{-1}(\bar{x})} F_n(y)$;
3. $F_n(x) \hat{*} F_n(y) = \overline{F_n(\bar{x}y)}$;

P 8.2 Rezolvarea unei ecuații integrale Fredholm de speța a doua cu nucleu convolutiv.

Indicație. Fie ecuația integrală Fredholm de speța a doua

$$x(t) + \int_a^b N(t-s)x(s)ds = f(t), \quad t \in [a, b], \quad (8.10)$$

unde $N(t), f(t)$ sunt funcții continue, date iar $x(t)$ este funcția necunoscută. Forma nucleului $N(t-s)$ atribuie ecuației atributul de convolutiv.

Fie $n \in \mathbb{N}^*$. Introducem notațiile: $h = \frac{b-a}{n}$, $t_k = a + kh$, $t_{k+1/2} = a + (k + \frac{1}{2})h$. Ecuația (8.10) se mai scrie

$$x(t) + \sum_{k=0}^{n-1} \int_{t_k}^{t_{k+1}} N(t-s)x(s)ds = f(t), \quad t \in [a, b],$$

și utilizând formula de integrare numerică a dreptunghiului cu neglijarea restului, găsim

$$u(t) + h \sum_{k=0}^{n-1} N(t - t_{k+1/2})u(t_{k+1/2}) = f(t).$$

Neglijarea restului a impus renotarea funcției necunoscute prin $u(t)$. Dacă $u_{k+1/2} = u(t_{k+1/2})$ atunci atribuind lui t , succesiv valorile $t_{j+1/2}$ obținem sistemul algebric de ecuații liniare

$$u_{j+1/2} + h \sum_{k=0}^{n-1} N((j-k)h)u_{k+1/2} = f(t_{j+1/2}), \quad j \in \{0, 1, \dots, n-1\}. \quad (8.11)$$

Rezolvarea sistemului algebric (8.11) se poate face cu ajutorul transformării Fourier discrete. În acest scop, definim șirurile

$$\begin{aligned} z &= (z_k)_{0 \leq k \leq n-1} & z_k &= u_{k+1/2}, \\ \varphi &= (\varphi_k)_{0 \leq k \leq n-1} & \varphi_k &= f_{k+1/2}, \\ \xi &= (\xi_k)_{0 \leq k \leq n-1} & \xi_k &= N(kh). \end{aligned}$$

Sistemul (8.11) se rescrie prin

$$z_j + h \sum_{k=0}^{n-1} z_k \xi_{j-k} = \varphi_j, \quad j \in \{0, 1, \dots, n-1\},$$

sau

$$z + h z * \xi = \varphi.$$

Aplicând transformarea Fourier discretă F_n deducem

$$F_n(z) + h F_n(z) F_n(\xi) = F_n(\varphi).$$

Rezultă că

$$z = F_n^{-1}(w) \quad \text{unde} \quad w = (w_k)_{0 \leq k \leq n-1}, \quad w_k = \frac{F_n(\varphi)_k}{1 + h F_n(\xi)_k}.$$

Capitolul 9

Interpolare prin polinoame trigonometrice

Se numește polinom trigonometric de grad m o funcție de forma

$$t(x) = a_0 + \sum_{j=1}^m (a_j \cos jx + b_j \sin jx).$$

Notăm prin

$$\mathcal{T}_m = \{T(x) = \alpha_0 + \sum_{j=1}^m (\alpha_j \cos jx + \beta_j \sin jx) : \alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_m, \beta_1, \dots, \beta_m \in \mathbb{R}\}$$

mulțimea polinoamelor trigonometrice de grad m .

Fie $\mathbb{C}_{2\pi}$ spațiul liniar al funcțiilor continue, periodice, cu perioada 2π . În capitolul *Metoda celor mai mici pătrate* s-au determinat coeficienții polinomului trigonometric de grad m care aproximează cel mai bine, în sensul celor mai mici pătrate, o funcție $f \in \mathbb{C}_{2\pi}$. Coeficienții obținuți coincid cu coeficienții dezvoltării Fourier atașată funcției f .

Fie $f \in \mathbb{C}_{2\pi}$. După numărul nodurilor de interpolare n deosebim cazurile:

- $n = 2m + 1$ număr impar de noduri $0 \leq x_0 < x_1 < \dots < x_{2m} < 2\pi$.

Polinomul de interpolare va fi de forma

$$t(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{j=1}^m (a_j \cos jx + b_j \sin jx).$$

- $n = 2m$ număr par de noduri $0 \leq x_0 < x_1 < \dots < x_{2m-1} < 2\pi$.

Polinomul de interpolare va fi de forma

$$t(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{j=1}^{m-1} (a_j \cos jx + b_j \sin jx) + \frac{a_m}{2} \cos mx.$$

În fiecare caz coeficienții se determină din condițiile de interpolare

$$t(x_j) = y_j \quad \forall j \in \{0, 1, \dots, n-1\}.$$

9.1 Interpolare trigonometrică pe noduri oarecare

Cazul cu număr impar de noduri

Teorema 9.1.1 *Funcțiile*

$$1, \cos x, \cos 2x, \dots, \cos mx, \sin x, \sin 2x, \dots, \sin mx$$

formează un sistem Cebîșev în intervalul $(\pi, \pi]$.

Demonstrație. Fie un sistem de $2m + 1$ puncte $0 \leq x_0 < x_1 < \dots < x_{2m} < 2\pi$ și determinantul

$$D = D(x_0, x_1, \dots, x_{2m}) \begin{vmatrix} \cos mx_0 & \dots & \cos x_0 & \sin mx_0 & \dots & \sin x_0 & 1 \\ \cos mx_1 & \dots & \cos x_1 & \sin mx_1 & \dots & \sin x_1 & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \cos mx_{2m} & \dots & \cos x_{2m} & \sin mx_{2m} & \dots & \sin x_{2m} & 1 \end{vmatrix}.$$

Vom arăta că acest determinant este diferit de 0.

Pentru simplificarea notației vom utiliza reprezentarea simbolică

$$D = \begin{vmatrix} \cos mx_j & \dots & \cos x_j & \sin mx_j & \dots & \sin x_j & 1 \end{vmatrix},$$

punând în evidență coloanele determinantului D . Înmulțind cu i coloanele cu \sin și adunându-le la coloanele corespunzătoare cu \cos se obține

$$D = \begin{vmatrix} e^{imx_j} & \dots & e^{ix_j} & \sin mx_j & \dots & \sin x_j & 1 \end{vmatrix}.$$

Utilizând formula $\sin x = \frac{1}{2i}(e^{ix} - e^{-ix})$ deducem succesiv

$$\begin{aligned} D &= \begin{vmatrix} e^{imx_j} & \dots & e^{ix_j} & \frac{1}{2i}(e^{imx_j} - e^{-imx_j}) & \dots & \frac{1}{2i}(e^{ix_j} - e^{-ix_j}) & 1 \end{vmatrix} = \\ &= \frac{1}{(-2i)^n} \begin{vmatrix} e^{imx_j} & \dots & e^{ix_j} & e^{-imx_j} & \dots & e^{-ix_j} & 1 \end{vmatrix}. \end{aligned}$$

Rearanjând ultimele $m + 1$ coloane se obține

$$D = \frac{(-1)^{\frac{m(m+1)}{2}}}{(-2i)^m} \begin{vmatrix} e^{imx_j} & \dots & e^{ix_j} & 1 & e^{-ix_j} & \dots & e^{-imx_j} \end{vmatrix}.$$

Dacă din fiecare linie a lui D se scoate factor comun pe e^{-imx_j} rezultă

$$\begin{aligned} D &= \frac{(-1)^{\frac{m(m+1)}{2}}}{(-2i)^m} e^{-im(x_0 + \dots + x_{2m})} \begin{vmatrix} e^{2imx_j} & \dots & e^{i(m+1)x_j} & e^{imx_j} & \dots & 1 \end{vmatrix} = \\ &= \frac{(-1)^{\frac{m(m+1)}{2}}}{(-2i)^m} e^{im \sum_{k=0}^{2m} x_k} V(e^{ix_0}, e^{ix_1}, \dots, e^{ix_{2m}}). \end{aligned}$$

Calculăm determinantul lui Vandermonde

$$\begin{aligned} V(e^{ix_0}, e^{ix_1}, \dots, e^{ix_{2m}}) &= \prod_{0 \leq q < p \leq 2m} (e^{ix_p} - e^{ix_q}) = \\ &= \prod_{0 \leq q < p \leq 2m} (\cos x_p - \cos x_q + i(\sin x_p - \sin x_q)) = \prod_{0 \leq q < p \leq 2m} 2i \sin \frac{x_p - x_q}{2} e^{i \frac{x_p + x_q}{2}} = \\ &= (2i)^{m(2m+1)} e^{im \sum_{k=0}^{2m} x_k} \prod_{0 \leq q < p \leq 2m} \sin \frac{x_p - x_q}{2}. \end{aligned}$$

Determinantul devine

$$D = (-1)^{\frac{m(m+1)}{2}} 2^{2m^2} \prod_{0 \leq q < p \leq 2m} \sin \frac{x_p - x_q}{2} \neq 0. \quad \blacksquare$$

Din Teorema 2.1.4 rezultă

Teorema 9.1.2 (Polinomul de interpolare trigonometric Lagrange-Gauss) Dacă $f \in \mathbb{C}_{2\pi}$ și $-\pi < x_0 < x_1 < \dots < x_{2m} \leq \pi$ atunci există un singur polinom trigonometric $t(x)$ de grad m care satisface condițiile de interpolare $t(x_j) = f(x_j)$, $\forall j \in \{0, 1, \dots, 2m\}$, având expresia

$$t(x) = \sum_{j=0}^{2m} f(x_j) \frac{\sin \frac{x-x_0}{2} \dots \sin \frac{x-x_{j-1}}{2} \sin \frac{x-x_{j+1}}{2} \dots \sin \frac{x-x_{2m}}{2}}{\sin \frac{x_j-x_0}{2} \dots \sin \frac{x_j-x_{j-1}}{2} \sin \frac{x_j-x_{j+1}}{2} \dots \sin \frac{x_j-x_{2m}}{2}} =$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{j=0}^{2m} \frac{f(x_j)}{u'(x_j)} \frac{u(x)}{\sin \frac{x-x_j}{2}}. \quad (9.1)$$

unde $u(x) = \prod_{j=0}^{2m} \sin \frac{x-x_j}{2}$.

Demonstrație. Folosind notația și rezultatul teoremei anterioare, din (2.6) se obține

$$\begin{aligned} t(x) &= L(\mathcal{T}_m; x_0, \dots, x_{2m}; f)(x) = \sum_{j=0}^{2m} f(x_j) \frac{D(x_0, \dots, x_{j-1}, x, x_{j+1}, \dots, x_{2m})}{D(x_0, \dots, x_{2m})} = \\ &= \sum_{j=0}^{2m} f(x_j) \frac{\sin \frac{x-x_0}{2} \dots \sin \frac{x-x_{j-1}}{2} \sin \frac{x-x_{j+1}}{2} \dots \sin \frac{x-x_{2m}}{2}}{\sin \frac{x_j-x_0}{2} \dots \sin \frac{x_j-x_{j-1}}{2} \sin \frac{x_j-x_{j+1}}{2} \dots \sin \frac{x_j-x_{2m}}{2}}. \quad \blacksquare \end{aligned}$$

În cazul unei funcții pare sau impare problema de interpolare se modifică.

Teorema 9.1.3 Fie $f \in \mathbb{C}_{2\pi}$ o funcție pară și $0 \leq x_0 < x_1 < \dots < x_m < \pi$. Polinomul trigonometric de grad m care satisface condițiile de interpolare $t(x_j) = f(x_j)$, $\forall j \in \{0, 1, \dots, m\}$ este

$$t(x) = \sum_{j=0}^m f(x_j) \cdot$$

$$\frac{(\cos x - \cos x_0) \dots (\cos x - \cos x_{j-1})(\cos x - \cos x_{j+1}) \dots (\cos x - \cos x_m)}{(\cos x_j - \cos x_0) \dots (\cos x_j - \cos x_{j-1})(\cos x_j - \cos x_{j+1}) \dots (\cos x_j - \cos x_m)}.$$

Demonstrație. Pentru nodurile $-\pi < -x_m < \dots < -x_1 < x_0 < x_1 < \dots < x_m < \pi$, potrivit teoremei 9.1.2 există un polinom trigonometric de interpolare $t(x)$ astfel încât

$$\begin{aligned} t(x_j) &= f(x_j) \quad j \in \{0, 1, \dots, m\}, \\ t(-x_j) &= f(x_j) \quad j \in \{1, 2, \dots, m\}. \end{aligned}$$

Notăm

$$\begin{aligned} v(x) &= \prod_{j=1}^m \sin \frac{x+x_j}{2}, & v_j(x) &= \frac{v(x)}{\sin \frac{x+x_j}{2}}, \\ w(x) &= \prod_{j=1}^m \sin \frac{x-x_j}{2}, & w_j(x) &= \frac{w(x)}{\sin \frac{x-x_j}{2}}, \quad j = 1, \dots, m \end{aligned}$$

Atunci $u(x) = \sin \frac{x-x_0}{2} v(x) w(x)$, $u_0(x) = v(x) w(x)$ iar expresia polinomului trigonometric de interpolare Lagrange-Gauss este

$$t(x) = f(x_0) \frac{u_0(x)}{u_0(x_0)} + \sum_{j=1}^m f(-x_j) \frac{\sin \frac{x-x_0}{2} v_j(x) w(x)}{\sin \frac{-x_j-x_0}{2} v_j(-x_j) w(-x_j)} + \\ + \sum_{j=1}^m f(x_j) \frac{\sin \frac{x-x_0}{2} v(x) w_j(x)}{\sin \frac{x_j-x_0}{2} v(x_j) w_j(x_j)}.$$

Deoarece

$$\begin{aligned} v(x_j) &= v_j(x_j) \sin x_j \\ v_j(-x_j) &= (-1)^{m-1} w_j(x_j) \\ w(-x_j) &= (-1)^m v(x_j) = (-1)^m v_j(x_j) \sin x_j \end{aligned}$$

expresia polinomului trigonometric de interpolare va fi

$$t(x) = f(x_0) \frac{u_0(x)}{u_0(x_0)} + \sum_{j=1}^m f(x_j) \frac{v_j(x) w_j(x) \sin \frac{x-x_0}{2}}{v_j(x_j) w_j(x_j) \sin x_j} \left(\frac{\sin \frac{x-x_0}{2}}{\sin \frac{x_j+x_0}{2}} + \frac{\sin \frac{x+x_0}{2}}{\sin \frac{x_j-x_0}{2}} \right). \quad (9.2)$$

Au loc egalitățile:

$$\begin{aligned} \frac{u_0(x)}{u_0(x_0)} &= \frac{v(x) w(x)}{v(x_0) w(x_0)} = \prod_{j=1}^m \frac{\sin \frac{x+x_j}{2} \sin \frac{x-x_j}{2}}{\sin \frac{x_0+x_j}{2} \sin \frac{x_0-x_j}{2}} \prod_{j=1}^m \frac{\cos x - \cos x_j}{\cos x_0 - \cos x_j}; \\ &= \frac{\sin \frac{x-x_0}{2}}{\sin x_j} \left(\frac{\sin \frac{x-x_0}{2}}{\sin \frac{x_j+x_0}{2}} + \frac{\sin \frac{x+x_0}{2}}{\sin \frac{x_j-x_0}{2}} \right) = \\ &= \frac{\sin \frac{x-x_0}{2}}{\sin x_j} \cdot \frac{\cos \left(\frac{x+x_0}{2} - x_j \right) - \cos \left(\frac{x+x_0}{2} + x_j \right)}{\cos x_j - \cos x_0} = \frac{\cos x - \cos x_0}{\cos x_j - \cos x_0}. \end{aligned}$$

(9.2) devine

$$t(x) = f(x_0) \prod_{j=1}^m \frac{\cos x - \cos x_j}{\cos x_0 - \cos x_j} + \sum_{j=1}^m f(x_j) \frac{v_j(x) w_j(x) (\cos x - \cos x_0)}{v_j(x_j) w_j(x_j) (\cos x_j - \cos x_0)} = \\ \sum_{j=0}^m f(x_j) \cdot \frac{(\cos x - \cos x_0) \dots (\cos x - \cos x_{j-1}) (\cos x - \cos x_{j+1}) \dots (\cos x - \cos x_m)}{(\cos x_j - \cos x_0) \dots (\cos x_j - \cos x_{j-1}) (\cos x_j - \cos x_{j+1}) \dots (\cos x_j - \cos x_m)}.$$

■

Teorema 9.1.4 Fie $f \in \mathbb{C}_{2\pi}$ o funcție impară și $0 < x_0 < x_1 < \dots < x_m < \pi$. Polinomul trigonometric de grad m care satisface condițiile de interpolare $t(x_j) = f(x_j)$, $\forall j \in \{1, \dots, m\}$ este

$$t(x) = \sum_{j=1}^m f(x_j) \cdot$$

$$\frac{(\cos x - \cos x_0) \dots (\cos x - \cos x_{j-1})(\cos x - \cos x_{j+1}) \dots (\cos x - \cos x_m) \sin x}{(\cos x_j - \cos x_0) \dots (\cos x_j - \cos x_{j-1})(\cos x_j - \cos x_{j+1}) \dots (\cos x_j - \cos x_m) \sin x_j}.$$

Demonstrație. Procedând asemănător, pentru nodurile $-\pi < -x_m < \dots < -x_1 < 0 < x_1 < \dots < x_m < \pi$ există un polinom trigonometric de interpolare astfel încât

$$\begin{aligned} t(x_j) &= f(x_j) & j \in \{1, \dots, m\}, \\ t(-x_j) &= f(-x_j) & j \in \{1, 2, \dots, \} \\ t(0) &= f(0) = 0. \end{aligned}$$

Utilizând notațiile introduse în demonstrația teoremei anterioare avem

$$\begin{aligned} t(x) &= \sum_{j=1}^m f(-x_j) \frac{\sin \frac{x}{2} v_j(x) w(x)}{\sin \frac{-x_j}{2} v_j(-x_j) w(-x_j)} + \sum_{j=1}^m f(x_j) \frac{\sin \frac{x}{2} v(x) w_j(x)}{\sin \frac{x_j}{2} v(x_j) w_j(x_j)} = \\ &= \sum_{j=1}^m f(x_j) \frac{v_j(x) w_j(x)}{v_j(x_j) w_j(x_j)} \cdot \frac{\sin \frac{x}{2}}{\sin \frac{x_j}{2} \sin x_j} \cdot \left(\sin \frac{x+x_j}{2} - \sin \frac{x-x_j}{2} \right). \end{aligned}$$

Deoarece

$$\frac{\sin \frac{x}{2}}{\sin \frac{x_j}{2} \sin x_j} \cdot \left(\sin \frac{x+x_j}{2} - \sin \frac{x-x_j}{2} \right) = \frac{\sin x}{\sin x_j}$$

expresia polinomului trigonometric de interpolare $t(x)$ devine

$$t(x) = \sum_{j=1}^m f(x_j) \cdot$$

$$\frac{(\cos x - \cos x_0) \dots (\cos x - \cos x_{j-1})(\cos x - \cos x_{j+1}) \dots (\cos x - \cos x_m) \sin x}{(\cos x_j - \cos x_0) \dots (\cos x_j - \cos x_{j-1})(\cos x_j - \cos x_{j+1}) \dots (\cos x_j - \cos x_m) \sin x_j}.$$

■

Cazul cu număr par de noduri

Urmând aceași cale, pentru $0 \leq x_0 < x_1 < \dots < x_{2m-1} < 2\pi$ calculăm determinantul

$$\begin{aligned} D &= D(x_0, \dots, x_{2m-1}) = \\ &= V \begin{pmatrix} \cos mx & \cos(m-1)x & \dots & \cos x & \sin(m-1)x & \dots & \sin x & 1 \\ x_0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & x_{2m-1} \end{pmatrix} = \\ &= \begin{vmatrix} \cos mx_j & \cos(m-1)x_j & \dots & \cos x_j & \sin(m-1)x_j & \dots & \sin x_j & 1 \end{vmatrix}. \end{aligned}$$

Adunând la coloanele *cos* coloanele corespunzătoare cu *sin* înmulțite în prealabil cu *i* rezultă

$$D = \begin{vmatrix} \cos mx_j & e^{i(m-1)x_j} \dots e^{ix_j} & \sin(m-1)x_j & \dots & \sin x_j & 1 \end{vmatrix}.$$

Folosind definițiile complexe pentru *sin* și *cos* avem

$$\begin{aligned} D &= \begin{vmatrix} \frac{e^{imx_j} + e^{-imx_j}}{2} & e^{i(m-1)x_j} & \dots & e^{ix_j} & \frac{e^{i(m-1)x_j} - e^{-i(m-1)x_j}}{2i} & \dots & \frac{e^{ix_j} - e^{-ix_j}}{2i} & 1 \end{vmatrix} = \\ &= \frac{(-1)^{m-1}}{2(2i)^{m-1}} \begin{vmatrix} e^{imx_j} + e^{-imx_j} & e^{i(m-1)x_j} & \dots & e^{ix_j} & e^{-i(m-1)x_j} & \dots & e^{-ix_j} & 1 \end{vmatrix} = \\ &= \frac{(-1)^{m-1}}{2(2i)^{m-1}} (D_1 + D_2), \end{aligned}$$

unde

$$\begin{aligned} D_1 &= \begin{vmatrix} e^{imx_j} & e^{i(m-1)x_j} & \dots & e^{ix_j} & e^{-i(m-1)x_j} & \dots & e^{-ix_j} & 1 \end{vmatrix}; \\ D_2 &= \begin{vmatrix} e^{-imx_j} & e^{i(m-1)x_j} & \dots & e^{ix_j} & e^{-i(m-1)x_j} & \dots & e^{-ix_j} & 1 \end{vmatrix}. \end{aligned}$$

Ordonând coloanele după puterile descrescătoare ale lui e^{ix} obținem

$$\begin{aligned} D_1 &= (-1)^{\frac{m(m-1)}{2}} \begin{vmatrix} e^{imx_j} & e^{i(m-1)x_j} & \dots & e^{ix_j} & 1 & e^{-ix_j} & \dots & e^{-i(m-1)x_j} \end{vmatrix} = \\ &= (-1)^{\frac{m(m-1)}{2}} e^{-i(m-1)\sum_{j=0}^{2m-1} x_j} V(e^{ix_0}, \dots, e^{ix_{2m-1}}). \end{aligned}$$

Analog găsim

$$D_2 = -(-1)^{\frac{m(m-1)}{2}} e^{-im\sum_{j=0}^{2m-1} x_j} V(e^{ix_0}, \dots, e^{ix_{2m-1}}).$$

Determinantul lui Vandermonde este

$$V(e^{ix_0}, \dots, e^{ix_{2m-1}}) = (2i)^{m(2m-1)} e^{\frac{i}{2}(2m-1)\sum_{j=0}^{2m-1} x_j} \prod_{0 \leq q < p \leq 2m-1} \sin \frac{x_p - x_q}{2}.$$

Notăm

$$X = \sum_{j=0}^{2m-1} x_j, \quad \Pi = \prod_{0 \leq q < p \leq 2m-1} \sin \frac{x_p - x_q}{2}$$

și atunci

$$\begin{aligned} D &= (-1)^{\frac{3m^2-m}{2}} 2^{2m^2-2m+1} \sin \frac{X}{2} \Pi = \\ &= (-1)^{\frac{3m^2-m}{2}} 2^{2m^2-2m+1} \sin \frac{\sum_{j=0}^{2m-1} x_j}{2} \prod_{0 \leq q < p \leq 2m-1} \sin \frac{x_p - x_q}{2}. \end{aligned} \quad (9.3)$$

Dacă $\sum_{j=0}^{2m-1} x_j = 2\nu\pi$, $\nu \in \mathbb{N}$ atunci $D = 0$.

Astfel s-a pus în evidență o submulțime a unui sistem Cebîșev într-un interval I care nu mai formează un sistem Cebîșev în același interval I .

Dacă $X \neq 2\nu\pi$ atunci polinomul trigonometric de interpolare $t(x)$ se calculează din egalitatea

$$\begin{vmatrix} t(x) & \cos mx & \cos(m-1)x & \dots & \cos x & \sin(m-1)x & \dots & \sin x & 1 \\ y_0 & \cos mx_0 & \cos(m-1)x_0 & \dots & \cos x_0 & \sin(m-1)x_0 & \dots & \sin x_0 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ y_{2m-1} & \cos mx_{2m-1} & \cos(m-1)x_{2m-1} & \dots & \cos x_{2m-1} & \sin(m-1)x_{2m-1} & \dots & \sin x_{2m-1} & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Rezultă

$$t(x) = \sum_{j=0}^{2m-1} y_j \frac{D(x_0, \dots, x_{j-1}, x, x_{j+1}, \dots, x_{2m-1})}{D(x_0, \dots, x_{j-1}, x_j, x_{j+1}, \dots, x_{2m-1})}.$$

Utilizând (9.3) găsim

$$t(x) = \sum_{j=0}^{2m-1} y_j \frac{\sin \frac{\sum_{k=0, k \neq j}^{2m-1} x_k + x}{2}}{\sin \frac{\sum_{k=0}^{2m-1} x_k}{2}} \prod_{\substack{k=0 \\ k \neq j}}^{2m-1} \frac{\sin \frac{x-x_k}{2}}{\sin \frac{x_j-x_k}{2}}$$

Din nou, dacă $X = \sum_{j=0}^{2m-1} x_j$, atunci expresia corespunzătoare de la numărător este $X + (x - x_j)$. Polinomul trigonometric de interpolare devine

$$t(x) = \sum_{j=0}^{2m-1} y_j \left(\cos \frac{x-x_j}{2} + \sin \frac{x-x_j}{2} \cot \frac{\sum_{k=0}^{2m-1} x_k}{2} \right) \prod_{\substack{k=0 \\ k \neq j}}^{2m-1} \frac{\sin \frac{x-x_k}{2}}{\sin \frac{x_j-x_k}{2}} \quad (9.4)$$

9.2 Interpolare trigonometrică pe noduri echidistante

Vom da o rezolvare directă problemei de interpolare.

Cazul cu număr impar de noduri

Teorema 9.2.1 Dacă $x_j = j \frac{2\pi}{2m+1}$, $j \in \{0, 1, \dots, 2m\}$ atunci expresia polinomului trigonometric de interpolare Lagrange-Gauss este

$$t(x) = \frac{1}{2m+1} \sum_{j=0}^{2m} y_j \frac{\sin(2m+1) \frac{x-x_j}{2}}{\sin \frac{x-x_j}{2}} = \frac{\sin \frac{(2m+1)x}{2}}{2m+1} \sum_{j=0}^{2m} \frac{(-1)^j y_j}{\sin \frac{x-x_j}{2}}.$$

Demonstrație. Datorită formulelor

$$\cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2} \quad \sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}$$

polinomul trigonometric $t(x)$ devine

$$\begin{aligned} t(x) &= \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^m \left(\frac{e^{ikx} + e^{-ikx}}{2} a_k + \frac{e^{ikx} - e^{-ikx}}{2i} b_k \right) = \\ &= \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^m \left(\frac{a_k - ib_k}{2} e^{ikx} + \frac{a_k + ib_k}{2} e^{-ikx} \right) = \sum_{k=-m}^m c_k e^{ikx}, \end{aligned}$$

unde $c_k = \frac{a_k - ib_k}{2}$, $c_{-k} = \frac{a_k + ib_k}{2}$, pentru $k \in \{0, 1, \dots, m\}$.

Condițiile de interpolare se scriu

$$t(x_j) = \sum_{k=-m}^m c_k e^{ikx_j} = y_j, \quad \forall j \in \{0, 1, \dots, 2m\}.$$

Înmulțind egalitatea j cu e^{-ipx_j} și adunând, pentru $j \in \{0, 1, \dots, 2m\}$ obținem

$$\sum_{j=0}^{2m} y_j e^{-ipx_j} = \sum_{k=-m}^m c_k \sum_{j=0}^{2m} e^{i \frac{2\pi}{2m+1} j(k-p)} = (2m+1) c_p,$$

de unde găsim

$$c_p = \frac{1}{2m+1} \sum_{j=0}^{2m} y_j e^{-ipx_j} = \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} y_j e^{-ipx_j}. \quad (9.5)$$

Expresia polinomului trigonometric de interpolare devine

$$t(x) = \frac{1}{2m+1} \sum_{k=-m}^m \left(\sum_{j=0}^{2m} y_j e^{-ikx_j} \right) e^{ikx} = \frac{1}{2m+1} \sum_{j=0}^{2m} y_j \sum_{k=-m}^m e^{ik(x-x_j)}.$$

Ținând seama de egalitățile

$$\sum_{k=-m}^m e^{ika} = 1 + 2 \sum_{k=1}^m \cos ka = \frac{\sin(m + \frac{1}{2})a}{\sin \frac{a}{2}}$$

se obține rezultatul dorit. ■

Cazul cu număr par de noduri

Teorema 9.2.2 Dacă $x_j = j\frac{\pi}{m}$, $j \in \{0, 1, \dots, 2m-1\}$ atunci expresia polinomului trigonometric de interpolare este

$$t(x) = \frac{\sin mx}{2m} \sum_{j=0}^{2m-1} (-1)^j y_j \cot \frac{x - x_j}{2}.$$

Demonstrație. Procedând analog cu demonstrația teoremei anterioare

$$\begin{aligned} t(x) &= \frac{a_0}{2} + \sum_{j=1}^{m-1} \left(a_j \frac{e^{ijx} + e^{-ijx}}{2} + b_j \frac{e^{ijx} - e^{-ijx}}{2i} \right) + \frac{1}{2} \frac{a_m e^{imx} + e^{-imx}}{2} = \\ &= \frac{a_m}{4} e^{-imx} + \sum_{j=1}^{m-1} \frac{a_j + ib_j}{2} e^{-ijx} + \frac{a_0}{2} + \sum_{j=1}^{m-1} \frac{a_j - ib_j}{2} e^{ijx} + \frac{a_m}{4} e^{imx}. \end{aligned}$$

Notând $c_{-m} = c_m = \frac{a_m}{2}$, $c_j = \frac{a_j - ib_j}{2}$, $c_{-j} = \frac{a_j + ib_j}{2}$, $j \in \{1, 2, \dots, m-1\}$, $c_0 = \frac{a_0}{2}$ și $e^{ix} = z$ expresia polinomului trigonometric se transformă în

$$t(x) = \varphi(z) = \frac{c_{-m}}{2} z^{-m} + \sum_{j=-m+1}^{m-1} c_j z^j + \frac{c_m}{2} z^m,$$

iar condițiile de interpolare devin

$$t\left(k\frac{2\pi}{n}\right) = \varphi\left(e^{ik\frac{\pi}{m}}\right) = y_k, \quad \forall k \in \{0, 1, \dots, 2m-1\}. \quad (9.6)$$

Dacă $w = e^{i\frac{\pi}{m}}$ atunci $e^{ik\frac{\pi}{m}} = w^k$. Deoarece $w^{-mk} = w^{mk} = (-1)^k$ și $c_{-m} = c_m$ condițiile de interpolare (9.6) devin

$$\sum_{j=-m+1}^m c_j w^{jk} = y_k \quad \forall k \in \{0, 1, \dots, 2m-1\}.$$

Înmulțim fiecare ecuație, respectiv cu w^{-kp} , $k = 0, 1, \dots, 2m - 1$; $p \in \{-m + 1, \dots, m\}$ și adunând egalitățile astfel obținute, găsim

$$\sum_{k=0}^{2m-1} y_k w^{-kp} = \sum_{j=-m+1}^m c_j \sum_{k=0}^{2m-1} w^{k(j-p)}. \quad (9.7)$$

Întrucât

$$\sum_{k=0}^{2m-1} w^{k(j-p)} = \begin{cases} 2m & \text{dacă } j = p \\ 0 & \text{dacă } j \neq p \end{cases} \quad (9.8)$$

din (9.7) rezultă

$$c_p = \frac{1}{2m} \sum_{k=0}^{2m-1} y_k w^{-kp} = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} y_k w^{-kp}, \quad (9.9)$$

de unde, în final obținem $a_p = 2\Re c_p$, $b_p = -2\Im c_p$, $p = 0, 1, \dots, m$.

Expresia funcției $\varphi(z)$ devine

$$\begin{aligned} \varphi(z) &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2m} \sum_{j=0}^{2m-1} y_j w^{jm} \right) z^{-m} + \sum_{k=-m+1}^{m-1} \left(\frac{1}{2m} \sum_{j=0}^{2m-1} y_j w^{-jk} \right) z^k + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2m} \sum_{j=0}^{2m-1} y_j w^{-jm} \right) z^m = \\ &= \frac{1}{2m} \sum_{j=0}^{2m-1} y_j \left[\frac{1}{2} \left(\frac{w^j}{z} \right)^m + \sum_{k=1}^{m-1} \left(\frac{w^j}{z} \right)^k + 1 + \sum_{k=1}^{m-1} \left(\frac{z}{w^j} \right)^k + \frac{1}{2} \left(\frac{z}{w^j} \right)^m \right]. \end{aligned}$$

Ținând seama de identitatea

$$\frac{1}{2a^m} + \frac{1}{a^{m-1}} + \dots + \frac{1}{a} + 1 + a + \dots + a^{m-1} + \frac{1}{2} a^m = \frac{(a^{2m} - 1)(a + 1)}{2a^m(a - 1)},$$

pentru $a = \frac{z}{w^j} = e^{i(x-x_j)}$, expresia parantezei pătrate devine

$$\frac{e^{i(x-x_j)} + 1}{e^{i(x-x_j)} - 1} \frac{e^{i2m(x-x_j)} - 1}{2e^{im(x-x_j)}} = \cot \frac{x-x_j}{2} \sin m(x-x_j) = (-1)^j \sin mx \cot \frac{x-x_j}{2}.$$

Astfel, polinomul trigonometric de interpolare este

$$t(x) = \frac{\sin mx}{2m} \sum_{j=0}^{2m-1} (-1)^j y_j \cot \frac{x-x_j}{2}. \quad \blacksquare$$

Încheiem această secțiune cu o proprietate de optimalitate legată de polinomul trigonometric de interpolare pe noduri echidistnte.

Condițiile de interpolare s-au scris

$$\sum_{j \in I} c_j e^{ijx_k} = y_k, \quad k \in \{0, 1, \dots, n-1\},$$

cu

$$\begin{aligned} I &= \{-m, -m+1, \dots, m\} && \text{dacă } n = 2m+1 \\ I &= \{-m+1, \dots, m\} && \text{dacă } n = 2m \end{aligned}$$

din care au rezultat

$$c_k = \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} y_j e^{-ikx_j}, \quad k \in I.$$

În \mathbb{C}^n definim

$$y = \begin{pmatrix} y_0 \\ \vdots \\ y_{n-1} \end{pmatrix}, \quad w_j = \begin{pmatrix} e^{ijx_0} \\ \vdots \\ e^{ijx_{n-1}} \end{pmatrix}, \quad j \in I$$

și $W = \text{span}\{w_j : j \in I\}$. Atunci

$$\langle w_p, w_q \rangle = \sum_{j=0}^{n-1} e^{ipx_j} \overline{e^{iqx_j}} = \langle w_p, w_q \rangle = \sum_{j=0}^{n-1} e^{i(p-q)x_j} = \begin{cases} n & \text{dacă } p = q \\ 0 & \text{dacă } p \neq q \end{cases}.$$

Din (7.11), elementul de aproximare construit prin metoda celor mai mici pătrate a lui y din W este $\sum_{j \in I} c_j w_j$.

9.3 Calculul coeficienților Fourier

Dacă dezvoltarea în serie Fourier a funcției $f \in \mathbb{C}_{2\pi}$ este

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kx + b_k \sin kx) \quad (9.10)$$

cu coeficienții

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) dx \quad a_k = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \cos kx dx \quad b_k = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \sin kx dx$$

pentru $k \in \mathbb{N}^*$, atunci

$$c_k = \frac{a_k - ib_k}{2} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x) e^{-ikx} dx.$$

În capitolul Transformarea Fourier discretă, aproximând c_k cu formula trapezelor s-a obținut

$$c_k \approx \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} f\left(\frac{2\pi}{n}j\right) e^{-ik\left(\frac{2\pi}{n}j\right)} = \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} f\left(\frac{2\pi}{n}j\right) w^{-jk}. \quad (9.11)$$

Se observă că membrul drept din (9.11) coincide cu formula coeficienților polinomului trigonometric de interpolare a funcției f , (9.5) sau (9.9) după cum n este impar sau par.

Prin urmare, calculând primii n termeni a dezvoltării Fourier (9.10) cu ajutorul formulei trapezelor – cu parametrul de discretizare n – obținem totodată și coeficienții polinomului trigonometric de interpolare a funcției, în nodurile $\frac{2\pi}{n}j$, $0 \leq j \leq n-1$.

Mai mult, acești coeficienți se pot determina aplicând transformarea Fourier discretă asupra șirului $f\left(j\frac{2\pi}{n}\right)$, $j \in \{0, 1, \dots, n-1\}$.

9.4 Convergența polinoamelor de interpolare trigonometrică

Prin inducție matematică se stabilește

Teorema 9.4.1 *Dacă $f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kx + b_k \sin kx)$, $x \in [0, 2\pi]$ și este de r ori continu derivabilă atunci*

$$a_k = \frac{1}{\pi k^r} \int_0^{2\pi} f^{(r)}(x) \cos\left(kx + r\frac{\pi}{2}\right) dx, \quad b_k = \frac{1}{\pi k^r} \int_0^{2\pi} f^{(r)}(x) \sin\left(kx + r\frac{\pi}{2}\right) dx,$$

de unde

$$|a_k|, |b_k| \leq \frac{2M_r}{k^r},$$

unde $M_r = \max\{|f^{(r)}(x)| : x \in [0, 2\pi]\}$.

Are loc teorema de convergență

Teorema 9.4.2 *Șirul polinoamelor de interpolare trigonometrică construite pe noduri echidistante ale unei funcții f de $r \geq 2$ ori continu derivabilă converge uniform către f .*

Demonstrație. Cazul numărului impar de noduri $n = 2m + 1$.

Fie

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{j=1}^{\infty} (a_j \cos jx + b_j \sin jx) = \sum_{j \in \mathbb{Z}} c_j e^{ijx},$$

unde

$$c_j = \frac{a_j - ib_j}{2}, \quad c_{-j} = \bar{c}_j, \quad j \in \mathbb{N}.$$

Notăm

$$s_n(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{j=1}^m (a_j \cos jx + b_j \sin jx) = \sum_{j=-m}^m c_j e^{ijx}.$$

Polinomul trigonometric de interpolare în nodurile $x_j = j \frac{2\pi}{n}$, $j \in \{0, 1, \dots, n-1\}$ este

$$t_n(x) = \frac{\hat{a}_0}{2} + \sum_{j=1}^m (\hat{a}_j \cos jx + \hat{b}_j \sin jx) = \sum_{j=-m}^m \hat{c}_j e^{ijx},$$

unde

$$\hat{c}_j = \frac{\hat{a}_j + i\hat{b}_j}{2}, \quad \hat{c}_{-j} = \bar{\hat{c}}_j, \quad j \in \{0, 1, \dots, m\}.$$

Pe baza rezultatelor secțiunii anterioare, șirul $\hat{c} = (\hat{c}_j)_{j \in \mathbb{Z}} \in \mathbb{C}_n$ se calculează prin transformarea Fourier discretă

$$\hat{c} = \frac{1}{n} F_n(y), \quad \text{unde } y = (y_j)_{0 \leq j \leq n-1}, \quad y_j = f(x_j).$$

Din Teorema 8.3.1, componentele transformării Fourier discrete se exprimă în funcție de coeficienții Fourier a funcției

$$[F_n(y)]_k = n \left(c_k + \sum_{s=1}^{\infty} (c_{k+sn} + c_{k-sn}) \right).$$

Astfel

$$\hat{c}_k = c_k + \sum_{s=1}^{\infty} (c_{k+sn} + c_{k-sn}), \quad k \in \{0, 1, \dots, n-1\}.$$

Observând că pentru $s \in \mathbb{N}^*$, $k + sn > 0$ și $k - sn < 0$ deducem

$$\hat{a}_k = a_k + \sum_{s=1}^{\infty} (a_{k+sn} + a_{sn-k}), \quad k \in \{0, 1, \dots, m\}, \quad (9.12)$$

$$\hat{b}_k = b_k + \sum_{s=1}^{\infty} (b_{k+sn} - b_{sn-k}), \quad k \in \{1, \dots, m\}. \quad (9.13)$$

Evaluăm diferența

$$|t_n(x) - f(x)| \leq |t_n(x) - s_n(x)| + |s_n(x) - f(x)|. \quad (9.14)$$

Pentru primul termen din (9.14) avem

$$|t_n(x) - s_n(x)| = \left| \frac{1}{2}(\hat{a}_0 - a_0) + \sum_{j=1}^m \left((\hat{a}_j - a_j) \cos jx + (\hat{b}_j - b_j) \sin jx \right) \right|.$$

Utilizând inegalitatea lui Cauchy-Buniakovsky se deduce

$$|t_n(x) - s_n(x)| \leq \frac{1}{2}|\hat{a}_0 - a_0| + \sqrt{2} \sum_{j=1}^m \max\{|\hat{a}_j - a_j|, |\hat{b}_j - b_j|\}. \quad (9.15)$$

Utilizând succesiv (9.12) și rezultatul Teoremei 9.4.1 găsim

$$\begin{aligned} |\hat{a}_j - a_j| &\leq \sum_{s=1}^{\infty} (|a_{j+ns}| + |a_{sn-j}|) \leq 2M_r \sum_{s=1}^{\infty} \left(\frac{1}{(j+ns)^r} + \frac{1}{(ns-j)^r} \right) = \\ &= \frac{2M_r}{n^r} \sum_{s=1}^{\infty} \frac{1}{s^r} \left(\frac{1}{\left(1 + \frac{j}{sn}\right)^r} + \frac{1}{\left(1 - \frac{j}{sn}\right)^r} \right). \end{aligned}$$

Pentru $j \in \{0, 1, \dots, m\}$ se verifică inegalitățile

$$\frac{1}{\left(1 + \frac{j}{sn}\right)^r} \leq 1 \quad \text{și} \quad \frac{1}{\left(1 - \frac{j}{sn}\right)^r} \leq 2^r.$$

Inegalitatea anterioară devine

$$|\hat{a}_j - a_j| \leq \frac{2(2^r + 1)M_r}{n^r} \sum_{s=1}^{\infty} \frac{1}{s^r} = \frac{2(2^r + 1)M_r}{n^r} \left(1 + \sum_{s=2}^{\infty} \frac{1}{s^r} \right).$$

Apoi $\sum_{s=2}^{\infty} \frac{1}{s^r} \leq \int_1^{\infty} \frac{dx}{x^r} = \frac{1}{r-1}$. Prin urmare

$$|\hat{a}_j - a_j| \leq \frac{2(2^r + 1)M_r r}{(r-1)n^r} \leq \frac{2(2^r + 1)M_r r}{(r-1)2^r m^r}.$$

Au loc inegalitățile

$$\frac{r}{r-1} \leq 2, \quad \frac{2^r + 1}{2^r} \leq \frac{5}{4}.$$

Rezultă că

$$|\hat{a}_j - a_j| \leq \frac{5M_r}{m^r}.$$

Analog rezultă și $|\hat{a}_j - a_j| \leq \frac{5M_r}{m^r}$.

Revenind în (9.15) deducem

$$|t_n(x) - s_n(x)| \leq \frac{5M_r}{m^{r-1}} \left(\frac{1}{2m} + \sqrt{2} \right) \leq \frac{10M_r}{m^{r-1}},$$

pentru ultima majorare s-a ținut cont de $m \geq 1$.

Pentru al doilea termen din (9.14) avem

$$|s_n(x) - f(x)| \leq \sum_{j=m+1}^{\infty} |a_j \cos jx + b_j \sin jx|.$$

Aplicând succesiv inegalitatea Cauchy-Buniakovsky și rezultatul Teoremei 9.4.1, se deduce în continuare

$$\begin{aligned} |s_n(x) - f(x)| &\leq \sqrt{2} \sum_{j=m+1}^{\infty} \max\{|a_k|, |b_j|\} \leq 2\sqrt{2}M_r \sum_{j=m+1}^{\infty} \frac{1}{j^r} \leq \\ &\leq 2\sqrt{2}M_r \int_m^{\infty} \frac{dx}{x^r} = \frac{2\sqrt{2}M_r}{(r-1)m^{r-1}}. \end{aligned}$$

Astfel

$$|t_n(x) - f(x)| \leq \frac{10M_r}{m^{r-1}} + \frac{2\sqrt{2}M_r}{(r-1)m^{r-1}} = \text{const} \frac{1}{m^{r-1}} \rightarrow 0, \quad m \rightarrow \infty.$$

Cazul numărului par de noduri $n = 2m$ se tratează asemănător. ■

Probleme și teme de seminar

P 9.1 Regăsiți expresia polinomului trigonometric de interpolare pe noduri echidistante din Teorema 9.2.1 utilizând (9.1).

Indicație.

$$u(x) = \prod_{j=0}^{2m} \sin \frac{x - x_j}{2} = \prod_{j=0}^{2m} \sin \left(\frac{x}{2} - \frac{j\pi}{2m+1} \right) = \prod_{k=0}^{2m} \sin \left(\frac{x}{2} - \frac{2m\pi}{2m+1} + \frac{k\pi}{2m+1} \right).$$

cu $j = 2m - k$. Utilizând identitatea 6 din Anexa C rezultă

$$\begin{aligned} u(x) &= \frac{1}{2^{2m}} \sin(2m+1) \left(\frac{x}{2} - \frac{2m\pi}{2m+1} \right) = \frac{1}{2^{2m}} \sin \frac{(2m+1)x}{2} = \\ &= \frac{(-1)^j}{2^{2m}} \sin(2m+1) \frac{x-x_j}{2}. \end{aligned}$$

Prin urmare

$$u'(x) = \frac{(-1)^j 2m+1}{2^{2m}} \cos(2m+1) \frac{x-x_j}{2} \Rightarrow u'(x_j) = \frac{(-1)^j 2m+1}{2^{2m}}.$$

9.1 implică

$$t(x) = \frac{1}{2} \sum_{j=0}^{2m} \frac{y_j}{u'(x_j)} \frac{u(x)}{\sin \frac{x-x_j}{2}} = \frac{1}{2m+1} \sum_{j=0}^{2m} y_j \frac{\sin(2m+1) \frac{x-x_j}{2}}{\sin \frac{x-x_j}{2}}.$$

P 9.2 Regăsiți expresia polinomului trigonometric de interpolare pe noduri echidistante din Teorema 9.2.2 utilizând (9.4).

Indicație. Dacă $x_j = j \frac{\pi}{m}$, $j \in \{0, 1, \dots, 2m-1\}$ atunci $X = (2m-1)\pi$, $\sin \frac{X}{2} = (-1)^{m+1}$ și astfel $D \neq 0$. Atunci

$$t_2(x) = \sum_{j=0}^{2m-1} y_j \cos \frac{x-x_j}{2} \prod_{\substack{k=0 \\ k \neq j}}^{2m-1} \frac{\sin \frac{x-x_k}{2}}{\sin \frac{x_j-x_k}{2}} = u(x) \sum_{j=0}^{2m-1} y_j \frac{\cot \frac{x-x_j}{2}}{u_j(x_j)}, \quad (9.16)$$

cu $u(x) = \prod_{j=0}^{2m-1} \sin \frac{x-x_j}{2}$ și $u_j(x) = \frac{u(x)}{\sin \frac{x-x_j}{2}}$. Se obține $u_j(x_j) = 2u'(x_j) = -\frac{(-1)^j m}{2^{2m-2}}$.

Din identitatea 6 Anexa C, prin schimbarea de indice $k = 2m-1-j$ rezultă

$$u(x) = \prod_{j=0}^{2m-1} \sin \frac{x-x_j}{2} = \prod_{k=0}^{2m-1} \sin \left(\frac{mx - (2m-1)\pi}{2} + k \frac{\pi}{2m} \right) = -\frac{\sin mx}{2^{2m-1}},$$

Substituind egalitățile obținute în (9.16) se obține expresia dorită.

P 9.3 Dacă $f \in \mathbb{C}_{2\pi}$ atunci coeficienții polinomului de interpolare trigonometric a funcției f în nodurile echidistante converg către coeficienții Fourier ale funcției f .

Indicație. Cazul cu număr impar de noduri $x_j = \frac{2\pi}{2n+1}j$, $j \in \{0, 1, \dots, 2n\}$.

Pe baza identității 3 din Anexa C

$$t(x) = \frac{2}{2n+1} \sum_{j=0}^{2n} \left[\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^n \cos k(x - x_j) \right] f(x_j).$$

Dezvoltând $\cos k(x - x_j)$ și rearanjând sumele se obține

$$t(x) = \frac{1}{2n+1} \sum_{j=0}^{2n} f(x_j) + \sum_{k=1}^n \left[\frac{2}{2n+1} \left(\sum_{j=0}^{2n} f(x_j) \cos kx_j \right) \cos kx + \frac{2}{2n+1} \left(\sum_{j=0}^{2n} f(x_j) \sin kx_j \right) \sin kx \right].$$

Sumele $\frac{2\pi}{2n+1} \sum_{j=0}^{2n} f(x_j)$, $\frac{2\pi}{2n+1} \sum_{j=0}^{2n} f(x_j) \cos kx_j$, $\frac{2\pi}{2n+1} \sum_{j=0}^{2n} f(x_j) \sin kx_j$ reprezintă sume Riemann, respectiv pentru integralele

$$\int_0^{2\pi} f(x) dx, \quad \int_0^{2\pi} f(x) \cos kx dx, \quad \int_0^{2\pi} f(x) \sin kx dx.$$

În consecința

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2n+1} \sum_{j=0}^{2n} f(x_j) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x) dx, \\ \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2}{2n+1} \sum_{j=0}^{2n} f(x_j) \cos kx_j &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \cos kx dx, \\ \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2}{2n+1} \sum_{j=0}^{2n} f(x_j) \sin kx_j &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \sin kx dx. \end{aligned}$$

Cazul cu număr par de noduri $x_j = \frac{\pi}{n}j$, $j \in \{0, 1, \dots, 2n-1\}$. Utilizând identitatea 4 din Anexa C

$$\begin{aligned} t(x) &= \frac{1}{2n} \sum_{j=0}^{2n-1} f(x_j) \cot \frac{x - x_j}{2} \sin n(x - x_j) = \\ &= \frac{1}{2n} \sum_{j=0}^{2n-1} f(x_j) \left(1 + 2 \sum_{k=1}^{n-1} \cos k(x - x_j) + \cos n(x - x_j) \right) \end{aligned}$$

și se continuă analog ca în cazul numărului impar de noduri.

P 9.4 Dacă $x_j = \cos \frac{2\pi}{2n+1}j$, $j \in \{0, 1, \dots, n\}$, să se arate că

$$L(\mathbb{P}_n; x_0, \dots, x_n; f)(x) = A_0 + 2 \sum_{k=1}^n A_k T_k(x),$$

unde $A_k = \frac{1}{2n+1}[f(1) + 2 \sum_{j=0}^n f(x_j)T_k(x_j)]$ iar $T_j(x) = \cos(j \arccos x)$ este polinomul lui Cebîșev.

Indicație. Notând $\tau_j = \frac{2\pi}{2n+1}j$, $j \in \{0, 1, \dots, n\}$, polinomul trigonometric de interpolare care satisface condițiile $t(\tau_j) = f(\cos \tau_j) = f(x_j) = f_j$, $\forall j \in \{0, 1, \dots, 2n\}$ este

$$t(x) = \sum_{k=-n}^n c_k e^{ikx} = a_0 + \sum_{k=1}^n (a_k \cos kx + b_k \sin kx) \quad (9.17)$$

cu $c_k = \frac{1}{2n+1} \sum_{j=0}^{2n} y_j e^{-ik\tau_j}$, $k \in \{-n, -n+1, \dots, n\}$. Atunci $c_0 = a_0$ și

$$c_k = \frac{a_k - ib_k}{2} = \frac{1}{2n+1} \sum_{j=0}^{2n} f_j (\cos k\tau_j - i \sin k\tau_j), \quad k \in \{1, \dots, n\},$$

de unde

$$a_k = \frac{2}{2n+1} \sum_{j=0}^{2n} f_j \cos k\tau_j$$

$$b_k = \frac{2}{2n+1} \sum_{j=0}^{2n} f_j \sin k\tau_j.$$

Notând $\alpha_j^{(k)} = f(\cos \tau_j) \cos k\tau_j$, $\beta_j^{(k)} = f(\cos \tau_j) \sin k\tau_j$, în baza egalităților $\alpha_{2n-1-j}^{(k)} = \alpha_j^{(k)}$, $\beta_{2n-1-j}^{(k)} = -\beta_j^{(k)}$ obținem

$$a_k = \frac{2}{2n+1} (f(1) + 2 \sum_{j=1}^n f(x_j) \cos k\tau_j) =$$

$$= \frac{2}{2n+1} (f(1) + 2 \sum_{j=1}^n f(x_j) T_k(x_j)) = 2A_k$$

$$b_k = 0$$

și

$$a_0 = c_0 = \frac{1}{2n+1} \sum_{j=0}^{2n} f_j = \frac{1}{2n+1} (f(1) + 2 \sum_{j=0}^n f_j) = A_0.$$

Prin schimbarea de variabilă $\cos \tau = x$, membrul drept din (9.17) devine

$$a_0 + \sum_{k=1}^n a_k \cos(k \arccos x) = A_0 + 2 \sum_{k=1}^n A_k T_k(x)$$

care este un polinom de grad n . Unicitatea polinomului de interpolare în mulțimea polinoamelor de grad cel mult n implică egalitatea cerută.

SCHEIBER ERNEST

SCHEIBER ERNEST

SCHEIBER ERNEST

SCHEIBER ERNEST

Capitolul 10

Funcții spline polinomiale

O funcție spline se poate defini ca o funcție care este polinomială pe fiecare interval $[x_i, x_{i+1}]$ al unei diviziuni

$$\Delta : x_0 < x_1 < \dots < x_n \quad (10.1)$$

și care, în plus, are un anumit ordin de "netezime" (adică este continuă sau derivabilă de un anumit ordin, cu derivata corespunzătoare continuă).

10.1 Interpolare cu funcții spline cubice

Pentru diviziunea Δ (10.1), mulțimea $\mathcal{S}_3(\Delta)$ a funcțiilor spline cubice este definită prin

$$\mathcal{S}_3(\Delta) = \{s \in C^2 : s|_{[x_{i-1}, x_i]} \in P_3, 1 \leq i \leq n\}.$$

Fiind dată diviziunea Δ (10.1) și numerele reale y_0, y_1, \dots, y_n ne propunem să determinăm funcțiile $s \in \mathcal{S}_3(\Delta)$ care îndeplinesc condițiile de interpolare $s(x_i) = y_i, i \in \{0, 1, \dots, n\}$.

Funcția spline cubică de interpolare se va determina în funcție de parametrii $m_i = s'(x_i), i \in \{0, 1, \dots, n\}$, ale căror valori se vor calcula ulterior.

Notăm prin s_i restricția funcției s la intervalul $[x_i, x_{i+1}]$ și $h_i = x_{i+1} - x_i, i \in \{0, 1, \dots, n-1\}$. Deoarece s_i este polinom de gradul 3, pentru $x \in [x_i, x_{i+1}]$ rezultă

$$s_i(x) = y_i + m_i(x - x_i) + a_i(x - x_i)^2 + b_i(x - x_i)^3$$

Coefficienții a_i, b_i se determină din condițiile

$$s_i(x_{i+1}) = y_i + m_i h_i + a_i h_i^2 + b_i h_i^3 = y_{i+1},$$

$$s'_i(x_{i+1}) = m_i + 2a_i h_i + 3b_i h_i^3 = m_{i+1},$$

pentru $i = 0, 1, \dots, n-1$. În felul acesta se asigură continuitatea funcțiilor s și s' . Rezolvând sistemul de mai sus, obținem

$$\begin{aligned} a_i &= 3 \frac{y_{i+1} - y_i}{h_i^2} - \frac{2m_i + m_{i+1}}{h_i} \\ b_i &= \frac{m_i + m_{i+1}}{h_i^2} - 2 \frac{y_{i+1} - y_i}{h_i^3} \end{aligned}$$

și astfel

$$\begin{aligned} s_i(x) &= y_i + m_i(x - x_i) + \left(3 \frac{y_{i+1} - y_i}{h_i^2} - \frac{2m_i + m_{i+1}}{h_i}\right)(x - x_i)^2 + \\ &+ \left(\frac{m_i + m_{i+1}}{h_i^2} - 2 \frac{y_{i+1} - y_i}{h_i^3}\right)(x - x_i)^3. \end{aligned} \quad (10.2)$$

Numerele m_0, m_1, \dots, m_n se determină astfel încât s'' să fie continuă în nodurile interioare x_1, \dots, x_{n-1} . Se impun astfel condițiile $s''_{i-1}(x_i) = s''_i(x_i)$, $i = 1, 2, \dots, n-1$. Utilizând (10.2), în urma reducerilor rezultă ecuațiile

$$\begin{aligned} &\frac{h_i}{h_{i-1} + h_i} m_{i-1} + 2m_i + \frac{h_{i-1}}{h_{i-1} + h_i} m_{i+1} = \\ &= \frac{3}{h_{i-1} + h_i} \left[\frac{h_{i-1}}{h_i} (y_{i+1} - y_i) + \frac{h_i}{h_{i-1}} (y_i - y_{i-1}) \right], \quad i = 1, \dots, n-1. \end{aligned} \quad (10.3)$$

Aceste relații reprezintă un sistem algebric de $n-1$ ecuații în necunoscutele m_0, m_1, \dots, m_n .

Pentru ca numărul ecuațiilor să coincidă cu numărul necunoscutelor se introduc condițiile la "limită"

$$\begin{cases} m_0 = \alpha \\ m_n = \beta \end{cases} \quad (10.4)$$

sau

$$\begin{cases} s''(x_0) = s''_0(x_0) = 0 \\ s''(x_n) = s''_{n-1}(x_n) = 0 \end{cases} \quad (10.5)$$

unde α, β sunt constate date. Ținând seama de expresiile funcțiilor s_0 și s_{n-1} , ecuațiile (10.5) devin

$$\begin{cases} 2m_0 + m_1 = 3 \frac{y_1 - y_0}{h_0} \\ m_{n-1} + 2m_n = 3 \frac{y_n - y_{n-1}}{h_{n-1}} \end{cases} \quad (10.6)$$

Astfel determinarea unei funcții spline cubice de interpolare revine la:

1. Rezolvarea sistemului algebric (10.3)+(10.4) sau (10.3)+(10.6), sistem algebric de $n + 1$ ecuații liniare în necunoscutele m_0, m_1, \dots, m_n .
2. În fiecare interval $[x_i, x_{i+1}]$, funcția spline cubică de interpolare are expresia dată de formula (10.2).

Sistemul algebric de ecuații liniare a cărei soluția este m_0, m_1, \dots, m_n , parametrii față de care se exprimă funcția spline cubică de interpolare, este un sistem tridiagonal, rezolvabil utilizând metoda dublului parcurs.

Se observă că matricea sistemului este cu diagonala dominantă

$$|a_{i,i}| - \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n |a_{i,j}| = 1 \quad \forall i.$$

În consecință sistemul este compatibil și

$$\max_{0 \leq i \leq n} |m_i| \leq \max\{|\alpha|, \max_{1 \leq i \leq n-1} \frac{3}{h_{i-1} + h_i} \left| \frac{h_{i-1}}{h_i} (y_{i+1} - y_i) + \frac{h_i}{h_{i-1}} (y_i - y_{i-1}) \right|, |\beta|\} \quad (10.7)$$

sau

$$\max_{0 \leq i \leq n} |m_i| \leq \quad (10.8)$$

$$\leq \max\left\{3 \frac{|y_1 - y_0|}{h_0}, \max_{1 \leq i \leq n-1} \frac{3}{h_{i-1} + h_i} \left| \frac{h_{i-1}}{h_i} (y_{i+1} - y_i) + \frac{h_i}{h_{i-1}} (y_i - y_{i-1}) \right|, 3 \frac{|y_n - y_{n-1}|}{h_{n-1}}\right\}$$

după cum se utilizează (10.3)+(10.4) sau (10.3)+(10.6).

Fie $\underline{h} = \min_{0 \leq i \leq n-1} h_i$, $\bar{h} = \max_{0 \leq i \leq n-1} h_i$ și $\omega = \max_{0 \leq i \leq n-1} |y_{i+1} - y_i|$. Din (10.7) și (10.8) deducem respectiv

$$\max_{0 \leq i \leq n} |m_i| \leq \max\left\{|\alpha|, \frac{3\bar{h}\omega}{\underline{h}^2}, |\beta|\right\}; \quad (10.9)$$

$$\max_{0 \leq i \leq n} |m_i| \leq \max\left\{\frac{3\omega}{\underline{h}}, \frac{3\bar{h}\omega}{\underline{h}^2}\right\}. \quad (10.10)$$

Aceste relații vor fi utilizate la stabilirea convergenței unui șir de funcții spline cubice de interpolare.

Presupunem că numerele y_0, y_1, \dots, y_n reprezintă valorile unei funcții $f \in C^2[a, b]$ în punctele $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$ și că condițiile "la limită" (10.4) și (10.5) se rescriu sub forma

$$\begin{cases} s''(a) = 0 \\ s''(b) = 0 \end{cases} \quad (10.11)$$

și respectiv,

$$\begin{cases} s'(a) = f'(a) \\ s'(b) = f'(b). \end{cases} \quad (10.12)$$

Exemplul 10.1.1 Să se determine funcția spline cubică de interpolare corespunzătoare funcției $f(x) = |x|$, având nodurile $-2, -1, 0, 1, 2$.

Alegem condițiile la limită

$$s'(-2) = -1 \quad s'(2) = 1.$$

Sistemul algebric al parametrilor m este

$$\begin{cases} m_0 & = -1 \\ \frac{1}{2}m_0 + 2m_1 + \frac{1}{2}m_2 & = -3 \\ \frac{1}{2}m_1 + 2m_2 + \frac{1}{2}m_3 & = 0 \\ \frac{1}{2}m_2 + 2m_3 + \frac{1}{2}m_4 & = 3 \\ m_4 & = 1 \end{cases}$$

a cărei soluție este

$$m_0 = -1 \quad m_1 = -\frac{5}{4} \quad m_2 = 0 \quad m_3 = \frac{5}{4} \quad m_4 = 1.$$

Componentele funcției spline de interpolare devin

$$\begin{aligned} s_0(x) &= -\frac{x^3 + 5x^2 + 12x + 4}{4} & x < -1 \\ s_1(x) &= \frac{x^2(3x+7)}{4} & -1 \leq x < 0 \\ s_2(x) &= \frac{7x^2 - 3x^3}{4} & 0 \leq x < 1 \\ s_3(x) &= \frac{x^3 - 5x^2 + 12x - 4}{4} & x \geq 1 \end{aligned}$$

Graficele funcției $|x|$ și ale funcției spline cubice de interpolare sunt redată în [10.1](#).

Cazul periodic: $y_0 = y_n$. În locul condițiilor la limită se impun

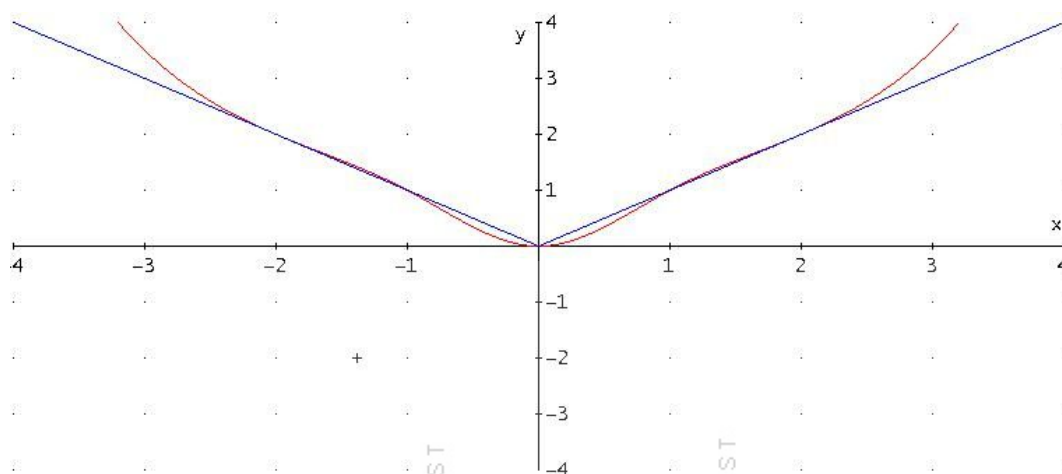
$$m_n = m_0 \quad (10.13)$$

și

$$s''_{n-1}(x_n) = s''_0(x_0), \quad (10.14)$$

condiții care asigură continuitatea primelor două derivate. Condiția (10.14) devine

$$\frac{m_1}{h_0} + \frac{2m_0}{h_0} + \frac{2m_n}{h_{n-1}} + \frac{m_{n-1}}{h_{n-1}} = 3\frac{y_1 - y_0}{h_0^2} + 3\frac{y_n - y_{n-1}}{h_{n-1}^2}$$

Figure 10.1: Graficul funcției $|x|$ și funcției spline de interpolare

și combinat cu (10.13) conduce la

$$\frac{h_{n-1}}{h_0 + h_{n-1}} m_{n-1} + 2m_0 + \frac{h_0}{h_0 + h_{n-1}} m_1 = \frac{3}{h_0 + h_{n-1}} \left[\frac{h_{n-1}}{h_0} (y_1 - y_0) + \frac{h_0}{h_{n-1}} (y_n - y_{n-1}) \right]. \quad (10.15)$$

Ansamblul format din (10.15) și (10.3) formează un sistem algebric de forma

$$\begin{pmatrix} a_0 & c_0 & & & b_0 \\ b_1 & a_1 & c_1 & & \\ & & \ddots & & \\ & & & b_{n-2} & a_{n-2} & c_{n-2} \\ c_{n-1} & & & b_{n-1} & a_{n-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} m_0 \\ m_1 \\ \vdots \\ m_{n-2} \\ m_{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d_0 \\ d_1 \\ \vdots \\ d_{n-2} \\ d_{n-1} \end{pmatrix}.$$

În vederea deducerii unor rezultate privind unicitatea funcției spline cubice de interpolare și a evaluării erorii $|s(x) - f(x)|$ avem nevoie de teorema:

Teorema 10.1.1 *Dacă funcția spline cubică de interpolare satisface una din condițiile la limită (10.11) sau (10.12) atunci are loc egalitatea*

$$\int_a^b [f''(x)]^2 dx = \int_a^b [s''(x)]^2 dx + \int_a^b [f''(x) - s''(x)]^2 dx. \quad (10.16)$$

Demonstrație. Are loc egalitatea $f''(x) = s''(x) + (f''(x) - s''(x)), \forall x \in [a, b]$. Ridicând la pătrat și integrând obținem

$$\begin{aligned} \int_a^b [f''(x)]^2 dx &= \int_a^b [s''(x)]^2 dx + \int_a^b [f''(x) - s''(x)]^2 dx + \\ &+ 2 \int_a^b s''(x)[f''(x) - s''(x)] dx. \end{aligned}$$

Rămâne de arătat că ultima integrală este egală cu 0. Avem

$$\int_a^b s''(x)[f''(x) - s''(x)] dx = \sum_{i=1}^n \int_{x_{i-1}}^{x_i} s''(x)[f''(x) - s''(x)] dx$$

și integrând prin părți rezultă

$$\begin{aligned} &\int_a^b s''(x)[f''(x) - s''(x)] dx = \\ &= \sum_{i=1}^n \{s''(x)[f'(x) - s'(x)]|_{x_{i-1}}^{x_i} - \int_{x_{i-1}}^{x_i} s^{(3)}(x)[f'(x) - s'(x)] dx\}. \end{aligned}$$

Dacă $x \in (x_{i-1}, x_i)$ atunci $s^{(3)}(x) = \frac{M_i - M_{i-1}}{h_i}$ și în consecință

$$\begin{aligned} \int_a^b s''(x)[f''(x) - s''(x)] dx &= \sum_{i=1}^n \{M_i[f'(x_i) - s'(x_i)] - M_{i-1}[f'(x_{i-1}) - s'(x_{i-1})] - \\ &- \frac{M_i - M_{i-1}}{h_i} \int_{x_{i-1}}^{x_i} [f'(x) - s'(x)] dx\} = \\ &= M_n[f'(x_n) - s'(x_n)] - M_0[f'(x_0) - s'(x_0)] - \sum_{i=1}^n \frac{M_i - M_{i-1}}{h_i} [f(x) - s(x)]|_{x_{i-1}}^{x_i} = \\ &= s''(b)[f'(b) - s'(b)] - s''(a)[f'(a) - s'(a)] = 0. \quad \blacksquare \end{aligned}$$

Au loc următoarele rezultate referitoare la funcția spline cubică de interpolare

Teorema 10.1.2 (Unicitatea funcției spline cubice de interpolare) *Există o singură funcție spline cubică de interpolare care satisface una din condițiile la limită (10.11) sau (10.12).*

Demonstrație. Dacă presupunem că funcțiile s_1, s_2 sunt funcții spline cubice care interpolatează funcția f în punctele x_0, x_1, \dots, x_n și care îndeplinesc condițiile la limită (10.11) sau (10.12), atunci funcția $s = s_1 - s_2$ satisface relațiile $s(x_i) = 0$, $i = 0, 1, \dots, n$ și $s''(a) = s''(b) = 0$ sau $s'(a) = s'(b) = 0$, după cum se utilizează condițiile la limită (10.11) sau (10.12). Astfel s reprezintă funcția spline cubică de interpolare a funcției nule. Aplicând (10.16) obținem

$$2 \int_a^b [s''(x)]^2 dx = 0,$$

de unde $s''(x) = 0, \forall x \in [a, b]$. Prin urmare s este un polinom de grad cel mult 1. Deoarece $s(a) = s(b) = 0$, în mod necesar $s = 0$. ■

Teorema 10.1.1 se poate reformula sub forma

Teorema 10.1.3 (Proprietatea de optimalitate a funcției spline cubice de interpolare) Funcția spline cubică de interpolare minimizează funcționala

$$I(\varphi) = \int_a^b [\varphi''(x)]^2 dx$$

în

$$\mathcal{D}_1 = \{\varphi \in C^2[a, b] : \varphi(x_i) = y_i, i = 0, 1, \dots, n; \varphi''(a) = \varphi''(b) = 0\}$$

sau

$$\mathcal{D}_2 = \{\varphi \in C^2[a, b] : \varphi(x_i) = y_i, i = 0, 1, \dots, n; \varphi'(a) = \alpha; \varphi'(b) = \beta\},$$

după cum se utilizează condițiile la limită (10.4) sau (10.5).

Teorema 10.1.4 (Evaluarea erorii funcției spline cubice de interpolare) Dacă $f \in C^2[a, b]$, atunci au loc relațiile

$$\begin{aligned} |f'(x) - s'(x)| &\leq \sqrt{h} \|f''\|_2 \\ |f(x) - s(x)| &\leq h^{\frac{3}{2}} \|f''\|_2, \end{aligned}$$

unde $h = \max\{h_1, \dots, h_n\}$ și $\|f''\|_2 = (\int_a^b [f''(x)]^2 dx)^{\frac{1}{2}}$.

Demonstrație. Funcția $f - s$ satisface în fiecare interval $[x_{i-1}, x_i]$ condițiile teoremei lui Rolle, deci există $c_i \in (x_{i-1}, x_i)$ astfel încât $(f' - s')(c_i) = 0$. Fie

$x \in [a, b]$. Există $k \in \{1, 2, \dots, n\}$ astfel încât $x \in [x_{k-1}, x_k]$. Atunci, utilizând inegalitatea Cauchy - Buniakovski - Schwarz au loc relațiile

$$\begin{aligned} |f'(x) - s'(x)| &= \left| \int_{c_k}^x [f''(t) - s''(t)] dt \right| \leq \\ &\leq \left(\int_{c_k}^x [f''(t) - s''(t)]^2 dt \right)^{\frac{1}{2}} \sqrt{|x - c_k|} \leq \sqrt{h} \left(\int_a^b [f''(t) - s''(t)]^2 dt \right)^{\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

Din (10.16), deducem

$$\int_a^b [f''(t) - s''(t)]^2 dt \leq \int_a^b [f''(t)]^2 dt = \|f''\|_2^2$$

și prin urmare

$$|f'(x) - s'(x)| \leq \sqrt{h} \|f''\|_2.$$

Totodată, din egalitatea

$$f(x) - s(x) = \int_{x_{k-1}}^{x_k} [f'(t) - s'(t)] dt$$

găsim

$$\begin{aligned} |f(x) - s(x)| &\leq \int_{x_{k-1}}^{x_k} |f'(t) - s'(t)| dt \leq \\ &\leq \sqrt{h} \|f''\|_2 \int_{x_{k-1}}^{x_k} dt \leq h^{\frac{3}{2}} \|f''\|_2. \quad \blacksquare \end{aligned}$$

Teorema 10.1.5 (Convergența unui șir de funcții spline cubice de interpolare) Fie $f \in C[a, b]$ și șirul de diviziuni

$$\Delta_k : \quad a = x_0^k < x_1^k < \dots < x_{n_k}^k = b$$

astfel încât, dacă

$$\underline{h}^k = \min_{0 \leq i \leq n_k-1} (x_{i+1}^k - x_i^k) \quad \bar{h}^k = \max_{0 \leq i \leq n_k-1} (x_{i+1}^k - x_i^k),$$

atunci

1. $\exists \delta > 0$ cu proprietatea $\frac{\bar{h}^k}{\underline{h}^k} \leq \delta, \quad \forall k \in N;$
2. $\lim_{k \rightarrow \infty} \bar{h}^k = 0.$

Dacă s_k este funcția spline cubică de interpolare a funcției f în pe diviziunea Δ_k și care satisface una din condițiile la limită

$$\begin{cases} s_k(a) = \alpha \\ s_k(b) = \beta \end{cases} \quad (10.17)$$

sau

$$\begin{cases} s_k''(a) = 0 \\ s_k''(b) = 0 \end{cases} \quad (10.18)$$

atunci $\lim_{k \rightarrow \infty} \|f - s_k\|_{\infty} = 0$.

Demonstrație. Notăm prin $\omega_f(h)$ modulul de continuitate al funcției f ,

$$\omega_f(h) \equiv \sup_{|y-x|<h} |f(y) - f(x)|.$$

Condiția de continuitate a funcției f este echivalentă cu $\lim_{h \rightarrow 0} \omega_f(h) = 0$.

Fie $x \in [a, b]$. Există $i \in \{0, 1, \dots, n_k - 1\}$ astfel încât $x \in [x_i^k, x_{i+1}^k]$. Ținând seama de reprezentarea (10.2) și folosind notațiile $y_i^k = f(x_i^k)$, $i = 0, 1, \dots, n_k$, $k \in N$ avem

$$\begin{aligned} s_k(x) - f(x) &= y_i^k - f(x) + m_i^k(x - x_i^k) + \left(3 \frac{y_{i+1}^k - y_i^k}{(h_i^k)^2} - \frac{2m_i^k + m_{i+1}^k}{h_i^k}\right)(x - x_i^k)^2 + \\ &+ \left(\frac{m_i^k + m_{i+1}^k}{(h_i^k)^2} - 2 \frac{y_{i+1}^k - y_i^k}{(h_i^k)^3}\right)(x - x_i^k)^3. \end{aligned}$$

unde $(m_i^k)_{0 \leq i \leq n_k}$ sunt parametrii funcției spline, soluțiile unui sistem de forma (10.3)+(10.4) sau (10.3)+(10.6), în funcție de condiția la limită folosită.

În continuare

$$\begin{aligned} |s_k(x) - f(x)| &\leq |y_i^k - f(x)| + |m_i^k|(x - x_i^k) + \\ &+ 3|y_{i+1}^k - y_i^k| \left(\frac{x - x_i^k}{h_i^k}\right)^2 + (2|m_i^k| + |m_{i+1}^k|) \frac{x - x_i^k}{h_i^k} (x - x_i^k) + \\ &+ (|m_i^k| + |m_{i+1}^k|) \left(\frac{x - x_i^k}{h_i^k}\right)^2 (x - x_i^k) + 2|y_{i+1}^k - y_i^k| \left(\frac{x - x_i^k}{h_i^k}\right)^3. \end{aligned}$$

Notând $M^k = \max_{0 \leq i \leq n_k} |m_i^k|$ din inegalitatea de mai sus deducem

$$|s_k(x) - f(x)| \leq \omega_f(\bar{h}^k) + M^k \bar{h}^k + 3\omega_f(\bar{h}^k) + 3M^k \bar{h}^k + 2M^k \bar{h}^k + 2\omega_f(\bar{h}^k) =$$

$$= 6\omega_f(\bar{h}^k) + 6M^k\bar{h}^k.$$

Deoarece membrul drept nu mai depinde de x rezultă că

$$\|s_k - f\|_\infty \leq 6\omega_f(\bar{h}^k) + 6M^k\bar{h}^k.$$

Dacă se utilizează condițiile la limită (10.17) atunci din (10.9) găsim

$$M^k \leq \max\{|\alpha|, \frac{3\bar{h}^k \omega_f(\bar{h}^k)}{(\underline{h}^k)^2}, |\beta|\},$$

și astfel

$$\begin{aligned} \|s_k - f\|_\infty &\leq 6\omega_f(\bar{h}^k) + 6 \max\{|\alpha|\bar{h}^k, 3\left(\frac{\bar{h}^k}{\underline{h}^k}\right)^2 \omega_f(\bar{h}^k), |\beta|\bar{h}^k\} \leq \\ &\leq 6\omega_f(\bar{h}^k) + 6 \max\{|\alpha|\bar{h}^k, 3\delta^2 \omega_f(\bar{h}^k), |\beta|\bar{h}^k\} \rightarrow 0, \quad \text{pentru } k \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

Dacă se utilizează condițiile la limită (10.18) atunci din (10.10) găsim

$$M^k \leq \max\left\{\frac{3\omega_f(\bar{h}^k)}{\underline{h}^k}, \frac{3\bar{h}^k \omega_f(\bar{h}^k)}{(\underline{h}^k)^2}\right\}$$

și astfel

$$\begin{aligned} \|s_k - f\|_\infty &\leq 6\omega_f(\bar{h}^k) + 6 \max\left\{3\frac{\bar{h}^k}{\underline{h}^k} \omega_f(\bar{h}^k), 3\left(\frac{\bar{h}^k}{\underline{h}^k}\right)^2 \omega_f(\bar{h}^k)\right\} \leq \\ &\leq 6\omega_f(\bar{h}^k) + 6 \max\{3\delta \omega_f(\bar{h}^k), 3\delta^2 \omega_f(\bar{h}^k)\} \rightarrow 0, \quad \text{pentru } k \rightarrow \infty. \blacksquare \end{aligned}$$

10.2 Funcția spline polinomială

Fie $m \in \mathbb{N}$ și diviziunea Δ (10.1). O funcție $s : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ se numește funcție spline polinomială de grad m cu nodurile diviziunii Δ dacă

1. $s|_{(-\infty, x_0)} \in \mathbb{P}_m$; $s|_{(x_i, x_{i+1})} \in \mathbb{P}_m$, $i \in \{0, 1, \dots, n-1\}$; $s|_{(x_n, \infty)} \in \mathbb{P}_m$;
2. $s \in C^{m-1}$.

Mulțimea funcțiilor spline polinomiale de grad m cu nodurile diviziunii Δ se notează $\mathcal{S}_m(\Delta)$.

Se introduce notația

$$(x-a)_+^k = \begin{cases} (x-a)^k, & x \geq a \\ 0 & x < a \end{cases} \quad k \geq 0.$$

Teorema 10.2.1 *Dacă $s \in \mathcal{S}_m(\Delta)$ atunci există polinomul $p \in \mathbb{P}_m$ și numerele reale c_1, \dots, c_{n-1} astfel încât*

$$s(x) = p(x) + \sum_{i=1}^{n-1} c_i (x-x_i)_+^m. \quad (10.19)$$

Demonstrație. Fie $p(x) = s|_{(x_0, x_1)}$. Pentru $x \leq x_0$ definim $s(x) = p(x)$. Notăm $s|_{(x_i, x_{i+1})} = s_i \in \mathbb{P}_m$, $i \in \{1, 2, \dots, n-1\}$. În x_1 , $p^{(k)}(x_1 - 0) = s_1^{(k)}(x_1 + 0)$, $k = 0, 1, \dots, m-1$. Deoarece $p, s_1 \in \mathbb{P}_m$, rezultă că $(s_1 - p)^{(k)}(x_1) = 0$, $k = 0, 1, \dots, m-1$, adică x_1 este rădăcină multiplă de ordin m a polinomului $s_1 - p$. Astfel $s_1(x) - p(x) = c_1(x-x_1)_+^m$ sau $s_1(x) = p(x) + c_1(x-x_1)_+^m$. Repetând raționamentul de mai sus, fiecare nod x_i , $i \in \{2, \dots, n-1\}$ contribuie cu un termen $c_i(x-x_i)_+^m$ la expresia funcției spline polinomială. În final, pentru $x > x_n$ definim $s(x) = s_{n-1}(x)$. ■

O funcție spline polinomială de grad m cu nodurile diviziunii Δ depinde de $m+n$ parametri.

10.2.1 Funcția spline polinomială naturală

Fie $m = 2q - 1$ în număr natural impar și diviziunea Δ (10.1). O funcție $s : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ se numește funcție spline polinomială naturală de grad $2q - 1$ cu nodurile diviziunii Δ dacă

1. $s \in \mathcal{S}_{2q-1}(\Delta)$;
2. $s|_{(-\infty, x_0)}, s|_{(x_n, \infty)} \in \mathbb{P}_{q-1}$.

Mulțimea funcțiilor spline polinomiale de grad $2q - 1$ cu nodurile diviziunii Δ se notează $\mathcal{S}_{2q-1}(\Delta)$.

Teorema 10.2.2 Dacă $s \in S_{2q-1}(\Delta)$ atunci există polinomul $p \in \mathbb{P}_{q-1}$ și numerele reale c_0, c_1, \dots, c_n astfel încât

$$s(x) = p(x) + \sum_{i=0}^n c_i (x - x_i)_+^{2q-1} \quad (10.20)$$

și au loc egalitățile

$$\sum_{i=0}^n c_i x_i^k = 0, \quad \forall k \in \{0, 1, \dots, q-1\}. \quad (10.21)$$

Demonstrație. Utilizând același raționament ca în Teorema 10.2.1 se deduce relația (10.20) cu $p = s|_{(-\infty, x_0)} \in \mathbb{P}_{q-1}$. Relațiile (10.21) rezultă din cerința

$$s|_{(x_n, \infty)} \in \mathbb{P}_{q-1} \quad \Leftrightarrow \quad s^{(q)}(x) = 0, \quad \forall x > x_n.$$

Pentru $x > x_n$, $s(x) = p(x) + \sum_{i=0}^n c_i (x - x_i)^{2q-1}$, de unde

$$\begin{aligned} s^{(q)}(x) &= \sum_{i=0}^n c_i \frac{(2q-1)!}{(q-1)!} (x - x_i)^{q-1} = \\ &= \frac{(2q-1)!}{(q-1)!} \sum_{i=0}^n c_i \sum_{k=0}^{q-1} \binom{q-1}{k} (-1)^k x^{q-1-k} x_i^k = \\ &= \frac{(2q-1)!}{(q-1)!} \sum_{k=0}^{q-1} \binom{q-1}{k} (-1)^k \left(\sum_{i=0}^n c_i x_i^k \right) x^{q-1-k}. \end{aligned}$$

Derivata se anulează dacă $\sum_{i=0}^n c_i x_i^k = 0, \forall k \in \{0, 1, \dots, q-1\}$. ■

Pentru o funcție spline polinomială naturală s de grad $2q-1$ cu nodurile diviziunii Δ au loc relațiile

$$s^{(k)}(x_0) = s^{(k)}(x_n) = 0, \quad \forall k \geq q. \quad (10.22)$$

Dacă $s \in \mathcal{S}_{2q-1}(\Delta)$ și $s^{(k)}(x_0) = s^{(k)}(x_n) = 0, \forall k \in \{q, q+1, \dots, 2q-1\}$ atunci $s \in S_{2q-1}(\Delta)$.

O funcție spline polinomială naturală s de grad $2q-1$ cu nodurile diviziunii Δ depinde de $n+1$ parametri.

Pentru funcției spline se utilizează relațiile (10.21) sau (10.22).

10.2.2 Interpolare cu funcții spline polinomiale

Fie $f \in C^q$ și $m = 2q - 1$.

1. Problema de interpolare cu *funcții spline polinomiale de grad $2q - 1$ cu nodurile diviziunii Δ* cere determinarea funcției $s \in \mathcal{S}_{2q-1}(\Delta)$ astfel încât

$$s(x_i) = f(x_i), \quad i \in \{0, 1, \dots, n\}$$

și care satisface în plus condițiile la limită

$$\begin{aligned} s^{(k)}(x_0) &= f^{(k)}(x_0) \\ s^{(k)}(x_n) &= f^{(k)}(x_n) \end{aligned} \quad \forall k \in \{1, 2, \dots, q-1\}.$$

Numărul condițiilor este $2q + n - 1$, ce coincide cu numărul parametrilor $m + n = 2q - 1 + n$.

Pentru $q = 2$ se regăsește problema de interpolare cu funcții spline cubice cu una din condițiile la limită naturală.

2. Problema de interpolare cu *funcții spline polinomiale naturale de grad $2q - 1$ cu nodurile diviziunii Δ* cere determinarea funcției $s \in S_{2q-1}(\Delta)$ astfel încât

$$s(x_i) = f(x_i), \quad i \in \{0, 1, \dots, n\}.$$

Numărul condițiilor este $n + 1$, ce coincide cu numărul parametrilor unei funcții spline polinomială naturală.

Pentru $q = 2$ se regăsește problema de interpolare cu funcții spline cubice cu cealaltă condiție la limită naturală.

Stabilim proprietăți ale funcției spline polinomiale de interpolare.

Teorema 10.2.3 Fie $g \in C^q[x_0, x_n]$ și $s \in \mathcal{S}_{2q-1}(\Delta)$. Dacă

$$g(x_i) = 0, \quad \forall i \in \{0, 1, \dots, n\}$$

și are loc una din condițiile la limită

$$g^{(k)}(x_0) = g^{(k)}(x_n) = 0, \quad \forall k \in \{1, \dots, q-1\}$$

sau

$$s^{(k)}(x_0) = s^{(k)}(x_n) = 0, \quad \forall k \in \{q, q+1, \dots, 2q-2\}$$

atunci

$$\int_{x_0}^{x_n} s^{(q)}(x)g^{(q)}(x)dx = 0. \quad (10.23)$$

Demonstrație. Pe fiecare interval (x_i, x_{i+1}) , $s^{(2q-1)}(x)$ este o constantă, pe care o notăm γ_i , $i \in \{0, 1, \dots, n-1\}$. Integrând succesiv prin părți, se obține

$$\begin{aligned} \int_{x_0}^{x_n} s^{(q)}(x)g^{(q)}(x)dx &= s^{(q)}(x)g^{(q-1)}\Big|_{x_0}^{x_n} - \int_{x_0}^{x_n} s^{(q)}(x)g^{(q-1)}(x)dx = \dots \\ &= (-1)^{q-2} \int_{x_0}^{x_n} s^{(2q-2)}(x)g''(x)dx. \end{aligned}$$

În general funcția $s^{(2q-2)}$ nu mai este derivabilă în punctele x_1, x_2, \dots, x_{n-1} . Descompunem ultima integrală într-o sumă de integrale pe intervale în care $s^{(2q-2)}$ este derivabilă și integrăm prin părți

$$\begin{aligned} \int_{x_0}^{x_n} s^{(q)}(x)g^{(q)}(x)dx &= (-1)^{q-2} \int_{x_0}^{x_n} s^{(2q-2)}(x)g''(x)dx = \\ &= (-1)^{q-2} \sum_{i=0}^{n-1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} s^{(2q-2)}(x)g''(x)dx = \\ &= (-1)^{q-2} \sum_{i=0}^{n-1} \left[s^{(2q-2)}(x)g'(x)\Big|_{x_i}^{x_{i+1}} - \int_{x_i}^{x_{i+1}} s^{(2q-1)}(x)g'(x)dx \right] = \\ &= (-1)^{q-2} \left[s^{(2q-2)}(x_n)g'(x_n) - s^{(2q-2)}(x_0)g'(x_0) \right] + \\ &\quad - (-1)^{q-1} \sum_{i=0}^{n-1} \gamma_i [g(x_{i+1}) - g(x_i)] = 0. \quad \blacksquare \end{aligned}$$

Teorema 10.2.4 Fie $f \in C^q[x_0, x_n]$. Dacă s este o funcție spline polinomială de grad $2q-1$ cu nodurile diviziunii Δ care satisface condițiile de interpolare

$$s(x_i) = f(x_i), \quad \forall i \in \{0, 1, \dots, n\}$$

și una din condițiile la limită

$$\begin{aligned} s^{(k)}(x_0) &= f^{(k)}(x_0), \\ s^{(k)}(x_n) &= f^{(k)}(x_n) \end{aligned} \quad \forall k \in \{1, \dots, q-1\}$$

sau

$$s^{(k)}(x_0) = s^{(k)}(x_n) = 0, \quad \forall k \in \{q, q+1, \dots, 2q-2\}$$

atunci

$$\int_{x_0}^{x_n} [f^{(q)}(x)]^2 dx = \int_{x_0}^{x_n} [s^{(q)}(x)]^2 dx + \int_{x_0}^{x_n} [f^{(q)}(x) - s^{(q)}(x)]^2 dx. \quad (10.24)$$

Demonstrație. Întrucât $[f^{(q)}]^2 = [s^{(q)}]^2 + [f^{(q)} - s^{(q)}]^2 + 2s^{(q)}[f^{(q)} - s^{(q)}]$ este suficient de atătat că

$$\int_{x_0}^{x_n} s^{(q)}(x)[f^{(q)}(x) - s^{(q)}(x)]dx = 0.$$

Pentru $g = f - s$ condițiile Teoremei 10.2.3 sunt îndeplinite, deci are loc egalitatea de mai sus. ■

Asemănător cazului funcțiilor spline cubice, relația (10.24) implică

- unicitatea funcției spline polinomială de interpolare cu condițiile la limită corespunzătoare;
- o proprietate de optimalitate.

10.3 Funcții B-spline

Corespunzător rețelei de puncte

$$\dots < t_{-2} < t_{-1} < t_0 < t_1 < t_2 < \dots$$

definim funcțiile B-spline $B_i^k(x)$, $i \in \mathbb{Z}$, $k \in \mathbb{N}$ prin

$$B_i^k(x) = (t_{i+k+1} - t_i)[t_i, t_{i+1}, \dots, t_{i+k+1}; (t-x)_+^k]. \quad (10.25)$$

Teorema 10.3.1 *Are loc formula de recurență*

$$B_i^0(x) = \begin{cases} 1 & \text{dacă } x \in [t_i, t_{i+1}), \\ 0 & \text{dacă } x \in (-\infty, t_i) \cup [t_{i+1}, \infty), \end{cases} \quad (10.26)$$

$$B_i^k(x) = \frac{x - t_i}{t_{i+k} - t_i} B_i^{k-1}(x) + \frac{t_{i+k+1} - x}{t_{i+k+1} - t_{i+1}} B_{i+1}^{k-1}(x), \quad (10.27)$$

pentru $k \geq 1$ și $i \in \mathbb{Z}$.

Demonstrație. Pentru $k = 0$ din (10.25) rezultă

$$\begin{aligned} B_i^0(x) &= (t_{i+1} - t_i)[t_i, t_{i+1}; (t-x)_+^0] = (t_{i+1} - x)_+^0 - (t_i - x)_+^0 = \\ &= \begin{cases} 1 & \text{dacă } x \in [t_i, t_{i+1}), \\ 0 & \text{dacă } x \in (-\infty, t_i) \cup [t_{i+1}, \infty), \end{cases} \end{aligned}$$

Pentru $k \geq 1$, utilizând formula lui Leibniz pentru diferențe divizate deducem

$$\begin{aligned}
 B_i^k(x) &= (t_{i+k+1} - t_i)[t_i, t_{i+1}, \dots, t_{i+k+1}; (t-x)_+^{k-1}(t-x)] = \quad (10.28) \\
 &= (t_{i+k+1} - t_i) \sum_{j=i}^{i+k+1} [t_i, t_{i+1}, \dots, t_j; (t-x)_+^{k-1}][t_j, t_{j+1}, \dots, t_{i+k+1}; t-x] = \\
 &= (t_{i+k+1} - t_i) \left([t_i, t_{i+1}, \dots, t_{i+k}; (t-x)_+^{k-1}][t_{i+k}, t_{i+k+1}; t-x] + \right. \\
 &\quad \left. + [t_i, t_{i+1}, \dots, t_{i+k+1}; (t-x)_+^{k-1}][t_{i+k+1}; t-x] \right),
 \end{aligned}$$

restul termenilor din sumă fiind nuli.

Au loc egalitățile:

$$\begin{aligned}
 [t_{i+k}, t_{i+k+1}; t-x] &= \frac{t_{i+k+1} - x - (t_{i+k} - x)}{t_{i+k+1} - t_{i+k}} = 1; \\
 [t_{i+k+1}; t-x] &= t_{i+k+1} - x; \\
 [t_i, t_{i+1}, \dots, t_{i+k}; (t-x)_+^{k-1}] &= \frac{B_i^{k-1}(x)}{t_{i+k} - t_i}; \\
 [t_i, t_{i+1}, \dots, t_{i+k+1}; (t-x)_+^{k-1}] &= \\
 &= \frac{[t_{i+1}, t_{i+2}, \dots, t_{i+k+1}; (t-x)_+^{k-1}] - [t_i, t_{i+1}, \dots, t_{i+k}; (t-x)_+^{k-1}]}{t_{i+k+1} - t_i} = \\
 &= \frac{1}{t_{i+k+1} - t_i} \left(\frac{B_{i+1}^{k-1}(x)}{t_{i+k+1} - t_{i+1}} - \frac{B_i^{k-1}(x)}{t_{i+k} - t_i} \right).
 \end{aligned}$$

Utilizând aceste rezultate, egalitatea (10.28) devine

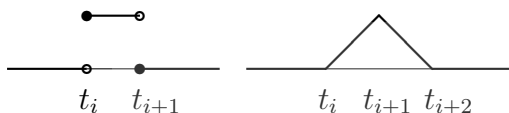
$$\begin{aligned}
 B_i^k(x) &= (t_{i+k+1} - t_i) \left[\frac{B_i^{k-1}(x)}{t_{i+k} - t_i} + \frac{t_{i+k+1} - x}{t_{i+k+1} - t_i} \left(\frac{B_{i+1}^{k-1}(x)}{t_{i+k+1} - t_{i+1}} - \frac{B_i^{k-1}(x)}{t_{i+k} - t_i} \right) \right] = \\
 &= B_i^{k-1}(x) \left(\frac{t_{i+k+1} - t_i}{t_{i+k} - t_i} - \frac{t_{i+k+1} - x}{t_{i+k} - t_i} \right) + B_{i+1}^{k-1}(x) \frac{t_{i+k+1} - x}{t_{i+k+1} - t_{i+1}} = \\
 &\quad \frac{x - t_i}{t_{i+k} - t_i} B_i^{k-1}(x) + \frac{t_{i+k+1} - x}{t_{i+k+1} - t_{i+1}} B_{i+1}^{k-1}(x). \quad \blacksquare
 \end{aligned}$$

Din (10.27) obținem

$$B_i^1(x) = \frac{x - t_i}{t_{i+1} - t_i} B_i^0(x) + \frac{t_{i+2} - x}{t_{i+2} - t_{i+1}} B_{i+1}^0(x) =$$

$$= \begin{cases} \frac{x-t_i}{t_{i+1}-t_i} & x \in [t_i, t_{i+1}) \\ \frac{t_{i+2}-x}{t_{i+2}-t_{i+1}} & x \in [t_{i+1}, t_{i+2}) \\ 0 & x \in (-\infty, t_i) \cup [t_{i+2}, \infty) \end{cases}$$

Graficele funcțiilor $B_i^0(x)$ și $B_i^1(x)$ sunt



Au loc următoarele proprietăți ale funcțiilor B-spline

Teorema 10.3.2 *Au loc relațiile:*

- (i) $B_i^k(x) = 0, \forall x \in (-\infty, t_i) \cup [t_{i+k+1}, \infty) \Leftrightarrow \text{supp } B_i^k \subseteq [t_i, t_{i+k+1})$;
- (ii) $B_i^k(x) \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$;
- (iii) $\sum_{i \in \mathbb{Z}} B_i^k(x) = 1$.

Demonstrație. Fiecare relație se demonstrează prin inducție după k .

(iii) $k = 0$. Pentru $x \in \mathbb{R}$ există $i_0 \in \mathbb{Z}$ astfel încât $x \in [t_{i_0}, t_{i_0+1})$ și în consecință

$$\sum_{i \in \mathbb{Z}} B_i^0(x) = B_{i_0}^0(x) = 1.$$

Presupunând $\sum_{i \in \mathbb{Z}} B_i^{k-1}(x) = 1$ și utilizând formula de recurență (10.27), se găsește

$$\begin{aligned} \sum_{i \in \mathbb{Z}} B_i^k(x) &= \sum_{i \in \mathbb{Z}} \left(\frac{x-t_i}{t_{i+k}-t_i} B_i^{k-1}(x) + \frac{t_{i+k+1}-x}{t_{i+k+1}-t_{i+1}} B_{i+1}^{k-1}(x) \right) = \\ &= \sum_{i \in \mathbb{Z}} \frac{x-t_i}{t_{i+k}-t_i} B_i^{k-1}(x) + \sum_{i \in \mathbb{Z}} \frac{t_{i+k+1}-x}{t_{i+k+1}-t_{i+1}} B_{i+1}^{k-1}(x). \end{aligned}$$

Efectuând în a doua sumă schimbarea de indice $i := i + 1$ se obține

$$\sum_{i \in \mathbb{Z}} B_i^k(x) = \sum_{i \in \mathbb{Z}} B_i^{k-1}(x) \left(\frac{x-t_i}{t_{i+k}-t_i} + \frac{t_{i+k}-x}{t_{i+k}-t_i} \right) = \sum_{i \in \mathbb{Z}} B_i^{k-1}(x) = 1. \quad \blacksquare$$

10.3.1 Funcții B-spline pe noduri echidistante

Fie $t_i = t_0 + ih$, $i \in \mathbb{Z}$. Utilizând (10.25) și (2.39)

$$\begin{aligned} B_i^k(x) &= (t_{i+k+1} - t_i)[t_i, t_{i+1}, \dots, t_{i+k+1}; (t-x)_+^k] = \\ &= (k+1)h \frac{\Delta_h^{k+1}(t_i-x)_+^k}{(k+1)!h^{k+1}} = \frac{1}{k!h^k} \sum_{j=0}^{k+1} \binom{k+1}{j} (-1)^{k+1-j} (t_i + jh - x)_+^k = \\ &= \frac{1}{k!h^k} \sum_{j=0}^{k+1} \binom{k+1}{j} (-1)^{k+1-j} (t_{i+j} - x)_+^k. \end{aligned} \quad (10.29)$$

Funcții B-spline cubice pe noduri echidistante. Pentru $k = 3$ se obțin funcțiile B-spline cubice pe noduri echidistante

$$B_i^3(x) = \frac{1}{6h^3} \sum_{j=0}^4 \binom{4}{j} (-1)^{4-j} (t_{i+j} - x)_+^3.$$

Prin calcul direct rezultă tabloul de valori ale funcției $B_i^3(x)$ și ale derivatelor sale

	t_i	t_{i+1}	t_{i+2}	t_{i+3}	t_{i+4}	
$B_i^3(x)$	0	$\frac{1}{6}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{6}$	0	(10.30)
$(B_i^3(x))'$	0	$\frac{1}{2h}$	0	$-\frac{1}{2h}$	0	
$(B_i^3(x))''$	0	$\frac{1}{h^2}$	$-\frac{2}{h^2}$	$\frac{1}{h^2}$	0	

Evident $B_i^3 \in \mathcal{S}_3$.

Teorema 10.3.3 *Funcțiile $(B_i^3)_{-3 \leq i \leq n-1}$ sunt liniar independente.*

Demonstrație. Dacă $\sum_{j=-3}^{n-1} \lambda_{j+2} B_j^3(x) = 0$ atunci $\sum_{j=-3}^{n-1} \lambda_{j+2} (B_j^3(x))' = 0$ și $\sum_{j=-3}^{n-1} \lambda_{j+2} (B_j^3(x))'' = 0$.

În particular, pentru $x = t_i$, $i \in \{-2, -1, \dots, n-2\}$ se obține sistemul

$$\begin{aligned} \lambda_{i-1} B_{i-3}^3(t_i) + \lambda_i B_{i-2}^3(t_i) + \lambda_{i+1} B_{i-1}^3(t_i) &= 0 \\ \lambda_{i-1} (B_{i-3}^3)'(t_i) + \lambda_i (B_{i-2}^3)'(t_i) + \lambda_{i+1} (B_{i-1}^3)'(t_i) &= 0 \Leftrightarrow \\ \lambda_{i-1} (B_{i-3}^3)''(t_i) + \lambda_i (B_{i-2}^3)''(t_i) + \lambda_{i+1} (B_{i-1}^3)''(t_i) &= 0 \\ \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_{i-1} + 4\lambda_i + \lambda_{i+1} = 0 \\ -\lambda_{i-1} + \lambda_{i+1} = 0 \\ \lambda_{i-1} - 2\lambda_i + \lambda_{i+1} = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

care are numai soluția banală. ■

Considerând cazul nodurilor echidistante, problema de interpolare cu funcții spline cubice se poate rezolva utilizând funcțiile B-spline $(B_i^3)_{-3 \leq i \leq n-1}$.

Soluția problemei de interpolare va fi de forma

$$s(x) = \sum_{i=-3}^{n-1} a_{i+2} B_i^3(x).$$

Funcția s se numește funcție spline cvasi-interpolatoare.

Cei $n+3$ coeficienți $a_{-1}, a_0, \dots, a_{n+1}$ se determină astfel încât să fie satisfăcute condițiile de interpolare

$$s(t_i) = y_i \quad i \in \{0, 1, \dots, n\} \quad (10.31)$$

și condițiile la limită

$$s'(t_0) = \alpha, \quad s'(t_n) = \beta \quad (10.32)$$

sau

$$s''(t_0) = 0, \quad s''(t_n) = 0. \quad (10.33)$$

Ținând seama de tabelul (10.30), relațiile (10.31) devin

$$s(t_i) = a_{i-1} B_{i-3}^3(t_i) + a_i B_{i-2}^3(t_i) + a_{i+1} B_{i-1}^3(t_i) = \frac{1}{6} a_{i-1} + \frac{2}{3} a_i + \frac{1}{6} a_{i+1} = y_i.$$

Condițiile la limită conduc la ecuațiile

$$\begin{aligned} s'(t_0) &= a_{-1} (B_{-3}^3)'(t_0) + a_0 (B_{-2}^3)'(t_0) + a_1 (B_{-1}^3)'(t_0) = \frac{-1}{2h} a_{-1} + \frac{1}{2h} a_1 = \alpha, \\ s'(t_n) &= a_{n-1} (B_{n-3}^3)'(t_n) + a_n (B_{n-2}^3)'(t_n) + a_{n+1} (B_{n-1}^3)'(t_n) = \\ &= \frac{-1}{2h} a_{n-1} + \frac{1}{2h} a_{n+1} = \beta \end{aligned}$$

și respectiv

$$\begin{aligned} s''(t_0) &= a_{-1} (B_{-3}^3)''(t_0) + a_0 (B_{-2}^3)''(t_0) + a_1 (B_{-1}^3)''(t_0) = \\ &= \frac{1}{h^2} a_{-1} - \frac{2}{h^2} a_0 + \frac{1}{h^2} a_1 = 0 \\ s''(t_n) &= a_{n-1} (B_{n-3}^3)''(t_n) + a_n (B_{n-2}^3)''(t_n) + a_{n+1} (B_{n-1}^3)''(t_n) = \\ &= \frac{1}{h^2} a_{n-1} - \frac{2}{h^2} a_n + \frac{1}{h^2} a_{n+1} = 0. \end{aligned}$$

Astfel pentru rezolvarea problemei (10.31)+(10.32) suntem conduși la sistemul algebric de ecuații liniare

$$\begin{cases} -a_{-1} & +a_1 & = & 2h\alpha \\ a_{i-1} & +4a_i & +a_{i+1} & = & 6y_i \\ -a_{n-1} & & +a_{n+1} & = & 2h\beta \end{cases} \quad i \in \{0, 1, \dots, n\} \quad (10.34)$$

Sistemul (10.34) are soluție unică. Determinantul sistemului este

$$\begin{vmatrix} -1 & 0 & 1 & & & & \\ 1 & 4 & 1 & & & & \\ & 1 & 4 & 1 & & & \\ & & \ddots & \ddots & & & \\ & & & 1 & 4 & 1 & \\ & & & & 1 & 4 & 1 \\ & & & & & 1 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

Adunând prima coloană la a treia și ultima coloană la antipenultima se obține

$$\begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 & & & & \\ 1 & 4 & 2 & & & & \\ & 1 & 4 & 1 & & & \\ & & \ddots & \ddots & & & \\ & & & 1 & 4 & 1 & \\ & & & & 2 & 4 & 1 \\ & & & & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

având diagonala dominantă, deci determinantul este diferit de zero.

Problema (10.31)+(10.33) conduce la sistemul algebric de ecuații liniare

$$\begin{cases} a_{-1} & -2a_0 & +a_1 & = & 0 \\ a_{i-1} & +4a_i & +a_{i+1} & = & 6y_i \\ a_{n-1} & -2a_n & +a_{n+1} & = & 0 \end{cases} \quad i \in \{0, 1, \dots, n\}. \quad (10.35)$$

Se arată, asemănător, că sistemul (10.35) are soluție unică. Rezolvarea sistemului constituie subiectul Problemei 1.10.

Capitolul 11

Interpolare cu sinus cardinal

O funcție de forma

$$x \mapsto \begin{cases} \frac{\sin \varphi(x)}{\varphi(x)} & \text{dacă } \varphi(x) \neq 0 \\ 1 & \text{dacă } \varphi(x) = 0 \end{cases}$$

unde φ este o funcție continuă, se numește funcție *sinc*, *sinus cardinal*.

11.1 Interpolare pe noduri echidistante în $[0, \pi]$

Pentru orice $n \in \mathbb{N}$ se definesc mulțimile $E_n = \{x_{n,k} = \frac{2\pi}{2^n}k : k = 0, 1, \dots, 2^n\}$.
În particular

$$\begin{aligned} E_0 &= \{0, 2\pi\} \\ E_1 &= \{0, \pi, 2\pi\} \\ E_2 &= \{0, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}, 2\pi\} \end{aligned}$$

Au loc proprietățile:

- $E_0 \subset E_1 \subset \dots \subset E_n \subset E_{n+1} \subset \dots$
- Mulțimea $E = \cup_{n=0}^{\infty} E_n$ este densă în $[0, 2\pi]$.

Introducem funcțiile

$$L_{n,k}(x) = \begin{cases} \frac{\sin 2^{n-1}(x-x_{n,k})}{2^{n-1}(x-x_{n,k})} & \text{dacă } x \neq x_{n,k} \\ 1 & \text{dacă } x = x_{n,k} \end{cases} \quad n \in \mathbb{N}, k = 0, 1, \dots, 2^n. \quad (11.1)$$

Stabilim câteva proprietăți simple ale funcțiilor sinc $L_{n,k}$.

Teorema 11.1.1 *Au loc proprietățile:*

1. $L_{n,k}(x_{n,j}) = \delta_{k,j}, \quad \forall k, j \in \{0, 1, \dots, 2^n\};$
2. $L'_{n,k}(x_{n,k}) = 0;$
3. $L'_{n,k}(x_{n,j}) = \frac{2^n(-1)^{j-k}}{2\pi(j-k)}, \quad j \neq k, j = 0, 1, \dots, 2^n;$
4. $L''_{n,k}(x_{n,k}) = -\frac{2^{2n-2}}{3};$
5. $|L_{n,k}(x)| \leq 1, \quad \forall x \in [0, 2\pi].$

Demonstrație. 2.

$$L'_{n,k}(x_{n,k}) = \lim_{x \rightarrow x_{n,k}} \frac{L_{n,k}(x) - L_{n,k}(x_{n,k})}{x - x_{n,k}} = \lim_{x \rightarrow x_{n,k}} \frac{\sin 2^{n-1}(x - x_{n,k}) - 1}{2^{n-1}(x - x_{n,k})^2}.$$

Punând $y = 2^{n-1}(x - x_{n,k})$, limita de mai sus devine $\lim_{y \rightarrow 0} 2^{n-1} \frac{\sin y - 1}{y^2} = 0$.

3.

$$L'_{n,k}(x) = \frac{\cos 2^{n-1}(x - x_{n,k})}{x - x_{n,k}} \frac{\sin 2^{n-1}(x - x_{n,k})}{2^{n-1}(x - x_{n,k})^2}.$$

Pentru $x = x_{n,j}$ se obține $L'_{n,k}(x_{n,j}) = \frac{2^n(-1)^{j-k}}{2\pi(j-k)}$.

4.

$$\begin{aligned} L''_{n,k}(x_{n,k}) &= \lim_{x \rightarrow x_{n,k}} \frac{L'_{n,k}(x) - L'_{n,k}(x_{n,k})}{x - x_{n,k}} = \\ &= \lim_{x \rightarrow x_{n,k}} \left(\frac{\cos 2^{n-1}(x - x_{n,k})}{(x - x_{n,k})^2} - \frac{\sin 2^{n-1}(x - x_{n,k})}{2^{n-1}(x - x_{n,k})^3} \right). \end{aligned}$$

Din nou, pentru $y = 2^{n-1}(x - x_{n,k})$, limita devine

$$\lim_{y \rightarrow 0} 2^{2n-2} \frac{y \cos y - \sin y}{y^3} = -\frac{2^{2n-2}}{3}.$$

5. Inegalitatea rezultă din

$$\begin{aligned} |x| < \frac{\pi}{2} &\Rightarrow |\sin x| \leq |x| \\ |x| \geq \frac{\pi}{2} &\Rightarrow |\sin x| \leq 1 < \frac{\pi}{2} \leq |x| \quad \blacksquare \end{aligned}$$

Fie $f : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}$. Introducem operatorul liniar

$$f \mapsto S_n(f) \quad \text{definit prin} \quad S_n(f)(x) = \sum_{k=0}^{2^n} f(x_{n,k}) L_{n,k}(x).$$

Din teorema 11.1.1 rezultă că funcția $S_n(f)(x)$ satisface condițiile de interpolare

$$S_n(f)(x_{n,k}) = f(x_{n,k}), \quad k = 0, 1, \dots, 2^n.$$

Această funcție se numește funcția de interpolare *sinc* a funcției f .

Teorema 11.1.2 Dacă $m > n$ atunci $S_n(f)(x_{n,k}) = S_m(f)(x_{n,k})$, $k = 0, 1, \dots, 2^n$.

Demonstrație. $E_n \subset E_m$, pentru $x_{n,k} = \frac{2\pi}{2^n}k = \frac{2\pi}{2^m}2^{m-n}k = x_{m,2^{m-n}k} = y$ condițiile de interpolare implică $S_n(f)(y) = f(y) = S_m(f)(y)$. ■

Teorema 11.1.3 Au loc egalitățile

$$1. S_n(L_{n,k}) = L_{n,k}, \quad k = 0, 1, \dots, 2^n;$$

$$2. S_n(S_n(f)) = S_n(f),$$

adică funcțiile $L_{n,k}$, $k = 0, 1, \dots, 2^n$ și $S_n(f)$ sunt puncte fixe ale operatorului S_n .

Demonstrație. Calculând, se obțin

1.

$$S_n(L_{n,k})(x) = \sum_{j=0}^{2^n} L_{n,k}(x_{n,j})L_{n,j}(x) = \sum_{j=0}^{2^n} \delta_{k,j}L_{n,j}(x) = L_{n,k}(x).$$

2.

$$S_n(S_n(f))(x) = \sum_{j=0}^{2^n} S_n(f)(x_{n,j})L_{n,j}(x) = \sum_{j=0}^{2^n} f(x_{n,j})L_{n,j}(x) = S_n(f)(x). \quad \blacksquare$$

Pentru cazul funcțiilor continue în intervalul compact $[0, 2\pi]$, se alege norma $\|f\| = \max_{x \in [0, 2\pi]} |f(x)|$ și are loc

Teorema 11.1.4 Operatorul S_n este continuu, având loc inegalitatea

$$\|S_n(f)\| \leq (2^n + 1)\|f\|, \quad \forall f \in C[0, 2\pi].$$

Demonstrație.

$$|S_n(f)(x)| = \left| \sum_{j=0}^{2^n} f(x_{n,j})L_{n,j}(x) \right| \leq \|f\| \sum_{j=0}^{2^n} |L_{n,j}(x)| \leq (2^n + 1)\|f\|. \quad \blacksquare$$

Liniaritatea operatorului S_n implică inegalitatea

$$\|S_n(f) - S_n(g)\| \leq (2^n + 1)\|f - g\|.$$

Amintim câteva rezultate din teoria transformării Fourier.

Fie $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ o funcție din L^1 , adică $\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)| dt < \infty$.

- Transformarea Fourier a funcției f este

$$F(z) = \mathcal{F}(f(t))(z) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-itz} dt, \quad z \in \mathbb{R};$$

- Transformarea Fourier inversă este

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(z)e^{itz} dz;$$

- Egalitatea lui Parseval: dacă $F(z), G(z)$ sunt transformările Fourier ale funcțiilor f, g atunci

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\overline{g(t)} dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(z)\overline{G(z)} dz;$$

- În consecință

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |F(z)|^2 dz;$$

- Produsul de convoluție a funcțiilor f și g este definit prin

$$(f * g)(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(s)g(t-s) ds.$$

Dacă $F(z), G(z)$ sunt transformările Fourier ale funcțiilor f și g atunci

$$\mathcal{F}((f * g)(t))(z) = F(z)G(z).$$

Teorema 11.1.5 *Are loc egalitatea*

$$L_{n,k}(x) = \frac{1}{2^n} \int_{-2^{n-1}}^{2^{n-1}} e^{-i\frac{2\pi k}{2^n}z} e^{izx} dz. \quad (11.2)$$

Demonstrație. Calculând integrala din membrul drept, se obțin

$$\begin{aligned} \frac{1}{2^n} \int_{-2^{n-1}}^{2^{n-1}} e^{iz(x - \frac{2\pi k}{2^n})} dz &= \frac{1}{2^n} \left. \frac{e^{iz(x - \frac{2\pi k}{2^n})}}{i(x - \frac{2\pi k}{2^n})} \right|_{-2^{n-1}}^{2^{n-1}} = \\ &= \frac{1}{2^n} \frac{e^{i2^{n-1}(x - \frac{2\pi k}{2^n})} - e^{-i2^{n-1}(x - \frac{2\pi k}{2^n})}}{i(x - \frac{2\pi k}{2^n})} = \frac{1}{2^{n-1}} \frac{\sin 2^{n-1}(x - x_{n,k})}{x - x_{n,k}} = L_{n,k}(x). \quad \blacksquare \end{aligned}$$

Interpretând egalitatea (11.2) drept o transformare Fourier inversă, deducem că funcția

$$F(z) = \begin{cases} \frac{2\pi}{2^n} e^{-i\frac{2\pi k}{2^n} z} & \text{dacă } |z| < 2^{n-1} \\ 0 & \text{dacă } |z| \geq 2^{n-1} \end{cases}$$

este transformata Fourier a funcției $L_{n,k}(x)$.

Utilizând egalitatea lui Parseval se obține proprietatea de ortogonalitate a funcțiilor $L_{n,k}$:

Teorema 11.1.6 *Au loc egalitățile*

$$\int_{-\infty}^{\infty} L_{n,k}(x)L_{n,j}(x)dx = \frac{2\pi}{2^n} \delta_{k,j}, \quad \forall k, j \in \{0, 1, \dots, 2^n\}.$$

Demonstrație. Notăm prin $F_{n,k}$ transformata Fourier a funcției $L_{n,k}$. Pentru $k = j$

$$\int_{-\infty}^{\infty} L_{n,k}^2 dx = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |F_{n,k}(z)|^2 dz = \frac{2\pi}{2^n}.$$

Pentru $k \neq j$

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} L_{n,k}(x)L_{n,j}(x)dx &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F_{n,k}(z)\overline{F_{n,j}(z)}dz = \frac{2\pi}{2^{2n}} \int_{-2^{n-1}}^{2^{n-1}} e^{-iz\frac{2\pi}{2^n}(k-j)} dz = \\ &= \frac{2\pi}{2^{2n}} \left. \frac{e^{-iz\frac{2\pi}{2^n}(k-j)}}{-i\frac{2\pi}{2^n}(k-j)} \right|_{-2^{n-1}}^{2^{n-1}} = \frac{2\pi \sin \pi(k-j)}{2^n \pi(k-j)} = 0. \quad \blacksquare \end{aligned}$$

11.2 Interpolare pe noduri echidistante în \mathbb{R}

Vom utiliza formula

$$\sin(x) = x \prod_{j=1}^{\infty} \left(1 - \frac{x}{\pi^2 j^2}\right) \quad (11.3)$$

și notația

$$\operatorname{sinc} x = \begin{cases} \frac{\sin x}{x} & \text{dacă } x \neq 0 \\ 1 & \text{dacă } x = 0 \end{cases}.$$

Fie $h > 0$ și $x_k = a + kh$, $k \in \mathbb{Z}$. Polinomul de interpolare Lagrange pe cele $2n + 1$ noduri $x_{-n}, x_{-n+1}, \dots, x_n$ este

$$L(\mathbb{P}_{2n}; x_{-n}, x_{-n+1}, \dots, x_n; f)(x) = \sum_{k=-n}^n f(x_k) l_{n,k}(x), \quad (11.4)$$

unde

$$\begin{aligned} l_{n,k}(x) &= \frac{(x - x_{-n}) \dots (x - x_{k-1})(x - x_{k+1}) \dots (x - x_n)}{(x_k - x_{-n}) \dots (x_k - x_{k-1})(x_k - x_{k+1}) \dots (x_k - x_n)} = \\ &= \frac{(\frac{x-a}{h} + n)(\frac{x-a}{h} + n - 1) \dots (\frac{x-a}{h} - k + 1)(\frac{x-a}{h} - k - 1) \dots (\frac{x-a}{h} - n)}{(k+n)(k+n-1) \dots 1(-1) \dots ((n-k))}. \end{aligned} \quad (11.5)$$

Pentru $n \rightarrow \infty$ se obține

$$\lim_{n \rightarrow \infty} l_{n,k}(x) = \prod_{j=1}^{\infty} \frac{(\frac{x-a}{h} - k)^2 - j^2}{-j^2} = \prod_{j=1}^{\infty} \left(1 - \left(\frac{\frac{x-a}{h} - k}{j} \right)^2 \right).$$

Ținând seama de 11.3 vom avea

$$\lim_{n \rightarrow \infty} l_{n,k}(x) = \frac{\sin(\frac{x-a}{h} - k)\pi}{(\frac{x-a}{h} - k)\pi} = \operatorname{sinc}\left(\left(\frac{x-a}{h} - k\right)\pi\right) = \operatorname{sinc}\frac{\pi(x - x_k)}{h}.$$

iar formula 11.4 devine

$$L(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} f(x_k) \operatorname{sinc}\frac{(x - x_k)\pi}{h}. \quad (11.6)$$

Stabilim proprietățile:

Teorema 11.2.1 Transformata Fourier a funcției $\varphi(t) = \operatorname{sinc}(\pi t)$ este $F(z) = \operatorname{rect}(\frac{z}{2\pi})$, unde

$$F(z) = \operatorname{rect}(t) = \begin{cases} 1 & \text{dacă } |t| \leq \frac{1}{2} \\ 0 & \text{dacă } |t| > \frac{1}{2} \end{cases}.$$

Demonstrație. Într-adevăr,

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \operatorname{rect}\left(\frac{z}{2\pi}\right) e^{izt} dz = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{izt} dz = \frac{1}{2\pi} \frac{e^{izt}}{it} \Big|_{-\pi}^{\pi} = \frac{1}{\pi t} \frac{e^{i\pi t} - e^{-i\pi t}}{2i} = \frac{\sin \pi t}{\pi t}. \quad \blacksquare$$

Teorema 11.2.2 *Funcțiile $\varphi_k(x) = \text{sinc}\frac{(x-x_k)\pi}{h}$, $k \in \mathbb{Z}$, satisfac condițiile*

- (i) $\varphi_k(x_j) = \delta_{k,j}$;
 (ii) $\int_{-\infty}^{\infty} \varphi_k(x)\varphi_j(x)dx = \delta_{k,j}$.

Demonstrație. (ii) Calculăm

$$\int_{-\infty}^{\infty} \varphi_k(x)\varphi_j(x)dx = \int_{-\infty}^{\infty} \text{sinc}\frac{(x-x_k)\pi}{h} \text{sinc}\frac{(x-x_j)\pi}{h} dx.$$

Prin schimbarea de variabilă $x - x_k = hq$ integrala de mai sus devine

$$\int_{-\infty}^{\infty} \text{sinc}(q\pi) \text{sinc}((j-k) - q)\pi dq = (q * q)(j-k) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F^2(z) e^{iz(j-k)} dz.$$

* reprezintă produsul de convoluție. Potrivit teoremei anterioare, rezultă

$$\int_{-\infty}^{\infty} \varphi_k(x)\varphi_j(x)dx = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{iz(j-k)} dz = \delta_{k,j}. \quad \blacksquare$$

În consecință, funcția $L(x)$ definită în (11.6) satisface condițiile de interpolare

$$L(x_k) = f(x_k), \quad \forall k \in \mathbb{Z}.$$

SCHEIBER ERNEST SCHEIBER ERNEST

SCHEIBER ERNEST SCHEIBER ERNEST

Partea II

**METODE NUMERICE ÎN
ALGEBRA LINIARĂ**

SCH
EIBER ERNE
ST

SCH
EIBER ERNE
ST

Capitolul 12

Elemente de analiză matriceală

12.1 Definiții, notații, proprietăți

•

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n \quad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^n$$
$$x^T = (x_1, \dots, x_n) \quad x^H = (\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n)$$

Un vector din \mathbb{C} sau \mathbb{R} se va identifica cu o matrice $M_{n,1}(\mathbb{C})$, respectiv $M_{n,1}(\mathbb{R})$.

•

$$x, y \in \mathbb{R}^n \quad x, y \in \mathbb{C}^n$$
$$\langle x, y \rangle = \sum_{k=1}^n x_k y_k \quad \langle x, y \rangle = \sum_{k=1}^n x_k \bar{y}_k$$
$$\|x\|_2 = \sqrt{\langle x, x \rangle} = \sqrt{x^T x} \quad \|x\|_2 = \sqrt{\langle x, x \rangle} = \sqrt{x^H x}$$

•

$$\|x\|_\infty = \max_{1 \leq k \leq n} |x_k|$$

• Doi vectori $x, y \in \mathbb{C}$ (sau \mathbb{R}) sunt ortogonali dacă $\langle x, y \rangle = 0$.

• O familie de vectori $(x_i)_{1 \leq i \leq k}$ din $x, y \in \mathbb{C}$ (sau \mathbb{R}) este ortonormată dacă

$$\langle x_i, x_j \rangle = \delta_{i,j} = \begin{cases} 1, & \text{dacă } i = j \\ 0, & \text{dacă } i \neq j \end{cases}$$

- O matrice $A \in M_{n,k}(\mathbb{C})$ se poate reprezenta prin

$$A = (a_{i,j})_{1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq k} = [a_1 a_2 \dots a_k], \quad \text{unde } a_j = \begin{pmatrix} a_{1,j} \\ \vdots \\ a_{n,j} \end{pmatrix}.$$

-

$$I_n = (\delta_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

este matricea unitate de ordinul n .

- Dacă $A \in M_n(\mathbb{R}) = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$ atunci $A^T = (a_{j,i})_{1 \leq i,j \leq n}$ este matricea transpusă.
- Dacă $A \in M_n(\mathbb{C})$ atunci $A^H = \overline{A}^T$. Bara superioară desemnează operatorul de conjugare aplicat fiecărui element al matricei.
- O matrice pătrată $A \in M_n(\mathbb{C})$ este inversabilă dacă există $A^{-1} \in M_n(\mathbb{C})$ astfel încât $A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = I_n$.
- $A \in M_n(\mathbb{R})$ este simetrică dacă $A^T = A$.
- $A \in M_n(\mathbb{C})$ este hermitiană dacă $A^H = A$.
- $A \in M_{n,k}(\mathbb{R})$ este ortogonală dacă $A^T \cdot A = I_k$.
- $A \in M_{n,k}(\mathbb{C})$ este unitară dacă $A^H \cdot A = I_k$.
- O matrice $A \in M_n(\mathbb{C})$, $A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$ cu proprietatea $a_{i,j} = 0$, pentru $i > j$ se numește matrice superior triunghiulară.
- O matrice $A \in M_n(\mathbb{C})$, $A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$ cu proprietatea $a_{i,j} = 0$, pentru $i < j$ se numește matrice inferior triunghiulară.
- O matrice $A \in M_n(\mathbb{C})$, $A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$ cu proprietatea $a_{i,j} = 0$, pentru $i \neq j$ se numește matrice diagonală.
- O matrice $A \in M_n(\mathbb{C})$, $A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$ cu proprietatea $a_{i,j} = 0$, pentru $j < i$ și $i + 1 < j$ se numește matrice bidiagonală (superioară).

- O matrice $A \in M_n(\mathbb{C})$, $A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$ cu proprietatea $a_{i,j} = 0$, pentru $i > j + 1$ se numește matrice Hessenberg.

- O matrice $A \in M_n(\mathbb{R})$ este pozitiv definită dacă

$$\langle Ax, x \rangle \geq 0, \quad \forall x \in \mathbb{R}^n.$$

- O matrice $A \in M_n(\mathbb{R})$ este strict pozitiv definită dacă

$$\langle Ax, x \rangle > 0, \quad \forall x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}.$$

Pentru matricea $A \in M_n(\mathbb{R})$ strict pozitivă folosim notația $A > 0$. Mai mult, dacă $A, B \in M_n(\mathbb{R})$ vom scrie $A > B \Leftrightarrow A - B > 0$.

- O matrice $A \in M_n(\mathbb{R})$ este tare pozitiv definită dacă

$$\exists m > 0 \quad \text{astfel încât} \quad \langle Ax, x \rangle \geq m \|x\|_2^2, \quad \forall x \in \mathbb{R}^n.$$

Astfel A tare pozitiv definită $\Rightarrow A$ strict pozitiv definită $\Rightarrow A$ pozitiv definită.

- Fie $A \in M_{n,k}(\mathbb{C})$. Matricea A generează un operator liniar $\mathbf{A} : \mathbb{C}^k \rightarrow \mathbb{C}^n$ definit prin $\mathbf{A}(x) = Ax$.

$$\text{Ker}(\mathbf{A}) = \{x \in \mathbb{C}^k : Ax = 0\}$$

$$\text{Im}(\mathbf{A}) = \{y \in \mathbb{C}^n : \exists x \in \mathbb{C}^k \text{ astfel încât } y = Ax\}$$

Se mai utilizează notațiile $\text{Im}(\mathbf{A}) = \mathcal{R}(\mathbf{A})$ și $\text{Ker}(\mathbf{A}) = \mathcal{N}(\mathbf{A})$.

- Norma unei matrice $A \in M_{n,k}(\mathbb{C})$ este norma operatorului liniar generat de matricea A , adică $\mathbf{A} : \mathbb{C}^k \rightarrow \mathbb{C}^n$, $\mathbf{A}(x) = Ax$. În cele ce urmează operatorul \mathbf{A} se va identifica cu matricea A .

- Un număr $\lambda \in \mathbb{C}$ este o valoare proprie a matricei $A \in M_n(\mathbb{C})$ dacă există un vector nenul $x \in \mathbb{C}^n$ astfel încât $Ax = \lambda x$.

În acest caz x este un vector propriu corespunzător valorii proprii λ , iar perechea (λ, x) este o pereche proprie matricei A .

- Un vector $y \in \mathbb{C}^n$, $y \neq 0$ este un vector propriu la stânga corespunzătoare valorii proprii λ dacă $y^H Ax = \lambda y^H$.

- Valoarea proprie λ are ordinul de multiplicitate algebric k dacă λ este rădăcină multiplă de ordin k a polinomului caracteristic.

- Valoarea proprie λ are ordinul de multiplicitate geometric k dacă dimensiunea subspațiului liniar $S(\lambda)$ este k .
- Dacă o matrice are o valoare proprie având ordinul de multiplicitate geometric este mai mic decât ordinul de multiplicitate algebric atunci matricea se numește defectivă. În caz contrar matricea se numește nedefectivă.

Exemplul 12.1.1 Matricea $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ are valoarea proprie $\lambda = 1$ având ordinul de multiplicitate algebric 2, dar $S(1) = \{(x, 0) : x \in \mathbb{C}\}$, are dimensiunea 1.

- Două matrice $A, B \in M_n(\mathbb{C})$ sunt similare dacă există o matrice inversabilă $X \in M_n(\mathbb{C})$ astfel încât $B = X^{-1}AX$.
- Raza spectrală a matricei $A \in M_m(\mathbb{C})$ este numărul

$$\rho(A) = \max\{|\lambda| : \lambda \text{ valoare proprie a matricei } A\}.$$

Proprietatea 12.1.1 Dacă $A \in M_n(\mathbb{C})$ este o matrice hermitiană atunci

$$\langle Ax, y \rangle = \langle x, A^H y \rangle \quad \forall x, y \in \mathbb{C}^n.$$

Proprietatea 12.1.2 Dacă $A \in M_n(\mathbb{C})$ este o matrice hermitiană atunci

$$\langle Ax, y \rangle = \langle x, Ay \rangle \quad \forall x, y \in \mathbb{C}^n.$$

Proprietatea 12.1.3 Dacă $A \in M_{m,n}(\mathbb{C})$, $C \in M_{n,p}(\mathbb{C})$ atunci $(AB)^H = B^H A^H$.

Proprietatea 12.1.4 Dacă $A, B \in M_n(\mathbb{C})$ sunt matrice hermitiene și $AB = BA$ atunci AB este tot o matrice hermitiană.

Demonstrație.

$$(AB)^H = B^H A^H = BA = AB. \quad \blacksquare$$

Proprietatea 12.1.5 Dacă $A, B \in M_n(\mathbb{C})$ sunt matrice unitare atunci AB este tot o matrice unitară.

Proprietatea 12.1.6 Dacă $A \in M_n(\mathbb{C})$ este o matrice unitară și $x \in \mathbb{C}^n$ atunci

$$\|Ax\|_2 = \|x\|_2 \quad \text{și} \quad \|A^H x\|_2 = \|x\|_2.$$

Demonstrație.

$$\|Ax\|_2^2 = (Ax)^H(Ax) = (x^H A^H)(Ax) = x^H(A^H A)x = x^H x = \|x\|_2^2. \quad \blacksquare$$

Proprietatea 12.1.7 Fie $A \in M_{n,k}(\mathbb{C})$. Dacă $X \in M_n(\mathbb{C})$ și $Y \in M_k(\mathbb{C})$ sunt matrice unitare atunci

$$\|A\|_2 = \|X^H A\|_2 = \|AY\|_2.$$

Demonstrație. Utilizând propoziția precedentă, au loc egalitățile

$$\|X^H A\|_2 = \sup_{\|z\|_2 \leq 1} \|X^H Az\| = \sup_{\|z\|_2 \leq 1} \|Az\| = \|A\|_2$$

și

$$\|AY\|_2 = \sup_{\|z\| \leq 1} \|AYz\|_2 = \sup_{\|w\| \leq 1} \|Aw\|_2 = \|A\|_2,$$

unde $w = Yz$. \blacksquare

Proprietatea 12.1.8 Dacă $A \in M_{n,k}(\mathbb{C})$, $A = [a_1 a_2 \dots a_k]$ este o matrice unitară atunci $(a_i)_{1 \leq i \leq k}$ formează o familie ortonormată.

Demonstrație.

$$A^H A = \begin{bmatrix} a_1^H \\ \vdots \\ a_k^H \end{bmatrix} \cdot [a_1 \dots a_k] = (a_i^H a_j)_{1 \leq i, j \leq k} = I_k. \quad \blacksquare$$

Proprietatea 12.1.9 Dacă $A \in M_n(\mathbb{C})$ este o matrice unitară atunci $A^{-1} = A^H$.

Proprietatea 12.1.10 Dacă $A \in M_n(\mathbb{R})$ strict pozitiv definită, atunci matricea A este nesingulară.

Proprietatea 12.1.11 O matrice $A \in M_n(\mathbb{R})$ strict pozitiv definită este tare pozitiv definită.

Demonstrație. Funcția $f : \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$ definită prin formula

$$f(x) = \frac{\langle Ax, x \rangle}{\|x\|_2^2}$$

este continuă și în mulțimea compactă $S = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\|_2 = 1\}$ își atinge minimumul, adică există $x_0 \in S$ astfel încât

$$f(x) \geq f(x_0) = m > 0 \quad \forall x \in S.$$

Dacă $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ atunci $\frac{x}{\|x\|_2} \in S$, de unde $\langle A(\frac{x}{\|x\|_2}), \frac{x}{\|x\|_2} \rangle \geq m$ sau $\langle Ax, x \rangle \geq m\|x\|_2^2$. ■

Proprietatea 12.1.12 Dacă $A \in M_n(\mathbb{R})$ este o matrice simetrică și strict pozitiv definită atunci $\|x\|_A = \sqrt{\langle Ax, x \rangle}$ este o normă în \mathbb{R}^n .

Indicație. Inegalitatea triunghiului rezultă în urma inegalității $\langle Ax, y \rangle^2 \leq \langle Ax, x \rangle \langle Ay, y \rangle$, $\forall x, y \in \mathbb{R}^n$.

Proprietatea 12.1.13 Fie $A \in M_{m,n}(\mathbb{C})$, $B \in M_{k,m}(\mathbb{C})$. Dacă $\|\cdot\|$ este o normă matriceală atunci $\|BA\| \leq \|B\| \|A\|$.

Pentru $A \in M_{m,n}(\mathbb{C})$ și $\varphi(A) = \max_{1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n} |a_{i,j}|$ proprietățile normei sunt îndeplinite dar nu are loc proprietatea propoziției 12.1.13. Dacă

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{atunci} \quad BA = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 7 & 4 \end{pmatrix}$$

și $\varphi(BA) = 7 > 3 \cdot 2 = \varphi(B)\varphi(A)$.

Proprietatea 12.1.14 Fie $A \in M_{m,n}(\mathbb{C})$, $A = (a_{i,j})_{1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n}$. Au loc egalitățile

$$\|A\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq m} \sum_{j=1}^n |a_{i,j}|, \quad A : (\mathbb{C}^n, \|\cdot\|_\infty) \rightarrow (\mathbb{C}^m, \|\cdot\|_\infty); \quad (12.1)$$

$$\|A\|_1 = \max_{1 \leq j \leq n} \sum_{i=1}^m |a_{i,j}|, \quad A : (\mathbb{C}^n, \|\cdot\|_1) \rightarrow (\mathbb{C}^m, \|\cdot\|_1). \quad (12.2)$$

Proprietatea 12.1.15 Fie $A \in M_n(\mathbb{R})$. Dacă $|a_{i,i}| > \sum_{j \neq i} |a_{i,j}|$ atunci

1. matricea A este inversabilă;

$$2. \|A^{-1}\|_{\infty} \leq \max_{1 \leq i \leq n} \frac{1}{|a_{i,i}| - \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n |a_{i,j}|}.$$

Demonstrație. Fie $x, y \in \mathbb{R}^n$ astfel încât $Ax = y$. Arătăm că are loc inegalitatea

$$\|x\|_{\infty} \leq \max_{1 \leq i \leq n} \frac{1}{|a_{i,i}| - \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n |a_{i,j}|} \|y\|_{\infty} \quad (12.3)$$

Fie i acel indice pentru care

$$|x_i| = \max\{|x_1|, \dots, |x_n|\} = \|x\|_{\infty}.$$

Ecuția a i -a a sistemului $Ax = y$ se scrie

$$a_{i,i} \cdot x_i = y_i - \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n a_{i,j} \cdot x_j$$

de unde se deduc relațiile:

$$|a_{i,i}| \|x\|_{\infty} = |a_{i,i}| |x_i| \leq |y_i| + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n |a_{i,j}| |x_j| \leq \|y\|_{\infty} + \|x\|_{\infty} \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n |a_{i,j}|.$$

Ipoteza propoziției implică

$$\|x\|_{\infty} \leq \frac{1}{|a_{i,i}| - \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n |a_{i,j}|} \|y\|_{\infty} \leq \max_{1 \leq i \leq n} \frac{1}{|a_{i,i}| - \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n |a_{i,j}|} \|y\|_{\infty}.$$

Pentru a arăta că matricea A este inversabilă sau nesarădăcină este suficient să arătăm că sistemul algebric de ecuații liniare și omogene $Ax = 0$ admite doar soluția banală. Pentru $y = 0$, din (12.3) rezultă $x = 0$.

A doua concluzie rezultă de asemenea din inegalitatea (12.3). ■

Proprietatea 12.1.16 Valorile proprii ale matricei A sunt rădăcinile polinomului caracteristic $f(\lambda) = |\lambda I_n - A|$.

Proprietatea 12.1.17 Dacă $A = (a_{i,j})_{1 \leq i, j \leq n} \in M_n(\mathbb{C})$ și $f(\lambda) = |\lambda I_n - A| = \lambda^n + \alpha_1 \lambda^{n-1} + \dots + \alpha_{n-1} \lambda + \alpha_n$, atunci $\alpha_1 = \sum_{i=1}^n a_{i,i} = \text{tr}(A)$ și $\alpha_n = (-1)^n |A|$.

Demonstrație. Din egalitatea $f(\lambda) = \prod_{i=1}^n (\lambda - a_{i,i}) + \text{polinim de grad } n-2$ rezultă $\alpha_1 = \text{tr}(A)$. Apoi, $\alpha_n = f(0) = |-A| = (-1)^n |A|$. ■

Proprietatea 12.1.18 Mulțimea $S(\lambda) = \{x \in \mathbb{C}^n : Ax = \lambda x\}$ este subspațiu liniar în \mathbb{C}^n invariabil de A , adică $A(S(\lambda)) \subseteq S(\lambda)$.

Proprietatea 12.1.19 Pentru orice valoare proprie ordinul de multiplicitate geometrică este cel mult egal cu ordinul de multiplicitate algebric.

Proprietatea 12.1.20 Un vector propriu corespunde unei singure valori proprii.

Proprietatea 12.1.21 Dacă $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ sunt valori proprii ale unei matrice A , distincte două câte două și x_1, \dots, x_k sunt vectori proprii corespunzători atunci x_1, \dots, x_k sunt liniar independenți.

Proprietatea 12.1.22 Valorile proprii ale unei matrice hermitiene (simetrice) sunt reale.

Proprietatea 12.1.23 Două matrice similare au aceleași valori proprii.

Proprietatea 12.1.24 (Gerschgorin) Fie $A \in M_n(\mathbb{C})$ și $\sigma(A)$ mulțimea valorilor proprii. Dacă

$$r_k = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^n |a_{k,j}|$$

$$D_k = \{z \in \mathbb{C} : |z - a_{k,k}| < r_k\}, \quad k = 1, 2, \dots, n,$$

atunci $\sigma(A) \subseteq \cup_{k=1}^n D_k$.

Demonstrație. Fie λ o valoare proprie și $x = (x_1, \dots, x_n)^T$ un vector propriu corespunzător, $Ax = \lambda x$. Dacă $x_k = \max_{1 \leq i \leq n} |x_i|$ atunci din egalitatea $\sum_{j=1}^n a_{k,j} x_j = \lambda x_k$ rezultă $(a_{k,k} - \lambda)x_k = -\sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^n a_{k,j} x_j$. Din egalitatea modulelor deducem

$$|a_{k,k} - \lambda| \leq \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^n |a_{k,j}| \frac{|x_j|}{|x_k|} \leq \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^n |a_{k,j}| = r_k. \quad \blacksquare$$

Proprietatea 12.1.25 Dacă $A \in M_{m,n}(\mathbb{C})$ atunci $(\text{Im}(A))^\perp = \text{Ker}(A^H)$.

Demonstrație. Dacă $y \in (\text{Im}(A))^\perp$ atunci $\langle y, z \rangle = 0, \forall z \in \text{Im}(A)$, adică $\langle y, Ax \rangle = 0, \forall x \in \mathbb{C}^n$. Din

$$0 = \langle y, Ax \rangle = \langle A^H y, x \rangle, \quad \forall x \in \mathbb{C}^n$$

rezultă $y \in \text{Ker}(A^H)$. \blacksquare

Proprietatea 12.1.26 Dacă $A \in M_{m,n}(\mathbb{C})$ atunci $\mathbb{C}^m = \text{Im}(A) \oplus \text{Ker}(A^H)$.

Proprietatea 12.1.27 Dacă $A \in M_n(\mathbb{R})$ atunci

$$\dim(\text{Ker}(A)) + \dim(\text{Im}(A)) = n$$

Demonstrație. Fie $k = \dim(\text{Ker}(A))$. Extindem o bază e_1, \dots, e_k a lui $\text{Ker}(A)$ cu vectorii linear independenți e_{k+1}, \dots, e_n . Astfel e_1, \dots, e_n formează o bază în \mathbb{R}^n .

Dacă $y \in \text{Im}(A)$ atunci există $x = \sum_{i=1}^n c_i e_i$ astfel încât

$$y = A(x) = \sum_{i=1}^n c_i A(e_i) = \sum_{i=k+1}^n c_i A(e_i).$$

Prin urmare orice vector din $\text{Im}(A)$ se reprezintă ca o combinație lineară a vectorilor $A(e_{k+1}), \dots, A(e_n)$.

$A(e_{k+1}), \dots, A(e_n)$ sunt linear independenți.

Într-adevăr, dacă $\sum_{i=k+1}^n \lambda_i A(e_i) = 0$, atunci $\sum_{i=k+1}^n \lambda_i e_i \in \text{Ker}(A)$, deci există constantele μ_1, \dots, μ_k astfel încât $\sum_{i=k+1}^n \lambda_i e_i = \sum_{j=1}^k \mu_j e_j$, sau $\sum_{j=1}^k \mu_j e_j - \sum_{i=k+1}^n \lambda_i e_i = 0$, de unde $\mu_1 = \dots = \mu_k = \lambda_{k+1} = \dots = \lambda_n = 0$.

Rezultă că $A(e_{k+1}), \dots, A(e_n)$ formează o bază a subspațiului linear $\text{Im}(A)$ și că $\dim(\text{Im}(A)) = n - k$. ■

Probleme și teme de seminar

P 12.1 Să se arate că dacă $A, B \in M_n(\mathbb{R})$ astfel încât $AB = I$ atunci $BA = I$.

P 12.2 Să se arate că dacă $A \in M_n(\mathbb{R})$ este o matrice ortogonală atunci $|A| = \pm 1$.

P 12.3 Să se arate că dacă $A, B \in M_n(\mathbb{R})$ sunt matrice ortogonale și $|A| \cdot |B| = -1$ atunci $A + B$ este o matrice singulară.

R. $A + B = A(A + B)^T B \Rightarrow |A + B|(1 - |A||B|) = 0 \Rightarrow |A + B| = 0$.

P 12.4 Să se arate că dacă $A \in M_n(\mathbb{R}) = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$ este o matrice strict superior triunghiulară - ($a_{i,j} = 0, i \geq j$) atunci $A^n = 0$.

P 12.5 Dacă $A \in M_n(\mathbb{C})$ satisface egalitatea $A^H = -A$ atunci

1. Valorile proprii ale matricei A sunt pur imaginare;

2. $I - A$ este inversabilă;
3. $Q = (I - A)^{-1}(I + A)$ este o matrice unitară.

R. 1. Fie λ o valoare proprie, $Ax = \lambda x$. Din egalitățile

$$\begin{aligned} \langle Ax, x \rangle &= \lambda \|x\|_2^2 \\ \langle x, A^H x \rangle &= \langle x, -Ax \rangle = -\bar{\lambda} \|x\|_2^2 \end{aligned}$$

rezultă $\lambda + \bar{\lambda} = 0$ adică $\Re \lambda = 0$.

2. Presupunem prin absurd că matricea $I - A$ este singulară. Atunci există $x \in \mathbb{C}^n$, $x \neq 0$ astfel încât $(I - A)x = 0$ sau $Ax = x$. Ar urma că 1 este valoare proprie pentru A , ceea ce nu se poate.

3. Din egalitatea $(I - A)(I + A) = (I + A)(I - A)$, înmulțind la stânga și la dreapta cu $(I - A)^{-1}$ rezultă $(I + A)(I - A)^{-1} = (I - A)^{-1}(I + A) = Q$.

$$\text{Apoi } Q^H = (I + A^H)(I - A^H)^{-1} = (I - A)(I + A)^{-1}.$$

$$\text{Rezultă } Q^H Q = (I - A)(I + A)^{-1}(I + A)(I - A)^{-1} = I.$$

P 12.6 Fie $u, v \in \mathbb{C}^n$ și $A = I + uv^H$.

1. Dacă A este nesingulară aflați valoarea lui α astfel încât $A^{-1} = I + \alpha uv^H$.
2. În ce caz matricea A este singulară?
3. În cazul în care matricea A este singulară calculați $\text{Ker}(A)$.

R. 1. Au loc egalitățile

$$(I + uv^H)(I + \alpha uv^H) = I + uv^H + \alpha uv^H + \alpha uv^H uv^H = I + (1 + \alpha + \alpha \lambda) uv^H,$$

unde $\lambda = v^H u$. Pentru $\lambda \neq -1$ rezultă $\alpha = -\frac{1}{1+\lambda} = -\frac{1}{1+v^H u}$.

2. Pentru $v^H u = -1$ matricea A este singulară: $(I + uv^H)uv^H = 0$.

3. $\text{Ker}(A) = \{\lambda u : \lambda \in \mathbb{C}\}$.

Capitolul 13

Rezolvarea sistemelor algebrice liniare

Considerăm sistemul algebric de m ecuații liniare cu necunoscutele x_1, x_2, \dots, x_n

$$\begin{cases} a_{1,1} \cdot x_1 + a_{1,2} \cdot x_2 + \dots + a_{1,n} \cdot x_n = b_1 \\ \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \\ a_{m,1} \cdot x_1 + a_{m,2} \cdot x_2 + \dots + a_{m,n} \cdot x_n = b_m \end{cases} \quad (13.1)$$

unde $a_{i,j}, b_i \in \mathbb{C}, i = 1, 2, \dots, m, j = 1, 2, \dots, n$.

Introducând notațiile matriceale

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & \dots & a_{1,n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{m,1} & \dots & a_{m,n} \end{pmatrix} \quad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \quad b = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

sistemul (13.1) se scrie

$$A \cdot x = b$$

În cazul în care $m = n$, adică numărul ecuațiilor coincide cu numărul necunoscutelor și dacă matricea sistemului A este nesingulară, atunci soluția este $x = A^{-1} \cdot b$. Astfel problema inversabilității lui A este echivalentă cu rezolvarea sistemului.

Metodele pentru rezolvarea sistemelor algebrice de ecuații liniare se împart în două clase:

- metode directe;

- metode iterative.

În cele ce urmează vom prezenta metoda Gauss - Jordan din clasa metodelor directe și metoda Gauss - Seidel din clasa metodelor iterative.

13.1 Metoda Gauss - Jordan

Sistemului liniar

$$y_i = \sum_{j=1}^n a_{i,j} \cdot x_j \quad i = 1, 2, \dots, m \quad (13.2)$$

îl atașăm tabloul

	x_1	\dots	x_j	\dots	x_s	\dots	x_n	
y_1	$a_{1,1}$	\dots	$a_{1,j}$	\dots	$a_{1,s}$	\dots	$a_{1,n}$	
\vdots	\vdots		\vdots		\vdots		\vdots	
y_i	$a_{i,1}$	\dots	$a_{i,j}$	\dots	$a_{i,s}$	\dots	$a_{i,n}$	(13.3)
\vdots	\vdots		\vdots		\vdots		\vdots	
y_r	$a_{r,1}$	\dots	$a_{r,j}$	\dots	$a_{r,s}$	\dots	$a_{r,n}$	
\vdots	\vdots		\vdots		\vdots		\vdots	
y_m	$a_{m,1}$	\dots	$a_{m,j}$	\dots	$a_{m,s}$	\dots	$a_{m,n}$	

Să presupunem $a_{r,s} \neq 0$. Din ecuația r a sistemului (13.2) explicităm x_s

$$x_s = -\frac{a_{r,1}}{a_{r,s}} \cdot x_1 - \dots - \frac{a_{r,s-1}}{a_{r,s}} \cdot x_{s-1} + \frac{y_r}{a_{r,s}} - \frac{a_{r,s+1}}{a_{r,s}} \cdot x_{s+1} - \dots - \frac{a_{r,n}}{a_{r,s}} \cdot x_n. \quad (13.4)$$

Substituind x_s în celelalte ecuații, pentru $i \neq r$, găsim

$$y_i = \left(a_{i,1} - \frac{a_{i,s} \cdot a_{r,1}}{a_{r,s}}\right) \cdot x_1 + \dots + \left(a_{i,s-1} - \frac{a_{i,s} \cdot a_{r,s-1}}{a_{r,s}}\right) \cdot x_{s-1} + \quad (13.5)$$

$$+ \frac{a_{i,s}}{a_{r,s}} \cdot y_r + \left(a_{i,s+1} - \frac{a_{i,s} \cdot a_{r,s+1}}{a_{r,s}}\right) \cdot x_{s+1} + \dots + \left(a_{i,n} - \frac{a_{i,s} \cdot a_{r,n}}{a_{r,s}}\right) \cdot x_n.$$

Sistemului format din ecuațiile (13.4) și (13.5) îi corespunde tabloul (13.6).

$$\begin{array}{c|cccccccc}
 & x_1 & \dots & x_j & \dots & y_r & \dots & x_n \\
 y_1 & b_{1,1} & \dots & b_{1,j} & \dots & \frac{a_{1,s}}{a_{r,s}} & \dots & b_{1,n} \\
 \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\
 y_i & b_{i,1} & \dots & b_{i,j} & \dots & \frac{a_{i,s}}{a_{r,s}} & \dots & b_{i,n} \\
 \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\
 x_s & -\frac{a_{r,1}}{a_{r,s}} & \dots & -\frac{a_{r,j}}{a_{r,s}} & \dots & \frac{1}{a_{r,s}} & \dots & -\frac{a_{r,n}}{a_{r,s}} \\
 \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\
 y_m & b_{m,1} & \dots & b_{m,j} & \dots & b_{m,r} & \dots & b_{m,n}
 \end{array} \tag{13.6}$$

unde $b_{ij} = \frac{(a_{i,j} \cdot a_{r,s} - a_{i,s} \cdot a_{r,j})}{a_{r,s}}$, pentru $i \neq r$ și $j \neq s$.

Numim *pas Jordan* cu elementul pivot $a_{r,s} \neq 0$ următorul ansamblu de operații prin care tabloul (13.3) se transformă în tabloul (13.6)

1. Se intervertesc y_r și x_s ;
2. Pe locul elementului pivot se pune 1;
3. Pe coloana elementului pivot elementele tabloului se lasă neschimbate;
4. Pe linia elementului pivot se schimbă semnul elementelor din vechiul tablou;
5. Restul elementelor se calculează cu formula $\tilde{b}_{i,j} = a_{i,j} \cdot a_{r,s} - a_{i,s} \cdot a_{r,j}$. Această relație este cunoscută sub numele de regulă dreptunghiului. Elementul $\tilde{b}_{i,j}$ care se calculează are drept corespondent în tabloul (13.3) pe $a_{i,j}$ care împreună cu elementul pivot $a_{r,s}$ definesc, ca vârfuri diagonal opuse un dreptunghi. $\tilde{b}_{i,j}$ este diferența dintre produsele elementelor celor două diagonale; întotdeauna elementul pivot este factor al descăzutului.
6. Se împart toate elementele tabloului la elementul pivot.

Aplicăm substituțiile generate de pașii Jordan la rezolvarea sistemului (13.1). Acestui sistem îi atașăm tabloul

				[2]			[4]	
		x_1	\dots	x_j	\dots	x_n	1	
0		$a_{1,1}$	\dots	$a_{1,j}$	\dots	$a_{1,n}$	$-b_1$	
[1]		\vdots	[3]	\vdots		\vdots	[5]	
0		$a_{i,1}$	\dots	$a_{i,j}$	\dots	$a_{i,n}$	$-b_i$	
\vdots		\vdots		\vdots		\vdots	\vdots	
0		$a_{m,1}$	\dots	$a_{m,j}$	\dots	$a_{m,n}$	$-b_m$	(13.7)

Numerele încadrate scot în evidență cinci zone în tabloul (13.7). Un pas Jordan efectuat cu un element pivot ales din zona [3] - de exemplu $a_{r,s} \neq 0$ - are ca urmare intervertirea unui x_r din zona [2] cu un zero din zona [1] și corespunde explicitării lui x_r din a s -a ecuație a sistemului și substituirii lui în celelalte ecuații. Astfel, ținând seama de interpretarea dată tabloului (13.7), obiectivul urmărit este efectuarea a cât mai mulți pași Jordan.

Să presupunem că efectuând r pași Jordan ajungem la următorul tablou (eventual schimbând indicii ecuațiilor și ai necunoscutelor)

				[2]			[4]		
		0	\dots	0	\vdots	x_{r+1}	\dots	x_n	1
x_1		$b_{1,1}$	\dots	$b_{1,r}$	\vdots	$b_{1,r+1}$	\dots	$b_{r,n}$	c_1
[1]		\vdots	[3I]	\vdots	\vdots	\vdots	[3II]	\vdots	[5]
x_r		$b_{r,1}$	\dots	$b_{r,r}$	\vdots	$b_{r,r+1}$	\dots	$b_{r,n}$	c_r
\dots		\dots	\dots	\dots	\vdots	\dots	\dots	\dots	\dots
0		$b_{r+1,1}$	\dots	$b_{r+1,r}$	\vdots	0	\dots	0	c_{r+1}
\vdots		\vdots	[3III]	\vdots	\vdots	\vdots	[3IV]	\vdots	\vdots
0		$b_{m,1}$	\dots	$b_{m,r}$	\vdots	0	\dots	0	c_m

În tabloul (13.8) nu putem alege nici un element pivot în zona [3IV]. Din punctul de vedere al rezolvării sistemului, zona [3IV] este singura în care are sens căutarea unui element pivot.

Ținând seama de interpretarea dată tabloului, dacă

$$c_{r+1} = \dots = c_m = 0,$$

atunci sistemul este compatibil cu soluția

$$x_i = b_{ir+1} \cdot x_{r+1} + \dots + b_{in} \cdot x_n, \quad i = 1, 2, \dots, r;$$

iar în caz contrar sistemul este incompatibil.

Exemplu. Pentru rezolvarea sistemului algebric liniar

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 2 \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 = 1 \\ x_1 + 2x_2 - x_3 + 2x_4 = -1 \\ 2x_1 + x_2 + 4x_3 + x_4 = 7 \\ 3x_1 + 2x_2 - 2x_3 + 2x_4 = -5 \end{cases}$$

tablourile corespunzătoare pașilor Jordan sunt

	<u>x_1</u>	x_2	x_3	x_4	1		x_2	x_3	x_4	1
0	<u>1</u>	1	1	1	2	x_1	-1	-1	-1	2
0	2	-1	2	-1	1	0	-3 → <u>1</u>	0	-3 → 1	3 → -1
0	1	2	-1	2	-1	0	1	-2	1	3
0	2	1	4	1	-7	0	-1	2	-1	-3
0	3	2	-2	2	5	0	-1	-5	-1	11

	x_3	<u>x_4</u>	1		x_4	1
x_1	-1	0	1		0	-1
x_2	0	<u>1</u>	1		-1	1
0	-2 → 1	0	4 → -2		0	0
0	<u>1</u>	0	-2		0	2
0	-5 → 1	0	10 → -2		0	0

Sistemul este compatibil, cu soluția $x_1 = -1$, $x_2 = 1 - x_4$, $x_3 = 2$.

Observație. Numerele subliniate sunt elementele pivot. Coloanele corespunzătoare zerourilor din zona [2] se pot omite și de aceea ele nu apar. Numerele ce apar în dreptul săgeților reprezintă rezultatul înmulțirii ecuației corespunzătoare cu un factor convenabil. Această operație simplifică calculele efectuate "manual".

13.2 Inversarea unei matrice

Fie matricea $A \in M_n(\mathbb{C})$; $A = (a_{i,j})_{i,j=1,n}$. Atașăm matricei A sistemul liniar $y = A \cdot x$ căruia îi corespunde tabloul:

$$\begin{array}{c|cccc}
 & x_1 & \dots & x_j & \dots & x_n \\
 \hline
 y_1 & a_{1,1} & \dots & a_{1,j} & \dots & a_{1,n} \\
 \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\
 y_i & a_{i,1} & \dots & a_{i,j} & \dots & a_{i,n} \\
 \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\
 y_n & a_{n,1} & \dots & a_{n,j} & \dots & a_{n,n}
 \end{array} \quad (13.9)$$

Dacă se pot efectua n pași Jordan care să transforme tabloul (13.9) în tabloul:

$$\begin{array}{c|ccc}
 & y_1 & \dots & y_n \\
 \hline
 x_1 & b_{1,1} & \dots & b_{1,n} \\
 \vdots & & \ddots & \\
 x_n & b_{n,1} & \dots & b_{n,n}
 \end{array} \quad (13.10)$$

atunci matricea A este nesingulară și $B = (b_{i,j})_{i,j=1,n}$ reprezintă inversa matricei A .

Exemplu. Pentru inversarea matricei

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

efectuăm pașii Jordan.

	x_1	x_2	x_3
y_1	2	4	3
y_2	0	1	1
y_3	2	2	-1

	x_1	y_2	x_3
y_1	2	4	<u>-1</u>
x_2	0	1	-1
y_3	2	2	-3

	x_1	y_2	y_1
x_3	2	4	-1
x_2	-2	-3	1
y_3	<u>-4</u>	-10	3

	y_3	y_2	y_1
x_3	$-\frac{1}{2}$	-1	$\frac{1}{2}$
x_2	$\frac{1}{2}$	2	$-\frac{1}{2}$
x_1	$-\frac{1}{4}$	$-\frac{5}{2}$	$\frac{3}{4}$

Rezultă

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{3}{4} & -\frac{5}{2} & -\frac{1}{4} \\ -\frac{1}{2} & 2 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -1 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

13.3 Factorizarea LU

Fie $A \in M_n(\mathbb{R})$. Dacă L este o matrice inferior triunghiulară și U o matrice superior triunghiulară astfel încât $A = LU$, atunci această relație se numește factorizarea LU (Lower / Upper) a matricei A .

Aplicații ale factorizării LU.

- *Calculul determinantului:*

$$|A| = |L||U| = \prod_{i=1}^n L_{i,i} \prod_{i=1}^n U_{i,i}.$$

O matrice este nesingulară dacă toate elementele de pe diagonala matricelor L, U sunt nenule.

- *Rezolvarea sistemului $Ax = b$.* Dacă $A = LU$ atunci rezolvarea sistemului revine la rezolvarea a două sisteme triunghiulare

$$\begin{aligned} Ly &= b, \\ Ux &= y. \end{aligned}$$

Algoritmul factorizării LU

Notând prin $\mathbf{l}_1, \mathbf{l}_2, \dots, \mathbf{l}_n$ coloanele matricei L și prin $\mathbf{u}_1^T, \mathbf{u}_2^T, \dots, \mathbf{u}_n^T$ liniile matricei U factorizarea LU devine

$$A = LU = [\mathbf{l}_1 \ \mathbf{l}_2 \ \dots \ \mathbf{l}_n] \begin{bmatrix} \mathbf{u}_1^T \\ \mathbf{u}_2^T \\ \vdots \\ \mathbf{u}_n^T \end{bmatrix} = \sum_{k=1}^n \mathbf{l}_k \mathbf{u}_k^T. \quad (13.11)$$

\mathbf{l}_k și \mathbf{u}_k^T au primele $k - 1$ elemente egale cu 0, prin urmare

$$\mathbf{l}_k \mathbf{u}_k^T = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ L_{k,k} \\ \vdots \\ L_{n,k} \end{pmatrix} (0 \dots 0 U_{k,k} \dots U_{k,n}) = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \dots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & L_{k,k} U_{k,k} & \dots & L_{k,k} U_{k,n} \\ \vdots & \dots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & L_{n,k} U_{k,k} & \dots & L_{n,k} U_{k,n} \end{pmatrix}$$

Astfel în (13.11) adunarea celui de al k -lea termen nu modifică primele $k - 1$ linii și coloane.

Egalitatea (13.11) se poate scrie recursiv

$$\begin{aligned} A^{(0)} &= A, \\ A^{(k)} &= A^{(k-1)} - \mathbf{l}_k \mathbf{u}_k^T, \quad k \in \{1, \dots, n\}. \end{aligned} \quad (13.12)$$

O matrice triunghiulară se numește matrice triunghiulară unitate dacă toate elementele diagonalei principale sunt egale cu 1. Printre factorizările LU se disting

- factorizarea *Doolittle*, cu matricea inferior triunghiulară unitate;
- factorizarea *Crout*, cu matricea superior triunghiulară unitate.

Egalitatea (13.11) nu se modifică dacă înlocuim $\mathbf{l}_k \rightarrow \alpha_k \mathbf{l}_k$ și $\mathbf{u}_k^T \rightarrow \frac{1}{\alpha_k} \mathbf{u}_k^T$. Parametrii α_k se aleg în funcție de factorizarea dorită.

În cele ce urmează se va considera cazul factorizării LU de tip *Doolittle*.

Fie $A \in M_n(\mathbb{R})$, $A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$. Notăm prin A_k , $k \in \{1, 2, \dots, n\}$ matricele

$$A_k = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq k} = \begin{pmatrix} a_{1,1} & \dots & a_{1,k} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{k,1} & \dots & a_{k,k} \end{pmatrix}.$$

Definiție 13.3.1 Matricea A satisface ipoteza \mathcal{J}_m dacă $|A_k| \neq 0$, $\forall k \in \{1, 2, \dots, m\}$.

Presupunem că are loc ipoteza \mathcal{J}_{n-1} .

Pentru $k = 1$, $A^{(0)} = A$, $a_{1,1}^{(0)} = a_{1,1} = |A_1| \neq 0$. Alegem

$$\mathbf{u}_1^T = (a_{1,1}^{(0)} \dots a_{1,n}^{(0)}) \quad \text{și} \quad \mathbf{l}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{a_{2,1}^{(0)}}{a_{1,1}^{(0)}} \\ \vdots \\ \frac{a_{n,1}^{(0)}}{a_{1,1}^{(0)}} \end{pmatrix}$$

Elementele matricei $\mathbf{l}_1 \mathbf{u}_1^T$ situate pe prima linie și pe prima coloană coincid cu cele ale matricei A . Prin urmare matricea $A^{(1)}$ are toate elementele de pe prima linie și de pe prima coloană egală cu 0. În plus

$$a_{i,j}^{(1)} = a_{i,j}^{(0)} - \frac{a_{i,1}^{(0)}}{a_{1,1}^{(0)}} a_{1,j}^{(0)}, \quad i = 2, \dots, n; \quad j = 1, \dots, n.$$

Introducem matricele

$$\tilde{A}^{(1)} = A, \quad \tilde{A}^{(2)} = \begin{pmatrix} a_{1,1}^{(0)} & a_{1,2}^{(0)} & \cdots & a_{1,n}^{(0)} \\ 0 & a_{2,2}^{(1)} & \cdots & a_{2,n}^{(1)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & a_{n,2}^{(1)} & \cdots & a_{n,n}^{(1)} \end{pmatrix}.$$

Matricea $\tilde{A}^{(2)}$ se obține din $\tilde{A}^{(1)}$, înmulțind prima linie cu $-\frac{a_{2,1}^{(0)}}{a_{1,1}^{(0)}}, \dots, -\frac{a_{n,1}^{(0)}}{a_{1,1}^{(0)}}$ și adunând-o respectiv la liniile $2, \dots, n$.

Prin urmare $|\tilde{A}_k^{(2)}| = |A_k|, \forall k \in \{1, 2, \dots, n\}$. În particular, pentru $k = 2$ relațiile

$$0 \neq |A_2| = |\tilde{A}_2^{(2)}| = a_{2,2}^{(1)} a_{1,1}^{(0)}$$

implică $a_{2,2}^{(1)} \neq 0$.

Inductiv, presupunem că s-a construit $A^{(k-1)} = (a_{i,j}^{(k-1)})_{1 \leq i, j \leq n}$ și că $a_{k,k}^{(k-1)} \neq 0$. Totodată, dacă

$$\tilde{A}^{(k)} = \begin{pmatrix} a_{1,1}^{(0)} & a_{1,2}^{(0)} & \cdots & a_{1,k-1}^{(0)} & a_{1,k}^{(0)} & \cdots & a_{1,n}^{(0)} \\ 0 & a_{2,2}^{(1)} & \cdots & a_{2,k-1}^{(1)} & a_{2,k}^{(1)} & \cdots & a_{2,n}^{(1)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & a_{k,k}^{(k-1)} & \cdots & a_{k,n}^{(k-1)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & a_{n,k}^{(k-1)} & \cdots & a_{n,n}^{(k-1)} \end{pmatrix},$$

atunci $|\tilde{A}_s^{(k)}| = |A_s|, \forall s \in \{1, 2, \dots, n\}$.

Alegem

$$\mathbf{u}_k^T = (0 \ \dots \ 0 \ a_{k,k}^{(k-1)} \ \dots \ a_{k,n}^{(k-1)}) \quad \text{\textit{și}} \quad \mathbf{l}_k = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ \frac{a_{k+1,k}^{(k-1)}}{a_{k,k}^{(k-1)}} \\ \vdots \\ \frac{a_{n,k}^{(k-1)}}{a_{k,k}^{(k-1)}} \end{pmatrix}$$

Astfel $U_{k,k} = a_{k,k}^{(k-1)}$. În virtutea lui (13.12), $\tilde{A}^{(k)} = A^{(k-1)} - \mathbf{l}_k \mathbf{u}_k^T$. Elementul $a_{i,j}^{(k)}$ este dat de

$$a_{i,j}^{(k)} = a_{i,j}^{(k-1)} - \frac{a_{i,k}^{(k-1)}}{a_{k,k}^{(k-1)}} a_{k,j}^{(k-1)} = \frac{a_{i,j}^{(k-1)} a_{k,k}^{(k-1)} - a_{i,k}^{(k-1)} a_{k,j}^{(k-1)}}{a_{k,k}^{(k-1)}}, \quad (13.13)$$

adică numărătorul se calculează cu regula dreptunghiului având elementul pivot $a_{k,k}^{(k-1)}$.

Rămâne de arătat că $a_{k+1,k+1}^{(k)} \neq 0$.

Matricea

$$\tilde{A}^{(k+1)} = \begin{pmatrix} a_{1,1}^{(0)} & a_{1,2}^{(0)} & \dots & a_{1,k-1}^{(0)} & a_{1,k}^{(0)} & a_{1,k+1}^{(0)} & \dots & a_{1,n}^{(0)} \\ 0 & a_{2,2}^{(1)} & \dots & a_{2,k-1}^{(1)} & a_{2,k}^{(1)} & a_{2,k+1}^{(1)} & \dots & a_{2,n}^{(1)} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & a_{k,k}^{(k-1)} & a_{k,k+1}^{(k-1)} & \dots & a_{k,n}^{(k-1)} \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & a_{k+1,k+1}^{(k)} & \dots & a_{k+1,n}^{(k)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & a_{n,k+1}^{(k)} & \dots & a_{n,n}^{(k)} \end{pmatrix},$$

se obține din $\tilde{A}^{(k)}$ păstrând primele k linii și potrivit relației (13.13) liniile $i \in \{k+1, \dots, n\}$ se obțin adunând la acestea linia k înmulțită în prealabil cu $-\frac{a_{i,k}^{(k-1)}}{a_{k,k}^{(k-1)}}$.

Din nou

$$|\tilde{A}_s^{(k+1)}| = |\tilde{A}_s^{(k)}| = |A_s|, \quad \forall s \in \{1, \dots, n\}.$$

În particular, pentru $s = k+1$

$$0 \neq |A_{k+1}| = |\tilde{A}_{k+1}^{(k+1)}| = \prod_{i=1}^{k+1} a_{i,i}^{(i-1)},$$

deci $a_{k+1,k+1}^{(k)} \neq 0$.

Astfel s-a demonstrat

Teorema 13.3.1 *Dacă matricea $A \in M_n(\mathbb{R})$ satisface ipoteza \mathcal{J}_{n-1} atunci există matricea inferior triunghiulară L și o matrice superior triunghiulară U astfel încât $A = LU$.*

Observație 13.3.1

Pentru existența factorizării LU, cerința ca matricea A să satisfacă ipoteza \mathcal{J}_{n-1} este esențială. De acest fapt, ne putem convinge prin următorul exemplu:

Presupunem, prin absurd, existența unei factorizări LU pentru

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} l_{1,1} & 0 \\ l_{2,1} & l_{2,2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{1,1} & u_{1,2} \\ 0 & u_{2,2} \end{pmatrix}.$$

Atunci au loc egalitățile contradictorii $l_{1,1}u_{1,1} = 0$, $l_{1,1}u_{1,2} = 1$, $l_{2,1}u_{1,1} = 1$.

Matrice de permutare. Notăm prin $P_{i,j} \in M_n(\mathbb{R})$ matricea

$$P_{i,j} = \begin{pmatrix} 1 & & & & & & & & & 0 \\ & \ddots & & & & & & & & \\ & & 1 & & & & & & & \\ & & & 0 & & 1 & & & & \\ & & & & \ddots & & & & & \\ & & & & & 1 & & & & \\ & & & & & & & & & \\ & & & & & & & & & \\ 0 & & & & & & & & & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ \leftarrow i \\ \leftarrow j \\ \\ \\ \\ \\ \\ \end{matrix}$$

$\begin{matrix} \uparrow \\ i \\ \uparrow \\ j \end{matrix}$

pe care o numim matrice de permutare.

Următoarele proprietăți se stabilesc prin verificare directă:

1. Dacă $A \in M_n(\mathbb{R})$ atunci $P_{i,j}A$ este matricea care se obține din A prin interschimbarea liniilor i și j .
2. Dacă $A \in M_n(\mathbb{R})$ atunci $AP_{i,j}$ este matricea care se obține din A prin interschimbarea coloanelor i și j .
3. $P_{i,j}^2 = I \iff P_{i,j}^{-1} = P_{i,j}$.

În lipsa ipotezei \mathcal{J}_{n-1} , la pasul k a construcției din demonstrația Teoremei 13.3.1, nu mai avem asigurată cerința $a_{k,k}^{(k-1)} \neq 0$.

Dacă $a_{k,k}^{(k-1)} = 0$ și există pe coloana k , sub elementul de pe diagonala principală un element nenul – fie acesta $a_{i_k,k}^{(k-1)}$ – atunci interschimbăm liniile k și i_k . Relația (13.120) devenind

$$A^{(k)} = P_k A^{(k-1)} - \mathbf{l}_k \mathbf{u}_k^T, \quad \text{cu } P_k = P_{k,i_k}. \quad (13.14)$$

Dacă $a_{k,k}^{(k-1)} = 0$ și sub acest element, pe coloana k , toate elementele sunt nule atunci alegem

$$\mathbf{l}_k = \mathbf{e}_k, \quad \mathbf{u}_k^T = (0 \ \dots \ 0 \ a_{k,k}^{(k-1)} \ \dots \ a_{k,n}^{(k-1)}) \quad \text{și} \quad P_k = I_n,$$

unde \mathbf{e}_k este vectorul din baza canonică.

Dacă $a_{k,k}^{(k-1)} \neq 0$ atunci alegem $P_k = I_n$.

Din relațiile (13.14), prin eliminarea elementelor intermediare rezultă

$$\begin{aligned} 0 = A^{(n)} &= (P_n P_{n-1} \dots P_1) A - \mathbf{l}_n \mathbf{u}_n^T - \sum_{k=1}^{n-1} (P_n P_{n-1} \dots P_{k+1}) \mathbf{l}_k \mathbf{u}_k^T = \\ &= P A - \sum_{k=1}^n \tilde{\mathbf{l}}_k \mathbf{u}_k^T, \end{aligned}$$

unde $\tilde{\mathbf{l}}_n = \mathbf{l}_n$ și $\tilde{\mathbf{l}}_k = (P_n P_{n-1} \dots P_{k+1}) \mathbf{l}_k$, $k \in \{1, 2, \dots, n-1\}$. Un vector $\tilde{\mathbf{l}}_k$ are aceeași formă ca și vectorul \mathbf{l}_k , deoarece eventualele permutări au vizat doar elementele de pe pozițiile k, \dots, n .

Elementele matricelor L și U se pot păstra în A , mai precis elementele nenule ale liniei k din U apar pe linia k a lui A deasupra diagonalei principale, iar coloana k din L - fără 1 - apare pe coloana k a lui A sub diagonala principală.

Rezultă următorul algoritm:

1. $P = I_n$;
2. Pentru $k = 1, 2, \dots, n-1$ execută
 - (a) Dacă $a_{k,k} = 0$ atunci
 - Dacă pe coloana k sub diagonala principală există un element nenul atunci se schimbă acea linie cu linia k și $P := P_{k,i_k} P$ (prin i_k s-a notat linia elementului nenul);

- Dacă pe coloana k sub diagonala principală nu există nici un element nenul atunci se continuă cu următorul k ;
- (b) Elementele liniei k situate pe și deasupra diagonalei principale se lasă nemodificate;
- (c) Elementele corespunzătoare indicilor $i, j \in \{k+1, \dots, n\}$ se calculează folosind regula dreptunghiului cu pivotul $a_{k,k}$, (13.13).
- (d) Elementele coloanei k situate sub diagonala principală se împart la $a_{k,k}$;

Astfel are loc

Teorema 13.3.2 Pentru orice matricea $A \in M_n(\mathbb{R})$ există o matrice inferior triunghiulară L , o matrice superior triunghiulară U și o matrice P , produs de matrice de permutare astfel încât

$$PA = LU.$$

Exemplu. Să se deducă factorizarea LU a matricei

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 & 2 \\ 2 & 4 & -2 & 5 & 1 \\ -1 & -2 & 1 & -3 & -4 \\ 3 & 6 & 2 & 10 & 7 \\ 1 & 2 & 4 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

Atașăm matricei A tabloul

1	2	-1	3	2
2	4	-2	5	1
-1	-2	1	-3	-4
3	6	2	10	7
1	2	4	0	4

Desfășurarea calculelor este

$$k = 1 \quad P = I \quad \left[\begin{array}{c|cccc} 1 & 2 & -1 & 3 & 2 \\ \hline 2 & 0 & 0 & -1 & -3 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & -2 \\ 3 & 0 & 5 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 5 & -3 & 2 \end{array} \right]$$

$$k = 2 \quad P = I$$

$$k = 3 \quad P = P_{3,4} \quad \left[\begin{array}{c|cccc} 1 & 2 & -1 & 3 & 2 \\ \hline 2 & 0 & 0 & -1 & -3 \\ 3 & 0 & 5 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & -2 \\ 1 & 0 & 5 & -3 & 2 \end{array} \right]$$

$$k = 4 \quad P = P_{4,5}P_{3,4} \quad \left[\begin{array}{c|cccc} 1 & 2 & -1 & 3 & 2 \\ \hline 2 & 0 & 0 & -1 & -3 \\ 3 & 0 & 5 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & -2 \\ 1 & 0 & 1 & -4 & 1 \end{array} \right]$$

$$\left[\begin{array}{c|cccc} 1 & 2 & -1 & 3 & 2 \\ \hline 2 & 0 & 0 & -1 & -3 \\ 3 & 0 & 5 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & -4 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & -2 \end{array} \right]$$

Atunci

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad U = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & 5 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

$$P = P_{4,5}P_{3,4} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

13.4 Cazul matricelor simetrice - Factorizarea Cholesky

Fie $A \in M_n(\mathbb{R})$ o matrice simetrică care satisface ipoteza \mathcal{J}_{n-1} . Datorită simetriei, descompunerea LU poate fi scrisă

$$A = LDL^T = [\mathbf{l}_1 \ \mathbf{l}_2 \ \dots \ \mathbf{l}_n] \begin{pmatrix} D_{1,1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & D_{2,2} & & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & D_{n,n} \end{pmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{l}_1^T \\ \mathbf{l}_2^T \\ \vdots \\ \mathbf{l}_n^T \end{bmatrix} = \sum_{k=1}^n D_{k,k} \mathbf{l}_k \mathbf{l}_k^T$$

și sub forma recursivă

$$\begin{aligned} A^{(0)} &= A; \\ A^{(k)} &= A^{(k-1)} - D_{k,k} \mathbf{l}_k \mathbf{l}_k^T, \end{aligned}$$

unde $D_{k,k} = a_{k,k}^{(k-1)}$.

Cazul matricei simetrice și strict pozitiv definită

Are loc următoarea proprietate a matricelor strict pozitiv definite

Teorema 13.4.1 *Dacă matricea $A \in M_n(\mathbb{R})$ este strict pozitiv definită atunci ea satisface ipoteza \mathcal{J}_n .*

Demonstrație. Presupunem prin absurd că există $k \in \{1, 2, \dots, n\}$ astfel încât $|A_k| = 0$. În acest caz există $x_1 \in \mathbb{R}^k$, $x_1 \neq 0$ astfel încât $A_k x_1 = 0$. Considerând partiționarea matricei $A = \begin{pmatrix} A_k & A_{1,2} \\ A_{2,1} & A_{2,2} \end{pmatrix}$ și $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$ deducem relațiile contradictorii

$$0 < \langle Ax, x \rangle = \langle A_k x_1, x_1 \rangle = 0.$$

Teorema 13.4.2 *O matrice $A \in M_n(\mathbb{R})$ simetrică este strict pozitiv definită dacă și numai dacă elementele diagonalei matricei D din factorizarea Doolittle $A = LDL^T$ sunt pozitive.*

Demonstrație. Să arătăm că elementele diagonalei matricei D sunt pozitive.

Potrivit factorizării LU de tip *Doolittle*, matricea L este nesingulară, $|L| = 1$.

Pentru orice $i \in \{1, \dots, n\}$ există $x_i \in \mathbb{R}^n$ astfel încât $L^T x_i = \mathbf{e}_i$. Dacă $D = \text{diag}(D_{1,1}, \dots, D_{n,n})$ atunci

$$0 < \langle Ax_i, x_i \rangle = \langle LDL^T x_i, x_i \rangle = \langle DL^T x_i, L^T x_i \rangle = \langle D\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_i \rangle = D_{i,i}.$$

Reciproc, presupunem că $A = LDL^T$ și $D_{i,i} > 0$, $\forall i \in \{1, 2, \dots, n\}$. Fie $x \in \mathbb{R}^n$, $x \neq 0$ și $y = L^T x = (y_i)_{1 \leq i \leq n}$. Atunci $y \neq 0$ și

$$\langle Ax, x \rangle = \langle LDL^T x, x \rangle = \langle DL^T x, L^T x \rangle = \langle Dy, y \rangle = \sum_{i=1}^n D_{i,i} y_i^2 > 0. \quad \blacksquare$$

Teorema 13.4.2 oferă un criteriu de verificare a strict pozitiv definirii unei matrice simetrice: se face descompunerea LDL^T și se cercetează semnul elementelor de pe diagonala matricii D .

În cazul matricelor simetrice și strict pozitiv definită are loc factorizarea Cholesky

Teorema 13.4.3 Dacă $A \in M_n(\mathbb{R})$ este o matrice simetrică și strict pozitiv definită atunci există o matrice inferior triunghiulară $K \in M_n(\mathbb{R})$ astfel încât $A = KK^T$.

Demonstrație. Definim $F = \text{diag}(\sqrt{D_{1,1}}, \dots, \sqrt{D_{n,n}})$ și $K = LF$. Deoarece $F^2 = D$ avem

$$A = LDL^T = LF^2L^T = KK^T. \quad \blacksquare$$

13.5 Rezolvarea sistemelor tridiagonale

Numeroase probleme conduc la sisteme algebrice de forma

$$\begin{cases} a_1 x_1 + c_1 x_2 = d_1 \\ b_i x_{i-1} + a_i x_i + c_i x_{i+1} = d_i, & 2 \leq i \leq n-1, \\ b_n x_{n-1} + a_n x_n = d_n \end{cases} \quad (13.15)$$

Matricea sistemului

$$\begin{pmatrix} a_1 & c_1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ b_2 & a_2 & c_2 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b_3 & a_3 & c_3 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & b_{n-1} & a_{n-1} & c_{n-1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & b_n & a_n \end{pmatrix}$$

are elementele nule situate în imediata vecinătate a diagonalei principale. O asemenea matrice se numește matrice bandă. În cazul de față, lățimea benzii este 3, matricea numindu-se tridiagonală. Indicăm o metodă eficientă relativ la necesarul de memorie, pentru rezolvarea sistemului (13.15), numită metoda dublului parcurs.

Primul parcurs. Din prima ecuație a sistemului (13.15), explicitând pe x_1 găsim $x_1 = -\frac{c_1}{a_1}x_2 + \frac{d_1}{a_1}$, adică o relație de forma $x_1 = R_2x_2 + S_2$ cu $R_2 = -\frac{c_1}{a_1}$, $S_2 = \frac{d_1}{a_1}$. Presupunând $x_{i-1} = R_ix_i + S_i$ și substituind în a i -a ecuație a sistemului găsim

$$b_i(R_ix_i + S_i) + a_ix_i + c_ix_{i+1} = d_i$$

de unde rezultă

$$x_i = \frac{-c_i}{a_i + b_iR_i}x_{i+1} + \frac{d_i - b_iS_i}{a_i + b_iR_i} = R_{i+1}x_{i+1} + S_{i+1}.$$

Am dedus relațiile de recurență

$$R_{i+1} = \frac{-c_i}{a_i + b_iR_i}, \quad S_{i+1} = \frac{d_i - b_iS_i}{a_i + b_iR_i}, \quad i = 2, 3, \dots, n.$$

Al doilea parcurs. Din relațiile

$$\begin{aligned} x_{n-1} &= R_nx_n + S_n \\ b_nx_{n-1} + a_nx_n &= d_n \end{aligned}$$

deducem

$$x_n = \frac{d_n - b_nS_n}{a_n + b_nR_n},$$

și utilizând egalitățile $x_{i-1} = R_ix_i + S_i$ calculăm succesiv $x_{n-1}, x_{n-2}, \dots, x_1$.

Alt sistem *tridiagonal*

Fie sistemul

$$\begin{pmatrix} a_1 & c_1 & & & b_1 \\ b_2 & a_2 & c_2 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & b_{n-1} & a_{n-1} & c_{n-1} \\ c_n & & & b_n & a_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \\ \vdots \\ d_{n-1} \\ d_n \end{pmatrix}$$

sau

$$\begin{cases} a_1x_1 + c_1x_2 + b_1x_n & = d_1 \\ b_ix_{i-1} + a_ix_i + c_ix_{i+1} & = d_i \quad i = 2, \dots, n-1 \\ b_nx_{n-1} + a_nx_n + c_nx_1 & = d_n \end{cases}$$

Rescriem prima ecuație sub forma

$$x_1 = \frac{d_1}{a_1} - \frac{c_1}{a_1}x_2 - \frac{b_1}{a_1}x_n = R_2x_2 + S_2 + W_2x_n,$$

cu $R_2 = \frac{c_1}{a_1}$, $S_2 = \frac{d_1}{a_1}$, $W_2 = \frac{b_1}{a_1}$.

În general

$$x_{i-1} = R_ix_i + S_i + W_ix_n. \quad (13.16)$$

Introducând această expresie în a i -a ecuație și explicitând x_i se obține

$$\begin{aligned} x_i &= \frac{-c_i}{a_i + b_iR_i}x_{i+1} + \frac{d_i - b_iS_i}{a_i + b_iR_i} - \frac{b_iW_i}{a_i + b_iR_i}x_n = \\ &= R_{i+1}x_{i+1} + S_{i+1} + W_{i+1}x_n, \end{aligned} \quad (13.17)$$

adică $R_{i+1} = \frac{-c_i}{a_i + b_iR_i}$, $S_{i+1} = \frac{d_i - b_iS_i}{a_i + b_iR_i}$, $W_{i+1} = \frac{b_iW_i}{a_i + b_iR_i}$.

Se pot determina coeficienții U_i, V_i , $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ astfel încât

$$x_i = U_ix_n + V_i. \quad (13.18)$$

Evident $U_n = 1, V_n = 0$. Substituind (13.18) în (13.16) găsim

$$x_{i-1} = (R_iU_i + W_i)x_n + R_iV_i + S_i = U_{i-1}x_n + V_{i-1},$$

cu $U_{i-1} = R_iU_i + W_i$, $V_{i-1} = R_iV_i + S_i$. Din ultima ecuație a sistemului se obține

$$x_n = \frac{d_n - b_nV_{n-1} - c_nV_1}{a_n + b_nU_{n-1} + c_nU_1}$$

iar celelalte necunoscute se determină utilizând (13.18).

13.6 Metode iterative

Fie $A \in M_n(\mathbb{R})$, $A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$ și $b \in \mathbb{R}^n$, $b = (b_i)_{1 \leq i \leq n}$. Pentru rezolvarea sistemului algebric de ecuații liniare

$$Ax = b \quad (13.19)$$

considerăm clasa de metode iterative

$$B \frac{u^{k+1} - u^k}{\tau_k} + Au^k = b, \quad (13.20)$$

unde $B \in M_n(\mathbb{R})$ și $\tau_k \in \mathbb{R}$ sunt parametri care definesc metoda iterativă.

Pornind de la un element arbitrar u^0 se construiește un șir $(u^k)_{k \in \mathbb{N}}$ unde fiecare element reprezintă o aproximație a soluției sistemului algebric (13.19) (bineînțeles dacă această soluție există). Astfel vorbim de metode iterative de rezolvare a sistemului algebric (13.19).

Prezintă interes să precizăm condițiile în care șirul de aproximații $(u^k)_{k \in \mathbb{N}}$ converge către soluția sistemului.

Pentru matricea A introducem notațiile

$$D = \begin{pmatrix} a_{1,1} & & & & 0 \\ & \ddots & & & \\ & & a_{i,i} & & \\ & & & \ddots & \\ 0 & & & & a_{n,n} \end{pmatrix},$$

$$A^- = \begin{pmatrix} 0 & & & & 0 \\ a_{2,1} & 0 & & & \\ \vdots & & \ddots & & \\ \vdots & & & 0 & \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \dots & a_{n,n-1} & 0 \end{pmatrix}, \quad A^+ = \begin{pmatrix} 0 & a_{1,2} & a_{1,3} & \dots & a_{1,n} \\ & 0 & a_{2,3} & \dots & a_{2,n} \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ & & & 0 & a_{n-1,n} \\ 0 & & & & 0 \end{pmatrix}.$$

Cazuri particulare.

1. **Metoda Jacobi.** Dacă $a_{i,i} \neq 0, \forall i \in \{1, 2, \dots, n\}$ atunci explicitând necunoscuta x_i din ecuația i obținem

$$x_i = - \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n \frac{a_{i,j}}{a_{i,i}} \cdot x_j + \frac{b_i}{a_{i,i}} \quad (13.21)$$

Construim șirul $u^k = (u_1^k, \dots, x_n^k)$ definit prin formulele de recurență

$$u_i^{k+1} = - \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n \frac{a_{i,j}}{a_{i,i}} \cdot u_j^k + \frac{b_i}{a_{i,i}} \quad i \in \{1, \dots, n\}, \quad (13.22)$$

$k \in \mathbb{N}$, iar prima aproximație $u^0 = (u_1^0, \dots, u_n^0)$ este un element din \mathbb{R}^n .

Relațiile (13.22) se poate scrie sub forma

$$a_{i,i}(u_i^{k+1} - u_i^k) + \sum_{j=1}^n a_{i,j}u_j^k = b_i \quad i \in \{1, \dots, n\}$$

sau sub forma matriceală

$$D(u^{k+1} - u^k) + Au^k = b. \quad (13.23)$$

În acest caz $B = D$ și $\tau_k = 1$, $\forall k \in \mathbb{N}$.

2. **Metoda Gauss-Seidel.** Relativ la (13.21), construim șirul $u^k = (u_1^k, \dots, u_n^k)$ definit prin formulele de recurență

$$\begin{aligned} u_1^{k+1} &= - \sum_{j=2}^n \frac{a_{1,j}}{a_{1,1}} \cdot u_j^k + \frac{b_1}{a_{1,1}} \\ u_i^{k+1} &= - \sum_{j=1}^{i-1} \frac{a_{i,j}}{a_{i,i}} \cdot u_j^{k+1} - \sum_{j=i+1}^n \frac{a_{i,j}}{a_{i,i}} \cdot u_j^k + \frac{b_i}{a_{i,i}} \quad 2 \leq i \leq n-1 \\ u_n^{k+1} &= - \sum_{j=1}^{n-1} \frac{a_{n,j}}{a_{n,n}} \cdot u_j^{k+1} + \frac{b_n}{a_{n,n}} \end{aligned} \quad (13.24)$$

$k \in \mathbb{N}$ și $u^0 \in \mathbb{R}^n$. Formulele de recurență se pot rescrie sub forma

$$\sum_{j=1}^i a_{i,j}u_j^{k+1} + \sum_{j=i+1}^n a_{i,j}u_j^k = b_i \quad i \in \{1, \dots, n\}$$

sau sub forma matriceală

$$(A^- + D)u^{k+1} + A^+u^k = b,$$

și

$$(A^- + D)(u^{k+1} - u^k) + Au^k = b. \quad (13.25)$$

Astfel $B = A^- + D$ și $\tau_k = 1 \forall k \in \mathbb{N}$.

3. **Metoda relaxării (Successive Overrelaxation - SOR).** Fie $\omega \in \mathbb{R}^*$. Metoda relaxării este dată de

$$(D + \omega A^-) \frac{u^{k+1} - u^k}{\omega} + Au^k = b, \quad (13.26)$$

adică $B = D + \omega A^-$, $\tau_k = \omega$, $\forall k \in \mathbb{N}$. Se observă că pentru $\omega = 1$ se obține metoda Gauss-Seidel.

Un rezultat simplu de convergență valabil în cazul metodei lui Jacobi și a metodei lui Gauss-Seidel este

Teorema 13.6.1 *Dacă $\sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n |a_{i,j}| < |a_{i,i}|$, $i = 1, 2, \dots, n$ atunci șirul de aproximații $(u^k)_{k \in \mathbb{N}}$ construit potrivit metodei Jacobi sau metodei Gauss-Seidel converge către soluția sistemului algebric (13.19).*

Demonstrație. Potrivit Propoziției 12.1.15 matricea A este nesingulară, deci sistemul algebric de ecuații liniare (13.20) are o soluție unică.

Cazul metodei Gauss-Seidel. Cazul metodei Jacobi se tratează asemănător.

Fie $x = (x_1, \dots, x_n)$ soluția sistemului (13.19) și i acel indice pentru care

$$|u_i^{k+1} - x_i| = \max_{1 \leq j \leq n} |u_j^{k+1} - x_j| = \|u^{k+1} - x\|_\infty.$$

Scăzând relația i din (13.24) din relația corespunzătoare din (13.21) obținem

$$u_i^{k+1} - x_i = - \sum_{j=1}^{i-1} \frac{a_{i,j}}{a_{i,i}} (u_j^{k+1} - x_j) - \sum_{j=i+1}^n \frac{a_{i,j}}{a_{i,i}} (u_j^k - x_j). \quad (13.27)$$

Notând

$$p_i = \sum_{j=1}^{i-1} \left| \frac{a_{i,j}}{a_{i,i}} \right|, \quad q_i = \sum_{j=i+1}^n \left| \frac{a_{i,j}}{a_{i,i}} \right|$$

din relația (13.27) deducem

$$\begin{aligned} |u_i^{k+1} - x_i| &\leq \sum_{j=1}^{i-1} \left| \frac{a_{i,j}}{a_{i,i}} \right| \cdot |u_j^{k+1} - x_j| + \sum_{j=i+1}^n \left| \frac{a_{i,j}}{a_{i,i}} \right| \cdot |u_j^k - x_j| \leq \\ &\leq p_i \cdot |u_i^{k+1} - x_i| + q_i \cdot \max_{1 \leq j \leq n} |u_j^k - x_j|. \end{aligned}$$

Atunci

$$\|u^{k+1} - x\|_\infty = |u_i^{k+1} - x_i| \leq \frac{q_i}{1 - p_i} \|u^k - x\|_\infty \quad (13.28)$$

Fie $\mu = \max\left\{\frac{q_j}{1-p_j} : j = 1, 2, \dots, n\right\}$. Atunci din ipoteza teoremei rezultă că $0 < \mu < 1$ și utilizând succesiv relațiile de tip (13.28) obținem:

$$\|u^k - x\|_\infty \leq \mu \|u^{k-1} - x\|_\infty \leq \mu^2 \|u^{k-2} - x\|_\infty \leq \dots \leq \mu^n \|u^0 - x\|_\infty.$$

Rezultă că:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \|u^k - x\|_{\infty} = 0,$$

adică convergența șirului $(x^k)_{k \in \mathbb{N}}$ către soluția sistemului (13.19). ■

Stabilim un rezultat de convergență în alte ipoteze.

Teorema 13.6.2 Fie $A \in M_n(\mathbb{R})$ o matrice simetrică și strict pozitiv definită. Dacă $\tau_k = \tau > 0$, $\forall k \in \mathbb{N}$ și $B > \frac{\tau}{2}A$, atunci șirul de aproximații $(u^k)_{k \in \mathbb{N}}$ construit prin metoda iterativă (13.20) converge către soluția sistemului (13.19).

Demonstrație. Notăm cu x soluția sistemului (13.19) și fie $e^k = u^k - x$. Sistemul (13.19) se poate scrie ca

$$B \frac{x - x}{\tau} + Ax = b. \quad (13.29)$$

Scăzând (13.29) din (13.20) obținem

$$B \frac{e^{k+1} - e^k}{\tau} + Ae^k = 0 \quad \forall k \in \mathbb{N}. \quad (13.30)$$

Se verifică ușor egalitatea

$$2\tau < (B - \frac{\tau}{2}A) \frac{e^{k+1} - e^k}{\tau}, \frac{e^{k+1} - e^k}{\tau} > + \|e^{k+1}\|_A^2 = \|e^k\|_A^2. \quad (13.31)$$

Matricea $P = B - \frac{\tau}{2}A$ fiind strict pozitiv definită este tare pozitiv definită, deci există $m > 0$ astfel încât $\langle Px, x \rangle \geq m\|x\|_2^2$, $\forall x \in \mathbb{R}^n$. Din (13.31) deducem

$$\|e^k\|_A^2 - \|e^{k+1}\|_A^2 \geq 2\tau m \left\| \frac{e^{k+1} - e^k}{\tau} \right\|_2^2 = 2\tau m \|e^{k+1} - e^k\|_2^2,$$

și în consecință șirul $(\|e^k\|_A^2)_{k \in \mathbb{N}}$ este convergent (fiind descrescător și mărgint), de unde

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \|e^{k+1} - e^k\|_2 = 0.$$

Din (13.30) deducem că

$$e^k = -A^{-1}B \frac{e^{k+1} - e^k}{\tau}$$

și apoi

$$\|e^k\|_2 \leq \frac{1}{|\tau|} \|A^{-1}\|_2 \|B\|_2 \|e^{k+1} - e^k\|_2.$$

Ultima relație implică $\lim_{k \rightarrow \infty} e^k = 0$. ■

Aplicăm Teorema 13.6.2 în cazul metodei lui Gauss – Seidel și a metodei relaxării.

Teorema 13.6.3 Dacă A este o matrice simetrică și strict pozitiv definită atunci șirul de aproximații construit prin metoda Gauss – Seidel (13.24) converge către soluția sistemului (13.19).

Demonstrație. Verificăm condiția $B - \frac{\tau}{2}A > 0$.

$$B - \frac{\tau}{2}A = \frac{1}{2}D + \frac{1}{2}(A^- - A^+).$$

și atunci

$$\langle (B - \frac{\tau}{2}A)y, y \rangle = \frac{1}{2} \langle Dy, y \rangle + \frac{1}{2}(\langle A^-y, y \rangle - \langle A^+y, y \rangle).$$

Deoarece A este simetrică, $A^- = (A^+)^T$, rezultă că $\langle A^-y, y \rangle = \langle A^+y, y \rangle$.

Totodată $\langle Dy, y \rangle = \sum_{i=1}^n a_{i,i}y_i^2$. Dacă e_i este vectorul canonic având 1 pe poziția i și deoarece $A > 0$ avem

$$\langle Ae_i, e_i \rangle = a_{i,i} > 0, \quad \forall i \in \{1, 2, \dots, n\}.$$

Astfel

$$\langle (B - \frac{\tau}{2}A)y, y \rangle = \sum_{i=1}^n a_{i,i}y_i^2 > 0, \quad \forall y \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}. \quad \blacksquare$$

Teorema 13.6.4 Dacă $\omega \in (0, 2)$ și A este o matrice simetrică și strict pozitiv definită atunci șirul de aproximații construit prin metoda relaxării (13.26) converge către soluția sistemului (13.19).

Demonstrație. Utilizând rezultatele din demonstrația Teoremei 13.6.3, găsim

$$B - \frac{\tau}{2}A = (1 - \frac{\omega}{2})D + \frac{\omega}{2}(A^- - A^+).$$

de unde

$$\langle (B - \frac{\tau}{2}A)y, y \rangle = (1 - \frac{\omega}{2}) \langle Dy, y \rangle = (1 - \frac{\omega}{2}) \sum_{i=1}^n a_{i,i}y_i^2 > 0, \quad \forall y \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}. \quad \blacksquare$$

Presupunem că formula de recurență pentru rezolvarea sistemului algebric de ecuații liniare (13.19) se scrie sub forma

$$x^{k+1} = Hx^k + \beta, \quad (13.32)$$

unde $H \in M_n(\mathbb{R})$, $\beta \in \mathbb{R}^n$ și că x , soluția sistemului algebric de ecuații liniare, verifică relația

$$x = Hx + \beta. \quad (13.33)$$

Scăzând relațiile (13.32) și (13.33) rezultă

$$x^{k+1} - x = H(x^k - x),$$

de unde

$$x^k - x = H^k(x^0 - x).$$

Potrivit Teoremei 15.4.6

$$\lim_{k \rightarrow \infty} H^k = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \rho(H) < 1,$$

și în consecință, dacă $\rho(H) < 1$, atunci $\lim_{k \rightarrow \infty} x^k = x$.

13.7 Metoda gradientului conjugat

Metoda gradientului conjugat se prezintă sub forma unei metode iterative, dar teoretic, numărul de iterații nu depășește dimensiunea sistemului. Astfel, această metodă poate fi denumită ca metodă *semi-iterativă*.

Fie $A \in M_n(\mathbb{R})$ o matrice simetrică și strict pozitiv definită.

Definiție 13.7.1 Vectorii $u^1, u^2, \dots, u^n \in \mathbb{R}^n$ se numesc *A-conjugați* dacă

$$\langle u^i, Au^j \rangle = \delta_{i,j} \quad \forall i, j \in \{1, \dots, n\} \quad \Leftrightarrow \quad U^T AU = I_n, \quad U = [u^1 \ u^2 \ \dots \ u^n].$$

Dacă vectorii $u^1, u^2, \dots, u^n \in \mathbb{R}^n$ sunt *A-conjugați* atunci ei sunt liniar independenți.

Teorema 13.7.1 Fie $u^1, u^2, \dots, u^n \in \mathbb{R}^n$ vectori *A-conjugați*. Dacă $x^0 \in \mathbb{R}^n$ și

$$x^i = x^{i-1} + \langle b - Ax^{i-1}, u^i \rangle u^i, \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad (13.34)$$

atunci $Ax^n = b$.

Demonstrație. Notând $t_i = \langle b - Ax^{i-1}, u^i \rangle$ formula de recurență devine $x_i = x^{i-1} + t_i u^i$, de unde $Ax^i = Ax^{i-1} + t_i Au^i$ și în consecință

$$Ax^i = Ax^0 + t_1 Au^1 + t_2 Au^2 + \dots + t_i Au^i, \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (13.35)$$

Din (13.35) se deduce egalitatea

$$\langle Ax^n - b, u^i \rangle = \langle Ax^0 - b, u^i \rangle + t_i.$$

Pe de altă parte, utilizând din nou (13.35), au loc egalitățile

$$t_i = \langle b - Ax^{i-1}, u^i \rangle = \langle b - Ax^0, u^i \rangle - \sum_{j=1}^{i-1} t_j \langle Au^j, u^i \rangle = \langle b - Ax^0, u^i \rangle,$$

sau $\langle Ax^0 - b, u^i \rangle + t_i = 0$.

Astfel $\langle Ax^n - b, u^i \rangle = 0, \forall i \in \{1, 2, \dots, n\}$, adică $Ax^n = b$. ■

Observație 13.7.1 Dacă $v^1, v^2, \dots, v^n \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ astfel încât $\langle v^i, Av^j \rangle = 0$, pentru $i \neq j$, atunci vectorii $u^i = \frac{v^i}{\sqrt{\langle v^i, Av^i \rangle}}, i = 1, 2, \dots, n$ sunt A -conjugăți.

Formula de recurență (13.34) devine

$$x^i = x^{i-1} + \frac{\langle b - Ax^{i-1}, v^i \rangle}{\langle v^i, Av^i \rangle} v^i. \quad (13.36)$$

Observație 13.7.2 Dacă $f(x) = \langle Ax, x \rangle - 2 \langle b, x \rangle$ atunci minimul funcționalei $\varphi(\lambda) = f(x + \lambda v)$ se obține pentru $\lambda = \frac{\langle b - Ax, v \rangle}{\langle v, Av \rangle}$.

Algoritmul metodei gradientului conjugat pentru rezolvarea unui sistem algebric de ecuații liniare.

Fie $x^0 \in \mathbb{R}^n, r^0 = v^0 = b - Ax^0, k = 0$

Cât timp $v^k \neq 0$ execută

$$\begin{array}{|l} t_k \leftarrow \frac{\langle r^k, v^k \rangle}{\langle v^k, Av^k \rangle} \\ x^{k+1} \leftarrow x^k + t_k v^k \\ r^{k+1} = b - Ax^{k+1} = r^k - t_k Av^k \\ s_k \leftarrow \frac{\langle r^{k+1}, r^{k+1} \rangle}{\langle r^k, r^k \rangle} \\ v_{k+1} \leftarrow r^{k+1} + s_k v^k \\ k \leftarrow k + 1 \end{array}$$

◇

Teorema 13.7.2 În algoritmul gradientului conjugat pentru rezolvarea unui sistem algebric de ecuații liniare, dacă vectorii v^0, v^1, \dots, v^m sunt nenuli, $m \leq n$, atunci au loc relațiile

- (a) $\langle r^m, v^i \rangle = 0, \quad \forall i \in \{0, 1, \dots, m-1\};$
- (b) $\langle r^i, r^i \rangle = \langle r^i, v^i \rangle \quad \forall i \in \{0, 1, \dots, m\};$
- (c) $\langle v^m, Av^i \rangle = 0, \quad \forall i \in \{0, 1, \dots, m-1\};$
- (d) $\langle r^m, r^i \rangle = 0, \quad \forall i \in \{0, 1, \dots, m-1\};$
- (e) $r^i \neq 0, \quad \forall i \in \{0, 1, \dots, m\}.$

Demonstrație. Inducție după m . Pentru $m=1$ avem de verificat:

$$(a_1) \quad \langle r^1, v^0 \rangle = 0.$$

Utilizând definiția lui r^1 și t_0 se găsește

$$\langle r^1, v^0 \rangle = \langle r^0 - t_0 Av^0, v^0 \rangle = \langle r^0, v^0 \rangle - t_0 \langle Av^0, v^0 \rangle = 0. \quad (13.37)$$

$$(b_1) \quad \langle r^1, r^1 \rangle = \langle r^1, v^1 \rangle.$$

Utilizând definiția lui v^1 și (13.37)

$$\langle r^1, v^1 \rangle = \langle r^1, r^1 + s_0 v^0 \rangle = \langle r^1, r^1 \rangle + s_0 \langle r^1, v^0 \rangle = \langle r^1, r^1 \rangle.$$

$$(c_1) \quad \langle v^1, Av^0 \rangle = 0.$$

Deoarece $r^1 = r^0 - t_0 Av^0 \Rightarrow Av^0 = \frac{1}{t_0}(r^0 - r^1)$, utilizând succesiv definiția lui v^1 și cea a lui s_0 se obține

$$\langle v^1, Av^0 \rangle = \langle r^1 + s_0 v^0, \frac{1}{t_0}(r^0 - r^1) \rangle =$$

$$= \frac{1}{t_0} (\langle r^1, r^0 \rangle + s_0 \langle v^0, r^0 \rangle - \langle r^1, r^1 \rangle - s_0 \langle v^0, r^1 \rangle) = 0.$$

$$(d_1) \quad \langle r^1, r^0 \rangle = \langle r^1, v^0 \rangle = 0.$$

$$(e_1) \quad r_1 \neq 0.$$

Potrivit ipotezei $v_1 \neq 0$, deci $\langle v_1, Av^1 \rangle > 0$. Utilizând definiția lui v^1

$$\langle v^1, Av^1 \rangle = \langle r^1 + s_0 v^0, Av^1 \rangle = \langle r^1, Av^1 \rangle,$$

rezultă că $r_1 \neq 0$.

În ipoteza în care proprietățile (a)-(e) au loc pentru m , justificarea lor pentru $m + 1$ revine la:

$$(a') \quad \langle r^{m+1}, v^i \rangle = 0 \quad \forall i \in \{0, 1, \dots, m\}.$$

Pentru $i \in \{0, 1, \dots, m - 1\}$, utilizând definiția lui r^{m+1} și ipotezele inducției implică

$$\langle r^{m+1}, v^i \rangle = \langle r^m, v^i \rangle - t_m \langle Av^m, v^i \rangle = 0.$$

Pentru $i = m$, definițiile lui r^{m+1} și t_m conduc la

$$\langle r^{m+1}, v^m \rangle = \langle r^m, v^m \rangle - t_m \langle Av^m, v^m \rangle = 0.$$

$$(b') \quad \langle r^{m+1}, v^{m+1} \rangle = \langle r^{m+1}, r^{m+1} \rangle.$$

Utilizând definiția lui v^{m+1} se găsește

$$\langle r^{m+1}, v^{m+1} \rangle = s_m \langle r^{m+1}, v^m \rangle = 0.$$

$$(c') \quad \langle v^{m+1}, Av^i \rangle = 0 \quad \forall i \in \{0, 1, \dots, m\}.$$

Pentru $i \in \{0, 1, \dots, m - 1\}$, utilizând succesiv definiția lui v^{m+1} și ipoteza (c) se găsește

$$\langle v^{m+1}, Av^i \rangle = \langle r^{m+1}, Av^i \rangle + s_m \langle v^m, Av^i \rangle = \langle r^{m+1}, Av^i \rangle. \quad (13.38)$$

Din definiția lui r^{i+1} deducem

$$Av^i = \frac{1}{t_i}(r^i - r^{i+1}) = \frac{1}{t_i}(v^i - s_{i-1}v^{i-1} - v^{i+1} + s_i v^i).$$

Substituind în (13.38), în baza lui (a'), rezultă $\langle v^{m+1}, Av^i \rangle = 0$.

Pentru $i = m$, procedând analog se găsește

$$\begin{aligned} \langle v^{m+1}, Av^m \rangle &= \langle r^{m+1}, Av^m \rangle + s_m \langle v^m, Av^m \rangle = \\ &= \frac{1}{t_m} \langle r^{m+1}, v^m - s_{m-1}v^{m-1} - v^{m+1} + s_m v^m \rangle + s_m \langle v^m, Av^m \rangle. \end{aligned}$$

În urma lui (a'), rezultă

$$\langle v^{m+1}, Av^m \rangle = -\frac{1}{t_m} \langle r^{m+1}, v^{m+1} \rangle + s_m \langle v^m, Av^m \rangle = 0,$$

cu definițiile lui t_m și s_m .

$$(d') \quad \langle r^{m+1}, r^i \rangle = \langle r^{m+1}, v^i - s^{i-1}v^{i-1} \rangle = 0 \quad \forall i \in \{0, 1, \dots, m\},$$

unde s-a aplicat (a').

$$(e') \quad r^{m+1} \neq 0.$$

Deoarece $v^{m+1} \neq 0$, $\langle v^{m+1}, Av^{m+1} \rangle > 0$. Cu definiția lui v^{m+1}

$$\langle v^{m+1}, Av^{m+1} \rangle = r^{m+1} + s_m v^m, Av^{m+1} \rangle = \langle r^{m+1}, Av^{m+1} \rangle,$$

de unde rezultă că $r^{m+1} \neq 0$. ■

13.8 Soluție în sensul celor mai mici pătrate

Fie $A \in M_{m,n}(\mathbb{R})$, $b \in \mathbb{R}^m$ și sistemul algebric de ecuații liniare $Ax = b$. Dacă $b \notin \text{Im}(A)$ atunci sistemul este incompatibil.

O soluție în sensul celor mai mici pătrate este un element din \mathbb{R}^n care minimizează funcționala $J: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ definită prin

$$J(x) = \|b - Ax\|_2^2. \quad (13.39)$$

Teorema 13.8.1 *Următoarele afirmații sunt echivalente:*

- (i) x soluție în sensul celor mai mici pătrate;
- (ii) rezidul $r = b - Ax$ este ortogonal pe subspațiul $\text{Im}(A)$, adică $\langle r, y \rangle = y^T r = 0$, $\forall y \in \text{Im}(A)$;
- (iii) $A^T(b - Ax) = 0$.

Demonstrație. Dacă $y = Az$ atunci echivalența (ii) \equiv (iii) rezultă din egalitățile

$$\langle y, r \rangle = \langle Az, r \rangle = \langle z, A^T r \rangle.$$

Pentru orice $y \in \mathbb{R}^m$ au loc egalitățile

$$b - Ay = b - Ax + A(x - y)$$

și

$$\begin{aligned} J(y) &= \|b - Ax\|_2^2 + 2 \langle b - Ax, A(x - y) \rangle + \|A(x - y)\|_2^2 = \\ &= J(x) + 2 \langle A^T(b - Ax), x - y \rangle + \|A(x - y)\|_2^2. \end{aligned} \quad (13.40)$$

(iii) \Rightarrow (i) Egalitatea $A^T(b - Ax) = 0$ și (13.40) conduc la

$$J(y) = J(x) + \|A(x - y)\|_2^2 \Rightarrow J(y) \geq J(x), \forall y \in \mathbb{R}^n.$$

(i) \Rightarrow (iii) Presupunem prin absurd $A^T(b - Ax) = z \neq 0$. Pentru $y = x + \varepsilon z$, $\varepsilon > 0$ din (13.40) găsim

$$J(y) = J(x) - 2\varepsilon\|z\|_2^2 + \varepsilon^2\|Az\|_2^2 = J(x) - \varepsilon(2\|z\|_2^2 - \varepsilon\|Az\|_2^2).$$

Pentru ε suficient de mic se obține $J(y) < J(x)$, ceea ce contrazice proprietatea de optimalitate a lui x . ■

Din Teorema 13.8.1, (iii), soluția în sensul celor mai mici pătrate se obține din sistemul algebric de ecuații liniare

$$A^T Ax = A^T b.$$

Sistemul este compatibil deoarece $A^T b \in \text{Im}(A^T) = \text{Im}(A^T A)$ iar matricea sistemului este simetrică și pozitiv definită.

Din (7.1.1) rezultă

Teorema 13.8.2 *Dacă coloanele matricei A sunt liniar independente atunci matricea $A^T A$ este strict pozitiv definită.*

Din egalitatea $(\text{Im}(A))^\perp = \text{Ker}(A^T)$ rezultă $\mathbb{R}^m = \text{Im}(A) + \text{Ker}(A^T)$. Pentru orice $b \in \mathbb{R}^m$ are loc descompunerea $b = b_1 + b_2$ cu $b_1 \in \text{Im}(A)$ și $b_2 \in \text{Ker}(A^T)$. Dacă $x_* \in \mathbb{R}^n$ este soluția ecuației $Ax = b_1$ atunci

$$A^T(Ax_* - b) = A^T(b_1 - b) = -A^T b_2 = 0,$$

adică x_* este soluția sistemului $Ax = b$ în sensul celor mai mici pătrate.

Sistemul $A^T(Ax - b) = 0$ se poate reduce la un sistem algebric cu matricea sistemului superior triunghilară.

Fie $A = QR$ factorizarea QR a matricei A . Presupunând matricea $R \in M_n(\mathbb{R})$ nesingulară, sistemul $A^T(Ax - b) = 0$ devine

$$A^T(Ax - b) = (QR)^T(QRx - b) = R^T((Q^T Q)Rx - Q^T b) = R^T(Rx - Q^T b) = 0,$$

și înmulțind la stânga cu R^{-1} se obține $Rx - Q^T b = 0$, adică un sistem algebric de ecuații liniare cu matrice superior triunghiulară.

13.9 Numărul de condiționare al unei matrice

Variații mici ale datelor (adică ale termenilor vectorului liber sau ale elementelor matricei) pot furniza variații importante a soluției sistemului. Acest fenomen pune în evidență caracterul instabil al rezolvării unui sistem algebric de ecuații liniare.

Punem în evidență un indicator care influențează stabilitatea soluției unui sistem algebric de ecuații liniare.

Avem nevoie de următoarele rezultate

Teorema 13.9.1 Fie $A \in M_n(\mathbb{R})$. Dacă $\|A\| < 1$ atunci

1. Matricea $I_n - A$ este inversabilă;
2. $(I_n - A)^{-1} = \lim_{n \rightarrow \infty} (I_n + A + A^2 + \dots + A^n)$;
3. $\|(I_n - A)^{-1}\| \leq \frac{1}{1 - \|A\|}$.

Teorema 13.9.2 Fie $A, B \in M_n(\mathbb{R})$. Dacă

(i) matricea A este inversabilă,

(ii) $\|A - B\| < \frac{1}{\|A^{-1}\|}$

atunci

1. matricea B este inversabilă;
2. $\|B^{-1}\| \leq \frac{\|A^{-1}\|}{1 - \|A^{-1}\| \|A - B\|}$.

Demonstrație. Deoarece $\|I_n - A^{-1}B\| = \|A^{-1}(A - B)\| \leq \|A^{-1}\| \|A - B\| < 1$, din Teorema 13.9.1 rezultă că $I_n - (I_n - A^{-1}B) = A^{-1}B$ este inversabilă și

$$\|(A^{-1}B)^{-1}\| \leq \frac{1}{1 - \|A^{-1}\| \|A - B\|}.$$

Atunci $(A^{-1}B)^{-1}A^{-1} = (AA^{-1}B)^{-1} = B^{-1}$,

$$\|B^{-1}\| = \|(A^{-1}B)^{-1}A^{-1}\| \leq \|(A^{-1}B)^{-1}\| \|A^{-1}\| \leq \frac{\|A^{-1}\|}{1 - \|A^{-1}\| \|A - B\|}. \quad \blacksquare$$

Presupunem că în locul rezolvării sistemului algebric de ecuații liniare $Ax = b$ se rezolvă sistemul perturbat $(A + \delta A)y = b + \delta b$, unde $\delta A \in M_n(\mathbb{R})$ și $\delta b \in \mathbb{R}^n$. Dacă $y - x = \delta x$ atunci din

$$(A + \delta A)(x + \delta x) = b + \delta b$$

deducem

$$(A + \delta A)\delta x = \delta b - \delta Ax. \quad (13.41)$$

Teorema 13.9.3 Dacă A este o matrice inversabilă și $\|\delta A\| < \frac{1}{\|A^{-1}\|}$ atunci matricea $A + \delta A$ este inversabilă și

$$\frac{\|\delta x\|}{\|x\|} \leq \frac{\|A\| \|A^{-1}\|}{1 - \|A^{-1}\| \|\delta A\|} \left(\frac{\|\delta A\|}{\|A\|} + \frac{\|\delta b\|}{\|b\|} \right).$$

Demonstrație. Dacă $B = A + \delta A$ atunci $\|B - A\| \leq \frac{1}{\|A^{-1}\|}$. Potrivit Teoremei 13.9.2 matricea $A + \delta A$ este inversabilă și $\|(A + \delta A)^{-1}\| \leq \frac{\|A^{-1}\|}{1 - \|A^{-1}\| \|\delta A\|}$.

Din (13.41) deducem că $\delta x = (A + \delta A)^{-1}(\delta b - \delta Ax)$ de unde

$$\|\delta x\| \leq \|(A + \delta A)^{-1}\|(\|\delta b\| + \|\delta A\| \|x\|) \leq \frac{\|A^{-1}\|}{1 - \|A^{-1}\| \|\delta A\|}(\|\delta b\| + \|\delta A\| \|x\|).$$

Împățind prin $\|x\|$ și utilizând inegalitatea $\|b\| = \|Ax\| \leq \|A\| \|x\|$ găsim

$$\begin{aligned} \frac{\|\delta x\|}{\|x\|} &\leq \frac{\|A\| \|A^{-1}\|}{1 - \|A^{-1}\| \|\delta A\|} \left(\frac{\|\delta A\|}{\|A\|} + \frac{\|\delta b\|}{\|A\| \|x\|} \right) \leq \\ &\leq \frac{\|A\| \|A^{-1}\|}{1 - \|A^{-1}\| \|\delta A\|} \left(\frac{\|\delta A\|}{\|A\|} + \frac{\|\delta b\|}{\|b\|} \right). \quad \blacksquare \end{aligned}$$

Numărul

$$\kappa(A) = \|A\| \cdot \|A^{-1}\|$$

influențează stabilitatea rezolvării unui sistem algebric de ecuații liniare $Ax = b$ în sensul că cu cât $\kappa(A)$ este mai apropiat de 1 cu atât efectul perturbării soluției este mai mic. Numărul $\kappa(A)$ se numește număr de condiționare a matricei A în raport cu norma matriceală considerată.

Probleme și teme de seminar

P 13.1 Să se determine factorizarea LU (Doolittle) a matricei

$$A = \begin{pmatrix} 10 & 6 & -2 & 1 \\ 10 & 10 & -5 & 0 \\ -2 & 2 & -2 & 1 \\ 1 & 3 & -2 & 3 \end{pmatrix}.$$

Să se rezolve sistemul $Ax = b$, $b^T = (-2, 0, 2, 1)$.

P 13.2 Să se determine valorile lui λ pentru care matricea

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \lambda \end{pmatrix}.$$

este strict pozitivă și să se calculeze factorizarea Cholesky. Să se determine λ pentru care matricea este singulară.

R. $\lambda = \frac{7}{33}$.

P 13.3 Să se rezolve sistemele utilizând factorizarea LU

(i)

$$\begin{cases} 5x + 3y - 11z & = 13 \\ 4x - 5y + 4z & = 18 \\ 3x - 13y + 19z & = 22 \end{cases}$$

(ii)

$$\begin{cases} 2x - y + 3z + 4t & = 5 \\ 4x - 2y + 5z + 6t & = 7 \\ 6x - 3y + 7z + 8t & = 9 \\ \lambda x - 4y + 9z + 10t & = 11 \end{cases}$$

R.

(i)

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{5} & 1 & 0 \\ \frac{3}{5} & \frac{2}{5} & 1 \end{pmatrix} \quad U = \begin{pmatrix} 5 & 3 & -11 \\ 0 & -\frac{37}{5} & \frac{64}{5} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(ii) Pentru $\lambda \neq 8$

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\lambda}{2} & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix} \quad U = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & 4 \\ 0 & \frac{\lambda-8}{2} & \frac{18-3\lambda}{2} & 10-2\lambda \\ 0 & 0 & -2 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad P = P_{2,4}.$$

Pentru $\lambda = 8$

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & \frac{3}{2} & 1 \end{pmatrix} \quad U = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & -2 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

P 13.4 Fie $H = \begin{pmatrix} \alpha & \gamma \\ 0 & \beta \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R})$, cu $|\alpha|, |\beta| < 1$. Pentru rezolvarea sistemului algebric de ecuații liniare $x = Hx + b$, $b \in \mathbb{R}^2$ se utilizează formula de recurență $x^{k+1} = Hx^k + b$.

Să se arate că sistemul admite o singură soluție x și că $\lim_{k \rightarrow \infty} x^k = x$.

R. $H^k = \begin{pmatrix} \alpha^k & \gamma \frac{\alpha^k - \beta^k}{\alpha - \beta} \\ 0 & \beta^k \end{pmatrix}.$

P 13.5 Fie $\xi, \eta, \zeta \in \mathbb{R}, b \in \mathbb{R}^3$ și matricele

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \xi & 1 & 1 \\ \eta & \zeta & 1 \end{pmatrix} \quad \Lambda = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Pentru rezolvarea sistemului $Ax = b$ se consideră metoda iterativă

$$\Lambda x^{k+1} + (A - \Lambda)x^k = b, \quad k \in \mathbb{N}.$$

1. Să se determine valorile constantelor ξ, η, ζ pentru care șirul $(x^k)_{k \in \mathbb{N}}$ converge către soluția sistemului, pentru orice $x^0, b \in \mathbb{R}^3$.
2. Pentru $\xi = \eta = \zeta = -1$ să se precizeze un exemplu de neconvergență.
3. Să se arate că pentru $\xi = \zeta = 0$ soluția se obține în cel mult două iterații.

R.

1. $|A| = (\xi - 1)(\zeta - 1)$. Formula de recurență se poate scrie $x^{k+1} = Hx^k + \Lambda^{-1}b$ unde

$$H = \begin{pmatrix} \xi & 0 & 0 \\ \eta - \xi & \zeta & 0 \\ \eta & -\zeta & 0 \end{pmatrix}, \quad \Lambda^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} H^k = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \rho(H) < 1 \text{ iar } \rho(H) = \max\{|\xi|, |\zeta|\}.$$

2. Pentru $\xi = \eta = \zeta = -1$, $H = \hat{H} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. Se observă $H^{2k} = -H$ și $H^{2k+1} = H$, de unde neconvergența.

3. Pentru $\xi = \zeta = 0$, $x = A^{-1}b$ și $x^{k+1} = \tilde{H}x^k + \Lambda^{-1}b$. Atunci $x^2 = \tilde{H}^2x^0 + (\tilde{H} + I)\Lambda^{-1}b$. Se verifică faptul că $\tilde{H}^2 = 0$ și $(\tilde{H} + I)\Lambda^{-1} = A^{-1}$.

P 13.6 Să se arate că factorizarea Doolittle $A = LU$ a matricei tridiagonale

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & c_1 & & & \\ b_2 & a_2 & c_2 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & b_{n-1} & a_{n-1} & c_{n-1} \\ & & & b_n & a_n \end{pmatrix}$$

este

$$L = \begin{pmatrix} 1 & & & & \\ l_2 & 1 & & & \\ & \ddots & \ddots & & \\ & & & l_n & 1 \end{pmatrix} \quad U = \begin{pmatrix} d_1 & u_1 & & & \\ & \ddots & \ddots & & \\ & & & d_{n-1} & u_{n-1} \\ & & & & d_n \end{pmatrix}$$

cu

$$u_i = c_i \quad i \in \{1, \dots, n-1\}$$

$$d_i = \begin{cases} a_1 & i = 1 \\ a_i - l_i u_{i-1} & i \in \{2, \dots, n\} \end{cases}$$

$$l_i = \frac{b_i}{d_{i-1}} \quad i \in \{2, \dots, n\}$$

Să se deducă formulele pentru rezolvarea sistemului $Ax=y$.

Capitolul 14

Transformarea Householder

Transformata Householder reprezintă instrumentul cu care se vor obține rezultatele acestui capitol: descompunerea QR a unei matrice, reducerea la forma bidiagonală și la forma Hessenberg a unei matrice.

14.1 Transformata Householder

Fie $u \in \mathbb{R}^n$, $\|u\|_2 = \sqrt{2}$ și matricea $H = I_n - uu^T$.

Teorema 14.1.1 Matricea H este simetrică și ortogonală.

Demonstrație. Au loc egalitățile

$$H^T = I_n - (uu^T)^T = I_n - (u^T)^T u^T = I_n - uu^T = H$$

și

$$H^T H = H^2 = I_n - 2uu^T + (uu^T)^2 = I_n - 2uu^T + u(u^T u)u^T = I,$$

deoarece $u^T u = \|u\|_2^2 = 2$. ■

Teorema 14.1.2 Fie $x = (x_i)_{1 \leq i \leq n} \in \mathbb{R}^n$ astfel încât $\|x\|_2 = 1$ și $e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \in$

\mathbb{R}^n . Dacă $u = \frac{x \pm e_1}{\sqrt{1 \pm x_1}}$ atunci $\|u\|_2 = \sqrt{2}$ și $Hx = \mp e_1$.

Demonstrație. Prima egalitate rezultă din

$$\|u\|_2^2 = u^T u = \frac{(x^T \pm e_1^T)(x \pm e_1)}{\sqrt{1 \pm x_1}} =$$

$$= \frac{\|x\|_2^2 \pm (x^T e_1 + e_1^T x) + \|e_1\|_2^2}{\sqrt{1 \pm x_1}} = \frac{2 \pm 2x_1}{\sqrt{1 \pm x_1}} = 2.$$

Apoi

$$u^T x = \frac{x^T \pm e_1^T}{\sqrt{1 \pm x_1}} x = \frac{\|x\|_2^2 \pm e_1^T x}{\sqrt{1 \pm x_1}} = \frac{1 \pm x_1}{\sqrt{1 \pm x_1}} = \sqrt{1 \pm x_1}$$

și în consecință

$$Hx = (I_n - uu^T)x = x - u(u^T x) = x - \sqrt{1 \pm x_1}u = \mp e_1. \quad \blacksquare$$

Pentru $x \in \mathbb{R}^n$, $\|x\|_2 = 1$ și $u = \frac{x \pm e_1}{\sqrt{1 \pm x_1}}$ notăm $H_x = I_n - uu^T$. Matricea H_x este numită matricea transformării Householder asociată vectorului x .

Din teorema anterioară deducem consecința

Teorema 14.1.3 Dacă $x \in \mathbb{R}^n$, $x \neq 0$ atunci

$$H_{\frac{x}{\|x\|_2}} x = \mp \|x\|_2 e_1. \quad (14.1)$$

Demonstrație. Dacă $z = \frac{x}{\|x\|_2}$ atunci $\|z\|_2 = 1$ și din Teorema 14.1.2 găsim $H_z z = \mp e_1$, de unde $H_z x = \mp \|x\|_2 e_1$. \blacksquare

În Teorema 14.1.3 vectorul u ce definește matricea H_z va fi $u = \frac{\frac{x}{\|x\|_2} + \sigma e_1}{\sqrt{1 + \sigma \frac{x_1}{\|x\|_2}}}$ iar

$$\sigma = \begin{cases} 1 & , \text{dacă } x_1 \geq 0 \\ -1 & , \text{dacă } x_1 < 0 \end{cases}.$$

Relația (14.1) devine

$$H_{\frac{x}{\|x\|_2}} x = -\sigma \|x\|_2 e_1. \quad (14.2)$$

Observație 14.1.1 Din (14.2) rezultă

$$x^T H_{\frac{x}{\|x\|_2}} = -\sigma \|x\|_2 e_1^T \quad (14.3)$$

Implementarea transformării Householder Fie $H = I_n - uu^T$ o matrice Householder și $X = [x_1 \dots x_k] = (x_{i,j})_{1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq k} \in M_{n,k}(\mathbb{R})$. Evaluăm numărul de adunări necesare calculului transformării Householder HX .

Dacă calculăm în prealabil matricea $H = (h_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$ și apoi produsul HX atunci sunt necesare n adunări pentru un element al matricei produs

$$\sum_{s=1}^n h_{i,s} x_{s,j},$$

deci un total de $n^2 k$ adunări.

Mult mai eficient este următorul mod de efectuare a calculelor. Calculăm în prealabil

$$u^T X = u^T [x_1 \dots x_k] = [u^T x_1 \dots u^T x_k] = v^T,$$

pentru care efectuăm nk adunări, și apoi

$$\begin{aligned} HX &= (I_n - uu^T)X = X - u(u^T X) = X - uv^T = \\ &= \begin{pmatrix} x_{1,1} - u_1 v_1 & \dots & x_{1,k} - u_1 v_k \\ \vdots & & \vdots \\ x_{n,1} - u_1 v_k & \dots & x_{n,k} - u_n v_k \end{pmatrix} \end{aligned}$$

pentru care se mai fac nk adunări. Astfel numărul total al adunărilor este $2nk$.

14.2 Descompunerea QR

Stabilim următorul rezultat important

Teorema 14.2.1 *Dacă $X \in M_{n,k}(\mathbb{R})$, $n \geq k$, atunci există o matrice ortogonală $Q \in M_n(\mathbb{R})$ și o matrice superior triunghiulară $R \in M_k(\mathbb{R})$ astfel încât*

$$Q^T X = \begin{pmatrix} R \\ 0 \end{pmatrix} \quad \} n - k \text{ linii.} \quad (14.4)$$

Demonstrație. Inducție matematică după k , numărul coloanelor matricei X .

Pentru $k = 1$, $X = [x_1]$, cu $x_1 \in \mathbb{R}^n$. Dacă $x_1 \neq 0$, utilizând transformarea Householder are loc egalitatea

$$H_{\frac{x_1}{\|x_1\|_2}} x_1 = -\sigma \|x_1\|_2 e_1 = \begin{pmatrix} -\sigma \|x_1\|_2 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \leftarrow n - 1 \text{ linii cu } 0.$$

Dacă $x_1 = 0$ atunci $Q = I_n$ și $R = 0$.

Să presupunem ca proprietatea teoremei are loc în cazul unei matrice cu $k - 1$ coloane. Fie $X \in M_{n,k}(\mathbb{R})$ și partiționarea ei $X = [x_1 X_2]$, unde $x_1 \in \mathbb{R}^n$ și $X_2 \in M_{n,k-1}(\mathbb{R})$. Dacă $x_1 \neq 0$ și $H_1 = H_{\frac{x_1}{\|x_1\|_2}}$ atunci

$$H_1 X = [H_1 x_1 \ H_1 X_2] = \begin{pmatrix} \rho_{1,1} & r_{1,2}^T \\ 0 & X_{2,2} \end{pmatrix}$$

unde $\rho_{1,1} = -\sigma \|x_1\|_2$, $r_{1,2} \in \mathbb{R}^{k-1}$, $X_{2,2} \in M_{n-1,k-1}(\mathbb{R})$. Potrivit ipotezei inducției există o matrice ortogonală $Q_2 \in M_{n-1}(\mathbb{R})$ și o matrice superior triunghiulară $R_2 \in M_{k-1}(\mathbb{R})$ astfel încât $Q_2^T X_{2,2} = \begin{pmatrix} R_2 \\ 0 \end{pmatrix}$ } $n - k$ linii. Atunci

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & Q_2^T \end{pmatrix} H_1 X &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & Q_2^T \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \rho_{1,1} & r_{1,2}^T \\ 0 & X_{2,2} \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} \rho_{1,1} & r_{1,2}^T \\ 0 & Q_2^T X_{2,2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \rho_{1,1} & r_{1,2}^T \\ 0 & R_2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

și în consecință $Q^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & Q_2^T \end{pmatrix}$ și $R = \begin{pmatrix} \rho_{1,1} & r_{1,2}^T \\ 0 & R_2 \end{pmatrix}$. ■

Relația (14.4) se numește descompunerea QR a matricei X .

Observație 14.2.1 Descompunerea QR este unică abstractie făcând de semnele coloanelor lui Q și ale liniilor lui R .

Factorizarea QR. Fie $X \in M_{n,k}(\mathbb{R})$ și descompunerea QR

$$Q^T X = \begin{pmatrix} R \\ 0 \end{pmatrix} \text{ } \} n - k \text{ linii.} \quad (14.5)$$

unde $Q \in M_n(\mathbb{R})$ este o matrice ortogonală iar $R \in M_k(\mathbb{R})$ este o matrice superior triunghiulară. Partiționăm matricea Q în

$$Q = \left[\underbrace{Q_X}_{k \text{ coloane}} \quad \underbrace{Q_\perp}_{n-k \text{ coloane}} \right]$$

cu $Q_X \in M_{n,k}(\mathbb{R})$, $Q_\perp \in M_{n,n-k}(\mathbb{R})$.

Deoarece $Q^T Q = I_n$, înmulțind (14.5) la stânga cu matricea Q obținem ¹

$$X = Q \begin{pmatrix} R \\ 0 \end{pmatrix} = [Q_X \quad Q_\perp] \begin{pmatrix} R \\ 0 \end{pmatrix} = Q_X R.$$

Astfel am dedus

Teorema 14.2.2 Dacă $X \in M_{n,k}(\mathbb{R})$ atunci există o matrice ortogonală $Q_X \in M_{n,k}(\mathbb{R})$ și o matrice superior triunghiulară $R \in M_k(\mathbb{R})$ astfel încât

$$X = Q_X R. \quad (14.6)$$

¹Dacă $A, B \in M_n(\mathbb{C})$ astfel încât $AB = I_n$ atunci $BA = I_n$.

Relatia (14.6) se numește factorizarea QR a matricii X .

Observație 14.2.2

Fie $X = [x_1 \dots x_k] \in M_{n,k}(\mathbb{R})$ și factorizarea $X = Q_X R$ cu

$$Q_X = [q_1 \dots q_k] \quad R = \begin{pmatrix} r_{1,1} & r_{1,2} & \dots & r_{1,n} \\ 0 & r_{2,2} & \dots & r_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & r_{k,k} \end{pmatrix}.$$

Egalând coloanele factorizării deducem

$$\begin{aligned} x_1 &= r_{1,1}q_1 \\ x_2 &= r_{1,2}q_1 + r_{2,2}q_2 \\ &\vdots \\ x_k &= r_{1,k}q_1 + r_{2,k}q_2 + \dots + r_{k,k}q_k \end{aligned}$$

de unde $\text{span}\{x_1, \dots, x_k\} = \text{span}\{q_1, \dots, q_k\}$.

Exemplul 14.2.1 Să se calculeze descompunerea QR a matricii

$$X = \begin{pmatrix} 6 & 6 & 1 \\ 3 & 6 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Dacă $X = [x_1 \ x_2 \ x_3]$ atunci

$$x_1 \rightarrow u_1 = \frac{\frac{7}{7}x_1 + e_1}{\sqrt{1 + \frac{6}{7}}} = \frac{1}{\sqrt{7 \cdot 13}} \begin{pmatrix} 13 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

$$H_1 X = X - u_1(u_1^T X) = X - \begin{pmatrix} 13 & 14 & \frac{18}{7} \\ 3 & \frac{42}{13} & \frac{54}{7 \cdot 13} \\ 2 & \frac{28}{13} & \frac{36}{7 \cdot 13} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7 & -8 & -\frac{11}{7} \\ 0 & \frac{36}{13} & \frac{37}{7 \cdot 13} \\ 0 & -\frac{13}{13} & \frac{55}{7 \cdot 13} \end{pmatrix}.$$

Matricea $H_1 = I - u_1 u_1^T$ este

$$\begin{pmatrix} -\frac{6}{7} & -\frac{3}{7} & -\frac{2}{7} \\ -\frac{3}{7} & \frac{82}{7 \cdot 13} & -\frac{6}{7 \cdot 13} \\ -\frac{2}{7} & -\frac{6}{7 \cdot 13} & \frac{87}{7 \cdot 13} \end{pmatrix}.$$

Pentru

$$x'_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{36}{13} \\ -\frac{15}{13} \end{pmatrix} \rightarrow u_2 = \frac{\frac{1}{3}x'_2 + e_2}{\sqrt{1 + \frac{36}{13}}} = \frac{1}{\sqrt{13}} \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

În final,

$$H_2 H_1 X = H_1 X - u_2 u_2^T H_1 X = H_1 X - \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{75}{13} & \frac{50}{7 \cdot 13} \\ 0 & -\frac{15}{13} & -\frac{10}{7 \cdot 13} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7 & -8 & -\frac{11}{7} \\ 0 & -3 & -\frac{1}{7} \\ 0 & 0 & \frac{5}{7} \end{pmatrix},$$

iar

$$H_2 = I - u_2 u_2^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{12}{13} & \frac{5}{13} \\ 0 & \frac{5}{13} & \frac{12}{13} \end{pmatrix},$$

$$Q = (H_2 H_1)^T = H_1 H_2 = \frac{1}{7} \begin{pmatrix} -6 & 2 & -3 \\ -3 & -6 & 2 \\ -2 & 3 & 6 \end{pmatrix}.$$

Construirea unei matrice ortogonale cu prima coloană fixată. Fie $u_1 \in$

\mathbb{R} , $\|u_1\| = 1$. Interpretând vectorul x_1 ca o matrice $n \times 1$, potrivit descompunerii QR există o matrice ortogonală $Q = [q_1 \ q_2 \ \dots \ q_n] \in M_n(\mathbb{R})$ și numărul real R astfel încât

$$Q^T u_1 = \begin{pmatrix} R \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \leftarrow n-1 \text{ zerouri} \quad (14.7)$$

dar

$$Q^T u_1 = \begin{pmatrix} q_1^T \\ q_2^T \\ \vdots \\ q_n^T \end{pmatrix} u_1$$

de unde deducem că $q_i^T u_1 = 0$, pentru $i \in \{2, \dots, n\}$. Astfel $[u_1 \ q_2 \ \dots \ q_n]$ este matricea ortogonală dorită.

14.3 Elemente de teoria celei mai bune aproximații în \mathbb{R}^n

Fie submulțimea $Y \subset \mathbb{R}^n$, $x \in \mathbb{R}^n$ și $\|\cdot\|$ o normă în \mathbb{R}^n . Problema celei mai bune aproximații a lui x prin elementele submulțimii Y constă în determinarea unui element $y_0 \in Y$ – bineînțeles dacă el există astfel încât

$$\|y_0 - x\| = \inf_{y \in Y} \|y - x\|.$$

În cadrul considerat urmează să precizăm:

- condiții în care problema celei mai bune aproximații are soluție;
- condiții în care soluția este unică;
- caracterizare a soluției.

Teorema 14.3.1 *Problema celei mai bune aproximații prin elementele submulțimii $Y \subset \mathbb{R}^n$ are cel puțin o soluție pentru orice $x \in \mathbb{R}^n$ dacă și numai dacă Y este închisă.*

Demonstrație. *Necesitatea.* Fie $x \in \overline{Y}$. Există $y_0 \in Y$ astfel încât

$$\|y_0 - x\| = \inf_{y \in Y} \|y - x\| = 0.$$

Prin urmare $x = y_0 \in Y$, adică $Y = \overline{Y}$.

Suficiența. Fie $x \in \mathbb{R}^n$, $r > 0$ astfel încât $Y \cap \overline{B}(x, r) \neq \emptyset$, unde $\overline{B}(x, r) = \{y \in \mathbb{R}^n : \|y - x\| \leq r\}$ și funcția $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ definită prin formula $f(y) = \|y - x\|$. Funcția f fiind continuă, potrivit teoremei lui Weierstrass, își atinge minimumul pe mulțimea compactă $Y \cap \overline{B}(x, r)$, adică există $y_0 \in Y \cap \overline{B}(x, r)$ astfel încât $f(y_0) \leq f(y)$ sau $\|y_0 - x\| \leq \|y - x\|$, $\forall y \in Y \cap \overline{B}(x, r)$.

Dacă $y \in Y$ și $\|y - x\| > r$ atunci $\|y - x\| > r \geq \|y_0 - x\|$. Astfel y_0 este elementul de cea mai bună aproximație a lui x prin elementele mulțimii Y . ■

În cele ce urmează, norma spațiului liniar \mathbb{R}^n va fi norma euclidiană $\|\cdot\|_2$.

Teorema 14.3.2 *Dacă $Y \subset \mathbb{R}^n$ este o submulțime convexă atunci pentru orice $x \in \mathbb{R}^n$ există cel mult un element de cea mai bună aproximație prin elementele submulțimii Y .*

Demonstrație. Presupunem prin absurd că există $x \in \mathbb{R}^n$ pentru care există cel puțin două elemente diferite $y_1, y_2 \in Y$ de cea mai bună aproximație a lui x prin elementele mulțimii Y :

$$\|y_1 - x\| = \|y_2 - x\| = \min_{y \in Y} \|y - x\| = d.$$

Datorită convexității $y = \frac{1}{2}(y_1 + y_2) \in Y$ și utilizând egalitatea paralelogramului deducem

$$\begin{aligned} d^2 &\leq \|y - x\|_2^2 = \left\| \frac{1}{2}(y_1 - x) + \frac{1}{2}(y_2 - x) \right\|_2^2 = \\ &= 2 \left[\left\| \frac{1}{2}(y_1 - x) \right\|_2^2 + \left\| \frac{1}{2}(y_2 - x) \right\|_2^2 \right] - \left\| \frac{1}{2}(y_1 - x) - \frac{1}{2}(y_2 - x) \right\|_2^2 = \\ &= d^2 - \frac{1}{4} \|y_1 - y_2\|_2^2 < d^2, \end{aligned}$$

de unde concluzia teoremei. ■

Au loc următoarele consecințe:

Teorema 14.3.3 Dacă $Y \subset \mathbb{R}^n$ este o submulțime închisă și convexă atunci pentru orice $x \in \mathbb{R}^n$ există un singur element de cea mai bună aproximație prin elementele submulțimii Y .

Teorema 14.3.4 Dacă Y este un subspațiu liniar a lui \mathbb{R}^n atunci pentru orice $x \in \mathbb{R}^n$ există un singur element de cea mai bună aproximație prin elementele submulțimii Y .

Elementul de cea mai bună aproximație se poate caracteriza prin

Teorema 14.3.5 Fie Y o submulțime nevidă, convexă în \mathbb{R}^n și $x \in \mathbb{R}^n$. $y_0 \in Y$ este elementul de cea mai bună aproximație a lui x prin elementele mulțimii Y dacă și numai dacă

$$\langle y_0 - x, y_0 - y \rangle \geq 0 \quad \forall y \in Y. \quad (14.8)$$

Demonstrație. *Necesitatea.* Presupunem prin absurd că există $y \in Y$ astfel încât $\langle y_0 - x, y_0 - y \rangle > 0$. Fie $0 < \lambda < \min\{1, \frac{2\langle y_0 - x, y_0 - y \rangle}{\|y_0 - y\|_2^2}\}$ și $z = \lambda y + (1 - \lambda)y_0 \in Y$. Atunci deducem

$$\begin{aligned} \|z - x\|_2^2 &= \|y_0 - x + \lambda(y - y_0)\|_2^2 = \langle y_0 - x + \lambda(y - y_0), y_0 - x + \lambda(y - y_0) \rangle = \\ &= \|y_0 - x\|_2^2 + 2\lambda \langle y_0 - x, y - y_0 \rangle + \lambda^2 \|y - y_0\|_2^2 = \end{aligned}$$

$$= \|y_0 - x\|_2^2 - \lambda \|y - y_0\|_2^2 \left(\frac{2 \langle y_0 - x, y_0 - y \rangle}{\|y_0 - y\|_2^2} \right) - \lambda < \|y_0 - x\|_2^2,$$

ceea ce contrazice proprietatea de cea mai bună aproximație a lui y_0 .

Suficiența. Pentru orice $y \in Y$, folosind (14.8) găsim

$$\begin{aligned} \|y_0 - x\|_2^2 &= \langle y_0 - x, y_0 - x \rangle = \langle y_0 - x, (y_0 - y) + (y - x) \rangle = \\ &= \langle y_0 - x, y_0 - y \rangle + \langle y_0 - x, y - x \rangle \leq \langle y_0 - x, y - x \rangle. \end{aligned}$$

Aplicând inegalitatea Cauchy-Buniakovsky-Schwartz inegalitatea anterioară devine

$$\|y_0 - x\|_2^2 \leq \|y_0 - x\|_2 \|y - x\|_2.$$

Dacă $\|y_0 - x\|_2 \neq 0$ atunci simplificând obținem $\|y_0 - x\|_2 \leq \|y - x\|_2$, iar dacă $\|y_0 - x\|_2 = 0$ atunci proprietatea normei implică $\|y_0 - x\|_2 = 0 \leq \|y - x\|_2$. ■

Teorema 14.3.6 *Fie Y un subspațiu liniar în \mathbb{R}^n și $x \in \mathbb{R}^n$. $y_0 \in Y$ este elementul de cea mai bună aproximație a lui x prin elementele subspațiului Y dacă și numai dacă*

$$\langle y_0 - x, y \rangle = 0 \quad \forall y \in Y. \quad (14.9)$$

adică $y_0 - x \perp Y$ sau $y_0 - y \in Y^\perp$.

Demonstrație. Condiția (14.8) se poate rescrie sub forma

$$\langle y_0 - x, y_0 \rangle \leq \langle y_0 - x, y \rangle \quad \forall y \in Y.$$

Fixând $y \in Y$, pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$, $\pm ny \in Y$ și luând în inegalitatea anterioară $y = \pm ny$ se obțin

$$\begin{aligned} \frac{1}{n} \langle y_0 - x, y_0 \rangle &\leq \langle y_0 - x, y \rangle \\ -\frac{1}{n} \langle y_0 - x, y_0 \rangle &\geq \langle y_0 - x, y \rangle. \end{aligned}$$

Pentru n tinzând la infinit, găsim $\langle y_0 - x, y \rangle = 0$. ■

Notăm prin $P_Y(x)$ mulțimea elementelor de cea mai bună aproximație a lui x prin elementele submulțimii Y ($P_Y : X \rightarrow \mathcal{P}(Y)$).

Fie $x_1, x_2, \dots, x_k \in \mathbb{R}^n$. Definim

$$\begin{aligned} Y &= \text{span}\{x_1, \dots, x_k\}, \\ X &= [x_1 \dots x_k] \in M_{n,k}(\mathbb{R}). \end{aligned}$$

Fie $X = Q_X R$ factorizarea QR a matricei X .

Notăm:

$$\begin{aligned} P &= Q_X Q_X^T \in M_n(\mathbb{R}), \\ P_\perp &= I_n - P. \end{aligned}$$

Teorema 14.3.7 *Au loc relațiile:*

1. $Px \in Y \quad \forall x \in \mathbb{R}^n;$
2. $Px = x \quad \Leftrightarrow \quad x \in Y;$
3. $P^2x = Px \quad \forall x \in \mathbb{R}^n;$
4. $Px = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x \in Y^\perp;$
5. $P_Y(x) = Px. \quad \forall x \in \mathbb{R}^n.$

Demonstrație. Presupunem că $Q_X = [q_1 \dots q_k]$ și $Y = \text{span}\{q_1, \dots, q_k\}$.

1. Fie $x \in \mathbb{R}^n$. Concluzia rezultă din

$$Px = Q_X Q_X^T x = [q_1 \dots q_k] \begin{bmatrix} q_1^T \\ \vdots \\ q_k^T \end{bmatrix} x = [q_1 \dots q_k] \begin{bmatrix} q_1^T x \\ \vdots \\ q_k^T x \end{bmatrix} = \sum_{j=1}^k (q_j^T x) q_j \in Y. \quad (14.10)$$

2. Dacă $x \in Y$ atunci există numerele reale c_1, \dots, c_k astfel încât

$$x = \sum_{j=1}^k c_j x_j \Leftrightarrow x = Xc, \quad c = \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_k \end{pmatrix}.$$

Atunci

$$Px = Q_X Q_X^T Xc = Q_X (Q_X^T Q_X) Rc = Q_X Rc = Xc = x.$$

4. Dacă $x \in Y^\perp$ atunci $q_j^T x = 0, \forall j \in \{1, \dots, k\}$ și din (14.10) rezultă că $Px = 0$.

Reciproc, din $Px = 0 = \sum_{j=1}^k (q_j^T x) q_j$, deducem că $q_j^T x = 0, \forall j \in \{1, \dots, k\}$ sau $Q_X^T x = 0$, adică $x \in Y^\perp$.

5. Pentru a arăta că Px este elementul de cea mai bună aproximație a lui x prin elementele subspațiului Y este suficient să verificăm condiția

$$x - Px \in Y^\perp \Leftrightarrow P(x - Px) = 0. \quad \blacksquare$$

Referitor la P_\perp din Teorema 14.3.7 rezultă

Teorema 14.3.8 *Au loc afirmațiile*

1. $P_{\perp}x \in Y^{\perp} \quad \forall x \in \mathbb{R}^n$;
2. $P_{\perp}x = 0 \Leftrightarrow x \in Y$;
3. $P_{\perp}x = x \Leftrightarrow x \in Y^{\perp}$;

Demonstrație. 1. Observăm că $P P_{\perp} = P(I_n - P) = 0$. ■

Observație 14.3.1 *Din egalitatea $I_n = P + P_{\perp}$, pentru orice $x \in \mathbb{R}^n$ deducem*

$$\begin{aligned} x &= Px + P_{\perp}x; \\ \|x\|_2^2 &= \|Px\|_2^2 + \|P_{\perp}x\|_2^2 \end{aligned}$$

Observație 14.3.2 *Dacă $Q^T X = \begin{pmatrix} R \\ 0 \end{pmatrix}$ este descompunerea QR a matricei X și partiționăm $Q = \begin{bmatrix} \underbrace{Q_X}_{k \text{ coloane}} & \underbrace{Q_{\perp}}_{n-k \text{ coloane}} \end{bmatrix}$ atunci $P_{\perp} = Q_{\perp}Q_{\perp}^T$.*

$$I_n = QQ^T = [Q_X \ Q_{\perp}] \begin{bmatrix} Q_X^T \\ Q_{\perp}^T \end{bmatrix} = Q_X Q_X^T + Q_{\perp} Q_{\perp}^T = P + Q_{\perp} Q_{\perp}^T.$$

Exemplul 14.3.1 *Dacă $x_1 = (6, 3, 2)^T$, $x_2 = (6, 6, 1)^T$ atunci subspațiul generat de vectorii x_1, x_2 este planul $\pi : 3x - 2y - 6z = 0$. Să se calculeze distanța de la punctul $A(1, 2, 1)$ la planul π și proiecția punctului A pe planul π .*

Din egalitatea $x_1 \times x_2 = -3(3\vec{i} - 2\vec{j} - 6\vec{k})$ rezultă că subspațiul generat de x_1, x_2 este planul π .

Fie $X = [x_1 x_2] = \begin{pmatrix} 6 & 6 \\ 3 & 6 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$. Matricea Q_X din factorizarea QR a matricei

$X = Q_X R$ este (Exemplul 14.2.1) $Q_X = \frac{1}{7} \begin{pmatrix} -6 & 2 \\ -3 & -6 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$. Matricea de proiecție

este $P = Q_X Q_X^T = \frac{1}{49} \begin{pmatrix} 40 & 6 & 18 \\ 6 & 45 & -12 \\ 18 & -12 & 13 \end{pmatrix}$. Dacă $x = (1, 1, 1)^T$ atunci

$$Px = \frac{1}{7} \begin{pmatrix} 10 \\ 12 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \|x - Px\| = 1.$$

Fie $Y \in \mathbb{R}^n$ o submulțime convexă și închisă. În acest caz P_Y este o funcție $P_Y : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ care asociază oricărui element $x \in \mathbb{R}^n$ elementul de cea mai bună aproximație din Y

$$\|P_Y(x) - x\| = \min_{y \in Y} \|y - x\|.$$

Potrivit Teoremei 14.3.5 $\langle P_Y(x) - x, P_Y(x) - y \rangle \leq 0, \forall y \in Y$.

Teorema 14.3.9 *Dacă Y este o submulțime convexă și închisă din \mathbb{R}^n atunci funcția P_Y este lipschitziană, mai precis*

$$\|P_Y(x_1) - P_Y(x_2)\| \leq \|x_1 - x_2\|.$$

Demonstrație. Au loc relațiile

$$\langle P_Y(x_1) - x_1, P_Y(x_1) - P_Y(x_2) \rangle \leq 0 \quad (14.11)$$

$$\langle P_Y(x_2) - x_2, P_Y(x_2) - P_Y(x_1) \rangle \leq 0 \quad (14.12)$$

Au loc egalitățile

$$\begin{aligned} \|P_Y(x_1) - P_Y(x_2)\|^2 &= \langle P_Y(x_1) - P_Y(x_2), P_Y(x_1) - P_Y(x_2) \rangle = \\ &= \langle P_Y(x_1), P_Y(x_1) - P_Y(x_2) \rangle + \langle P_Y(x_2), P_Y(x_2) - P_Y(x_1) \rangle = \\ &= \langle P_Y(x_1) - x_1, P_Y(x_1) - P_Y(x_2) \rangle + \langle x_1, P_Y(x_1) - P_Y(x_2) \rangle + \\ &+ \langle P_Y(x_2) - x_2, P_Y(x_2) - P_Y(x_1) \rangle + \langle x_2, P_Y(x_2) - P_Y(x_1) \rangle. \end{aligned}$$

Ținând seama de (14.11) și (14.12) deducem

$$\|P_Y(x_1) - P_Y(x_2)\|^2 \leq \langle x_1 - x_2, P_Y(x_1) - P_Y(x_2) \rangle \leq \|x_1 - x_2\| \|P_Y(x_1) - P_Y(x_2)\|.$$

Dacă $P_Y(x_1) \neq P_Y(x_2)$ atunci $\|P_Y(x_1) - P_Y(x_2)\| \leq \|x_1 - x_2\|$. ■

14.4 Metoda celor mai mici pătrate

Dându-se perechile de puncte $(x_i, y_i) \in \mathbb{R}^2, i \in \{1, 2, \dots, n\}$ se cere determinarea funcției $F(x, c_1, \dots, c_m) = \sum_{k=1}^m c_k \varphi_k(x)$, unde constantele c_1, \dots, c_m sunt alese astfel încât să minimizeze funcționala

$$\Phi(\lambda_1, \dots, \lambda_m) = \sum_{i=1}^n [F(x_i, \lambda_1, \dots, \lambda_m) - y_i]^2. \quad (14.13)$$

S-a arătat în §7.1 că dacă

$$U = \begin{pmatrix} \varphi_1(x_1) & \dots & \varphi_1(x_n) \\ \vdots & & \vdots \\ \varphi_m(x_1) & \dots & \varphi_m(x_n) \end{pmatrix} \quad y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \quad c = \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_m \end{pmatrix}$$

atunci c este soluția sistemului algebric de ecuații liniare

$$UU^T c = Uy. \quad (14.14)$$

În cele ce urmează vom regăsi (14.14) pe o altă cale, vom calcula *apriori* valoarea funcționalei (14.13) și vom obține o altă formă a sistemului (14.14), în care matricea sistemului este superior triunghiulară.

Introducem notațiile

$$v_i = \begin{pmatrix} \varphi_i(x_1) \\ \vdots \\ \varphi_i(x_n) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n, \quad i \in \{1, \dots, m\},$$

$$Y = \text{span}\{v_1, \dots, v_m\} \quad X = [v_1 \ \dots \ v_m] = U^T.$$

Dacă $\lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_m \end{pmatrix}$ atunci funcționala (14.13) se scrie

$$\Phi(\lambda) = \|y - X\lambda\|_2^2, \quad (14.15)$$

a cărei minimizare revine la cea mai bună aproximare a lui y prin elementele subspațiului Y .

Fie $Q^T X = \begin{bmatrix} R \\ 0 \end{bmatrix}$ descompunerea QR a matricei X , partiționarea $Q = \begin{bmatrix} Q_X & Q_\perp \end{bmatrix}$ și operatorii liniari (matricele)

m coloane $n-n$ coloane

$$P = Q_X Q_X^T \\ P_\perp = I_n - P = Q_\perp Q_\perp^T.$$

Are loc egalitatea $X = Q_X R$ (14.6). Atunci, utilizând rezultatele Teoremelor 14.3.7 și 14.3.8, găsim

$$\|y - X\lambda\|_2^2 = \|P(y - X\lambda)\|_2^2 + \|P_\perp(y - X\lambda)\|_2^2 = \|Py - X\lambda\|_2^2 + \|P_\perp y\|_2^2. \quad (14.16)$$

Elementul de cea mai bună aproximație $y_0 = X\lambda$ a lui y prin elementele subspațiului Y trebuie să satisfacă ecuația (pentru minimizarea funcționalei (14.16))

$$X\lambda = Py \quad (14.17)$$

în care caz, valoarea funcționalei obiectiv va fi

$$\|P_{\perp}y\|_2^2 = \|Q_{\perp}Q_{\perp}^T y\|_2^2 = \|Q_{\perp}^T y\|_2^2.$$

Înmulțind (14.17) cu X^T găsim

$$X^T X\lambda = X^T P y = (Q_X R)^T Q_X Q_X^T y = R^T Q_X^T y = X^T y,$$

adică $UU^T \lambda = Uy$.

Altfel, înmulțind (14.17) cu Q_X^T găsim

$$Q_X^T Q_X R\lambda = Q_X^T Q_X Q_X^T y,$$

de unde $R\lambda = Q_X^T y$. Algoritmul determinării lui c coastră din

1. Se formează matricea X ;
2. Se determină factorizarea QR a matricei X , $X = Q_X R$;
3. Se rezolvă sistemul $Rc = Q_X^T y$.

14.5 Bidiagonalizarea unei matrice

O altă aplicație a transformării Householder este posibilitatea bidiagonalizării unei matrice în sensul

Teorema 14.5.1 *Dacă $A \in M_n(\mathbb{R})$ atunci există matricele ortogonale $U, V \in M_n(\mathbb{R})$ astfel încât $V^T A U$ este o matrice bidiagonală.*

Demonstrație. Indicăm un algoritm prin care se construiesc matricele ortogonale U și V care reduc matricea A la o matrice bidiagonală.

Succesiv, pentru $k = 1, 2, \dots, n - 1$ înmulțim la stânga și apoi la dreapta cu transformarea Householder care anulează elementele situate sub elementul de pe poziția (k, k) și respectiv la dreapta elementului de pe poziția $(k, k + 1)$.

Pentru simplitate presupunem $A \in M_4(\mathbb{R})$, în reprezentarea lui Wilkinson

$$A = \begin{pmatrix} \times & \times & \times & \times \\ \times & \times & \times & \times \\ \times & \times & \times & \times \\ \times & \times & \times & \times \end{pmatrix}.$$

Evoluția calculelor în acest caz este

$k = 1$

$$H_4^{(1)}A = \begin{pmatrix} \times & \times & \times & \times \\ 0 & \times & \times & \times \\ 0 & \times & \times & \times \\ 0 & \times & \times & \times \end{pmatrix}, \quad H_4^{(1)}A \begin{pmatrix} I_1 & \\ & H_3^{(1)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \times & \times & 0 & 0 \\ 0 & \times & \times & \times \\ 0 & \times & \times & \times \\ 0 & \times & \times & \times \end{pmatrix}.$$

Indicele superior corespunde pasului k iar indicele inferior indică dimensiunea matricei.

$k = 2$

$$\begin{pmatrix} I_1 & \\ & H_3^{(2)} \end{pmatrix} H_4^{(1)}A = \begin{pmatrix} \times & \times & 0 & 0 \\ 0 & \times & \times & \times \\ 0 & 0 & \times & \times \\ 0 & 0 & \times & \times \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} I_1 & \\ & H_3^{(2)} \end{pmatrix} H_4^{(1)}A \begin{pmatrix} I_1 & \\ & H_3^{(1)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_2 & \\ & H_2^{(2)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \times & \times & 0 & 0 \\ 0 & \times & \times & 0 \\ 0 & 0 & \times & \times \\ 0 & 0 & \times & \times \end{pmatrix}.$$

$k = 3$

$$\begin{pmatrix} I_2 & \\ & H_2^{(3)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_1 & \\ & H_3^{(2)} \end{pmatrix} H_4^{(1)}A \begin{pmatrix} I_1 & \\ & H_3^{(1)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_2 & \\ & H_2^{(2)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \times & \times & 0 & 0 \\ 0 & \times & \times & 0 \\ 0 & 0 & \times & \times \\ 0 & 0 & 0 & \times \end{pmatrix}.$$

Astfel

$$U^T = \begin{pmatrix} I_2 & \\ & H_2^{(3)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_1 & \\ & H_3^{(2)} \end{pmatrix} H_4^{(1)}$$

și

$$V = \begin{pmatrix} I_1 & \\ & H_3^{(1)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_2 & \\ & H_2^{(2)} \end{pmatrix}. \quad \blacksquare$$

Observație 14.5.1

Prima coloană a matricei V este e_1 .

14.6 Reducerea unei matrice la forma Hessenberg

În mod asemănător demonstrăm

Teorema 14.6.1 *Dacă $A \in M_n(\mathbb{R})$ atunci există o matrice ortogonală $Q \in M_n(\mathbb{R})$ astfel încât $Q^T A Q$ este o matrice Hessenberg.*

Demonstrație. Utilizând transformata Householder indicăm un algoritm prin care se construiește matricea ortogonală Q și care reduce matricea A la o matrice Hessenberg.

Sucesiv, pentru $k = 1, 2, \dots, n - 2$ înmulțim la stânga și la dreapta cu transformarea Householder care anulează elementele coloanei k cuprinse între liniile $k + 2$ și n .

Pentru simplitate presupunem $A \in M_4(\mathbb{R})$, în reprezentarea lui Wilkinson

$$A = \begin{pmatrix} \times & \times & \times & \times \\ \times & \times & \times & \times \\ \times & \times & \times & \times \\ \times & \times & \times & \times \end{pmatrix}.$$

Evoluția calculelor în acest caz este

$k = 1$

$$\begin{pmatrix} I_1 & \\ & H_3^{(1)} \end{pmatrix} A \begin{pmatrix} I_1 & \\ & H_3^{(1)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \times & \times & \times & \times \\ \times & \times & \times & \times \\ 0 & \times & \times & \times \\ 0 & \times & \times & \times \end{pmatrix}.$$

$k = 2$

$$\begin{pmatrix} I_2 & \\ & H_2^{(2)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_1 & \\ & H_3^{(1)} \end{pmatrix} A \begin{pmatrix} I_1 & \\ & H_3^{(1)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_2 & \\ & H_2^{(2)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \times & \times & \times & \times \\ \times & \times & \times & \times \\ 0 & \times & \times & \times \\ 0 & 0 & \times & \times \end{pmatrix}.$$

În consecință $Q = \begin{pmatrix} I_2 & \\ & H_2^{(2)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_1 & \\ & H_3^{(1)} \end{pmatrix}$. ■

Probleme și teme de seminar

P 14.1 Să se determine descompunerea / factorizarea QR a metricelor

$$(i) \begin{pmatrix} 4 & 5 & 2 \\ 3 & 0 & 3 \\ 0 & 4 & 6 \end{pmatrix} \quad (ii) \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & 1 \\ 2 & 8 & 5 \end{pmatrix} \quad (iii) \begin{pmatrix} 3 & 4 & 7 & -2 \\ 5 & 4 & 9 & 3 \\ 1 & -1 & 0 & 3 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

R. (i)

$$Q = \begin{pmatrix} \frac{4}{5} & \frac{9}{25} & \frac{12}{25} \\ \frac{3}{5} & -\frac{12}{25} & \frac{16}{25} \\ 0 & \frac{4}{5} & \frac{3}{5} \end{pmatrix} \quad R = \begin{pmatrix} 5 & 4 & \frac{17}{5} \\ 0 & 5 & \frac{102}{25} \\ 0 & 0 & \frac{114}{25} \end{pmatrix}$$

(ii)

$$Q = \begin{pmatrix} -\frac{2}{3} & \frac{11}{15} & \frac{2}{3} \\ -\frac{1}{3} & -\frac{2}{15} & \frac{14}{15} \\ -\frac{2}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \quad R = \begin{pmatrix} -3 & -7 & -\frac{17}{3} \\ 0 & -5 & -\frac{19}{15} \\ 0 & 0 & \frac{17}{15} \end{pmatrix}$$

(iii)

$$Q = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{5}{6} & -\frac{1}{6} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{6} & \frac{11}{6} \\ \frac{2}{2} & \frac{7}{18} & \frac{13}{18} \\ \frac{2}{2} & -\frac{1}{18} & \frac{5}{18} \\ \frac{1}{2} & -\frac{7}{18} & -\frac{1}{18} \end{pmatrix} \quad R = \begin{pmatrix} -6 & -5 & -11 & -2 \\ 0 & 3 & 3 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$

P 14.2 Să se arate că o matrice $Q \in M_n(\mathbb{C})$ triunghilară și unitară este diagonală.

R. Dacă matricea Q este inferior triunghilară $Q = [q_1 \ q_2 \ \dots \ q_n]$, cu $q_i = (0 \ \dots \ 0 \ q_{i,i} \ \dots \ q_{n,i})^T$ atunci pentru $i \in \{1, \dots, n-1\}$, $0 = q_n^H q_i = \bar{q}_{n,n} q_{n,i}$, de unde rezultă că $q_{n,i} = 0$, $\forall i \in \{1, \dots, n-1\}$.

La fel, din $0 = q_{n-1}^H q_i = \bar{q}_{n-1,n-1} q_{n-1,i}$, $i \in \{1, \dots, n-2\}$, deci $q_{n-1,i} = 0$, $\forall i \in \{1, \dots, n-2\}$; etc.

P 14.3 Să se arate că subspațiul liniar generat de vectorii $x_1^T = (6, 3, 2)$, $x_2^T = (6, 6, 1)$ este planul $\pi : 3x - 2y - 6z = 0$. Să se determine proiecția punctului $A(1, 2, 1)$ pe planul π și distanța de la punctul A la planul π .

R. Fie $x^T = (1, 2, 1)$.

$$P = Q_X Q_X^T = \frac{1}{7} \begin{pmatrix} 40 & 6 & 18 \\ 6 & 45 & -12 \\ 18 & -12 & 13 \end{pmatrix} \quad Px = \frac{1}{7} \begin{pmatrix} 10 \\ 12 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \|x - Px\|_2 = 1.$$

P 14.4 Dacă Y este un subspațiu liniar în \mathbb{R}^n atunci

$$\mathbb{R}^n = Y \oplus Y^\perp.$$

R. Fie $x \in \mathbb{R}^n$ și $y \in Y$ elementul de cea mai bună aproximație lui x prin elementele mulțimii Y . Atunci $z = x - y \in Y^\perp$.

Proprietatea 14.6.1 Dacă $A \in M_{m,n}(\mathbb{R})$ atunci

$$\mathbb{R}^m = \text{Im}(\mathbf{A}) \oplus \text{Ker}(\mathbf{A}^T). \quad (14.18)$$

R. Se aplică 14.4 și 12.1,25.

Capitolul 15

Calculul numeric al valorilor și vectorilor proprii

15.1 Forma normală Schur

Rezultatul principal al capitolului este teorema lui Schur potrivit căreia orice matrice $A \in M_m(\mathbb{C})$ este similară cu o matrice superior triunghiulară. Obligativ, această matrice are pe diagonală valorile proprii ale matricei inițiale. Aceasta matrice superior triunghiulară este forma normală Schur a matricei A . Scopul algoritmului QR va fi tocmai reducerea unei matrice la forma sa normală Schur.

Teorema 15.1.1 (Schur) Dacă $A \in M_n(\mathbb{C})$ atunci există o matrice unitară $U \in M_n(\mathbb{C})$ astfel încât $U^H A U = T$, unde T este o matrice superior triunghiulară având pe diagonală valorile proprii ale lui A , care pot apărea în orice ordine.

Demonstrație. Inducție după n , dimensiunea matricei. Pentru $n = 1$, matricea $A = (a)$ are valoarea proprie a și pentru $U = (1)$ are loc egalitatea $U^H A U = (a) = T$.

Să presupunem proprietatea adevărată în cazul matricelor de ordin $n - 1$. Fie $A \in M_n(\mathbb{C})$ având perechea proprie (λ_1, v_1) , cu $\|v_1\|_2 = 1$.

Există o matrice unitară Q având v_1 pe prima coloană. Dacă $Q = [v_1 \ V_2]$ atunci

$$\begin{aligned} Q^H A Q &= \begin{pmatrix} v_1^H \\ V_2^H \end{pmatrix} A [v_1 \ V_2] = \begin{pmatrix} v_1^H A v_1 & v_1^H A V_2 \\ V_2^H A v_1 & V_2^H A V_2 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} \lambda_1 & v_1^H A V_2 \\ 0 & V_2^H A V_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & h_1^H \\ 0 & B \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

unde $h_1 \in \mathbb{C}^{n-1}$ și $B \in M_{n-1}(\mathbb{C})$.

Potrivit ipotezei inducției există o matrice unitară $W \in M_{n-1}(\mathbb{C})$ astfel încât $W^H B W = S$ este o matrice superior triunghiulară având pe diagonală valorile proprii ale lui B . Valorile proprii ale lui B sunt totodată și valorile proprii ale matricei A . Într-adevăr, deoarece A și $Q^H A Q$ sunt matrice similare, avem

$$|\lambda I_n - A| = \begin{vmatrix} \lambda - \lambda_1 & -h_1^H \\ 0 & \lambda I_{n-1} - B \end{vmatrix} = (\lambda - \lambda_1) |\lambda I_{n-1} - B|.$$

Dacă $U = [v_1 \ V_2 W]$ atunci

$$\begin{aligned} U^H A U &= \begin{pmatrix} v_1^H \\ W^H V_2^H \end{pmatrix} A [v_1 \ V_2 W] = \begin{pmatrix} v_1^H A v_1 & v_1^H A V_2 W \\ W^H V_2^H A v_1 & W^H V_2^H A V_2 W \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} \lambda_1 & h_1^H W \\ 0 & S \end{pmatrix} = T. \quad \blacksquare \end{aligned}$$

Observație 15.1.1

Prima coloană a matricei U este vectorul propriu v_1 ce corespunde valorii proprii λ_1 situată în colțul nord-vest al matricei T . Reamintim că această pereche proprie a fost aleasă în mod arbitrar.

Pentru o matrice reală are loc următoarea versiune a teoremei 15.1.1.

Teorema 15.1.2 *Dacă $A \in M_n(\mathbb{R})$ atunci există o matrice ortogonală $U \in M_n(\mathbb{R})$ astfel încât*

$$U^T A U = \begin{pmatrix} T_{1,1} & T_{1,2} & \cdots & T_{1,k} \\ & T_{2,2} & \cdots & T_{2,k} \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & T_{k,k} \end{pmatrix},$$

unde $T_{i,i}$ este un bloc de dimensiune 1 conținând o valoare proprie reală sau un bloc de dimensiune 2 corespunzând unei perechi de valori proprii complexe conjugate.

Demonstrație. Procedăm recursiv, deosebind cazul unei perechi proprii reală de una complexă.

Cazul unei perechi proprii reale $(\lambda, x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$. Presupunem $\|x\|_2 = 1$. Există o matrice ortogonală V având x drept prima coloană $V = [x, \tilde{V}]$, $\tilde{V} \in M_{n,n-1}(\mathbb{R})$.

Au loc egalitățile

$$V^T AV = \begin{pmatrix} x^T \\ \tilde{V}^T \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda & x^T A \tilde{V} \\ 0 & \tilde{V} A \tilde{V} \end{pmatrix} \stackrel{\text{def}}{=} \begin{pmatrix} \lambda & m^T \\ 0 & B \end{pmatrix} \quad (15.1)$$

Cazul unei perechi proprii complexe $(\alpha + i\beta, x + iy) \in \mathbb{C} \times \mathbb{C}^n$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $x, y \in \mathbb{R}^n$. Notând $M = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{pmatrix}$ egalitatea $A(x + iy) = (\alpha + i\beta)(x + iy)$ se scrie

$$A[x \ y] = [x \ y]M. \quad (15.2)$$

Fie

$$V^T [x \ y] = \begin{pmatrix} R \\ 0 \end{pmatrix} \quad (15.3)$$

descompunerea QR a matricei $[x \ y] \in M_{n,2}(\mathbb{R})$, $R \in M_2(\mathbb{R})$.

Partiționând matricea $V = \begin{bmatrix} V_1 & V_2 \end{bmatrix}$, din (15.3) găsim
 $\underbrace{2 \text{ col}}_{V_1} \quad \underbrace{n-2 \text{ col}}_{V_2}$

$$[x \ y] = V \begin{pmatrix} R \\ 0 \end{pmatrix} = [V_1 \ V_2] \begin{pmatrix} R \\ 0 \end{pmatrix} = V_1 R. \quad (15.4)$$

Egalitatea (15.2) devine

$$AV_1 R = V_1 R M. \quad (15.5)$$

Vectorii $x, y \in \mathbb{R}^n$ sunt liniar independenți. Vectorii proprii $u \stackrel{\text{def}}{=} x + iy, v \stackrel{\text{def}}{=} x - iy$ corespunzând valorilor proprii distincte $\alpha + i\beta$ și respectiv $\alpha - i\beta$ sunt liniar independenți. Egalitatea $ax + by = 0$ implică

$$a \frac{u+v}{2} + b \frac{u-v}{2i} = \frac{a-ib}{2}u + \frac{a+ib}{2}v = 0,$$

de unde rezultă $a \pm ib = 0$, sau $a = b = 0$.

Matricea R este inversabilă. Notând pentru moment $V_1 = [v_1 \ v_2]$ și $R = \begin{pmatrix} p & r \\ q & t \end{pmatrix}$ din (15.4) găsim

$$\begin{aligned} x &= pv_1 + qv_2 \\ y &= rv_1 + tv_2. \end{aligned}$$

Presupunând prin absurd $\det(R) = 0 \Leftrightarrow pt - qr = 0$, din egalitățile anterioare deducem

$$tx - qy = (tp - qr)v_1 = 0.$$

Prin urmare $t = q = 0$. Analog, $rz - py = 0$ implică $p = r = 0$, de unde $x = y = 0$, cea ce este imposibil. Astfel relația (15.5) devine $AV_1 = V_1 R M R^{-1} = V_1 S$. Matricea $S = R M R^{-1}$ are aceleași valori proprii ca matricea M , adică $\alpha \pm i\beta$.

La fel ca și în cazul real, calculăm

$$\begin{aligned} V^T A V &= \begin{pmatrix} V_1^T \\ V_2^T \end{pmatrix} A [V_1 \ V_2] = \begin{pmatrix} V_1^T \\ V_2^T \end{pmatrix} [A V_1 \ A V_2] = \\ &= \begin{pmatrix} V_1^T \\ V_2^T \end{pmatrix} [V_1 S \ A V_2] = \begin{pmatrix} S & V_1^T A V_2 \\ 0 & V_2^T A V_2 \end{pmatrix} \stackrel{\text{def}}{=} \begin{pmatrix} S & C \\ 0 & B \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (15.6)$$

Pornind de la (15.1) sau (15.6) raționamentul se reia pentru matricea B . ■

15.2 Diagonalizarea unei matrice

Din teorema 15.1.1 se deduce imediat următorul rezultat privind reducerea unei matrice la o formă diagonală

Teorema 15.2.1 *Dacă $A \in M_m(\mathbb{C})$ este o matrice hermitiană atunci există o matrice unitară $U \in M_m(\mathbb{C})$ astfel încât $U^H A U$ este o matrice diagonală, având pe diagonală valorile proprii ale matricei A , ce apar într-o ordine neprecizată.*

Demonstrație. Potrivit Teoremei 15.1.1 există matricea unitară $U \in M_m(\mathbb{C})$ astfel încât $T = U^H A U$ este o matrice superior triunghiulară având pe diagonală valorile proprii ale matricei A , într-o ordine neprecizată. Deoarece $T^H = T$, matricea T este o matrice diagonală. ■

Demonstrația rezultatului de diagonalizare a unei matrice oarecare face apel la ecuația matriceală *Sylvester*:

Dându-se matricele $B \in M_{n-s}(\mathbb{C})$, $C \in M_s(\mathbb{C})$ și $H \in M_{n-s,s}(\mathbb{C})$ să se determine matricea $X \in M_{n-s,s}(\mathbb{C})$ astfel încât

$$B X - X C + H = 0. \quad (15.7)$$

Un caz în care putem rezolva ecuația matriceală a lui Sylvester este

Teorema 15.2.2 *Dacă*

1. C este o matrice superior triunghiulară;
2. elementele situate pe diagonală principală a matricei C nu sunt valori proprii ale matricei B

atunci ecuația matriceală Sylvester (15.7) are soluție unică.

Demonstrație. Indicăm o metodă de rezolvare a ecuației (15.7). Dacă punem în evidență matricea C , coloanele matricelor $X = [x_1 \ x_2 \ \dots \ x_s]$ și $H = [h_1 \ h_2 \ \dots \ h_s]$ atunci ecuația (15.7) devine

$$B[x_1 \ x_2 \ \dots \ x_s] - [x_1 \ x_2 \ \dots \ x_s] \begin{pmatrix} c_{1,1} & c_{1,2} & \dots & c_{1,s} \\ 0 & c_{2,2} & \dots & c_{2,s} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & c_{s,s} \end{pmatrix} = -[h_1 \ h_2 \ \dots \ h_s],$$

echivalent cu șirul de sisteme algebrice de ecuații liniare

$$\begin{aligned} (B - c_{1,1}I_{n-s})x_1 &= h_1 \\ (B - c_{2,2}I_{n-s})x_2 &= h_2 + c_{1,2}x_1 \\ &\vdots \\ (B - c_{s,s}I_{n-s})x_s &= h_s + c_{1,s}x_1 + c_{2,s}x_2 + \dots + c_{s-1,s}x_{s-1}. \end{aligned}$$

Ipooteza teoremei implică $|B - c_{i,i}I_{n-s}| \neq 0$, $\forall i = 1, 2, \dots, s$, adică oricare din sistemele algebrice de ecuații liniare de mai sus au soluție unică. ■

În cazul unei matrice oarecare are loc următorul rezultat de diagonalizare

Teorema 15.2.3 Dacă $A \in M_n(\mathbb{C})$ are valorile proprii distincte două câte două $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ atunci există o matrice nesingulară $X \in M_n(\mathbb{C})$ astfel încât

$$X^{-1}AX = \begin{pmatrix} T_{1,1} & T_{1,2} & \dots & T_{1,k} \\ & T_{2,2} & \dots & T_{2,k} \\ & & \ddots & \\ & & & T_{k,k} \end{pmatrix},$$

unde $T_{j,j}$ este o matrice superior triunghiulară având λ_j pe diagonală, $j \in \{1, 2, \dots, k\}$.

Demonstrație. Potrivit teoremei (15.1.1) există o matrice unitară $U \in M_n(\mathbb{C})$ astfel încât

$$U^H AU = T = \begin{pmatrix} T_{1,1} & T_{1,2} & \dots & T_{1,k} \\ & T_{2,2} & \dots & T_{2,k} \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & T_{k,k} \end{pmatrix}, \quad (15.8)$$

unde $T_{j,j}$ este o matrice superior triunghiulară având pe diagonală aceași valoare proprie λ_j .

Matricea X se construiește recursiv. Rescriem matricea T sub forma

$$T = \begin{pmatrix} B & H \\ 0 & C \end{pmatrix}$$

și alegem la primul pas $B = T_{1,1}$ și $X = U$. Presupunem $B \in M_{n-s}(\mathbb{C})$, $C \in M_s(\mathbb{C})$ și $H \in M_{n-s,s}(\mathbb{C})$. Matricea C este superior triunghiulară iar elementele ei de pe diagonală principală nu sunt valori proprii ale matricei B .

Există o matrice $P \in M_{n-s,s}(\mathbb{C})$ astfel încât

$$\begin{pmatrix} I & -P \\ 0 & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B & H \\ 0 & C \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & P \\ 0 & I \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B & 0 \\ 0 & C \end{pmatrix}. \quad (15.9)$$

Într-adevăr, deoarece

$$\begin{pmatrix} I & -P \\ 0 & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B & H \\ 0 & C \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & P \\ 0 & I \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B & BP - PC + H \\ 0 & C \end{pmatrix}.$$

relația (15.9) revine la ecuația matriceală Sylvester $BP - PC + H = 0$. Totodată

$\begin{pmatrix} I & P \\ 0 & I \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} I & -P \\ 0 & I \end{pmatrix}$. Relația (15.9) devine

$$\begin{pmatrix} I & P \\ 0 & I \end{pmatrix}^{-1} X^{-1} A X \begin{pmatrix} I & P \\ 0 & I \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B & 0 \\ 0 & C \end{pmatrix},$$

deci $X := \begin{pmatrix} I & P \\ 0 & I \end{pmatrix} U$. În continuare se reia procedeul de mai sus pentru matricea C . ■

Observație 15.2.1 Prima coloană a matricei U este un vector propriu corespunzător valorii proprii din colțul nord - vest al matricei T . Matricea X păstrează nealterată această coloană.

15.3 Descompunerea valorii singulare

Teorema 15.3.1 Dacă $X \in M_{n,k}(\mathbb{C})$, $n \geq k$ atunci există matricele ortogonale $U \in M_n(\mathbb{C})$ și $V \in M_k(\mathbb{C})$ astfel încât

$$U^H X V = \begin{pmatrix} \Sigma \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (15.10)$$

unde $\Sigma = \text{diag}(\sigma_1, \dots, \sigma_k)$, $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \dots \geq \sigma_k$.

Demonstrație. Matricea $X^H X \in M_k(\mathbb{C})$ este hermitiană și pozitivă. Potrivit Teoremei de diagonalizare 15.2.1 există matricea ortogonală $V \in M_k(\mathbb{C})$ astfel încât

$$V^H X^H X V = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \lambda_k \end{pmatrix} \stackrel{\text{def}}{=} \Sigma, \quad (15.11)$$

unde $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ sunt valorile proprii nenegative ale matricei $X^H X$, apărând într-o ordine neprecizată.

Fie $\lambda_i = \sigma_i^2$, $i \in \{1, \dots, k\}$. Presupunând că

$$\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \dots \geq \sigma_r > 0 = \sigma_{r+1} = \dots = \sigma_k, \quad (r \leq k).$$

definim

$$\Sigma_1 = \text{diag}(\sigma_1, \dots, \sigma_r) = \begin{pmatrix} \sigma_1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \sigma_r \end{pmatrix}.$$

Astfel

$$\Sigma = \begin{pmatrix} \Sigma_1 & 0 \\ 0 & 0 \\ & & r & k-r \end{pmatrix}, \quad \Sigma^2 = \begin{pmatrix} \Sigma_1^2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \lambda_k \end{pmatrix}.$$

Partiționăm matricea V în $[V_1 \ V_2]$, cu r și respectiv $k-r$ coloane.

Egalitatea (15.11) se rescrie în

$$\begin{aligned} V^H X^H X V &= \begin{bmatrix} V_1^H \\ V_2^H \end{bmatrix} X^H X \begin{bmatrix} V_1 & V_2 \end{bmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} V_1^H X^H X V_1 & V_1^H X^H X V_2 \\ V_2^H X^H X V_1 & V_2^H X^H X V_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Sigma_1^2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (15.12)$$

Așadar $V_2^H X^H X V_2 = 0$ și $V_1^H X^H X V_1 = \Sigma_1^2$.

Dacă punem în evidență coloanele matricei $X V_2 = [q_1 \dots q_{k-r}]$, atunci din egalitatea

$$V_2^H X^H X V_2 = \begin{bmatrix} q_1^H \\ \vdots \\ q_{k-r}^H \end{bmatrix} [q_1 \dots q_{k-r}] = \begin{pmatrix} \|q_1\|_2^2 & \dots & q_1^H q_{k-r} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ q_{k-r}^H q_1 & \dots & \|q_{k-r}\|_2^2 \end{pmatrix} = 0$$

deducem $q_1 = \dots = q_{k-r} = 0$, adică $X V_2 = 0$.

Definim $U_1 = XV_1\Sigma^{-1} \in M_{n,r}(\mathbb{C})$. Deoarece

$$U_1^H U_1 = \Sigma^{-1} V_1^H X^H X V_1 \Sigma^{-1} = I,$$

matricea U_1 este ortogonală. Din definiția matricei U_1 găsim $\Sigma_1 = U_1^H X V_1$. Fie U o matrice ortogonală ale cărei prime r coloane coincid cu U_1 , $U = [u_1 \ U_2]$ (justificați existența matricei U !).

Atunci

$$\begin{aligned} U^H X V &= \begin{bmatrix} U_1^H \\ U_2^H \end{bmatrix} X [V_1 \ V_2] = \begin{bmatrix} U_1^H X V_1 & U_1^H X V_2 \\ U_2^H X V_1 & U_2^H X V_2 \end{bmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} \Sigma_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma_1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \sigma_k \end{pmatrix}. \quad \blacksquare \end{aligned}$$

Teorema 15.3.2 Utilizând notațiile Teoremei 15.3.1 vectorii proprii matricelor XX^H și $X^H X$ sunt v_i și respectiv u_i cu valorile proprii σ_i^2 , $i \in \{1, 2, \dots, r\}$:

$$XX^H v_i = \sigma_i^2 v_i, \quad X^H X u_i = \sigma_i^2 u_i.$$

Demonstrație. Punem în evidență coloanele matricelor U și V :

$$U = [u_1 \ \dots \ u_n] \quad V = [v_1 \ \dots \ v_k].$$

Din 15.10 rezultă

$$XV = U \begin{pmatrix} \Sigma_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad U^H X = \begin{pmatrix} \Sigma_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} V^H.$$

de unde, pentru $i \in \{1, \dots, r\}$

$$Xv_i = \sigma_i u_i \quad \text{și} \quad X^H u_i = \sigma_i v_i.$$

Combinând aceste egalități rezultă

$$X^H X v_i = \sigma_i X^H u_i = \sigma_i^2 v_i,$$

și

$$XX^H u_i = \sigma_i X v_i = \sigma_i^2 u_i. \quad \blacksquare$$

15.4 Raza spectrală a unei matrice

Studiem proprietăți legate de raza spectrală a unei matrice $A \in M_m(\mathbb{R})$.

Pentru orice normă de matrice are loc

Teorema 15.4.1 *Are loc inegalitatea $\rho(A) \leq \|A\|$, care poate fi și strictă.*

Demonstrație. Fie (λ, x) o pereche proprie a matricei A . Din relațiile

$$|\lambda| \|x\| = \|\lambda x\| = \|Ax\| \leq \|A\| \|x\|$$

rezultă $|\lambda| \leq \|A\|$, de unde $\rho(A) \leq \|A\|$.

Matricea nenulă $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ are singura valoare proprie $\lambda = 0$, deci $\rho(A) = 0 < \|A\|$. ■

Teorema 15.4.2 *Dacă $A \in M_m(\mathbb{C})$ atunci $\|A\|_2 = \sqrt{\rho(A^H A)}$.*

Demonstrație. Matricea $A^H A$ este hermitiană și pozitivă. Dacă (λ, x) este o pereche proprie matricei $A^H A$, atunci găsim

$$\|Ax\|_2^2 = \langle Ax, Ax \rangle = \langle A^H Ax, x \rangle = \langle \lambda x, x \rangle = \lambda \|x\|_2^2$$

și în consecință $\lambda \geq 0$.

Notăm prin λ_0 rază spectrală a matricei $A^H A$. Potrivit Teoremei 15.2.1 există o matrice unitară $Q \in M_n(\mathbb{C})$ astfel încât $Q^H A^H A Q = D$ este o matrice diagonală, având pe diagonală valorile proprii ale matricei $A^H A$. Dacă

$$D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}, \quad x \in \mathbb{C}^n, \quad Q^H x = y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

atunci au loc egalitățile

$$\begin{aligned} \|Ax\|_2^2 &= \langle Ax, Ax \rangle = \langle x, A^H Ax \rangle = \langle QQ^H x, A^H Ax \rangle = \\ &= \langle Q^H x, Q^H A^H Ax \rangle = \langle y, Q^H A^H A Q y \rangle = \langle y, D y \rangle = \sum_{j=1}^n \lambda_j |y_j|^2. \end{aligned}$$

Potrivit definiției lui λ_0 , din egalitatea de mai sus rezultă

$$\|Ax\|_2^2 \leq \lambda_0 \sum_{j=1}^n |y_j|^2 = \lambda_0 \|y\|_2^2 = \lambda_0 \|Qy\|_2^2 = \lambda_0 \|x\|_2^2,$$

sau $\|Ax\|_2 \leq \sqrt{\lambda_0}\|x\|_2$.

În consecință

$$\|A\|_2 \leq \sqrt{\lambda_0}. \quad (15.13)$$

Dacă x_0 este un vector propriu corespunzător valorii proprii λ_0 , $A^H Ax_0 = \lambda_0 x_0$, atunci

$$\|Ax_0\|_2^2 = \langle Ax_0, Ax_0 \rangle = \langle x_0, A^H Ax_0 \rangle = \langle x_0, \lambda_0 x_0 \rangle = \lambda_0 \|x_0\|_2^2$$

sau $\|Ax_0\|_2 = \sqrt{\lambda_0}\|x_0\|_2$. Apoi $\sqrt{\lambda_0}\|x_0\|_2 = \|Ax_0\|_2 \leq \|A\|_2\|x_0\|_2$, de unde

$$\sqrt{\lambda_0} \leq \|A\|_2. \quad (15.14)$$

Din (15.13) și (15.14) rezultă egalitatea cerută. ■

În cazul unei matrice simetrice, din teorema anterioară deducem

Teorema 15.4.3 Dacă $A \in M_m(\mathbb{R})$ este o matrice simetrică atunci $\|A\|_2 = \rho(A)$.

Demonstrație. Într-adevăr, au loc relațiile

$$\|A\|_2 = \sqrt{\rho(A^T A)} = \sqrt{\rho(A^2)} = \sqrt{[\rho(A)]^2} = \rho(A). \quad \blacksquare$$

În vederea determinării condiției în care, pentru o matrice $A \in M_n(\mathbb{C})$, are loc $\lim_{k \rightarrow \infty} A^k = 0$ stabilim

Teorema 15.4.4 Pentru orice matrice $A \in M_n(\mathbb{C})$ și orice $\varepsilon > 0$ există o normă $\|\cdot\|_{A,\varepsilon}$ astfel încât $\|A\|_{A,\varepsilon} \leq \rho(A) + \varepsilon$.

Demonstrație. Potrivit Teoremei 15.1.1 există o matrice unitară $U \in M_n(\mathbb{C})$ astfel încât

$$U^H A U = T = \begin{pmatrix} t_{1,1} & t_{1,2} & \dots & t_{1,n} \\ 0 & t_{2,2} & \dots & t_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & t_{n,n} \end{pmatrix} = \Lambda + S,$$

unde

$$\Lambda = \begin{pmatrix} t_{1,1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & t_{2,2} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & t_{n,n} \end{pmatrix}, \quad S = \begin{pmatrix} 0 & t_{1,2} & \dots & t_{1,n} \\ 0 & 0 & \dots & t_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}.$$

Deoarece matricele A și T sunt similare, ele au aceleași valori proprii. În consecință $\rho(A) = \rho(T) = \rho(\Lambda)$.

Fie $0 < \eta < 1$ și $D_\eta = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \eta & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \eta^{n-1} \end{pmatrix}$. Din egalitatea

$$D_\eta^{-1}SD_\eta = \begin{pmatrix} 0 & \eta t_{1,2} & \eta^2 t_{1,3} & \dots & \eta^{n-1} t_{1,n} \\ 0 & 0 & \eta t_{2,3} & \dots & \eta^{n-2} t_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \eta t_{n-1,n} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

găsim

$$\|D_\eta^{-1}SD_\eta\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq n-1} \sum_{j=i+1}^n |\eta^{j-i} t_{i,j}| \leq \eta \sum_{j=i+1}^n |t_{i,j}| = \eta \|S\|_\infty$$

În continuare

$$\begin{aligned} \|D_\eta^{-1}TD_\eta\|_\infty &= \|D_\eta^{-1}\Lambda D_\eta + D_\eta^{-1}SD_\eta\|_\infty = \|\Lambda + D_\eta^{-1}SD_\eta\|_\infty \leq \\ &\leq \|\Lambda\| + \|D_\eta^{-1}SD_\eta\|_\infty \leq \rho(A) + \eta \|S\|_\infty. \end{aligned}$$

Presupunem că η satisface în plus condiția $\eta \|S\|_\infty < \varepsilon$.

Pentru orice matrice $B \in M_n(\mathbb{C})$ definim $\|B\|_{A,\varepsilon} = \|D_\eta^{-1}U^H B U D_\eta\|_\infty$.

Atunci

$$\|A\|_{A,\varepsilon} = \|D_\eta^{-1}U^H A U D_\eta\|_\infty = \|D_\eta^{-1}TD_\eta\|_\infty \leq \rho(A) + \eta \|S\|_\infty < \rho(A) + \varepsilon. \quad \blacksquare$$

Teorema 15.4.5 Pentru orice normă matriceală $\|\cdot\|$, orice matrice $A \in M_n(\mathbb{C})$ și orice $\varepsilon > 0$ există un număr $\tau > 0$ astfel încât

$$\rho^k(A) \leq \|A^k\| \leq \tau[\rho(A) + \varepsilon]^k.$$

Demonstrație. Deoarece în spații liniare finit dimensionale, oricare două norme sunt echivalente, există $\tau > 0$ astfel încât

$$\|B\| \leq \tau \|B\|_{A,\varepsilon}, \quad \forall B \in M_n(\mathbb{C}),$$

unde $\|\cdot\|$ este o normă de matrice iar $\|\cdot\|_{A,\varepsilon}$ este norma introdusă de Teorema 15.4.4.

În concluzie

$$\rho^k(A) = \rho(A^k) \leq \|A^k\| \leq \tau \|A^k\|_{A,\varepsilon} \leq \tau \|A\|_{A,\varepsilon}^k < \tau [\rho(A) + \varepsilon]^k. \quad \blacksquare$$

Din teorema anterioară rezultă imediat

Teorema 15.4.6 Fie $A \in M_n(\mathbb{C})$. Are loc echivalența

$$\lim_{k \rightarrow \infty} A^k = 0 \Leftrightarrow \rho(A) < 1.$$

Teorema 15.4.7 Oricare ar fi norma matriceală $\|\cdot\|$ are loc relația

$$\rho(A) = \lim_{k \rightarrow \infty} \|A^k\|^{\frac{1}{k}}. \quad (15.15)$$

Demonstrație. Din $\rho^k(A) = \rho(A^k) \leq \|A^k\|$ rezultă $\rho(A) \leq \|A^k\|^{\frac{1}{k}}$. Fie $\varepsilon > 0$ și matricea $B = \frac{1}{\rho(A) + \varepsilon} A$. Dacă $Bx = \lambda x$ atunci $(\rho(A) + \varepsilon)\lambda$ este valoare proprie a matricei A . Astfel

$$\rho(A) = (\rho(A) + \varepsilon)\rho(B) \quad \Leftrightarrow \quad \rho(B) = \frac{\rho(A)}{\rho(A) + \varepsilon} < 1,$$

și deci $\lim_{k \rightarrow \infty} B^k = 0$.

Există $k_0 \in \mathbb{N}$ astfel încât, pentru $k > k_0$,

$$\|B^k\| < 1 \quad \Leftrightarrow \quad \|A^k\| < (\rho(A) + \varepsilon)^k.$$

Din inegalitățile $\rho(A) \leq \|A^k\|^{\frac{1}{k}} < \rho(A) + \varepsilon$, $k > k_0$, rezultă $\lim_{k \rightarrow \infty} \|A^k\|^{\frac{1}{k}} = \rho(A)$ ■

15.5 Metoda puterii

O matrice $A \in M_n(\mathbb{C})$ este cu valoare proprie dominantă dacă valorile proprii – eventual renotate – satisfac inegalitățile

$$|\lambda_1| > |\lambda_2| \geq \dots \geq |\lambda_n|.$$

În cazul unei matrice cu valoare proprie dominantă, metoda puterii determină valoarea proprie dominantă împreună cu un vector propriu corespunzător.

Fie $u_0 \in \mathbb{C}^n$. Metoda puterii constă în construirea șirurilor $(u_k)_{k \in \mathbb{N}}$ și $(\lambda_1^k)_{k \in \mathbb{N}}$ definite prin formulele

$$u_{k+1} = \sigma_k A u_k, \quad (15.16)$$

unde $(\sigma_k)_{k \in \mathbb{N}}$ este un șir numeric fixat apriori, și respectiv

$$\lambda_1^k = \frac{\langle A u_k, u_k \rangle}{\|u_k\|_2^2}. \quad (15.17)$$

Teorema 15.5.1 *Au loc formulele*

$$u_k = \sigma_{k-1} \sigma_{k-2} \dots \sigma_0 A^k u_0, \quad (15.18)$$

$$\lambda_1^k = \frac{\langle A^{k+1} u_0, A^k u_0 \rangle}{\|A^k u_0\|_2^2}. \quad (15.19)$$

Demonstrație. Formula (15.18) se demonstrează prin inducție matematică, iar (15.19) rezultă din (15.17) și (15.18)

$$\lambda_1^k = \frac{\langle \sigma_{k-1} \sigma_{k-2} \dots \sigma_0 A^{k+1} u_0, \sigma_{k-1} \sigma_{k-2} \dots \sigma_0 A^k u_0 \rangle}{\|\sigma_{k-1} \sigma_{k-2} \dots \sigma_0 A^k u_0\|_2^2} = \frac{\langle A^{k+1} u_0, A^k u_0 \rangle}{\|A^k u_0\|_2^2}. \quad \blacksquare$$

Uzual, se alege $\sigma_k = \frac{1}{\|A u_k\|_2}$, în care caz $u_k = \frac{A^k u_0}{\|A^k u_0\|_2}$.

Rezultatele de convergență ale metodei puterii sunt

Teorema 15.5.2 *Fie $A \in M_n(\mathbb{C})$ o matrice nedefectivă și cu valoare proprie dominantă având valorile proprii $|\lambda_1| > |\lambda_2| \geq \dots \geq |\lambda_n|$ cu vectorii proprii corespunzători x_1, x_2, \dots, x_n , ce formează o bază în \mathbb{C}^n . Dacă $u_0 = \sum_{i=1}^n c_i x_i$, cu $c_1 \neq 0$, atunci șirul $(\lambda_1^k)_{k \in \mathbb{N}}$ construit prin formula (15.17) converge către λ_1 .*

15.6 Algoritmul QR

Algoritmul QR reduce o matrice la forma normală Schur. Cele două matrice fiind similare, elementele de pe diagonala formei normale Schur sunt valorile proprii ale matricei.

Fie $A \in M_n(\mathbb{C})$. Ideea algoritmului este: dacă $\lambda \in \mathbb{C}$ și $q \in \mathbb{C}^n$ sunt o valoare proprie, respectiv un vector propriu la stânga ale matricei A , $\|q\|_2 = 1$, $q^H A = \lambda q^H$, atunci există o matrice unitară Q , având q pe ultima coloană, $Q = (Q_*, q)$, pentru care

$$Q^H A Q = \begin{pmatrix} Q_*^H \\ q^H \end{pmatrix} A (Q_*, q) = \begin{pmatrix} Q_*^H A Q_* & Q_*^H A q \\ q^H A Q_* & q^H A q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Q_*^H A Q_* & Q_*^H A q \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}.$$

În felul acesta s-a zerorizat ultima coloană până la elementul diagonal, poziție pe care este valoarea proprie λ .

Problema legată de această schemă este aceea că nu se cunoaște q .

Totodată se dorește ca, în forma normală Schur, valorile proprii să apară în ordine descrescătoare a modulului. Astfel pe poziția (n, n) se va afla o valoare proprie de modul minim, sau de modul maxim pentru matricea A^{-1} (în cazul inversabilității acesteia).¹

Pentru determinarea lui q se va efectua o iterație cu metoda puterii aplicată matricei $(A - kI_n)^{-1}$, aproximația inițială fiind $(u_0 :=)e_n$. Astfel

$$q^H = \frac{e_n^T (A - kI_n)^{-1}}{\|e_n^T (A - kI_n)^{-1}\|_2}. \quad (15.20)$$

k este un parametru ales astfel încât matricea $A - kI_n$ să fie inversabilă.

Matricea unitară Q , având q pe ultima coloană, se determină din factorizarea QR a matricei $A - kI_n = QR$. Pentru a justifica acest fapt, deducem egalitățile

$$e_n^T R = e_n^T \begin{pmatrix} r_{1,1} & r_{1,2} & \dots & r_{1,n} \\ 0 & r_{2,2} & \dots & r_{2,n} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & r_{n,n} \end{pmatrix} = r_{n,n} e_n^T,$$

$$Q^H = R(A - kI_n)^{-1},$$

$$q = Qe_n.$$

Atunci, utilizând aceste relații, avem

$$q^H = e_n^T Q^H = e_n^T R(A - kI_n)^{-1} = r_{n,n} e_n^T (A - kI_n)^{-1}. \quad (15.21)$$

Deoarece $\|q\|_2 = \|q^H\|_2 = 1$, din egalitatea anterioară deducem că $r_{n,n} = \frac{1}{\|e_n^T (A - kI_n)^{-1}\|_2}$. Substituind în (15.21) se regăsește (15.20), adică Q este matricea dorită.

Produsul $Q^H A Q$ rezultă din

$$RQ = Q^H (A - kI_n) Q = Q^H A Q - kI_n \quad \Rightarrow \quad Q^H A Q = RQ + kI_n.$$

Includem aceste calcule într-un șir de aproximații $A_{j+1} = Q_j^H A_j Q_j$ cu $A_0 = A$. Algoritm pentru calculul lui A_{j+1} este:

P1 Se alege k_j astfel încât matricea $A_j - k_j I_n$ să fie inversabilă;

¹Pentru o matrice inversabilă, valorile proprii ale inversei sunt inversele valorilor proprii ale matricei.

P2 Se calculează factorizarea QR: $A_j - k_j I_n = Q_j R_j$;

P3 $A_{j+1} = R_j Q_j + k_j I_n$.

Pentru stabilirea unui rezultat de convergență ometem pentru moment indicele j de iterație. Să presupunem

$$A_j = A = \begin{pmatrix} B & h \\ g^H & \mu \end{pmatrix} \quad A_{j+1} = \hat{A} = \begin{pmatrix} \hat{B} & \hat{h} \\ \hat{g}^H & \hat{\mu} \end{pmatrix}.$$

și

$$\begin{aligned} A_j - k_j I_n &= A - k I_n = \begin{pmatrix} B - k I_{n-1} & h \\ g^H & \mu - k \end{pmatrix} = & (15.22) \\ &= \begin{pmatrix} P & f \\ e^H & \pi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} S & r \\ 0 & \rho \end{pmatrix} = QR, \end{aligned}$$

$$A_{j+1} - k_j I_n = \hat{A} - k I_n = RQ = \begin{pmatrix} S & r \\ 0 & \rho \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P & f \\ e^H & \pi \end{pmatrix}. \quad (15.23)$$

Deoarece Q este o matrice pătrată ortogonală, din egalitățile

$$\|f\|_2^2 + |\pi|^2 = \|e^H\|_2^2 + |\pi|^2 = 1$$

deducem $\|f\|_2 = \|e\|_2$ și $|\pi| \leq 1$.

În ipoteza

$$\exists S^{-1} \quad \text{și} \quad \|S^{-1}\|_2 \leq \sigma \quad (15.24)$$

din expresia blocului sud-vest a produsului QR (15.22) $g^H = e^H S$ rezultă

$$\|e^H\|_2 = \|g^H S^{-1}\|_2 \leq \|g^H\|_2 \|S^{-1}\|_2 \leq \sigma \|g^H\|_2$$

sau

$$\|e\|_2 \leq \sigma \|g\|_2. \quad (15.25)$$

Egalând expresiile situate în colțurile sud-est ale egalității $Q^H(A - kI_n) = R$, ce rezultă din (15.22), găsim

$$f^H h + \bar{\pi}(\mu - k) = \rho,$$

de unde

$$|\rho| \leq \|f^H\|_2 \|h\|_2 + |\bar{\pi}| |\mu - k| \leq \sigma \|g\|_2 \|h\|_2 + |\mu - k|. \quad (15.26)$$

Egalăm expresiile situate în colțul sud-vest a egalității (15.23) și găsim $\hat{g}^H = \rho e^H$, din care rezultă

$$\begin{aligned}\|\hat{g}\|_2 &= \|\hat{g}^H\|_2 = |\rho| \|e^H\|_2 \leq (\sigma \|g\|_2 \|h\|_2 + |\mu - k|) \sigma \|g\|_2 = \\ &= \sigma^2 \|g\|_2^2 \|h\| + \sigma \|g\|_2 |\mu - k|,\end{aligned}$$

după ce am utilizat pe rând (15.26) și (15.25).

Revenind la indici de iterație, inegalitatea anterioară se scrie

$$\|g_{j+1}\|_2 \leq \sigma_j^2 \|g_j\|_2^2 \|h_j\| + \sigma_j \|g_j\|_2 |\mu_j - k_j|. \quad (15.27)$$

Întărind ipoteza (15.24) are loc următorul rezultat de convergență

Teorema 15.6.1 *Dacă*

$$k_j = \mu_j, \quad \|S_j^{-1}\|_2 \leq \sigma, \quad \|h_j\|_2 \leq \eta, \quad \forall j \in \mathbb{N},$$

$$\exists j_0 \in \mathbb{N} \quad \text{astfel încât} \quad \sigma^2 \eta \|g_{j_0}\|_2 < 1$$

atunci $\lim_{j \rightarrow \infty} g_j = 0$.

Demonstrație. În ipotezele teoremei, inegalitatea (15.27) devine

$$\|g_{j+1}\|_2 \leq \sigma^2 \eta \|g_j\|_2^2. \quad (15.28)$$

Prin inducție matematică arătăm

$$\|g_{j_0+k}\|_2 \leq (\sigma^2 \eta \|g_{j_0}\|_2)^k \|g_{j_0}\|_2, \quad \forall k \in \mathbb{N}^*.$$

Pentru $k = 1$, din (15.28) avem

$$\|g_{j_0+1}\|_2 \leq \sigma^2 \eta \|g_{j_0}\|_2^2 = (\sigma^2 \eta \|g_{j_0}\|_2) \|g_{j_0}\|_2.$$

Dacă $\|g_{j_0+k-1}\|_2 \leq (\sigma^2 \eta \|g_{j_0}\|_2)^{k-1} \|g_{j_0}\|_2 \leq \|g_{j_0}\|_2$ atunci

$$\|g_{j_0+k}\|_2 \leq \sigma^2 \eta \|g_{j_0+k-1}\|_2^2 \leq \sigma^2 \eta \|g_{j_0}\|_2 \|g_{j_0+k-1}\|_2 \leq (\sigma^2 \eta \|g_{j_0}\|_2)^k \|g_{j_0}\|_2.$$

Din inegalitatea demonstrată urmează imediat $\lim_{j \rightarrow \infty} g_j = 0$. ■

Rădăcinile unui polinom ca valorile proprii ale unei matrice

Putem determina rădăcinile polinomului $P(x) = x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_{n-1}x + a_n$ calculând valorile proprii ale matricei

$$A = \begin{pmatrix} -a_1 & -a_2 & -a_3 & \dots & -a_{n-1} & -a_n \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & & & \ddots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad (15.29)$$

Polinomul caracteristic atașat matricei A este

$$f(\lambda) = |\lambda I_n - A| = \begin{vmatrix} \lambda + a_1 & a_2 & a_3 & \dots & a_{n-1} & a_n \\ -1 & \lambda & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & \lambda & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & & & \ddots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -1 & \lambda \end{vmatrix}.$$

Succesiv, înmulțim coloanele $1, 2, \dots, n-1$ cu λ și îl adunăm la coloana alăturată din dreapta. În final obținem

$$f(\lambda) = \begin{vmatrix} \lambda + a_1 & \lambda^2 + a_1\lambda + a_2 & \lambda^3 + a_1\lambda^2 + a_2\lambda + a_3 & \dots & \lambda^{n-1} + a_1\lambda^{n-2} + \dots + a_{n-2}\lambda + a_{n-1} & P(\lambda) \\ -1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & & & \ddots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -1 & \lambda \end{vmatrix}.$$

Dezvoltând acest determinant după ultima coloană găsim $f(\lambda) = P(\lambda)$.

Probleme și teme de seminar

P 15.1 Să se arate că polinomul caracteristic al unei matrice triunghiulare simetrice

$$T = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ b_1 & a_2 & b_2 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b_2 & a_3 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & & & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & b_{n-2} & a_{n-1} & b_{n-1} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & b_{n-1} & a_n & b_n \end{pmatrix}$$

este $f(\lambda) = f_n(\lambda)$ unde $(f_k(\lambda))_{0 \leq k \leq n}$ este definit prin formula de recurență

$$f_k(\lambda) = \begin{cases} 1 & \text{pentru } k = 0 \\ \lambda - a_k & \text{pentru } k = 1 \\ (\lambda - a_k)f_{k-1}(\lambda) - b_{k-1}^2 f_{k-2}(\lambda) & \text{pentru } k \in \{2, \dots, n\} \end{cases}$$

Utilizând acest rezultat să se dezvolte o metodă pentru calculul polinomului caracteristic al unei matrice simetrice.

Indicație. Se aduce matricea simetrică la forma Hessenberg.

Capitolul 16

Descompunerea valorii singulare (DVS)

16.1 Descompunerea valorii singulare

Teorema 16.1.1 Dacă $X \in M_{n,k}(\mathbb{C})$, $n \geq k$ atunci există matricele unitare $U \in M_n(\mathbb{C})$ și $V \in M_k(\mathbb{C})$ astfel încât

$$U^H X V = \begin{pmatrix} \Sigma \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (16.1)$$

unde $\Sigma = \text{diag}(\sigma_1, \dots, \sigma_k)$, $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \dots \geq \sigma_k$.

Numerele σ_i se numesc valori proprii ale matricei X iar coloanele matricelor U și V se numesc vectori singulari la stânga și respectiv la dreapta ale matricei X .

Prezentăm două demonstrații ale acestui rezultat.

Demonstrația 1. Notăm prin r indicele pentru care

$$\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \dots \geq \sigma_r > 0 = \sigma_{r+1} = \dots = \sigma_k.$$

Distingem două cazuri.

Cazul $X = 0$. În acest caz $U = I_n$, $V = I_k$, $\Sigma = 0$, $r = 0$.

Cazul $X \neq 0$. Sfera unitate în \mathbb{C}^k fiind compactă, există $v_1 \in \mathbb{C}^k$ astfel încât

$$\|X\|_2 = \sup_{\|v\|_2=1} \|Xv\|_2 = \|Xv_1\|_2.$$

Fie $u_1 = \frac{Xv_1}{\|Xv_1\|_2} \in \mathbb{C}^n$. Există matricele unitare $U_1 \in M_n(\mathbb{C})$ și $V_1 \in M_k(\mathbb{C})$ având pe prima coloană vectorii u_1 și respectiv v_1 :

$$U_1 = [u_1 \ \tilde{U}_1] \quad V_1 = [v_1 \ \tilde{V}_1].$$

Definim

$$\Sigma^{(1)} = U_1^H X V_1 = \begin{bmatrix} u_1^H \\ \tilde{U}_1^H \end{bmatrix} X [v_1 \tilde{V}_1] = \begin{pmatrix} u_1^H X v_1 & u_1^H X \tilde{V}_1 \\ \tilde{U}_1^H X v_1 & \tilde{U}_1^H X \tilde{V}_1 \end{pmatrix}. \quad (16.2)$$

Atunci

$$\begin{aligned} u_1^H X v_1 &= u_1^H \|X\|_2 u_1 = \|X\|_2 \stackrel{\text{def}}{=} \sigma_1, \\ \tilde{U}_1^H X v_1 &= \|X\|_2 \tilde{U}_1^H u_1 = 0. \end{aligned}$$

Notând $u_1^H X \tilde{V}_1 = w^H$ și $\tilde{U}_1^H X \tilde{V}_1 = B$ expresia matricei $\Sigma^{(1)}$ devine

$$\Sigma^{(1)} = \begin{pmatrix} \sigma_1 & w^H \\ 0 & B_1 \end{pmatrix}.$$

Înmulțirea matricei X la stânga și la dreapta cu câte a matrice unitară păstrează norma euclidiană (Propoziția 12.1.7)

$$\|\Sigma^{(1)}\|_2 = \|X\|_2 = \sigma_1.$$

Apoi

$$\|\Sigma^{(1)} \begin{pmatrix} \sigma_1 \\ w \end{pmatrix}\|_2^2 = \left\| \begin{pmatrix} \sigma_1^2 + w^H w \\ B_1 w \end{pmatrix} \right\|_2^2 = (\sigma_1^2 + w^H w)^2 + \|B_1 w\|_2^2 \geq (\sigma_1^2 + \|w\|_2^2)^2.$$

Pe de altă parte

$$\|\Sigma^{(1)} \begin{pmatrix} \sigma_1 \\ w \end{pmatrix}\|_2^2 \leq \|\Sigma^{(1)}\|_2^2 \left\| \begin{pmatrix} \sigma_1^2 + w^H w \\ B_1 w \end{pmatrix} \right\|_2^2 = \sigma_1^2 (\sigma_1^2 + \|w\|_2^2).$$

Prin urmare $(\sigma_1^2 + \|w\|_2^2)^2 \leq \sigma_1^2 (\sigma_1^2 + \|w\|_2^2)$ sau $\sigma_1^2 + \|w\|_2^2 \leq \sigma_1^2$, adică $\|w\|_2 = 0 \Leftrightarrow w = 0$. Astfel

$$\Sigma^{(1)} = \begin{pmatrix} \sigma_1 & 0 \\ 0 & B_1 \end{pmatrix}.$$

Să presupunem că s-au efectuat $j - 1$ pași:

$$\Sigma^{(j-1)} = U_{j-1}^H \dots U_1^H X V_1 \dots V_{j-1} = \begin{pmatrix} \Sigma_1^{(j-1)} & 0 \\ 0 & B_{j-1} \end{pmatrix},$$

unde $\Sigma_1 = \text{diag}(\sigma_1, \dots, \sigma_{j-1})$, iar $\sigma_1 \geq \dots \geq \sigma_{j-1} > 0$.

Reluăm procedura de mai sus.

Dacă $B_{j-1} = 0$ atunci $r = j - 1$.

Dacă $B_{j-1} \neq 0$ atunci există matricele unitare $\tilde{U}_j \in M_{n-j+1}(\mathbb{C})$, $\tilde{V}_j \in M_{k-j+1}(\mathbb{C})$ astfel încât

$$\tilde{U}_j^H B_{j-1} \tilde{V}_j = \begin{pmatrix} \sigma_j & 0 \\ 0 & B_j \end{pmatrix}$$

unde $\sigma_j = \|B_{j-1}\|_2 > 0$ și $B_j \in M_{n-j, k-j}(\mathbb{C})$. Definim

$$U_j = \begin{pmatrix} I_{j-1} & 0 \\ 0 & \tilde{U}_j \end{pmatrix} \in M_n(\mathbb{C}) \quad V_j = \begin{pmatrix} I_{j-1} & 0 \\ 0 & \tilde{V}_j \end{pmatrix} \in M_k(\mathbb{C})$$

și

$$\Sigma^{(j)} = U_j^H X V_j = \begin{pmatrix} \Sigma_1^{(j)} & 0 \\ 0 & B_j \end{pmatrix},$$

cu $\Sigma_1^{(j)} = \text{diag}(\sigma_1, \dots, \sigma_j)$.

Rămâne de arătat că $\sigma_j \leq \sigma_{j-1}$:

$$\sigma_{j-1} = \|B_{j-2}\|_2 = \left\| \begin{pmatrix} \sigma_{j-1} & 0 \\ 0 & B_{j-1} \end{pmatrix} \right\|_2 \geq \|B_{j-1}\|_2 = \sigma_j.$$

Procedeuul descris mai sus continuă cât timp $B_j \neq 0$, iar r va fi ultimul indice pentru care $B_j \neq 0$. Astfel, $U = U_r \dots U_1$, $V = V_1 \dots V_r$, $\Sigma = \Sigma^{(r)}$, $\Sigma_1 = \Sigma_1^{(r)}$ și $\Sigma = U^H X V$. ■

Demonstrația 2. Matricea $X^H X \in M_k(\mathbb{C})$ este hermitiană și pozitivă. Potrivit Teoremei de diagonalizare 15.2.1 există matricea unitară $V \in M_k(\mathbb{C})$ astfel încât

$$V^H X^H X V = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \lambda_k \end{pmatrix} \stackrel{\text{def}}{=} \Sigma, \quad (16.3)$$

unde $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ sunt valorile proprii nenegative ale matricei $X^H X$, apărând într-o ordine neprecizată.

Fie $\lambda_i = \sigma_i^2$, $i \in \{1, \dots, k\}$. Presupunând că

$$\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \dots \geq \sigma_r > 0 = \sigma_{r+1} = \dots = \sigma_k, \quad (r \leq k).$$

definim

$$\Sigma_1 = \text{diag}(\sigma_1, \dots, \sigma_r) = \begin{pmatrix} \sigma_1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \sigma_r \end{pmatrix}.$$

Astfel

$$\Sigma = \begin{pmatrix} \Sigma_1 & 0 \\ 0 & 0 \\ r & k-r \end{pmatrix}, \quad \Sigma^2 = \begin{pmatrix} \Sigma_1^2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \lambda_k \end{pmatrix}.$$

Partiționăm matricea V în $[V_1 \ V_2]$, cu r și respectiv $k-r$ coloane. Egalitatea (16.3) se rescrie în

$$\begin{aligned} V^H X^H X V &= \begin{bmatrix} V_1^H \\ V_2^H \end{bmatrix} X^H X [V_1 \ V_2] = \\ &= \begin{pmatrix} V_1^H X^H X V_1 & V_1^H X^H X V_2 \\ V_2^H X^H X V_1 & V_2^H X^H X V_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Sigma_1^2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (16.4)$$

Așadar $V_2^H X^H X V_2 = 0$ și $V_1^H X^H X V_1 = \Sigma_1^2$.

Dacă punem în evidență coloanele matricei $XV_2 = [q_1 \dots q_{k-r}]$, atunci din egalitatea

$$V_2^H X^H X V_2 = \begin{bmatrix} q_1^H \\ \vdots \\ q_{k-r} \end{bmatrix} [q_1 \dots q_{k-r}] = \begin{pmatrix} \|q_1\|_2^2 & \dots & q_1^H q_{k-r} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ q_{k-r}^H q_1 & \dots & \|q_{k-r}\|_2^2 \end{pmatrix} = 0$$

deducem $q_1 = \dots = q_{k-r} = 0$, adică $XV_2 = 0$.

Definim $U_1 = XV_1 \Sigma^{-1} \in M_{n,r}(\mathbb{C})$. Deoarece

$$U_1^H U_1 = \Sigma^{-1} V_1^H X^H X V_1 \Sigma^{-1} = I,$$

matricea U_1 este unitară. Din definiția matricei U_1 găsim $\Sigma_1 = U_1^H X V_1$. Fie U o matrice unitară ale cărei prime r coloane coincid cu U_1 , $U = [u_1 \ U_2]$ (justificați existența matricei U !).

Atunci

$$\begin{aligned} U^H X V &= \begin{bmatrix} U_1^H \\ U_2^H \end{bmatrix} X [V_1 \ V_2] = \begin{bmatrix} U_1^H X V_1 & U_1^H X V_2 \\ U_2^H X V_1 & U_2^H X V_2 \end{bmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} \Sigma_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma_1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \sigma_k \end{pmatrix}. \quad \blacksquare \end{aligned}$$

16.2 Metoda celor mai mici pătrate prin DVS

Fie $X \in M_{n,k}(\mathbb{C})$ și $y \in \mathbb{C}^n$. Ne propunem să determinăm $\lambda \in \mathbb{C}^k$, de normă euclidiană minimă care minimizează funcționala (14.13)

$$\Phi(\lambda) = \|y - X\lambda\|_2^2.$$

Utilizând Teorema 16.1.1, există matricele unitare $U \in M_n(\mathbb{C})$ și $V \in M_k(\mathbb{C})$ astfel încât

$$U^H X V = \Sigma = \begin{pmatrix} \Sigma_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

unde $\Sigma_1 = \text{diag}(\sigma_1, \dots, \sigma_r)$, $\sigma_i \neq 0$, $i \in \{1, \dots, r\}$. Astfel $X = U \Sigma V^H$ și

$$\|y - X\lambda\|_2 = \|U(U^H y - X V^H \lambda)\|_2 = \|U^H y - \Sigma V^H \lambda\|_2.$$

Notând $V^H \lambda = \mu = \begin{pmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \end{pmatrix}$, $U^H y = z = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix}$ cu $\mu_1, z_1 \in \mathbb{C}^r$ și $\mu_2 \in \mathbb{C}^{k-r}$, $z_2 \in \mathbb{C}^{n-r}$ expresia funcționalei obiectiv devine

$$\begin{aligned} \Phi(\lambda) &= \|U^H y - \Sigma V^H \lambda\|_2^2 = \left\| \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} - \Sigma \begin{pmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \end{pmatrix} \right\|_2^2 = \\ &= \left\| \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \Sigma_1 \mu_1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\|_2^2 = \|z_1 - \Sigma_1 \mu_1\|_2^2 + \|z_2\|_2^2. \end{aligned}$$

Această expresie este minimă pentru $z_1 - \Sigma_1 \mu_1 = 0$ sau $\mu_1 = \Sigma_1^{-1} z_1$.

Norma euclidiană a lui λ

$$\|\lambda\|_2 = \|V\mu\|_2 = \|\mu\|_2 = (\|\mu_1\|_2^2 + \|\mu_2\|_2^2)^{\frac{1}{2}} = (\|\Sigma_1^{-1} z_1\|_2^2 + \|\mu_2\|_2^2)^{\frac{1}{2}}$$

este minimă pentru $\mu_2 = 0$.

Așadar

$$\lambda = V\mu = V \begin{pmatrix} \Sigma_1^{-1} z_1 \\ 0 \end{pmatrix} = V \begin{pmatrix} \Sigma_1^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} = V \begin{pmatrix} \Sigma_1^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} U^H y.$$

Punând în evidență coloanele metricelor $U = [u_1 \dots u_n]$ și $V = [v_1 \dots v_k]$, expresia soluției de normă minimă a elementului de aproximare construit prin metoda celor mai mici pătrate devine

$$\lambda = \sum_{j=1}^r \frac{u_j^H y}{\sigma_j} v_j.$$

SCHEIBER ERNEST SCHEIBER ERNEST

SCHEIBER ERNEST SCHEIBER ERNEST

Capitolul 17

Spații Krylov

17.1 Definiția spațiului Krylov

Fie $A \in M_n(\mathbb{R})$ și $x \in \mathbb{R}^n$.

Definiție 17.1.1 *Se numește spațiu Krylov de ordin k atașat matricei A și vectorului x subspațiul liniar*

$$K_k(A, x) = \text{span}\{x, Ax, \dots, A^{k-1}x\}.$$

17.2 Descompunerea Arnoldi

Utilizând metoda Gram-Schmidt construim o bază ortonormată spațiului Krylov $K_k(A, x)$.

Fie $u_1 = \frac{x}{\|x\|_2}$. În continuare, definim

$$\begin{aligned} h_{2,1}u_2 &= Au_1 - h_{1,1}u_1 \\ h_{3,2}u_3 &= Au_2 - h_{1,2}u_1 - h_{2,2}u_2 \\ &\vdots \\ h_{j+1,j}u_{j+1} &= Au_j - h_{1,j}u_1 - h_{2,j}u_2 - \dots - h_{j,j}u_j \\ &\vdots \\ h_{k+1,k}u_{k+1} &= Au_k - h_{1,k}u_1 - h_{2,k}u_2 - \dots - h_{j,k}u_j - \dots - h_{k,k}u_k \end{aligned} \tag{17.1}$$

Din condiția de ortogonalitate $u_i^T u_{j+1} = 0$ deducem

$$h_{i,j} = u_i^T Au_j \quad \forall j \in \{1, 2, \dots, j\}$$

iar din condiția de normalitate $\|u_{j+1}\|_2 = 1$ găsim

$$h_{j+1,j} = \|Au_j - \sum_{i=1}^j h_{i,j}u_i\|_2.$$

Relațiile (17.1) se scriu

$$\begin{aligned} Au_1 &= h_{1,1}u_1 + h_{2,1}u_2 \\ Au_2 &= h_{1,2}u_1 + h_{2,2}u_2 + h_{3,2}u_3 \\ &\vdots \\ Au_k &= h_{1,k}u_1 + h_{2,k}u_2 + \dots + h_{k,k}u_k + h_{k+1,k}u_{k+1} \end{aligned} \quad (17.2)$$

Ansamblul relațiilor (17.2) se pot scrie sub forma

$$A[u_1 \ u_2 \ \dots \ u_k] = [u_1 \ u_2 \ \dots \ u_k] \begin{pmatrix} h_{1,1} & h_{1,2} & \dots & h_{1,k-1} & h_{1,k} \\ h_{2,1} & h_{2,2} & \dots & h_{2,k-1} & h_{2,k} \\ 0 & h_{3,2} & \dots & h_{3,k-1} & h_{3,k} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & h_{k,k-1} & h_{k,k} \end{pmatrix} + \quad (17.3)$$

$$+ h_{k+1,k} \underbrace{[0, \dots, 0, u_{k+1}]}_{k-1}$$

sau

$$A[u_1 \ u_2 \ \dots \ u_k] = [u_1 \ u_2 \ \dots \ u_{k+1}] \begin{pmatrix} h_{1,1} & h_{1,2} & \dots & h_{1,k-1} & h_{1,k} \\ h_{2,1} & h_{2,2} & \dots & h_{2,k-1} & h_{2,k} \\ 0 & h_{3,2} & \dots & h_{3,k-1} & h_{3,k} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & h_{k,k-1} & h_{k,k} \\ 0 & 0 & \dots & 0 & h_{k+1,k} \end{pmatrix}. \quad (17.4)$$

Introducând matricele

$$U_k = [u_1 \ \dots \ u_k] \quad H_k = \begin{pmatrix} h_{1,1} & h_{1,2} & \dots & h_{1,k-1} & h_{1,k} \\ h_{2,1} & h_{2,2} & \dots & h_{2,k-1} & h_{2,k} \\ 0 & h_{3,2} & \dots & h_{3,k-1} & h_{3,k} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & h_{k,k-1} & h_{k,k} \end{pmatrix} \in M_k(\mathbb{R})$$

$$U_{k+1} = [u_1 \dots u_k \ u_{k+1}] \quad H_{k+1,k} = \begin{pmatrix} h_{1,1} & h_{1,2} & \dots & h_{1,k-1} & h_{1,k} \\ h_{2,1} & h_{2,2} & \dots & h_{2,k-1} & h_{2,k} \\ 0 & h_{3,2} & \dots & h_{3,k-1} & h_{3,k} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & h_{k,k-1} & h_{k,k} \\ 0 & 0 & \dots & 0 & h_{k+1,k} \end{pmatrix}$$

relațiile (17.3) și (17.4) se scriu respectiv

$$AU_k = U_k H_k + h_{k+1,k} u_{k+1} e_k^{(k)T} \quad (17.5)$$

și respectiv

$$AU_k = U_{k+1} H_{k+1,k}. \quad (17.6)$$

$e_k^{(k)}$ reprezintă vectorul din baza canonică a spațiului liniar \mathbb{R}^k .

Relațiile (17.5) și (17.6) se numesc descompuneri Arnoldi a spațiului Krylov $K_k(A, x)$.

Matricele U_k și U_{k+1} sunt ortogonale. Înmulțind (17.5) și (17.6) la stânga cu U_k^T și respectiv U_{k+1}^T obținem

$$U_k^T AU_k = H_k, \quad (17.7)$$

respectiv

$$U_{k+1}^T AU_k = H_{k+1,k}. \quad (17.8)$$

Observație 17.2.1 Matricea H_k este o matrice Hessenberg.

Cazul matricelor simetrice. Dacă $A \in M_n(\mathbb{R})$ este o matrice simetrică atunci, din (17.7) rezultă că H_k este o matrice simetrică și din faptul că este o matrice Hessenberg urmează că este tridiagonală

$$H_k = T_k = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & 0 & \dots & & 0 \\ \beta_1 & \alpha_2 & \beta_2 & & & \\ 0 & \beta_2 & \alpha_3 & & & \\ \vdots & & & \ddots & & \\ & & & & \alpha_{k-1} & \beta_{k-1} \\ 0 & & & & \beta_{k-1} & \alpha_k \end{pmatrix}.$$

Din egalitatea $U_k^T AU_k = T_k$ se deduc egalitățile

$$\begin{aligned} \alpha_i &= u_i^T A u_i, \\ \beta_i &= u_i^T A u_{i+1}, \quad i = 1, 2, \dots, k, \end{aligned}$$

iar din $AU_k = U_k T_k + h_{k+1,k} u_{k+1} e_k^T$ rezultă

$$\begin{aligned}\beta_1 u_2 &= Au_1 - \alpha_1 u_1 \\ \beta_2 u_3 &= Au_2 - \alpha_2 u_2 - \beta_1 u_1 \\ &\dots \\ \beta_i u_{i+1} &= Au_i - \alpha_i u_i - \beta_{i-1} u_{i-1} \\ &\dots \\ \beta_{k-1} u_k &= Au_{k-1} - \alpha_{k-1} u_{k-1} - \beta_{k-2} u_{k-2} \\ h_{k+1,k} u_{k+1} &= Au_k - \alpha_k u_k - \beta_{k-1} u_{k-1}.\end{aligned}$$

De aici $\beta_i = \|Au_i - \alpha_i u_i - \beta_{i-1} u_{i-1}\|_2$.

Sunt astfel justificate relațiile din algoritmul lui *Lanczos* pentru construirea bazei ortogonale a spațiului Krylov $K_k(A, u)$

Algorithm 1 Lanczos.

```

1: procedure
2:    $u_0 \leftarrow 0$ 
3:    $\beta_0 \leftarrow \|u\|_2$ 
4:    $u_1 \leftarrow \frac{u}{\beta_0}$ 
5:   for  $i = 1 : k$  do
6:      $\alpha_i \leftarrow u_i^T A u_i$ 
7:      $z \leftarrow A u_i - \alpha_i u_i - \beta_{i-1} u_{i-1}$ 
8:      $\beta_i \leftarrow \|z\|$ 
9:      $u_{i+1} \leftarrow \frac{z}{\beta_i}$ 
10:  end for
11: end procedure

```

17.3 Rezolvarea sistemelor algebrice de ecuații liniare

Fie $A \in M_n(\mathbb{R})$, $b \in \mathbb{R}^n$ și sistemul algebric de ecuații liniare

$$Ax = b. \tag{17.9}$$

Vom determina o aproximație $x_k \in \mathbb{R}^n$ a soluției sistemului (17.9) în spațiul Krylov $K_k(b)$. Metoda este eficientă în cazul în care dimensiunea n este mare.

În cazul matricii A nesingulare, soluția sistemului (17.9) aparține spațiului Krylov $K_m(b)$, unde m este gradul polinomului minimal asociat matricii A . Într-adevăr, dacă

$$\varphi(x) = c_0 + c_1x + \dots + c_mx^m$$

este polinomul minimal asociat matricii A , adică polinomul de grad minim pentru care

$$\varphi(A) = c_0I + c_1A + \dots + c_mA^m = 0$$

atunci

$$A^{-1} = -\frac{1}{c_0}(c_1I + c_2A + \dots + c_mA^{m-1})$$

și în consecință

$$x = A^{-1}b = -\frac{1}{c_0}(c_1b + c_2Ab + \dots + c_mA^{m-1}b) \in K_m(b).$$

Observație 17.3.1 În cazul unei matrici A singulare, în ipoteza compatibilității sistemului (17.9), soluția acestuia poate să nu aparțină nici unui spațiu Krylov.

Fie $A \in M_n(\mathbb{R})$ o matrice nilpotentă de ordin m : $A^k = 0$, $\forall k \geq m$, dar $A^{m-1} \neq 0$. În acest caz A este o matrice singulară deoarece $|A^m| = |A|^m = 0$.

Fie $b \in \mathbb{R}^N$, $b \neq 0$ astfel încât sistemul (17.9) să fie compatibil și să presupunem prin absurd că $x \in K_m(b)$. Atunci $x = c_0b + c_1Ab + \dots + c_{m-1}A^{m-1}b$ și

$$Ax = c_0Ab + c_1A^2b + \dots + c_{m-2}A^{m-1}b = b$$

sau

$$(I - c_0A - c_1A^2 - \dots - c_{m-2}A^{m-1})b = 0. \quad (17.10)$$

Matricea $D = I - c_0A - c_1A^2 - \dots - c_{m-2}A^{m-1}$ este nesingulară deoarece singura valoare proprie este 1. Într-adevăr, fie (λ, z) o pereche proprie a matricii D ,

$$Dz = \lambda z. \quad (17.11)$$

Există un cel mai mic indice $i \in \{0, 1, \dots, m-1\}$ astfel încât $A^i z \neq 0$ și $A^j z = 0$, $\forall j > i$. Înmulțind (17.11) la stânga cu A^i obținem

$$(1 - \lambda)A^i z = 0,$$

de unde $\lambda = 1$.

Atunci, din (17.10) urmează că $b = 0$, în contradicție cu alegerea lui b .

17.3.1 Varianta Ritz-Galerkin

Aproximația $x_k \in K_k(b)$ se determină din condiția de ortogonalitate

$$b - Ax_k \perp K_k(b) \quad (17.12)$$

Dacă $(u_i)_{1 \leq i \leq k+1}$ este un sistem de vectori ortonormați pentru care are loc descompunerile Arnoldi (17.5) și (17.6) atunci condiția de ortogonalitate se poate scrie

$$U_k^T(b - Ax_k) = 0, \quad (17.13)$$

unde $U_k = [u_1 u_2 \dots u_k]$. Ținând seama de faptul că $u_1 = \frac{b}{\|b\|_2}$ din (17.13) urmează că

$$U_k^T A x_k = U_k^T b = \|b\|_2 U_k^T u_1 = \|b\|_2 e_1^{(k)}. \quad (17.14)$$

Indicele superior precizează dimensiunea vectorului.

Deoarece x_k se reprezintă sub forma $x_k = U_k \xi_k$ cu relația (17.14) devine

$$U_k^T A U_k \xi_k = \|b\|_2 e_1^{(k)},$$

și în virtutea lui (17.5)

$$H_k \xi_k = \|b\|_2. \quad (17.15)$$

Astfel rezolvarea sistemului (17.9), de dimensiune n s-a redus la rezolvarea unui sistem algebric de ecuații liniare de dimensiune k .

17.3.2 Varianta reziduului minimal

Aproximația x_k se determină ca soluția problemei de optimizare

$$\|b - Ax_k\|_2 = \min_{x \in K_k(b)} \|b - Ax\|_2 \quad (17.16)$$

Din $u_1 = \frac{b}{\|b\|_2}$ deducem

$$b = \|b\|_2 u_1 = \|b\|_2 U_{k+1} e_1^{(k+1)}, \quad e_1^{(k+1)} \in \mathbb{R}^{k+1}.$$

Un element $x \in K_k(b)$ se reprezintă prin $x = U_k y$, cu $y \in \mathbb{R}^k$ și utilizând (17.6) deducem

$$Ax = A U_k y = U_{k+1} H_{k+1,k} y.$$

Astfel funcționala cost devine

$$\|b - Ax\|_2 = \| \|b\|_2 U_{k+1} e_1^{(k+1)} - U_{k+1} H_{k+1,k} y \|_2 =$$

$$= \|U_{k+1}(\|b\|_2 e_1^{(k+1)} - H_{k+1,k}y)\|_2 = \|(\|b\|_2 e_1^{(k+1)} - H_{k+1,k}y)\|_2.$$

Utilizând tehnica dezvoltată pentru determinarea elementului de aproximare prin metoda celor mai mici pătrate, determinăm $y_k \in \mathbb{R}^{k+1}$ ce minimizează $\|(\|b\|_2 e_1^{(k+1)} - H_{k+1,k}y)\|_2$.

Dacă factorizarea QR a matricei $H_{k+1,k}$ este $H_{k+1,k} = QR$ atunci y_k va fi soluția sistemului $Ry = \|b\|_2 Q^T e_1^{(k+1)}$.

Această metodă de rezolvare a unui sistem algebric de ecuații liniare este denumită GMRES (Generalized Minimum RESidual).

17.4 Calculul valorilor și vectorilor proprii

Fie $A \in M_n(\mathbb{R})$. Vom găsi o aproximație a unei perechi proprii (λ, x) determinând o pereche proprie (λ, z) a matricei H_k , ce apare în descompunerea Arnoldi (17.5)

$$H_k = \lambda z$$

și definind $x = U_k z$.

Atunci din (17.5) rezultă

$$AU_k z = U_k H_k z + h_{k+1,k} u_{k+1} e_k^{(k)T} z,$$

de unde

$$Ax = \lambda x + h_{k+1,k} u_{k+1} z_k.$$

Eroarea aproximării (λ, x) este dată de $\|Ax - \lambda x\|_2 = |h_{k+1,k}| |z_k|$.

17.5 Calculul elementului de cea mai bună aproximație prin elementele unui spațiu Krylov

Ne propunem să determinăm elementul de cea mai bună aproximație a unui element $z \in \mathbb{R}^n$ prin elementele subspațiului $K_k(A, x)$. Presupunem că s-a construit descompunerea Arnoldi (17.5). Dacă $y = U_k c$ este elementul de cea mai bună aproximație a lui x prin elementele mulțimii $K_k(A, x)$ atunci din condiția

$$y - z \in K_k(A, x)^\perp \Leftrightarrow u_j^T (y - z) = 0, \forall j \in \{1, \dots, k\} \Leftrightarrow U_k^T (y - z) = 0$$

deducem $U_k^T (U_k c - z) = 0$, de unde $c = U_k^T z$ și în consecință $y = U_k U_k^T z$.

SCHEIBER ERNEST

SCHEIBER ERNEST

SCHEIBER ERNEST

SCHEIBER ERNEST

Partea III

REZOLVAREA ECUAȚIILOR
NELINIARE

Capitolul 18

Rezolvarea ecuațiilor neliniare

18.1 Preliminarii de analiză funcțională

Inversarea operatorilor liniari

Presupunem cunoscută următoarea teoremă (Neumann)

Teorema 18.1.1 *Dacă X este un spațiu Banach și $A \in (X, X)^*$, un operator liniar și continuu astfel încât $\|A\| < 1$ atunci*

1. *Operatorul $I - A$ este inversabil;*
2. *$(I - A)^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} A^k$, convergența seriei fiind cea a spațiului Banach $(X, X)^*$.*

O consecință utilă este

Teorema 18.1.2 *Fie X un spațiu Banach și operatorul $L \in (X, X)^*$. Au loc afirmațiile*

1. *Operatorul L este inversabil dacă și numai dacă există un operator inversabil $K \in (X, X)^*$ astfel încât $\|I - KL\| < 1$.*
2. *Dacă L este inversabil atunci au loc relațiile:*

$$L^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} (I - KL)^k K, \quad (18.1)$$

$$\|L^{-1}\| \leq \frac{\|K\|}{1 - \|I - KL\|}. \quad (18.2)$$

Demonstrație. Necesitatea rezultă din alegerea $K = L^{-1}$. Pentru $A = I - KL$ din Teorema 18.1.1 rezultă inversabilitatea operatorului $[I - (I - KL)] = KL$ și $(KL)^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} (I - KL)^k$. În consecință

$$(KL)^{-1}K = (KL)^{-1}(K^{-1})^{-1} = (K^{-1}KL)^{-1} = L^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} (I - KL)^k K. \quad \blacksquare$$

Diferențiabilitatea unui operator definit într-un spațiu normat

Fie X, Y spații normate, domeniul $D \subseteq X$ și operatorul $T : D \rightarrow Y$. Reamintim

Definiție 18.1.1 Operatorul T este diferentiabil Fréchet în $x \in D$ dacă există un operator liniar și continuu $L \in (X, Y)^*$ astfel încât

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\|T(x+h) - T(x) - L(h)\|}{\|h\|} = 0. \quad (18.3)$$

Teorema 18.1.3 Dacă operatorul T este diferentiabil Fréchet în x atunci operatorul L este unic.

Operatorul L din Definiția 18.1.1 se notează $L = T'(x) = dT(x)$ și se numește diferențiala Fréchet a lui T în x .

Relația (18.3) se poate rescrie sub forma

$$T(x+h) = T(x) + T'(x)(h) + \|h\|w(x, h), \quad (18.4)$$

unde funcția $w(x, h) \in Y$ are proprietatea $\lim_{h \rightarrow 0} w(x, h) = 0$.

Asemeni funcțiilor reale

Teorema 18.1.4 Dacă operatorul T este diferentiabil Fréchet în x atunci T este continuu în x .

Presupunând operatorul T diferentiabil în fiecare punct x al domeniului D , se introduce operatorul $T' \rightarrow (X, Y)^*$ definit prin $x \mapsto T'(x)$. Dacă acest operator este diferentiabil Fréchet în x atunci diferențiala ei este diferențiala Fréchet de ordinul 2 a lui T în x . Notăm acest operator prin $T''(x) \in (X, (X, Y)^*)^*$. Recursiv, se definește diferentiabilitatea Fréchet de ordin superior. $T^{(k)}(x)$ este un element al mulțimii

$$T^{(k)}(x) \in \underbrace{(X, (X, \dots, (X, Y)^*)^* \dots)^*}_{k \text{ paranteze}}.$$

Definiție 18.1.2 Operatorul T este diferențiabil Gateaux în $x \in D$ după direcția $h \in X$ dacă

$$\exists \lim_{t \rightarrow 0} \frac{T(x+th) - T(x)}{t} = T'(x, h).$$

Definiție 18.1.3 Operatorul T este diferențiabil Gateaux în $x \in D$ dacă este diferențiabil Gateaux în $x \in D$ după orice direcție $h \in X$.

Definiție 18.1.4 Operatorul T este G -derivabil în $x \in D$ dacă

- este diferențiabil Gateaux în x ;
- operatorul $\nabla T(x) : X \rightarrow Y$, definit prin $\nabla T(x)(h) = T'(x, h)$ este un operator liniar și continuu.

Legătura dintre cele două tipuri de diferențiabilitate este dată în următoarele teoreme.

Teorema 18.1.5 Dacă operatorul T este diferențiabil Fréchet în x atunci T este G -derivabil în x și $T'(x) = \nabla T(x)$.

Demonstrație. Scriind th , $h \in X$, $t \in \mathbb{R}^*$ în loc de h , din (18.4) rezultă

$$T(x+th) = T(x) + T'(x)(th) + \|th\|w(x, th),$$

de unde

$$\frac{T(x+th) - T(x)}{t} = T'(x)(h) + \frac{\|th\|}{t}w(x, th).$$

Pentru $t \rightarrow 0$ se obține $\nabla T(x)(h) = T'(x)(h)$, $\forall h \in X$, de unde concluziile teoremei. ■

Reciproc, G derivabilitatea implică diferențiabilitatea Fréchet în condițiile

Teorema 18.1.6 Dacă $T : D \subseteq X \rightarrow Y$ este un operator G derivabil într-o vecinătate a lui $x \in D$ și operatorul $x \mapsto \nabla T(x)$ este continuu în topologia $(X, (X, Y)^*)^*$ atunci operatorul T este diferențiabil Fréchet în x și $T'(x) = \nabla T(x)$.

Demonstrație. Fie $h \in X$ și $u = T(x+h) - T(x) - \nabla T(x)(h)$. Potrivit Teoremei Hahn - Banach există o funcțională liniară și continuă $y^* \in Y^*$ astfel încât $\|y^*\| = 1$ și $y^*(u) = \|u\|$.

Definim funcția $F : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ prin $F(t) = y^*(T(x + th))$. $F(t)$ este derivabilă în $t \in (0, 1)$ și $F'(t) = y^*(\nabla T(x + th)(h))$. Într-adevăr,

$$\begin{aligned} F'(t) &= \lim_{\lambda \rightarrow 0} \frac{F(t + \lambda) - F(t)}{\lambda} = \\ &= \lim_{\lambda \rightarrow 0} y^* \left(\frac{T(x + (t + \lambda)h) - T(x)}{\lambda} \right) = y^*(\nabla T(x + th)(h)). \end{aligned}$$

Potrivit teoremei de medie a lui Lagrange, există $\theta \in (0, 1)$ astfel încât

$$F(1) - F(0) = F'(\theta) \quad \Leftrightarrow \quad y^*(T(x + h) - T(x)) = y^*(\nabla T(x + \theta h)(h)).$$

În sfârșit, utilizând această egalitate și proprietățile normei operatorilor liniari deducem

$$\begin{aligned} \|T(x + h) - T(x) - \nabla T(x)(h)\| &= \|u\| = y^*(u) = \\ &= y^*(T(x + h) - T(x) - \nabla T(x)(h)) = y^*((\nabla T(x + \theta h) - \nabla T(x))(h)) \leq \\ &\leq |y^*((\nabla T(x + \theta h) - \nabla T(x))(h))| \leq \|y^*\| \|(\nabla T(x + \theta h) - \nabla T(x))(h)\| \leq \\ &\leq \|\nabla T(x + \theta h) - \nabla T(x)\| \|h\|. \end{aligned}$$

Rezultă inegalitatea

$$\frac{\|T(x + h) - T(x) - \nabla T(x)(h)\|}{\|h\|} \leq \|\nabla T(x + \theta h) - \nabla T(x)\| \rightarrow 0$$

pentru $h \rightarrow 0$. ■

În acest cadru general, o dezvoltare tayloriană are proprietatea:

Teorema 18.1.7 Dacă $T : D \subseteq X \rightarrow Y$ este un operator de $n \in \mathbb{N}$ ori diferentiabil Fréchet în D atunci pentru orice $x, y \in D$ are loc inegalitatea

$$\|T(y) - T(x) - \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k!} T^{(k)}(x) \underbrace{(y-x) \dots (y-x)}_{k \text{ ori}}\| \leq \frac{1}{n!} \|y-x\|^n \sup_{z \in [x,y]} \|T^{(n)}(z)\|,$$

unde $[x, y] = \{z = tx + (1-t)y : 0 \leq t \leq 1\}$.

Vom prezenta două demonstrații ale acestei teoreme, deosebit de importantă.

Demonstrația 1. În prealabil stabilim Teorema Bourbaki:

Teorema 18.1.8 Fie X un spațiu normat real. Dacă

1. $f : [a, b] \rightarrow X$ este o funcție continuă, derivabilă în (a, b) :

$$\forall x \in (a, b) \quad \exists \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = f'(x);$$

2. $g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ este o funcție continuă, derivabilă în (a, b) ;

3. $\|f'(x)\| \leq g'(x)$, $\forall x \in (a, b)$

atunci $\|f(b) - f(a)\| \leq g(b) - g(a)$.

Demonstrație. Fie $\varepsilon > 0$. Introducem mulțimea

$$U = \{x \in [a, b] : \|f(x) - f(a)\| > g(x) - g(a) + \varepsilon(x - a) + \varepsilon\} \quad (18.5)$$

Dorim să arătăm că $U = \emptyset$.

Presupunem prin absurd că $U \neq \emptyset$. Atunci

(i) U este o mulțime deschisă, deoarece $U = \varphi^{-1}(\mathbb{R}_+)$, unde $\varphi(x) = \|f(x) - f(a)\| - [g(x) - g(a) + \varepsilon(x - a) + \varepsilon]$.

(ii) Există $c = \inf U$.

(iii) $c > a$. Dacă $c = a$, din (18.5) rezultă relația contradictorie $0 \geq \varepsilon > 0$.

(iv) $c \notin U$. Dacă $c \in U$ atunci există o vecinătate a lui c , $(c - \eta_1, c + \eta_2) \subset U$, ceea ce contrazice faptul că $c = \inf U$.

(v) $c < b$. Dacă $c = b$ atunci $U = \{b\}$ și U n-ar mai fi mulțime deschisă.

(vi) Există $\eta > 0$ astfel încât pentru $c < x < c + \eta$

$$\left\| \frac{f(x) - f(c)}{x - c} \right\| - \|f'(c)\| \leq \left\| \frac{f(x) - f(c)}{x - c} - f'(c) \right\| < \frac{\varepsilon}{2} \quad (18.6)$$

și

$$\left\| \frac{g(x) - g(c)}{x - c} - g'(c) \right\| < \frac{\varepsilon}{2} \quad (18.7)$$

Pentru $x \in (c, c + \eta)$, din (18.6) și (18.7) rezultă

$$\left\| \frac{f(x) - f(c)}{x - c} \right\| - \frac{\varepsilon}{2} \leq \|f'(c)\| \leq g'(c) < \frac{g(x) - g(c)}{x - c} + \frac{\varepsilon}{2}$$

sau

$$\|f(x) - f(c)\| < g(x) - g(c) + \varepsilon(x - c). \quad (18.8)$$

Deoarece $c \notin U$,

$$\|f(c) - f(a)\| \leq g(c) - g(a) + \varepsilon(c - a) + \varepsilon. \quad (18.9)$$

Din (18.8) și (18.9), pentru $x \in (c, c + \eta)$ rezultă

$$\|f(x) - f(a)\| \leq \|f(x) - f(c)\| + \|f(c) - f(a)\| < g(x) - g(a) + \varepsilon(x - a) + \varepsilon.$$

Astfel $(c, c + \eta) \cap U = \emptyset$ și în consecință c nu poate fi inf U .

Prin urmare $U = \emptyset$.

Pentru orice $x \in [a, b]$ are loc inegalitatea

$$\|f(x) - f(a)\| \leq g(x) - g(a) + \varepsilon(x - a) + \varepsilon.$$

Dacă $\varepsilon \searrow 0$ atunci $\|f(x) - f(a)\| \leq g(x) - g(a)$. ■

Teorema 18.1.9 Dacă $v : [0, 1] \rightarrow X$ este o funcție de n ori derivabilă astfel încât $\|v^{(n)}(t)\| \leq M, \forall t \in (0, 1)$ atunci

$$\left\| v(1) - v(0) - \frac{1}{1!}v'(0) - \frac{1}{2!}v''(0) - \dots - \frac{1}{(n-1)!}v^{(n-1)}(0) \right\| \leq \frac{M}{n!}.$$

Demonstrație. Introducem funcțiile $f : [0, 1] \rightarrow X$,

$$f(t) = v(t) - v(0) + \frac{1-t}{1!}v'(t) + \frac{(1-t)^2}{2!}v''(t) + \dots + \frac{(1-t)^{n-1}}{(n-1)!}v^{(n-1)}(t),$$

$$g : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}, \quad g(t) = -M \frac{(1-t)^n}{n!}$$

Atunci $f'(t) = \frac{(1-t)^{n-1}}{(n-1)!}v^{(n)}(t)$ și în consecință $\|f'(t)\| \leq g'(t)$. Teorema Bourbaki implică inegalitatea enunțată. ■

Reluăm demonstrația Teoremei 18.1.7. Fie $x, y \in D$, $h = y - x$ și $v(t) = T(x + th)$, $t \in [0, 1]$. Atunci $v^{(k)}(t) = T^{(k)}(x + th) \underbrace{(h) \dots (h)}_{k\text{-ori}}$. Pentru $M =$

$\sup_{z \in [x, y]} \|T^{(n)}(z)\| \|h\|^n$, inegalitatea dorită rezultă din Teorema 18.1.9. ■

Demonstrația 2. Fie $x, y \in D$. Notând

$$u = T(y) - T(x) - \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k!} T^{(k)}(x) \underbrace{(y-x) \dots (y-x)}_{k \text{ ori}},$$

potrivit Teoremei Hahn - Banach există o funcțională liniară și continuă $y^* \in Y^*$ astfel încât $\|y^*\| = 1$ și $y^*(u) = \|u\|$.

Definim $F : [0, 1] \rightarrow R$ prin $F(t) = y^*(T(x + t(y-x)))$. Atunci

$$F^{(k)}(t) = y^*(T^{(k)}(x + t(y-x)) \underbrace{(y-x) \dots (y-x)}_{k \text{ ori}}), \quad k \in \{1, \dots, n\}. \quad (18.10)$$

(18.10) se demonstrează prin inducție matematică.

Există $\theta \in (0, 1)$ astfel încât

$$\begin{aligned} F(1) - F(0) &= \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k!} F^{(k)}(0) = \frac{1}{n!} F^{(n)}(\theta) \Leftrightarrow \\ y^*(T(y) - T(x) - \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k!} T^{(k)}(x) \underbrace{(y-x) \dots (y-x)}_{k \text{ ori}}) &= \\ = \frac{1}{n!} y^*(T^{(n)}(x + \theta(y-x)) \underbrace{(y-x) \dots (y-x)}_{n \text{ ori}}). \end{aligned}$$

Utilizând egalitatea anterioară și proprietățile normei operatorilor liniari obținem

$$\begin{aligned} \|T(y) - T(x) - \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k!} T^{(k)}(x) \underbrace{(y-x) \dots (y-x)}_{k \text{ ori}}\| &= \|u\| = \\ = y^*(u) &= y^*(T(y) - T(x) - \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k!} T^{(k)}(x) \underbrace{(y-x) \dots (y-x)}_{k \text{ ori}}) = \\ = \frac{1}{n!} y^*(T^{(n)}(x + \theta(y-x)) \underbrace{(y-x) \dots (y-x)}_{n \text{ ori}}) &\leq \\ \leq \frac{1}{n!} |y^*(T^{(n)}(x + \theta(y-x)) \underbrace{(y-x) \dots (y-x)}_{n \text{ ori}})| &\leq \\ \leq \frac{1}{n!} \|y^*\| \|T^{(n)}(x + \theta(y-x)) \underbrace{(y-x) \dots (y-x)}_{n \text{ ori}}\| &\leq \\ \leq \frac{1}{n!} \|T^{(n)}(x + \theta(y-x))\| \|y-x\|^n &\leq \frac{1}{n!} \|y-x\|^n \sup_{z \in [x,y]} \|T^{(n)}(z)\|. \quad \blacksquare \end{aligned}$$

18.2 Metoda liniarizării (Newton – Kantorovici)

Fie X un spațiu Banach și $T : X \rightarrow X$ un operator diferențiabil Fréchet. Ne propunem să rezolvăm ecuația

$$T(x) = 0. \quad (18.11)$$

Să presupunem că ecuația (18.11) are o soluție x^* . Dacă $x \in X$ este o aproximație a lui x^* atunci din diferențiabilitatea operatorului T rezultă

$$0 = T(x^*) = T(x) + T'(x)(x^* - x) + \|x^* - x\|w(x, x^* - x). \quad (18.12)$$

Liniarizând, adică neglijând ultimul termen, (18.12) se scrie

$$0 \approx T(x) + T'(x)(x^* - x).$$

Vom nota cu y soluția ecuației

$$0 = T(x) + T'(x)(y - x),$$

și cu ideea că y este o aproximație mai bună decât x , construim șirul de aproximații

$$0 = T(x^k) + T'(x^k)(x^{k+1} - x^k), \quad (18.13)$$

sau, în cazul inversabilității operatorului $T'(x^k)$

$$x^{k+1} = x^k - [T'(x^k)]^{-1}T(x^k). \quad (18.14)$$

Metoda de rezolvare a ecuației (18.11) corespunzătoare formulei (18.14) este cunoscută și sub numele de metoda Newton - Kantorovici.

Teorema următoare fixează condiții suficiente pentru existența unei soluții izolate x^* a ecuației (18.11), dând regiunea în care soluția este unică și eroarea aproximației x^k .

Teorema 18.2.1 *Fie X un spațiu Banach, $T : X \rightarrow X$ un operator diferențiabil Fréchet și $x^0 \in X$. Presupunem că există numerele pozitive B_0, K, η_0 astfel încât au loc condițiile*

- $\exists [T'(x^0)]^{-1}$ și $\|[T'(x^0)]^{-1}\| \leq B_0$;
- $x^1 = x^0 - [T'(x^0)]^{-1}T(x^0)$ și $\|x^1 - x^0\| \leq \eta_0$;
- $\exists T''(x) \forall x \in \overline{B}(x^0, r)$ și $\|T''(x)\| \leq K, r_0 < r$.

Dacă $h_0 = \eta_0 K B_0 \leq \frac{1}{2}$ atunci șirul $(x^k)_{k \in \mathbb{N}}$ construit prin formula de recurență (18.14) converge către o soluție x^* a ecuației (18.11).

Această soluție este unică în bila $\overline{B}(x^0, r_0)$, unde $r_0 = \frac{1 - \sqrt{1 - 2h_0}}{h_0} \eta_0$.

Eroarea aproximației x^k este dată de inegalitatea

$$\|x^k - x^*\| \leq \frac{1}{2^{k-1}} (2h_0)^{2^{k-1}} \eta_0. \quad (18.15)$$

Demonstrație. 1. Arătăm la început că pentru orice $k \in \mathbb{N}$ există x^{k+1} , definit prin formula de recurență (18.14). Această problemă se ridică deoarece trebuie inversat operatorul $T'(x^k)$. Justificarea o facem doar pentru $k = 1$, raționamentul făcându-se în continuare analog, pe baza inducției matematice.

Existența inversei se bazează pe Teorema 18.1.2. Cu notațiile acestei teoreme, alegem

$$L = T'(x^1) \quad K = [T'(x^0)]^{-1}$$

și trebuie verificată condiția $\|I - KL\| < 1$. În cazul de față

$$\begin{aligned} \|I - [T'(x^0)]^{-1}T'(x^1)\| &= \|[T'(x^0)]^{-1}(T'(x^0) - T'(x^1))\| \leq \\ &\leq \|[T'(x^0)]^{-1}\| \|(T'(x^0) - T'(x^1))\|. \end{aligned}$$

Aplicând Teorema 18.1.7, inegalitatea anterioară devine

$$\|I - [T'(x^0)]^{-1}T'(x^1)\| \leq B_0 K \|x^1 - x^0\| \leq \eta_0 K B_0 = h_0 \leq \frac{1}{2} < 1. \quad (18.16)$$

Prin urmare, operatorul $T'(x^1)$ este inversabil și potrivit Teoremei 18.1.2, au loc relațiile

$$[T'(x^1)]^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} (I - [T'(x^0)]^{-1}T'(x^1))^k [T'(x^0)]^{-1}, \quad (18.17)$$

$$\|[T'(x^1)]^{-1}\| \leq \frac{\|[T'(x^0)]^{-1}\|}{1 - \|I - [T'(x^0)]^{-1}T'(x^1)\|} \leq \frac{B_0}{1 - h_0} \stackrel{\text{def}}{=} B_1. \quad (18.18)$$

2. Arătăm că în x^1 au loc condiții asemănătoare celor presupuse a avea loc în x^0 .

Deoarece $x^2 = x^1 - [T'(x^1)]^{-1}T(x^1)$,

$$x^2 - x^1 = -[T'(x^1)]^{-1}T(x^1) = -\sum_{k=0}^{\infty} (I - [T'(x^0)]^{-1}T'(x^1))^k [T'(x^0)]^{-1}T(x^1).$$

Prin urmare

$$\|x^2 - x^1\| \leq \sum_{k=0}^{\infty} \|I - [T'(x^0)]^{-1}T'(x^1)\|^k \|[T'(x^0)]^{-1}T(x^1)\|.$$

Folosind (18.16) obținem

$$\|x^2 - x^1\| \leq \sum_{k=0}^{\infty} h_0^k \|[T'(x^0)]^{-1}T(x^1)\| = \frac{1}{1 - h_0} \|[T'(x^0)]^{-1}T(x^1)\|. \quad (18.19)$$

Fie operatorul $F_0 : X \rightarrow X$ definit prin $F_0(x) = x - [T'(x^0)]^{-1}T(x)$. Atunci

$$\begin{aligned} F_0(x^0) &= x^1 \\ F_0'(x) &= I - [T'(x^0)]^{-1}T'(x) & F_0'(x^0) &= 0 \\ F_0''(x) &= -[T'(x^0)]^{-1}T''(x) & \|F_0''(x)\| &\leq B_0K. \end{aligned}$$

Din egalitatea $F_0(x^1) = x^1 - [T'(x^0)]^{-1}T(x^1)$ se deduce

$$[T'(x^0)]^{-1}T(x^1) = x^1 - F_0(x^1) = -(F(x^1) - F(x^0) - F_0'(x^0)(x^1 - x^0)).$$

Aplicând din nou Teorema 18.1.7 se obține

$$\begin{aligned} \|[T'(x^0)]^{-1}T(x^1)\| &= \|F(x^1) - F(x^0) - F_0'(x^0)(x^1 - x^0)\| \leq \\ &\leq \frac{1}{2} \sup_{x \in \overline{B}(x^0, r)} \|F_0''(x)\| \|x^1 - x^0\| \leq \frac{1}{2} \eta_0^2 K B_0 = \frac{1}{2} \eta_0 h_0. \end{aligned}$$

Revenind în (18.19) avem

$$\|x^2 - x^1\| \leq \frac{1}{1 - h_0} \|[T'(x^0)]^{-1}T(x^1)\| \leq \frac{\eta_0 h_0}{2(1 - h_0)} \stackrel{\text{def}}{=} \eta_1. \quad (18.20)$$

Fie $h_1 \stackrel{\text{def}}{=} \eta_1 K B_1$. Din (18.18), (18.20) se obține

$$h_1 = \frac{h_0^2}{2(1 - h_0)^2} \leq \frac{1}{2}. \quad (18.21)$$

Fie $r_1 \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1 - \sqrt{1 - 2h_1}}{h_1} \eta_1$. Pe baza formulelor de recurență pentru η_1 și h_0 se obține egalitatea $r_1 = r_0 - \eta_0$, ce implică $\overline{B}(x^1, r_1) \subseteq \overline{B}(x^0, r_0)$. Într-adevăr, dacă $x \in \overline{B}(x^1, r_1)$ atunci

$$\|x - x^0\| \leq \|x - x^1\| + \|x^1 - x^0\| \leq r_1 + \eta_0 = r_0.$$

3. În felul acesta, existența șirului $(x^k)_{k \in \mathbb{N}}$ este dovedită, mai mult pentru orice $k \in \mathbb{N}$ au loc afirmațiile

- $\exists [T'(x^k)]^{-1}$ și $\|[T'(x^k)]^{-1}\| \leq B_k = \frac{B_{k-1}}{1-h_{k-1}}$;
- $x^{k+1} = x^k - [T'(x^k)]^{-1}T(x^k)$ și $\|x^{k+1} - x^k\| \leq \eta_k = \frac{\eta_{k-1}h_{k-1}}{2(1-h_{k-1})}$;
- $h_k = \eta_k K B_k = \frac{h_{k-1}^2}{2(1-h_{k-1})^2} \leq \frac{1}{2}$;
- $r_k = \frac{1-\sqrt{1-2h_{k-1}}}{h_{k-1}}\eta_{k-1}$ și $\overline{B}(x^k, r_k) \subseteq \overline{B}(x^{k-1}, r_{k-1})$.

4. Au loc inegalitățile

$$h_k \leq 2h_{k-1}^2 \quad (18.22)$$

$$\eta_k \leq \eta_{k-1}h_{k-1} \quad (18.23)$$

$$r_k \leq 2\eta_k \quad (18.24)$$

a caror demonstrație revine la reducerea la ipoteza teoremei $h_k \leq \frac{1}{2}$.

Aplicată succesiv, inegalitatea (18.22) implică

$$\begin{aligned} h_k &\leq 2h_{k-1}^2 \leq 2(2h_{k-2}^2)^2 = 2^{1+2}h_{k-2}^{2^2} \leq \dots \\ &\leq 2^{1+2+\dots+2^{k-1}}h_0^{2^k} = \frac{1}{2}(2h_0)^{2^k}. \end{aligned} \quad (18.25)$$

Din (18.23) deducem succesiv

$$\eta_k \leq \eta_{k-1}h_{k-1} \leq \eta_{k-2}h_{k-2}h_{k-1} \leq \dots \leq \eta_0 h_0 h_1 \dots h_{k-1}$$

și utilizând (18.25), se găsește

$$\eta_k \leq \eta_0 \frac{1}{2}(2h_0) \frac{1}{2}(2h_0)^2 \dots \frac{1}{2}(2h_0)^{2^{k-1}} = \frac{1}{2^k}(2h_0)^{1+2+\dots+2^{k-1}} \eta_0 = \frac{1}{2^k}(2h_0)^{2^k-1} \eta_0.$$

Din $x^{k+p} \in \overline{B}(x^{k+p}, r_{k+p}) \subseteq \overline{B}(x^k, r_k)$ rezultă

$$\|x^{k+p} - x^k\| \leq r_k \leq \frac{1}{2^{k-1}}(2h_0)^{2^k-1} \eta_0, \quad \forall k \in \mathbb{N}, \quad (18.26)$$

adică $(x^k)_{k \in \mathbb{N}}$ este un șir fundamental, deci convergent.

5. Fie $x^* = \lim_{k \rightarrow \infty} x^k$. Trecând la limită în formula de recurență (18.14) scrisă sub forma $T'(x^k)(x^{k+1} - x^k) = -T(x^k)$ se obține $T(x^*) = 0$.

Pentru $p \rightarrow \infty$ din (18.26) rezultă evaluarea erorii (18.15).

6. Pentru a demonstra unicitatea soluției ecuației (18.11) în bila $\overline{B}(x^0, r_0)$ presupunem prin absurd că există în plus $y^* \in \overline{B}(x^0, r_0)$ astfel încât $T(y^*) = 0$.

Fie operatori $F_k : X \rightarrow X$ definiți prin $F_k(x) = x - [T'(x^k)]^{-1}T(x)$. Atunci

$$\begin{aligned} F_k(x^k) &= x^{k+1} \\ F'_k(x) &= I - [T'(x^k)]^{-1}T'(x) & F'_k(x^k) &= 0 \\ F''_k(x) &= -[T'(x^k)]^{-1}T''(x) & \|F''_k(x)\| &\leq B_k K. \end{aligned}$$

Prin inducție matematică aratăm că

$$x^k \in \overline{B}(y^*, r_k) \Leftrightarrow \|y^* - x^k\| \leq r_k. \quad (18.27)$$

Etapa de verificare, $k = 0$.

$$y^* \in \overline{B}(x^0, r_0) \Leftrightarrow \|y^* - x^0\| \leq r_0 \Leftrightarrow x^0 \in \overline{B}(y^*, r_0).$$

Etapa de demonstrație. Presupunând că

$$x^k \in \overline{B}(y^*, r_k) \Leftrightarrow \|y^* - x^k\| \leq r_k$$

deducem succesiv

$$\begin{aligned} \|y^* - x^{k+1}\| &= \|F_k(y^*) - F_k(x^k) - F'_k(x^k)(y^* - x^k)\| \leq \\ &\leq \frac{1}{2} \sup_{z \in [x^k, y^*]} \|F''_k(z)\| \|y^* - x^k\|^2 \leq \frac{1}{2} B_k K r_k^2 = r_{k+1}, \end{aligned}$$

adică $x^{k+1} \in \overline{B}(y^*, r_{k+1})$.

Pentru $k \rightarrow \infty$, din (18.27) rezultă $x^* = y^*$. ■

18.3 Metoda liniarizării modificată

În locul formulei de recurență (18.14) se consideră formula

$$\begin{aligned} \tilde{x} &= x^0 \\ \tilde{x}^{k+1} &= \tilde{x}^k - [T'(x^0)]^{-1}T(\tilde{x}^k) \quad k \in \mathbb{N}. \end{aligned} \quad (18.28)$$

Astfel se elimină necesitatea inversării, în cadrul iterațiilor iterații $k > 0$, a operatorului $T'(x^k)$. Acest fapt are ca efect micșorarea vitezei de convergență.

Metoda corespunzătoare formulei (18.28) este numită metoda liniarizării (Newton - Kantorovici) modificată.

Se observă că $x^1 = \tilde{x}^1$. Convergența procedurii este dată de teorema

Teorema 18.3.1 Fie X un spațiu Banach, $T : X \rightarrow X$ un operator diferențiabil Fréchet și $x^0 \in X$. Presupunem că există numerele pozitive B_0, K, η_0 astfel încât au loc condițiile

- $\exists [T'(x^0)]^{-1}$ și $\|[T'(x^0)]^{-1}\| \leq B_0$;
- $x^1 = x^0 - [T'(x^0)]^{-1}T(x^0)$ și $\|x^1 - x^0\| \leq \eta_0$;
- $\exists T''(x) \forall x \in \overline{B}(x^0, r)$ și $\|T''(x)\| \leq K, \eta_0 < r$.

Dacă $h_0 = \eta_0 K B_0 < \frac{1}{2}$ atunci șirul $(\tilde{x}^k)_{k \in \mathbb{N}}$ construit prin formula de recurență (18.28) converge către soluția x^* a ecuației (18.11).

Eroarea aproximației \tilde{x}^k este dată de inegalitatea

$$\|\tilde{x}^k - x^*\| \leq 2\eta_0 h_0 (1 - \sqrt{1 - 2h_0})^{k-1}. \quad (18.29)$$

Demonstrație. Folosim din nou de operatorul $F_0 : X \rightarrow X$ definit prin $F_0(x) = x - [T'(x^0)]^{-1}T(x)$ și cu proprietățile

$$\begin{aligned} F_0(\tilde{x}^k) &= \tilde{x}^{k+1} & \forall k \in \mathbb{N} \\ F_0(x^*) &= x^* \\ F_0'(x) &= I - [T'(x^0)]^{-1}T'(x) & F_0'(x^0) &= 0 \\ F_0''(x) &= -[T'(x^0)]^{-1}T''(x) & \|F_0''(x)\| &\leq B_0 K. \end{aligned}$$

Dacă $M = \overline{B}(x^0, r_0) \cap \overline{B}(x^*, \|x^1 - x^*\|)$ atunci $F(M) \subseteq M$.

Într-adevăr, dacă $x \in M$ atunci

$$\begin{aligned} & \bullet \\ & \|F_0(x) - x^0\| \leq \|F_0(x) - x^1\| + \|x^1 - x^0\| = \\ & = \|F_0(x) - F_0(x^0) - F_0'(x^0)(x - x^0)\| + \|x^1 - x^0\| \leq \\ & \leq \frac{1}{2} \|x - x^0\|^2 \sup_{z \in [x^0, x]} \|F_0''(z)\| + \eta_0 \leq \frac{1}{2} r_0^2 B_0 K + \eta_0 = r_0, \end{aligned}$$

adică $F_0(x) \in \overline{B}(x^0, r_0)$.

$$\bullet \quad \|F_0(x) - x^*\| = \|F_0(x) - F_0(x^*)\| \leq \|x - x^*\| \sup_{z \in [x, x^*]} \|F_0'(z)\|.$$

Deoarece $z = \theta x + (1 - \theta)x^*, \theta \in [0, 1]$, utilizând evaluarea

$$\|F_0'(z)\| = \|F_0'(z) - F_0'(x^0)\| \leq \|z - x^0\| \sup_{y \in [x^0, z]} \|F_0''(y)\| \leq$$

$$\begin{aligned}
&\leq B_0K\|\theta x + (1 - \theta)x^* - x^0\| = B_0K\|\theta(x - x^0) + (1 - \theta)(x^* - x^0)\| \leq \\
&\leq B_0K(\theta\|x - x^0\| + (1 - \theta)\|x^* - x^0\|) \leq \\
&\leq B_0K \max\{\|x - x^0\|, \|x^* - x^0\|\} \leq B_0Kr_0,
\end{aligned}$$

inegalitatea anterioară devine

$$\begin{aligned}
\|F_0(x) - x^*\| &\leq B_0Kr_0\|x - x^*\| = (1 - \sqrt{1 - 2h_0})\|x - x^*\| \leq \\
&\leq (1 - \sqrt{1 - 2h_0})\|x^1 - x^*\|,
\end{aligned}$$

adică $F_0(x) \in \overline{B}(x^*, \|x^1 - x^*\|)$.

Reținem inegalitatea

$$\|F_0(x) - x^*\| \leq (1 - \sqrt{1 - 2h_0})\|x - x^*\|, \quad \forall x \in M. \quad (18.30)$$

Aplicând succesiv (18.30), rezultă

$$\|\tilde{x}^k - x^*\| = \|F_0(\tilde{x}^{k-1}) - F_0(x^*)\| \leq \quad (18.31)$$

$$\leq (1 - \sqrt{1 - 2h_0})\|\tilde{x}^{k-1} - x^*\| \leq \dots \leq (1 - \sqrt{1 - 2h_0})^{k-1}\|\tilde{x}^1 - x^*\|.$$

Din (18.15), deducem $\|\tilde{x}^1 - x^*\| = \|x^1 - x^*\| \leq 2h_0\eta_0$, cu care (18.31) devine (18.29). Din această inegalitate rezultă convergența șirului $(\tilde{x}^k)_{k \in \mathbb{N}}$ către x^* . ■

18.4 Rezolvarea numerică a sistemelor algebrice de ecuații neliniare

Fie D un domeniu convex din R^n și $T_1, \dots, T_n : D \rightarrow R$ n funcții având derivate parțiale de ordinul întâi și doi continue. Considerăm sistemul algebric de n ecuații neliniare cu necunoscutele x_1, \dots, x_n :

$$\begin{cases} T_1(x_1, \dots, x_n) = 0 \\ \dots \\ T_n(x_1, \dots, x_n) = 0 \end{cases} \quad (18.32)$$

și dorim să determinăm o soluție a sistemului, adică un element $x^* = (x_1^*, \dots, x_n^*) \in D$ astfel încât $T_i(x^*) = T_i(x_1^*, \dots, x_n^*) = 0$, $i = 1, \dots, n$. În cazul $n = 1$ se folosește termenul de ecuație în locul celui de sistem.

Definind operatorul $T : D \rightarrow R^n$ prin

$$T(x) = \begin{pmatrix} T_1(x) \\ \dots \\ T_n(x) \end{pmatrix}, \quad x = (x_1, \dots, x_n),$$

sistemul (18.32) se rescrie sub forma (18.11).

Pentru rezolvarea sistemului (18.32) se aplică metoda liniarizării (Newton – Kantorovici) sau metoda liniarizării modificată, tratate anterior.

Exemplul 18.4.1 *Să se verifice condițiile Teoremei 18.2.1 în cazul sistemului algebric de ecuații neliniare*

$$\begin{cases} 10x_1 + x_1^2 - 2x_2x_3 - 0.1 = 0 \\ 10x_2 - x_2^2 + 3x_1x_3 + 0.2 = 0 \\ 10x_3 + x_3^2 + 2x_1x_2 - 0.3 = 0 \end{cases}$$

$$\text{și } x^0 = \begin{pmatrix} x_1^0 \\ x_1^0 \\ x_1^0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Operatorul T este definit prin $T = (T_1, T_2, T_3)$, unde

$$\begin{aligned} T_1(x) &= T_1(x_1, x_2, x_3) = 10x_1 + x_1^2 - 2x_2x_3 - 0.1 \\ T_2(x) &= T_2(x_1, x_2, x_3) = 10x_2 - x_2^2 + 3x_1x_3 + 0.2 \\ T_3(x) &= T_3(x_1, x_2, x_3) = 10x_3 + x_3^2 + 2x_1x_2 - 0.3 \end{aligned}$$

iar

$$T'(x) = \begin{pmatrix} \frac{\partial T_1}{\partial x_1}(x) & \frac{\partial T_1}{\partial x_2}(x) & \frac{\partial T_1}{\partial x_3}(x) \\ \frac{\partial T_2}{\partial x_1}(x) & \frac{\partial T_2}{\partial x_2}(x) & \frac{\partial T_2}{\partial x_3}(x) \\ \frac{\partial T_3}{\partial x_1}(x) & \frac{\partial T_3}{\partial x_2}(x) & \frac{\partial T_3}{\partial x_3}(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x_1 + 10 & -2x_3 & -2x_2 \\ 3x_3 & -2x_2 + 10 & 3x_1 \\ 2x_2 & 2x_1 & 2x_3 + 10 \end{pmatrix}.$$

În cele ce urmează se va utiliza norma $\|\cdot\|_\infty$.

Atunci $[T'(x^0)]^{-1} = (10I)^{-1} = 0.1I$, deci

$$\|[T'(x^0)]^{-1}\| = \|0.1I\| = 0.1 \stackrel{\text{def}}{=} B_0.$$

Formulele de recurență (18.14) corespunzătoare metodei liniarizării sunt

$$\begin{pmatrix} x_1^{k+1} \\ x_1^{k+1} \\ x_1^{k+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1^k \\ x_1^k \\ x_1^k \end{pmatrix} -$$

$$- \begin{pmatrix} 2x_1^k + 10 & -2x_3^k & -2x_2^k \\ 3x_3^k & -2x_2^k + 10 & 3x_1^k \\ 2x_2^k & 2x_1^k & 2x_3^k + 10 \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 10x_1^k + (x_1^k)^2 - 2x_2^k x_3^k - 0.1 \\ 10x_2^k - (x_2^k)^2 + 3x_1^k x_3^k + 0.2 \\ 10x_3^k + (x_3^k)^2 + 2x_1^k x_2^k - 0.3 \end{pmatrix}.$$

Pentru $k = 0$, găsim $x^1 = \begin{pmatrix} x_1^1 \\ x_1^1 \\ x_1^1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.01 \\ -0.02 \\ 0.03 \end{pmatrix}$, astfel încât $\|x^1 - x^0\| =$

$0.3 \stackrel{\text{def}}{=} \eta_0$.

Diferențiala de ordinul doi $T''(x) \in (\mathbb{R}^3, (\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^3)^*)^*$ se poate reprezenta prin

$$T''(x) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 T_1}{\partial x_1^2}(x) & \frac{\partial^2 T_1}{\partial x_2 \partial x_1}(x) & \frac{\partial^2 T_1}{\partial x_3 \partial x_1}(x) & \frac{\partial^2 T_1}{\partial x_1 \partial x_2}(x) & \frac{\partial^2 T_1}{\partial x_2^2}(x) & \frac{\partial^2 T_1}{\partial x_3 \partial x_2}(x) & \frac{\partial^2 T_1}{\partial x_1 \partial x_3}(x) & \frac{\partial^2 T_1}{\partial x_2 \partial x_3}(x) & \frac{\partial^2 T_1}{\partial x_3^2}(x) \\ \frac{\partial^2 T_2}{\partial x_1^2}(x) & \frac{\partial^2 T_2}{\partial x_2 \partial x_1}(x) & \frac{\partial^2 T_2}{\partial x_3 \partial x_1}(x) & \frac{\partial^2 T_2}{\partial x_1 \partial x_2}(x) & \frac{\partial^2 T_2}{\partial x_2^2}(x) & \frac{\partial^2 T_2}{\partial x_3 \partial x_2}(x) & \frac{\partial^2 T_2}{\partial x_1 \partial x_3}(x) & \frac{\partial^2 T_2}{\partial x_2 \partial x_3}(x) & \frac{\partial^2 T_2}{\partial x_3^2}(x) \\ \frac{\partial^2 T_3}{\partial x_1^2}(x) & \frac{\partial^2 T_3}{\partial x_2 \partial x_1}(x) & \frac{\partial^2 T_3}{\partial x_3 \partial x_1}(x) & \frac{\partial^2 T_3}{\partial x_1 \partial x_2}(x) & \frac{\partial^2 T_3}{\partial x_2^2}(x) & \frac{\partial^2 T_3}{\partial x_3 \partial x_2}(x) & \frac{\partial^2 T_3}{\partial x_1 \partial x_3}(x) & \frac{\partial^2 T_3}{\partial x_2 \partial x_3}(x) & \frac{\partial^2 T_3}{\partial x_3^2}(x) \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & -2 & -2 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 2 & 0 & -2 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix},$$

interpretat în sensul

$$T''(x)(h) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 T_1}{\partial x_1^2}(x)h_1 + \frac{\partial^2 T_1}{\partial x_2 \partial x_1}(x)h_2 + \frac{\partial^2 T_1}{\partial x_3 \partial x_1}(x)h_3 & \frac{\partial^2 T_1}{\partial x_1 \partial x_2}(x)h_1 + \frac{\partial^2 T_1}{\partial x_2^2}(x)h_2 + \frac{\partial^2 T_1}{\partial x_3 \partial x_2}(x)h_3 & \frac{\partial^2 T_1}{\partial x_1 \partial x_3}(x)h_1 + \frac{\partial^2 T_1}{\partial x_2 \partial x_3}(x)h_2 + \frac{\partial^2 T_1}{\partial x_3^2}(x)h_3 \\ \frac{\partial^2 T_2}{\partial x_1^2}(x)h_1 + \frac{\partial^2 T_2}{\partial x_2 \partial x_1}(x)h_2 + \frac{\partial^2 T_2}{\partial x_3 \partial x_1}(x)h_3 & \frac{\partial^2 T_2}{\partial x_1 \partial x_2}(x)h_1 + \frac{\partial^2 T_2}{\partial x_2^2}(x)h_2 + \frac{\partial^2 T_2}{\partial x_3 \partial x_2}(x)h_3 & \frac{\partial^2 T_2}{\partial x_1 \partial x_3}(x)h_1 + \frac{\partial^2 T_2}{\partial x_2 \partial x_3}(x)h_2 + \frac{\partial^2 T_2}{\partial x_3^2}(x)h_3 \\ \frac{\partial^2 T_3}{\partial x_1^2}(x)h_1 + \frac{\partial^2 T_3}{\partial x_2 \partial x_1}(x)h_2 + \frac{\partial^2 T_3}{\partial x_3 \partial x_1}(x)h_3 & \frac{\partial^2 T_3}{\partial x_1 \partial x_2}(x)h_1 + \frac{\partial^2 T_3}{\partial x_2^2}(x)h_2 + \frac{\partial^2 T_3}{\partial x_3 \partial x_2}(x)h_3 & \frac{\partial^2 T_3}{\partial x_1 \partial x_3}(x)h_1 + \frac{\partial^2 T_3}{\partial x_2 \partial x_3}(x)h_2 + \frac{\partial^2 T_3}{\partial x_3^2}(x)h_3 \end{pmatrix}.$$

Atunci

$$\|T''(x)\| = \sup_{\|h\| \leq 1} \|T''(x)(h)\| = \sup_{\|h\| \leq 1} \left\| \begin{pmatrix} 2h_1 & -2h_3 & -2h_2 \\ 3h_3 & -2h_2 & 3h_1 \\ 2h_2 & 2h_1 & 2h_3 \end{pmatrix} \right\| =$$

$$= \sup_{\|h\| \leq 1} \max\{2|h_1| + 2|h_3| + 2|h_2|, 3|h_3| + 2|h_2| + 3|h_1|, 2|h_2| + 2|h_1| + 2|h_3|\} \leq 8 \stackrel{\text{def}}{=} K.$$

Prin urmare $h_0 = \eta_0 K B_0 = 0.024 < \frac{1}{2}$.

18.5 Rezolvarea ecuațiilor algebrice

Fie $T : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ o funcție derivabilă.

Metoda tangentei. În cazul $n = 1$, metoda liniarizării aplicată rezolvării ecuației algebrice $T(x) = 0$ conduce la formarea șirului

$$x^{k+1} = x^k - \frac{T(x^k)}{T'(x^k)} \quad k \in \mathbb{N}. \quad (18.33)$$

Relațiile (18.33) au următoarea interpretare geometrică care justifică numele metodei: x^{k+1} reprezintă intersecția tangentei în x^k la graficul funcției $T(x)$ cu axa Ox .

În cazul ecuației polinomiale

$$T(z) = a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \dots + a_{n-1} z + a_n = 0$$

metoda tangentei considerată în corpul numerelor complexe \mathbb{C} permite determinarea atât a rădăcinilor reale cât și a celor complexe.

Metoda funcției inverse. Presupunem că funcția T satisface următoarele ipoteze:

- Funcția T este inversabilă în intervalul $I=(a,b)$ și $F = T^{-1}$;
- Ecuația $T(x) = 0$ are o soluție x^* în intervalul I ;
- Funcțiile T și F au derivate continue până la ordinul $m + 1$.

Din aceste ipoteze rezultă că soluția x^* este unică și

$$x^* = F(0).$$

Deoarece funcția F nu este cunoscută, o vom aproxima cu o funcție φ

$$F(y) = \varphi(y) + R(y).$$

Atunci $x^* \approx \varphi(0)$.

Asupra funcției φ se impun cerințele ca să aproximeze cât mai bine funcția F și să poată fi ușor calculabilă. Astfel vom avea

- Metoda funcției inverse cu polinomul lui Taylor (sau metoda lui Cebîșev) în care φ este un polinom Taylor atașat funcției F . Acest caz generalizează metoda tangentei.

- Metoda funcției inverse cu polinomul lui Lagrange în care φ este un polinom de interpolare Lagrange.

Metoda funcției inverse cu polinomul lui Taylor. În dezvoltarea tayloriană a funcției F în jurul punctului y_0

$$F(y) = F(y_0) + \sum_{i=1}^m \frac{F^{(i)}(y_0)}{i!} (y - y_0)^i + \frac{F^{(m+1)}(\xi)}{(m+1)!} (y - y_0)^{m+1}$$

alegând $y = 0$ și $y_0 = T(x)$ cu $x \in I$, obținem

$$x^* = F(0) = x + \sum_{i=1}^m (-1)^i \frac{F^{(i)}(T(x))}{i!} T^i(x) + (-1)^{m+1} \frac{F^{(m+1)}(\xi)}{(m+1)!} T^{m+1}(x).$$

Rezultă că expresia $x + \sum_{i=1}^m (-1)^i \frac{F^{(i)}(T(x))}{i!} T^i(x)$ furnizează o aproximație a soluției x^* . Pe baza acestei observații construim șirul de aproximații succesive

$$x^{k+1} = x^k + \sum_{i=1}^m (-1)^i \frac{F^{(i)}(T(x^k))}{i!} T^i(x^k) \quad k \in N, \quad x^0 \in I.$$

Derivând succesiv identitatea $F(T(x)) = x$ obținem

$$\begin{aligned} F'(T(x))T'(x) &= 1 \\ F''(T(x))[T'(x)]^2 + F'(T(x))T''(x) &= 0 \\ F^{(3)}(T(x))[T'(x)]^3 + 3F''(T(x))T'(x)T''(x) + F'(T(x))T^{(3)}(x) &= 0, \end{aligned}$$

de unde

$$\begin{aligned} F'(T(x)) &= \frac{1}{T'(x)}, & F''(T(x)) &= -\frac{T''(x)}{[T'(x)]^3}, \\ F^{(3)}(T(x)) &= \frac{3[T''(x)]^2}{[T'(x)]^5} - \frac{T^{(3)}(x)}{[T'(x)]^4}, & \text{etc.} \end{aligned}$$

Pentru $m = 1$ găsim $x^{k+1} = x^k - \frac{T(x^k)}{T'(x^k)}$, adică se regăsește șirul construit prin metoda tangentei, iar pentru $m = 2$ găsim

$$x^{k+1} = x^k - \frac{T(x^k)}{T'(x^k)} - \frac{T''(x^k)[T(x^k)]^2}{2[T'(x^k)]^3}.$$

În continuare ne propunem să studiem convergența șirului $(x^k)_{k \in N}$, construit prin metoda funcției inverse. Vom stabili în prealabil câteva rezultate preliminare.

Fie $(X, \|\cdot\|)$ un spațiu normat. Un operator $\varphi : X \rightarrow X$ se numește contracție dacă există o constantă $a \in (0, 1)$ astfel încât $\|\varphi(x) - \varphi(y)\| \leq a\|x - y\|$, $\forall a, y \in X$. Dacă $\varphi(x) = x$ atunci x se numește element fix al operatorului φ .

Teorema 18.5.1 (de punct fix a lui Banach) *Dacă X este un spațiu Banach (spațiu normat și complet) și $\varphi : X \rightarrow X$ este o contracție atunci φ are un singur punct fix.*

Demonstrație. Fie $x^0 \in X$ și considerăm șirul $(x^n)_{n \in \mathbb{N}}$ definit prin formula de recurență $x^{n+1} = \varphi(x^n)$, $n \in \mathbb{N}$. Utilizând proprietatea de contracție a operatorului φ obținem

$$\begin{aligned} \|x^{n+1} - x^n\| &= \|\varphi(x^n) - \varphi(x^{n-1})\| \leq a\|x^n - x^{n-1}\| = \\ &= a\|\varphi(x^{n-1}) - \varphi(x^{n-2})\| \leq a^2\|x^{n-1} - x^{n-2}\| \leq \dots \leq a^n\|x^1 - x^0\|. \end{aligned}$$

Șirul $(x^n)_{n \in \mathbb{N}}$ este fundamental. Într-adevăr

$$\|x^{n+p} - x^n\| \leq \sum_{k=n}^{n+p-1} \|x^{k+1} - x^k\| \leq \sum_{k=n}^{n+p-1} a^k \|x^1 - x^0\| \leq \frac{a^n}{1-a} \|x^1 - x^0\|.$$

Din proprietatea de completitudine rezultă că șirul $(x^n)_{n \in \mathbb{N}}$ este convergent. Fie $x^* = \lim_{n \rightarrow \infty} x^n$. Trecând la limită în formula de recurență (φ fiind contracție este continuă) obținem $x^* = \varphi(x^*)$, adică x^* este punct fix al operatorului φ .

Dacă x_1^* și x_2^* sunt puncte fixe ale operatorului φ atunci din relațiile

$$\|x_1^* - x_2^*\| = \|\varphi(x_1^*) - \varphi(x_2^*)\| \leq a\|x_1^* - x_2^*\|$$

deducem

$$(1-a)\|x_1^* - x_2^*\| \leq 0.$$

Cum $1-a > 0$, în mod necesar $\|x_1^* - x_2^*\| = 0$, adică $x_1^* = x_2^*$. ■

Teorema 18.5.2 *Fie X este un spațiu Banach, $\overline{B}(x_0, r) = \{x \in X : \|x - x_0\| \leq r\}$ și $\varphi : \overline{B}(x_0, r) \rightarrow X$ o contracție de parametru a . Dacă $\|\varphi(x_0) - x_0\| \leq (1-a)r$ atunci φ are un singur punct fix.*

Demonstrație. Arătăm la început că $\varphi(\overline{B}(x_0, r)) \subseteq \overline{B}(x_0, r)$. Într-adevăr, dacă $x \in \overline{B}(x_0, r)$ atunci au loc relațiile

$$\begin{aligned} \|\varphi(x) - x_0\| &\leq \|\varphi(x) - \varphi(x_0)\| + \|\varphi(x_0) - x_0\| \leq \\ &\leq a\|x - x_0\| + (1-a)r \leq ar + (1-a)r = r. \end{aligned}$$

Reluând justificarea teoremei de punct fix a lui Banach rezultă concluzia teoremei. ■

Teorema 18.5.3 Fie I un interval deschis și $\varphi : I \rightarrow R$ o funcție cu derivata continuă în I . Dacă $|\varphi'(x_0)| < 1$, $x_0 \in I$ atunci există $r > 0$ astfel încât φ este contracție în mulțimea $[x_0 - r, x_0 + r]$.

Demonstrație. Fie $0 < \epsilon < 1 - |\varphi'(x_0)|$. Din continuitatea lui φ' în x_0 rezultă că există $\delta > 0$ astfel încât

$$|x - x_0| < \delta \Rightarrow |\varphi'(x) - \varphi'(x_0)| < \epsilon.$$

Atunci, pentru orice $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \cup I$

$$|\varphi'(x)| \leq |\varphi'(x) - \varphi'(x_0)| + |\varphi'(x_0)| < \epsilon + |\varphi'(x_0)| = a < 1.$$

Există $r \in (0, \delta)$ astfel încât $[x_0 - r, x_0 + r] \subset I$. Pentru orice $x, y \in [x_0 - r, x_0 + r]$ utilizând teorema de medie a lui Lagrange, obținem

$$|\varphi(x) - \varphi(y)| = |\varphi'(c)||x - y| \leq a|x - y|. \quad \blacksquare$$

Teorema 18.5.4 În ipotezele teoremei anterioare, dacă $\varphi(x^*) = 0$ și $|\varphi'(x^*)| < 1$ atunci există $r > 0$ astfel încât șirul $(x^k)_{k \in N}$ definit prin formula de recurență $x^{k+1} = \varphi(x^k)$, $k \in N$, converge către x^* , oricare ar fi $x^0 \in [x^* - r, x^* + r]$.

Demonstrație. Din teorema 18.5.3 rezultă existența lui r astfel încât φ este contracție în mulțimea $[x^* - r, x^* + r]$. Fie a constanta de contracție. Deoarece

$$|\varphi(x^*) - x^*| = 0 < (1 - a)r,$$

ținând seama de teoremele 18.5.1 și 18.5.2 rezultă că șirul $(x^k)_{k \in N}$ converge către x^* , unicul punct fix al lui φ . ■

Proprietatea de convergență a șirului $(x^k)_{k \in N}$, construit prin metoda funcției inverse cu polinomul lui Taylor este formulată în teorema

Teorema 18.5.5 Dacă aproximația inițială x^0 este "suficient de apropiată" de x^* , soluția ecuației $T(x) = 0$ din intervalul I , atunci șirul $(x^k)_{k \in N}$, construit prin metoda funcției inverse cu polinomul lui Taylor converge către x^* .

Demonstrație. Definim funcția $\varphi_m : I \rightarrow R$ prin

$$\varphi_m(x) = x + \sum_{i=1}^m (-1)^i \frac{F^{(i)}(T(x))}{i!} T^i(x)$$

Derivata acestei funcții este

$$\begin{aligned}\varphi'(x) &= 1 + \sum_{i=1}^m (-1)^i \left[\frac{1}{(i-1)!} F^{(i)}(T(x)) T^{i-1}(x) T'(x) + \right. \\ &\quad \left. \frac{1}{i!} F^{(i+1)}(T(x)) T^i(x) T'(x) \right] = 1 - F'(T(x)T'(x) + \\ &\quad + \sum_{i=2}^m \frac{(-1)^i}{(i-1)!} F^{(i)}(T(x)) T^{i-1}(x) T'(x) + \sum_{i=1}^m \frac{(-1)^i}{i!} F^{(i+1)}(T(x)) T^i(x) T'(x)].\end{aligned}$$

Prin schimbarea de indice în a doua sumă, expresia derivatei devine

$$\begin{aligned}\varphi'(x) &= \sum_{j=2}^m \frac{(-1)^j}{(j-1)!} F^{(j)}(T(x)) T^{j-1}(x) T'(x) + \\ &\quad + \sum_{j=2}^{m+1} \frac{(-1)^{j-1}}{(j-1)!} F^{(j)}(T(x)) T^{j+1}(x) T'(x) = \\ &= \frac{(-1)^m}{m!} F^{(m+1)}(T(x)) T^m(x) T'(x).\end{aligned}$$

Au loc egalitățile $\varphi_m(x^*) = x^*$ și $\varphi'(x^*) = 0$. Potrivit teoremei 18.5.4, dacă x^0 este "suficient de aproape" de x^* , atunci șirul $(x^k)_{k \in \mathbb{N}}$ converge către x^* . ■

Metoda funcției inverse cu polinomul lui Lagrange.¹ Fie $m \in \mathbb{N}$, x_1, x_2, \dots, x_{m+1} puncte distincte ale intervalului I și $y_i = T(x_i)$, $i \in \{1, 2, \dots, m+1\}$.

În egalitatea

$$F(y) = L(\mathbb{P}_m; y_1, \dots, y_{m+1}; F)(y) + \prod_{i=1}^{m+1} (y - y_i) \frac{F^{(m+1)}(\xi)}{(m+1)!},$$

alegând $y = 0$, obținem

$$x^* = F(0) = L(\mathbb{P}_m; y_1, \dots, y_{m+1}; F)(0) + \prod_{i=1}^{m+1} (-y_i) \frac{F^{(m+1)}(\xi)}{(m+1)!}.$$

¹Pentru această paragraf este necesară cunoașterea polinomului de interpolare Lagrange.

Expresia $L(\mathbb{P}_m; y_1, \dots, y_{m+1}; F)(0)$ furnizează o aproximație a soluției x^* pe care o notăm x_{m+2} . În continuare se reia procedeul cu x_2, x_3, \dots, x_{m+2} . În general, dacă s-au determinat $x_k, x_{k+1}, \dots, x_{m+k}$ atunci

$$x_{k+m+1} = L(\mathbb{P}_m; y_k, y_{k+1}, \dots, y_{k+m}; F)(0) \quad (y_i = T(x_i)).$$

Dacă $u_k(y) = \prod_{j=k}^{k+m} (y - y_j)$ atunci

$$x_{k+m+1} = -u_k(0) \sum_{i=k}^{k+m} \frac{x_i}{y_i u'_k(y_i)}. \quad (18.34)$$

Din egalitatea $u_{k+1}(y) = u_k(y) \frac{y - y_{k+m+1}}{y - y_k}$ deducem formulele de recurență

$$u_{k+1}(0) = \frac{y_{k+m+1}}{y_k} u_k(0), \quad u'_{k+1}(y_i) = \begin{cases} u'_k(y_i) \frac{y_i - y_{k+m+1}}{y_i - y_k} & i \in \{k+1, \dots, k+m\} \\ \frac{u_k(y_{k+m+1})}{y_{k+m+1} - y_k} & i = k+m+1 \end{cases}$$

Utilizând formula baricentrică a polinomului de interpolare Lagrange, formula (18.34) se scrie

$$x_{k+m+1} = \frac{\sum_{i=k}^{k+m} \frac{x_i}{y_i u'_k(y_i)}}{\sum_{i=k}^{k+m} \frac{1}{y_i u'_k(y_i)}}$$

Pentru $m = 1$ găsim

$$x_{k+2} = \frac{x_k y_{k+1} - x_{k+1} y_k}{y_{k+1} - y_k},$$

cunoscută sub numele de metoda coardei, deoarece x_{k+2} reprezintă intersecția dreptei ce unește punctele de coordonate (x_k, y_k) , (x_{k+1}, y_{k+1}) cu axa Ox .

Metoda funcției inverse cu polinomul lui Lagrange nu face apel la derivatele funcției T .

18.6 Rezolvarea ecuațiilor polinomiale

Fie polinomul $P \in \mathbb{C}[X]$, $P(z) = z^n + a_1 z^{n-1} + \dots + a_{n-1} z + a_n$. Deoarece polinomul P are n rădăcini reale sau complexe, specificul rezolvării unei ecuații polinomiale

$$P(z) = 0 \quad (18.35)$$

constă în cerința determinării tuturor rădăcinilor sale.

Metodele prezentate în continuare permit determinarea simultană (paralelă) a celor n rădăcini.

Fie $\Omega \in \mathbb{C}^n$ o mulțime deschisă, $T : \Omega \rightarrow \mathbb{C}^n$, $T(z) = \begin{pmatrix} T_1(z) \\ \vdots \\ T_n(z) \end{pmatrix}$ un operator

de m (≥ 2) ori diferentiabil, având diferențiala de ordin m continuă în Ω și șirul $(z^{(k)})_{k \in \mathbb{N}}$ construit prin formula de recurență

$$z^{(k+1)} = T(z^{(k)}), \quad z^{(k)} = \begin{pmatrix} z_1^{(k)} \\ \vdots \\ z_n^{(k)} \end{pmatrix} \Leftrightarrow z_i^{(k+1)} = T_i(z^{(k)}), \quad (18.36)$$

$\forall i \in \{1, 2, \dots, n\}$, $k \in \mathbb{N}$.

În \mathbb{C}^n se va utiliza norma $\|z\| = \max\{|z_1|, |z_2|, \dots, |z_n|\}$.

Notăm prin $\alpha = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix}$ vectorul format de rădăcinile polinomului P .

Teorema 18.6.1 *Dacă*

1. $T(\alpha) = \alpha$,
2. $T'(\alpha) = T''(\alpha) = \dots = T^{(m-1)}(\alpha) = 0$

atunci există $r > 0$ astfel încât pentru orice $z^{(0)} \in \mathbb{C}^n$, $\|z^{(0)} - \alpha\| < r$, șirul construit prin formula de recurență $z^{(k+1)} = T(z^{(k)})$, $k \in \mathbb{N}$, (18.36) converge către α .

Demonstrație. Fie $r_0 > 0$ astfel încât $V_0 = \{z \in \mathbb{C}^n : \|z - \alpha\| \leq r_0\} \subset \Omega$ și $C_0 = \max_{z \in V_0} \|T^{(m)}(z)\|$.

Există $0 < r \leq r_0$ astfel încât

$$\frac{C_0 r^m}{m!} < r \Leftrightarrow \left(\frac{C_0}{m!}\right)^{\frac{1}{m-1}} r < 1.$$

Notăm $V = \{z \in \mathbb{C}^n : \|z - \alpha\| \leq r\}$. Dacă $z \in V$ atunci Teorema 18.1.7 și ipotezele prezente implică

$$\|T(z) - \alpha\| = \|T(z) - T(\alpha) - \sum_{j=1}^{m-1} \frac{1}{j!} T^{(j)}(\alpha) \underbrace{(z - \alpha) \dots (z - \alpha)}_{j \text{ ori}}\| \leq$$

$$\leq \frac{1}{m!} \|z - \alpha\|^m \sup_{\zeta \in [\alpha, z]} \|T^{(m)}(\zeta)\| \leq \frac{C_0 r^m}{m!} < r,$$

adică $T(z) \in V$.

În particular, pentru $z = z^{(k)}$ din relațiile anterioare deducem

$$\|z^{(k+1)} - \alpha\| = \|T(z^{(k)}) - \alpha\| \leq \frac{C_0}{m!} \|z^{(k)} - \alpha\|^m. \quad (18.37)$$

Utilizând repetat inegalitatea (18.37) găsim

$$\begin{aligned} \|z^{(k)} - \alpha\| &\leq \frac{C_0}{m!} \|z^{(k-1)} - \alpha\|^m \leq \frac{C_0}{m!} \left(\frac{C_0}{m!} \|z^{(k-2)} - \alpha\|^m \right)^m = \\ &= \left(\frac{C_0}{m!} \right)^{1+m} \|z^{(k-2)} - \alpha\|^{m^2} \leq \dots \leq \left(\frac{C_0}{m!} \right)^{1+m+\dots+m^{k-1}} \|z^{(0)} - \alpha\|^{m^k} < \\ &< \left(\frac{C_0}{m!} \right)^{\frac{m^k}{m-1}} \|z^{(0)} - \alpha\|^{m^k} \leq \left(\left(\frac{C_0}{m!} \right)^{\frac{1}{m-1}} r \right)^{m^k} \rightarrow 0, \quad k \rightarrow \infty. \quad \blacksquare \end{aligned}$$

Din inegalitatea (18.37) deducem totodată faptul că ordinul de convergență al șirului $(z^{(k)})_{k \in \mathbb{N}}$ este cel puțin m (Anexa F).

În cele ce urmează vom presupune că rădăcinile polinomului P sunt simple.

Întotdeauna putem elimina rădăcinile multiple considerând în locul lui P , polinomul $\frac{P}{\text{cmmdc}(P, P')}$, ale cărei rădăcini coincid cu cele ale lui P și sunt simple.

În acest caz există o vecinătate a lui α astfel încât pentru orice z , cuprins în acea vecinătate, are componentele distincte două câte două.

Vom utiliza notațiile

$$\mathbf{z} = \begin{pmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix} \quad \text{și} \quad Q_i(\mathbf{z}) = \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n (z_i - z_j).$$

Astfel z va reprezenta un număr complex în timp ce \mathbf{z} reprezintă un vector având ca și componente numere complexe.

Dacă z_1, \dots, z_n sunt numere complexe, notăm

$$\begin{aligned} u(z) &= \prod_{j=1}^n (z - z_j) \\ u_i(z) &= \frac{u(z)}{z - z_i} = \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n (z - z_j) \end{aligned}$$

Metoda Durand-Kerner. Scriem egalitatea $P(z) = (z - \alpha_1) \dots (z - \alpha_n)$ sub forma

$$z - \alpha_i = \frac{P(z)}{\prod_{j \neq i}^n (z - \alpha_j)} \quad \text{sau} \quad \alpha_i = z - \frac{P(z)}{\prod_{j \neq i}^n (z - \alpha_j)}. \quad (18.38)$$

Dacă $z^{(k)} = \begin{pmatrix} z_1^{(k)} \\ \vdots \\ z_n^{(k)} \end{pmatrix}$ este o aproximație a lui α atunci, înlocuind în membrul drept din (18.38) componentele lui α cu componentele corespunzătoare ale lui $z^{(k)}$, formula (18.38) sugerează formulele de recurență

$$z_i^{(k+1)} = z_i^{(k)} - \frac{P(z_i^{(k)})}{\prod_{j \neq i}^n (z_i^{(k)} - z_j^{(k)})} = z_i^{(k)} - \frac{P(z_i^{(k)})}{Q_i(z^{(k)})}, \quad i \in \{1, 2, \dots, n\}, \quad k \in \mathbb{N}.$$

În acest caz, expresia funcției $T_i(\mathbf{z})$ este

$$T_i(\mathbf{z}) = z_i - \frac{P(z_i)}{Q_i(\mathbf{z})}.$$

Evident $T_i(\alpha) = \alpha_i$. Calculăm derivatele parțiale ale funcției $T_i(\mathbf{z})$.

$$\frac{\partial T_i(\mathbf{z})}{\partial z_i} = 1 - \frac{P'(z_i)}{Q_i(z_i)} + \frac{P(z_i)}{Q_i^2(z_i)} \frac{\partial Q_i(\mathbf{z})}{\partial z_i}.$$

Deoarece $P'(\alpha_i) = \prod_{j \neq i}^n (\alpha_i - \alpha_j) = Q_i(\alpha)$, rezultă $\frac{\partial T_i(\alpha)}{\partial z_i} = 0$.

Pentru $i \neq j$

$$\frac{\partial T_i(\mathbf{z})}{\partial z_j} = \frac{P(z_i)}{Q_i^2(\mathbf{z})} \frac{\partial Q_i(\mathbf{z})}{\partial z_j},$$

deci $\frac{\partial T_i(\alpha)}{\partial z_j} = 0$.

În consecință $T'(\alpha) = 0$, deci ordinul de convergență al șirului $(z^{(k)})_{k \in \mathbb{N}}$ este 2.

Dacă α_j din membrul drept al lui (18.38) se înlocuiește cu $z_j^{(k)} - \frac{P(z_j^{(k)})}{Q_j(z^{(k)})}$ atunci se obține metoda Durand-Kerner îmbunătățită, având ordinul de convergență 3,

$$z_i^{(k+1)} = z_i^{(k)} - \frac{P(z_i^{(k)})}{\prod_{j \neq i}^n \left(z_i^{(k)} - z_j^{(k)} + \frac{P(z_j^{(k)})}{Q_j(z^{(k)})} \right)}, \quad i \in \{1, 2, \dots, n\}, \quad k \in \mathbb{N}.$$

Metoda Ehrlich. Fie z_1, \dots, z_n numere complexe distincte două câte două. Pentru calculul rădăcinii α_i utilizăm metoda tangentei în cazul ecuației

$$\frac{P(z)}{u_i(z)} = 0.$$

În prealabil calculăm

$$\left(\frac{P(z)}{u_i(z)} \right)' = \frac{P'(z)}{u_i(z)} - \frac{P(z) u_i'(z)}{u_i(z) u_i(z)} = \frac{P'(z)}{u_i(z)} - \frac{P(z)}{u_i(z)} \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n \frac{1}{z - z_j}.$$

Pentru $z = z_i$, presupunând $P'(z_i) = u_i'(z_i)$ adevărată, dacă $z_i = \alpha_i, \forall i$ – vom avea

$$\left(\frac{P(z)}{u_i(z)} \right)' \Big|_{z=z_i} \approx 1 - \frac{P(z_i)}{u_i(z_i)} \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n \frac{1}{z_i - z_j} = 1 - \frac{P(z_i)}{Q_i(\mathbf{z})} \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n \frac{1}{z_i - z_j}.$$

Metoda tangentei conduce la formulele de recurență

$$z_i^{(k+1)} = z_i^{(k)} - \frac{\frac{P(z_i^{(k)})}{Q_i(z^{(k)})}}{1 - \frac{P(z_i^{(k)})}{Q_i(z^{(k)})} \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n \frac{1}{z_i^{(k)} - z_j^{(k)}}} = z_i^{(k)} - \frac{P(z_i^{(k)})}{Q_i(z^{(k)}) - P(z_i^{(k)}) \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n \frac{1}{z_i^{(k)} - z_j^{(k)}}},$$

$$i \in \{1, \dots, n\}, k \in \mathbb{N}. \text{ Bineînțeles } z^{(k)} = \begin{pmatrix} z_1^{(k)} \\ \vdots \\ z_n^{(k)} \end{pmatrix}.$$

Ordinul de convergență al metodei Ehrlich este 2.

Metoda Noureïn. Din nou fie z_1, \dots, z_n numere complexe distincte două câte două. $P(z) - u(z)$ este un polinom de grad $n - 1$, deci coincide cu polinomul de interpolare $L(\mathbb{P}_{n-1}; z_1, \dots, z_n; P - u)(z) = L(\mathbb{P}_{n-1}; z_1, \dots, z_n; P)(z)$

$$P(z) - u(z) = L(\mathbb{P}_{n-1}; z_1, \dots, z_n; P)(z) = \sum_{j=1}^n P(z_j) \frac{u(z)}{(z - z_j)u'(z_j)}.$$

Pentru $z = \alpha_i$ obținem

$$-1 = \frac{P(z_i)}{(\alpha_i - z_i)u'(z_i)} + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n \frac{P(z_j)}{(\alpha_i - z_j)u'(z_j)}$$

și explicitând $\alpha_i - z_i$ găsim

$$\alpha_i = z_i - \frac{\frac{P(z_i)}{u_i(z_i)}}{1 + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n \frac{P(z_j)}{(\alpha_i - z_j)u'(z_j)}}. \quad (18.39)$$

Reluând raționamentul făcut la metoda Durand-Kerner obținem formulele de recurență

$$z_i^{(k+1)} = z_i^{(k)} - \frac{\frac{P(z_i^{(k)})}{Q_i(z^{(k)})}}{1 + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n \frac{P(z_j)}{(z_i^{(k)} - z_j^{(k)})Q_j(z^{(k)})}}, \quad i \in \{1, \dots, n\}, k \in \mathbb{N}.$$

Ordinul de convergență al metodei Nourein este 3.

Dacă α_i din membrul drept al lui (18.39) se înlocuiește cu $z_i^{(k)} - \frac{P(z_i^{(k)})}{Q_i(z^{(k)})}$ atunci se obține metoda Nourein îmbunătățită, având ordinul de convergență 4,

$$z_i^{(k+1)} = z_i^{(k)} - \frac{\frac{P(z_i^{(k)})}{Q_i(z^{(k)})}}{1 + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n \frac{P(z_j^{(k)})}{(z_i^{(k)} - \frac{P(z_i^{(k)})}{Q_i(z^{(k)})} - z_j^{(k)})Q_j(z^{(k)})}}, \quad i \in \{1, \dots, n\}, k \in \mathbb{N}.$$

Metoda Wang-Zheng. Formulele de recurență ale acestei metode sunt

$$z_i^{(k+1)} = z_i^{(k)} - \frac{1}{\frac{P'(z_i^{(k)})}{P(z_i^{(k)})} - \frac{P''(z_i^{(k)})}{2P'(z_i^{(k)})} \frac{P(z_i^{(k)})}{2P'(z_i^{(k)})} \left[\left(\sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n \frac{1}{z_i^{(k)} - z_j^{(k)}} \right)^2 + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n \frac{1}{(z_i^{(k)} - z_j^{(k)})^2} \right]},$$

$i \in \{1, \dots, n\}, k \in \mathbb{N}.$

Ordinul de convergență al metodei Wang-Zheng este 4.

Determinarea aproximațiilor inițiale

Așa cum s-a văzut, convergența metodei de rezolvare a unei ecuații polinomiale depinde de alegerea adecvată a aproximațiilor inițiale ale rădăcinilor.

În acest sens sunt utile următoarele rezultate privind localizarea rădăcinilor unui polinom.

Teorema 18.6.2 Rădăcinile polinomului $P(z) = a_0z^n + a_1z^{n-1} + \dots + a_{n-1}z + a_n \in \mathbb{C}[X]$ se află în discul $\bar{B}(0, R)$ cu $R = 1 + \frac{b}{|a_0|}$, unde $b = \max\{|a_1|, \dots, |a_n|\}$.

Demonstrație. Pentru $|z| > 1$ au loc majorările

$$|a_1 z^{n-1} + \dots + a_{n-1} z + a_n| \leq b(1 + |z| + \dots + |z|^{n-1}) \leq b \frac{|z|^{n-1}}{|z| - 1}.$$

și inegalitățile

$$|P(z)| \geq |a_0| |z|^n - |a_1 z^{n-1} + \dots + a_{n-1} z + a_n| \geq |z|^n \left(|a_0| - \frac{b}{|z| - 1} \right).$$

Dacă

$$|a_0| - \frac{b}{|z| - 1} > 0 \quad \Leftrightarrow \quad |z| > 1 + \frac{b}{|a_0|} = R,$$

atunci $|P(z)| > 0$, adică polinomul P nu are rădăcini în afara discului $\overline{B}(0, R)$, de unde concluzia teoremei. ■

Teorema 18.6.3 Fie $Q \subset \mathbb{C}$ un pătrat cu centrul în a și semidiagonala r și polinomul $P(z) = b_0(z-a)^n + b_1(z-a)^{n-1} + \dots + b_{n-1}(z-a) + b_n \in \mathbb{C}[X]$. Dacă

$$|P(a)| > |b_0| r^n + |b_1| r^{n-1} + \dots + |b_{n-1}| r$$

atunci polinomul P nu are nici o rădăcină în pătratul Q .

Demonstrație. Dacă $z \in Q$ atunci $|z - a| \leq r$. Deoarece

$$\begin{aligned} |P(z) - P(a)| &= |b_0(z-a)^n + b_1(z-a)^{n-1} + \dots + b_{n-1}(z-a)| \leq \\ &\leq |b_0| r^n + |b_1| r^{n-1} + \dots + |b_{n-1}| r \end{aligned}$$

din inegalitatea

$$\begin{aligned} |P(z)| &= |P(a) - (P(a) - P(z))| \geq |P(a)| - |P(z) - P(a)| \geq \\ &\geq |P(a)| - (|b_0| r^n + |b_1| r^{n-1} + \dots + |b_{n-1}| r) > 0, \end{aligned}$$

deducem că polinomul P nu are rădăcini în pătratul Q . ■

Probleme și teme de seminar

P 18.1 *Metoda Halley.* Fie f o funcție de cel puțin două ori derivabilă într-un interval I unde există un singur zero, x^* . Pornind de la dezvoltarea

$$0 = f(x^*) = f(x_k) + f'(x_k)(x^* - x_k) + \frac{f''(x_k)}{2}(x^* - x_k)^2 + \dots$$

notăm prin x_{k+1} numărul pentru care

$$0 = f(x_k) + f'(x_k)(x_{k+1} - x_k) + \frac{f''(x_k)}{2}(x_{k+1} - x_k)^2.$$

Atunci $x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k) + \frac{f''(x_k)}{2}(x_{k+1} - x_k)}$. Înlocuind $x_{k+1} - x_k$ din membrul drept cu $-\frac{f(x_k)}{f'(x_k)}$ - sugerat de metoda tangentei - se obține formula de recurență pentru metoda Halley

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)} \left(1 - \frac{f(x_k)f''(x_k)}{2f'(x_k)^2} \right)^{-1}.$$

Să se demonstreze că dacă aproximația inițială este aleasă într-o vecinătate convenabilă a lui x^* , atunci șirul $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$ converge către x^* .

R. Pentru $\varphi(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}A(x)$, $A(x) = \left(1 - \frac{f(x)f''(x)}{2f'(x)^2} \right)^{-1}$ se verifică proprietățile $\varphi(x^*) = x^*$ și $\varphi'(x^*) = 0$.

P 18.2 Trei puncte din plan $P_i(x_i, y_i)$, $i = 1, 2, 3$, astfel încât $x_1 < x_2 < x_3$, se află pe graficul unei funcții de forma $y = a \ln (bx + c)$.

Ce condiții satisfac numerele y_1, y_2, y_3 ?

Cunoscând coordonatele punctelor P_i să se determine parametrii funcției a, b, c .

Să se studieze existența și unicitatea soluției.

SCHEIBER ERNEST SCHEIBER ERNEST

SCHEIBER ERNEST SCHEIBER ERNEST

Partea IV

REZOLVAREA ECUAȚIILOR
PRIN METODE DE
OPTIMIZARE

S
C
H
E
I
B
E
R
E
R
N
E
S
T

S
C
H
E
I
B
E
R
E
R
N
E
S
T

Capitolul 19

Elemente din teoria optimizării

Fie X un spațiu normat, domeniul $D \subseteq X$ și $F : D \rightarrow \mathbb{R}$ o funcțională diferențiabilă Fréchet, mărginită inferior. Problema de optimizare (PO) constă în determinarea

1. $f^* = \inf_{x \in D} f(x)$;
2. $x_* \in D$ (dacă există) astfel încât $f(x_*) = \inf_{x \in D} f(x)$.

Dacă $a \in \mathbb{R}$, atunci notăm prin M_a mulțimea $M_a = \{x \in D : f(x) \leq a\}$.

În cazul $X = \mathbb{R}^n$ există mai multe metode eficiente de rezolvare a problemei de mai sus.

În continuare vom presupune că D este un domeniu convex.

Drept aplicații, există posibilitatea rezolvării unei ecuații liniare sau neliniare prin intermediul unei probleme de optimizare adecvate.

19.1 Funcționale diferențiabile

În cazul funcționalelor, diferențiabilitatea Fréchet coincide cu G-derivabilitatea. Într-adevăr, pentru $x, x+h \in D$ funcționala f este G-derivabilă în x dacă există operatorul liniar $\nabla f(x) \in (X, X)^*$ astfel încât

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(x+th) - f(x)}{t} = \nabla f(x)(h).$$

Pentru $h \in X$, notăm $h_0 = \frac{h}{\|h\|}$ și $t = \|h\|$ și găsim

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x) - \nabla f(x)(h)}{\|h\|} = \lim_{t \rightarrow 0} \left[\frac{f(x+th_0) - f(x)}{t} - \nabla f(x)(h_0) \right] = 0.$$

Pentru $x, x + h \in D$ fixați introducem funcția $\varphi : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ definită prin $\varphi(t) = f(x + th)$. Au loc proprietățile:

Teorema 19.1.1 1. Dacă funcționala $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ este diferențiabilă Fréchet atunci

$$\varphi'(t) = f'(x + th)(h); \quad (19.1)$$

$$f(x + h) - f(x) = \int_0^1 f'(x + th)(h) dt; \quad (19.2)$$

2. Dacă funcționala $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ este de două ori diferențiabilă Fréchet atunci

$$\varphi''(t) = f''(x + th)(h)(h); \quad (19.3)$$

$$f(x + h) = f(x) + f'(x)(h) + \int_0^1 (1-t) f''(x + th)(h)(h) dt. \quad (19.4)$$

Demonstrație. Au loc egalitățile

$$\begin{aligned} \varphi'(t) &= \lim_{s \rightarrow 0} \frac{\varphi(t+s) - \varphi(t)}{s} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{f(x + (t+s)h) - f(x + th)}{s} = \\ &= \nabla f(x + th)(h) = f'(x + th)(h), \end{aligned}$$

deoarece diferențiabilitatea Fréchet implică G-derivabilitatea.

Cealaltă relație reprezintă transcrierea egalității

$$\varphi(1) - \varphi(0) = \int_0^1 \varphi'(t) dt.$$

Pct. 2 al teoremei se arată asemănător. (19.4) reprezintă transcrierea egalității

$$\varphi(1) = \varphi(0) + \varphi'(0) + \int_0^1 (1-t) \varphi''(t) dt. \quad \blacksquare$$

Exemplul 19.1.1 Fie X un spațiu prehilbertian real cu produsul scalar notat prin $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Dacă $A \in (X, X)^*$, $b \in X$ atunci funcționala

$$f(x) = \frac{1}{2} \langle A(x), x \rangle - \langle b, x \rangle, \quad f : X \rightarrow \mathbb{R},$$

este diferențiabilă Fréchet și $f'(x) = A(x) - b$.

Teorema 19.1.2 Dacă funcționala $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ este diferențiabilă Fréchet cu derivata lipschitziană, adică există $L > 0$ astfel încât

$$\|f'(x) - f'(y)\| \leq L\|x - y\|, \quad \forall x, y \in D,$$

atunci pentru orice $x, x + h \in D$ are loc inegalitatea

$$f(x + h) \leq f(x) + f'(x)(h) + \frac{L}{2}\|h\|^2$$

Demonstrație. Utilizând (19.2) au loc relațiile

$$\begin{aligned} f(x + h) - f(x) &= \int_0^1 [f'(x + th)(h) - f'(x)(h)] dt + \int_0^1 f'(x)(h) dt \leq \\ &\leq f'(x)(h) + \left| \int_0^1 [f'(x + th) - f'(x)](h) dt \right| \leq f'(x)(h) + \int_0^1 |[f'(x + th) - f'(x)](h)| dt \leq \\ &\leq f'(x)(h) + \int_0^1 \|f'(x + th) - f'(x)\| \|h\| dt \leq f'(x)(h) + \frac{L}{2}\|h\|. \quad \blacksquare \end{aligned}$$

19.2 Funcționale convexe

Fie D un domeniu convex a unui spațiu normat X .

Funcționala $F : D \rightarrow \mathbb{R}$ este convexă este

- conveză dacă

$$f(ax + (1 - a)y) \leq af(x) + (1 - a)f(y), \quad \forall x, y \in D; \forall a \in (0, 1).$$

- strict conveză dacă

$$f(ax + (1 - a)y) < af(x) + (1 - a)f(y), \quad \forall x, y \in D, x \neq y; \forall a \in (0, 1).$$

- tare conveză dacă există $m > 0$ astfel încât

$$ma(1 - a)\|x - y\|^2 + f(ax + (1 - a)y) \leq af(x) + (1 - a)f(y),$$

$$\forall x, y \in D; \forall a \in (0, 1).$$

În cazul unei funcționale diferențiabilă Fréchet tare convexitatea se poate caracteriza prin

Teorema 19.2.1 Fie $f : D \subset X \rightarrow \mathbb{R}$ o funcțională diferențiabilă Fréchet. Următoarele afirmații sunt echivalente

(i) f este tare convexă;

(ii) Pentru orice $x, x_0 \in D$ are loc inegalitatea

$$f(x) - f(x_0) \geq f'(x_0)(x - x_0) + m\|x - x_0\|^2; \quad (19.5)$$

(iii) Pentru orice $x, x_0 \in D$ are loc inegalitatea

$$[f'(x) - f'(x_0)](x - x_0) \geq 2m\|x - x_0\|^2; \quad (19.6)$$

Dacă f este de două ori diferențiabil Fréchet atunci afirmațiile anterioare sunt echivalente cu

(iv) Pentru orice $x \in D$ și orice $h \in X$ are loc inegalitatea

$$f''(x)(h)(h) \geq 2m\|h\|^2. \quad (19.7)$$

Demonstrație.

(i) \Rightarrow (ii) Din inegalitatea

$$f(tx + (1-t)x_0) + mt(1-t)\|x - x_0\|^2 \leq tf(x) + (1-t)f(x_0)$$

scăzând $f(x_0)$ și împărțind la $t \in (t, 1]$ se obține

$$\frac{f(tx + (1-t)x_0) - f(x_0)}{t} + m(1-t)\|x - x_0\|^2 \leq f(x) - f(x_0).$$

Pentru $t \rightarrow 0$ rezultă

$$f'(x_0)(x - x_0) + m\|x - x_0\|^2 \leq f(x) - f(x_0).$$

(ii) \Rightarrow (i) Au loc inegalitățile

$$f(x) - f(tx + (1-t)y) \geq (1-t)f'(tx + (1-t)y)(x - y) + m(1-t)^2\|x - y\|^2$$

$$f(y) - f(tx + (1-t)y) \geq (1-t)f'(tx + (1-t)y)(y - x) + mt^2\|x - y\|^2$$

Înmulțind prima inegalitate cu t , pe a doua cu $1-t$ și adunând găsim

$$tf(x) + (1-t)f(y) - f(tx + (1-t)y) \geq mt(1-t)\|x - y\|^2.$$

(ii) \Rightarrow **(iii)** Adunând inegalitățile

$$\begin{aligned} f(x) - f(x_0) &\geq f'(x_0)(x - x_0) + m\|x - x_0\|^2 \\ f(x_0) - f(x) &\geq f'(x)(x_0 - x) + m\|x - x_0\|^2 \end{aligned}$$

rezultă

$$0 \geq [f'(x) - f'(x_0)](x_0 - x) + 2m\|x - x_0\|^2$$

sau

$$[f'(x) - f'(x_0)](x - x_0) \geq 2m\|x - x_0\|^2.$$

(iii) \Rightarrow **(ii)** Folosind (19.1) deducem succesiv

$$\begin{aligned} f(x) - f(x_0) &= \int_0^1 f'(x_0 + t(x - x_0))(x - x_0) dt = \\ &= \int_0^1 [f'(x_0 + t(x - x_0)) - f'(x_0)](x - x_0) dt + \int_0^1 f'(x_0)(x - x_0) dt \geq \\ &\geq 2m\|x - x_0\|^2 \int_0^1 t dt + f'(x_0)(x - x_0) = m\|x - x_0\|^2 + f'(x_0)(x - x_0). \end{aligned}$$

(iii) \Rightarrow **(iv)** Împărțind cu t^2 inegalitatea

$$[f'(x + th) - f'(x)](th) \geq 2mt^2\|h\|^2$$

obținem

$$\frac{f'(x + th) - f'(x)}{t}(h) \geq 2m\|h\|^2.$$

Pentru $t \rightarrow 0$ rezultă

$$f''(x + th)(h)(h) \geq 2m\|h\|^2.$$

(iv) \Rightarrow **(iii)** Utilizând (19.4) avem

$$\begin{aligned} f(x) &= f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \int_0^1 (1-t)f''(x_0 + t(x - x_0))(x - x_0)(x - x_0) dt \geq \\ &\geq f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + m\|x - x_0\|^2. \quad \blacksquare \end{aligned}$$

Pentru funcționale convexe formularea teoremei anterioare este

Teorema 19.2.2 Fie $f : D \subset X \rightarrow \mathbb{R}$ o funcțională diferențiabilă Fréchet. Următoarele afirmații sunt echivalente

(i) f este convexă;

(ii) Pentru orice $x, x_0 \in D$ are loc inegalitatea

$$f(x) - f(x_0) \geq f'(x_0)(x - x_0); \quad (19.8)$$

(iii) Pentru orice $x, x_0 \in D$ are loc inegalitatea

$$[f'(x) - f'(x_0)](x - x_0) \geq 0; \quad (19.9)$$

Dacă f este de două ori diferențiabil Fréchet atunci afirmațiile anterioare sunt echivalente cu

(iv) Pentru orice $x \in D$ și orice $h \in X$ are loc inegalitatea

$$f''(x)(h)(h) \geq 0. \quad (19.10)$$

19.3 Proprietăți ale problemei de optimizare

Mărginirea inferioară a funcționalei problemei de optimizare (PO) este garantată de

Teorema 19.3.1 Dacă

1. funcțioanla $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ este diferențiabilă Fréchet cu derivata lipschitziană,

$$\exists L > 0, \text{ astfel încât } \|f'(x) - f'(y)\| \leq L\|x - y\|, \quad \forall x, y \in D;$$

2. există $a \in \mathbb{R}$ astfel încât mulțimea M_a este mărginită;

atunci f este mărginită inferior.

Demonstrație. Mărginirea mulțimii M_a înseamnă existența unui număr $r > 0$ cu proprietatea că $\|x\| \leq \frac{r}{2}$, pentru orice $x \in M_a$.

Fie $x, x_0 \in M_a$ și $h = x - x_0$. Atunci $\|h\| \leq \|x\| + \|x_0\| \leq r$. Procedând analog calculului din demonstrația Teoremei 19.1.2, avem

$$|f(x) - f(x_0)| = |f(x_0 + h) - f(x_0)| =$$

$$\begin{aligned}
&= \left| \int_0^1 [f'(x_0 + th) - f'(x_0)]h dt + \int_0^1 f'(x_0)(h) dt \right| \leq \\
&\leq \frac{L\|h\|^2}{2} + \|f'(x_0)\| \|h\| \leq \frac{Lr^2}{2} + \|f'(x_0)\|r,
\end{aligned}$$

sau

$$f(x) \geq f(x_0) - \frac{Lr^2}{2} - \|f'(x_0)\|r. \quad \blacksquare$$

O caracterizare a soluției (PO) este furnizată de următoarea teoremă

Teorema 19.3.2 *O condiție necesară ca x_* să fie soluție pentru (PO) este*

$$f'(x_*)(x - x_*) \geq 0. \quad (19.11)$$

Dacă funcționala f este convexă atunci condiția este și suficientă.

Demonstrație. Pentru $x \in D$ și $t > 0$ suficient de mic $x_* + t(x - x_*) \in D$ și în consecință

$$f(x_* + t(x - x_*)) \geq f(x_*),$$

sau

$$\frac{f(x_* + t(x - x_*)) - f(x_*)}{t} \geq 0.$$

Pentru $t \rightarrow 0$ rezultă $f'(x_*)(x - x_*) \geq 0$.

Reciproc, dacă f este o funcțională convexă atunci, din (19.8) avem

$$f(x) - f(x_*) \geq f'(x_*)(x - x_*) \geq 0. \quad \blacksquare$$

Referitor la unicitatea soluției, pentru funcționale strict convexe (PO) a cel mult o soluție.

În cazul funcționalelor tare convexe are loc următorul rezultat privind evaluarea erorii

Teorema 19.3.3 *Dacă x_* este punctul de minim al funcționalei tare convexe f atunci are loc inegalitatea*

$$\|x - x_*\|^2 \leq \frac{2}{m}[f(x) - f(x_*)]. \quad (19.12)$$

Demonstrație. Proprietatea de minim a lui x_* implică $f(x_*) \leq f(\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}x_*)$, $\forall x \in D$, iar din tare convexitate deducem

$$f(x_*) \leq f\left(\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}x_*\right) \leq \frac{1}{2}f(x) + \frac{1}{2}f(x_*) - \frac{1}{4}m\|x - x_*\|^2,$$

de unde se obține (19.12). \blacksquare

19.4 Metode de descreștere

Rezolvarea PO printr-o metodă de descreștere constă în construirea șirului

$$x_{n+1} = x_n + \mu_n h_n \quad (19.13)$$

unde $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ reprezintă aproximații ale soluției PO, $h_n \in X$ este direcția de descreștere și $\mu_n \in \mathbb{R}$ este un coeficient.

Un criteriu de alegere a direcției de descreștere este

Teorema 19.4.1 *Fie $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ o funcție diferențiabilă Fréchet. Dacă $f'(x)(h) < 0$ atunci există $\mu_0 > 0$ astfel încât*

$$f(x + \mu h) < f(x) \quad \forall \mu \in (0, \mu_0).$$

Demonstrație. Limita

$$\lim_{\mu \rightarrow 0} \frac{f(x + \mu h) - f(x)}{\mu} = f'(x)(h)$$

implică

$$\forall 0 < \varepsilon < -f'(x)(h) \quad \exists \mu_0 > 0 \quad \text{astfel încât}$$

$$\frac{f(x + \mu h) - f(x)}{\mu} - f'(x)(h) < \varepsilon \quad \forall \mu \in (0, \mu_0),$$

de unde

$$f(x + \mu h) - f(x) < \mu(f'(x)(h) + \varepsilon) < 0. \quad \blacksquare$$

Definiție 19.4.1 *Un element $h \in X$, $\|h\| = 1$ este o direcție de cea mai mare descreștere a funcționalei f în x dacă*

$$f'(x)(h) = \inf_{\|y\|=1} f'(x)(y) \quad (19.14)$$

Teorema 19.4.2 *Dacă h este o direcție de cea mai mare descreștere a funcționalei f în x atunci $f'(x)(h) = -\|f'(x)\|$.*

Demonstrație. Utilizând definiția normei unui operator liniar, găsim

$$f'(x)(h) = \inf_{\|y\|=1} f'(x)(y) = -\sup_{\|y\|=1} -f'(x)(y) = -\| -f'(x) \| = -\|f'(x)\|. \quad \blacksquare$$

Observație 19.4.1 Fie $X = \mathbb{R}^n$ și $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ o funcție diferentiabilă. Dacă notăm $\nabla f(x) = \left(\frac{\partial f(x)}{\partial x_i} \right)_{1 \leq i \leq n}$ - gradientul funcției f în x - atunci

$$f'(x)(h) = \langle \nabla f(x), h \rangle = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f(x)}{\partial x_i} h_i \quad h = (h_i)_{1 \leq i \leq n} \in \mathbb{R}^n.$$

În acest caz $h = -\frac{\nabla f(x)}{\|\nabla f(x)\|}$ este o direcție de cea mai mare descrescere a lui f în x .

Metoda de descrescere cu alegerea la fiecare pas a antigradientului ca direcție de descrescere poartă numele de metoda gradientului.

19.5 Metoda gradientului

Fie X un spațiu normat real. Pentru minimizarea funcționalei diferentiabile Fréchet $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ se consideră șirul definit prin formula de recurență

$$x_{n+1} = x_n + \mu_n h_n,$$

cu

$$h_n = -f'(x_n)$$

și μ_n soluția problemei de optimizare unidimensională

$$f(x_{n+1}) = f(x_n + \mu_n h_n) = \min_{\mu > 0} f(x_n + \mu h_n).$$

Rezultatele următoare prezintă proprietăți de convergență legate de șirul $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

Teorema 19.5.1 Dacă

1. derivata Fréchet $f'(x)$ este lipschitziană, adică

$$\exists L > 0 \quad \text{astfel încât } \|f'(x) - f'(y)\| \leq L\|x - y\|, \quad \forall x, y \in X;$$

2. mulțimea $M_{f(x_0)}$ este mărginită

atunci $\lim_{n \rightarrow \infty} f'(x_n) = 0$.

Demonstrație. Teoreme 19.3.1 implică marginirea inferioară a șitului $(f(x_n))_{n \in \mathbb{N}}$ iar din determinarea parametrului de descreștere μ_n rezultă ca acest șir este descreșcător. În consecință există $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n)$.

Fie $\mu > 0$. Potrivit Teoremei 19.1.2 avem

$$f(x_{n+1}) \leq f(x_n + \mu h_n) \leq f(x_n) + \mu f'(x_n)(h_n) + \frac{L\mu^2}{2}.$$

Deoarece h_n este o direcție de cea mai mare descreștere a funcționalei f în x_n , din inegalitatea anterioară deducem

$$\|f'(x_n)\| = -f'(x_n)(h_n) \leq \frac{f(x_n) - f(x_{n+1})}{\mu} + \frac{L\mu}{2}. \quad (19.15)$$

Fie $\varepsilon > 0$ și $\mu > 0$ astfel încât $\frac{L\mu}{2} < \frac{\varepsilon}{2}$. Deoarece $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(x_n) - f(x_{n+1})}{\mu} = 0$ există $n_0 \in \mathbb{N}$ astfel încât $\frac{f(x_n) - f(x_{n+1})}{\mu} < \frac{\varepsilon}{2}$ pentru orice $n > n_0$.

Din (19.15) rezultă $\|f'(x_n)\| < \varepsilon$ pentru orice $n > n_0$, adică $\lim_{n \rightarrow \infty} f'(x_n) = 0$. ■

Teorema 19.5.2 Dacă în plus, funcționala f este convexă atunci există $\alpha > 0$ astfel încât

$$f(x_n) - f^* \leq \alpha \|f'(x_n)\|, \quad \forall n \in \mathbb{N},$$

unde $f^* = \inf_{x \in M_{f(x_0)}} f(x)$.

Demonstrație. Din marginirea mulțimii $M_{f(x_0)}$ rezultă că și mulțimea $M_{f(x_0)} - M_{f(x_0)}$ este mărginită, adică există $\alpha > 0$ astfel încât

$$M_{f(x_0)} - M_{f(x_0)} \subseteq \overline{B}(0, \alpha).$$

Dacă $y \in M_{f(x_0)}$ atunci $y - x_n \in M_{f(x_0)} - M_{f(x_0)} \subseteq \overline{B}(0, \alpha)$ și din egalitatea $y = x_n + (y - x_n)$ deducem incluziunea

$$M_{f(x_0)} \subseteq x_n + \overline{B}(0, \alpha). \quad (19.16)$$

Fie $h \in X$, cu $\|h\| \leq \alpha$. Deoarece $x_n + h \in x_n + \overline{B}(0, \alpha)$, relația (19.16) implică

$$\inf_{\|h\| \leq \alpha} f(x_n + h) \leq \inf_{x \in M_{f(x_0)}} f(x) = f^*$$

și

$$f^* - f(x_n) \geq \inf_{\|h\| \leq \alpha} f(x_n + h) - f(x_n). \quad (19.17)$$

Potrivit Teoremei 19.2.2, convexitatea funcționalei f implică inegalitatea

$$f(x_n + h) - f(x_n) \geq f'(x_n)(h).$$

Utilizând (19.17) deducem

$$f^* - f(x_n) \geq \inf_{\|h\| \leq \alpha} f(x_n + h) - f(x_n) \geq \inf_{\|h\| \leq \alpha} f'(x_n)(h).$$

Deoarece

$$\inf_{\|h\| \leq \alpha} f'(x_n)(h) = \alpha \inf_{\|h\| \leq 1} f'(x_n)(h) = -\alpha \sup_{\|h\| \leq 1} -f'(x_n)(h) = -\alpha \|f'(x_n)\|$$

inegalitatea de mai sus devine $f^* - f(x_n) \geq -\alpha \|f'(x_n)\|$. ■

Din Teoremele 19.3.3 și 19.5.2 rezultă

Teorema 19.5.3 *Dacă în plus, funcționala f este tare convexă și x_* este soluția problemei de optimizare atunci $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_*$.*

SCHEIBER ERNEST SCHEIBER ERNEST

SCHEIBER ERNEST SCHEIBER ERNEST

Capitolul 20

Rezolvarea ecuațiilor prin optimizare

20.1 Rezolvarea unui sistem algebric liniar prin metoda celor mai mici pătrate

Un sistem algebric de ecuații liniare

$$Ax = b \quad (20.1)$$

cu $A \in M_{m,n}(\mathbb{R})$, $b \in \mathbb{R}^m$ și $m > n$, este în general incompatibil.

Se numește soluție în sensul metodei celor mai mici pătrate, elementul $x \in \mathbb{R}^n$ care minimizează funcția $f(x) = \|Ax - b\|_2$.

Aspecte teoretice legate de soluția în sensul metodei celor mai mici pătrate au fost prezentate în secțiunea 13.8

Determinarea soluției în sensul metodei celor mai mici pătrate.

Deducem o metodă numerică pentru minimizarea funcționalei

$$f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = \frac{1}{2} \|Ax - b\|_2^2 = \frac{1}{2} (\|Ax\|_2^2 - 2 \langle Ax, b \rangle + \|b\|_2^2).$$

utilizând metoda gradientului.

Deoarece $f'(x) = A^T(Ax - b)$, direcția de descreștere va fi

$$h_k = -A^T(Ax_k - b). \quad (20.2)$$

Minimul funcției $\varphi(\mu) = f(x_k + \mu h_k) = \frac{1}{2} (\|Ax_k - b\|_2^2 + 2\mu \langle Ax_k - b, Ah_k \rangle + \mu^2 \|Ah_k\|_2^2)$ se obține pentru $\mu_k := \mu = -\frac{\|h_k\|_2^2}{\|Ah_k\|_2^2}$.

Rezultă formula de recurență

$$x_{k+1} = x_k - \frac{\|h_k\|_2^2}{\|Ah_k\|_2^2} h_k, \quad (20.3)$$

iar h_k este dat de (20.2).

20.2 Rezolvarea unui sistem algebric neliniar prin metoda celor mai mici pătrate

Fiind date funcțiile diferentiabile $T_i : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, $i \in \{1, 2, \dots, m\}$, pentru rezolvarea sistemului algebric de ecuații neliniare

$$T(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} T_1(x_1, \dots, x_n) = 0 \\ \vdots \\ T_m(x_1, \dots, x_n) = 0 \end{cases} \quad (20.4)$$

se minimizează funcționala $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ definită prin

$$f(x) = \sum_{i=1}^m T_i^2(x) = \|T(x)\|_2^2. \quad (20.5)$$

Dacă $f(x) = 0$ atunci x este un punct de minim al funcționalei f și soluție a sistemului (20.4).

Pentru minimizarea funcționalei f utilizăm metode gradientului. Gradientul lui f este

$$f'(x) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f(x)}{\partial x_1} \\ \vdots \\ \frac{\partial f(x)}{\partial x_n} \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} \frac{\partial T_1(x)}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial T_m(x)}{\partial x_1} \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ \frac{\partial T_1(x)}{\partial x_n} & \cdots & \frac{\partial T_m(x)}{\partial x_n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} T_1(x) \\ \vdots \\ T_m(x) \end{pmatrix} = 2(T'(x))^T T(x).$$

Coefficientul de descreștere μ se obține din minimizarea funcției

$$\varphi(\mu) = f(x - \mu f'(x)) = \sum_{i=1}^m T_i^2(x - \mu f'(x)) = \sum_{i=1}^m [T_i(x) - \mu(T'_i(x))^T f'(x) + \dots]^2,$$

a cărei primă aproximație este polinomul de gradul al doilea

$$\psi(\mu) = \sum_{i=1}^m [T_i(x) - \mu(T'_i(x))^T f'(x)]^2 =$$

$$= \|T(x)\|_2^2 - 2\mu \sum_{i=1}^m T_i(x)(T'_i(x))^T f'(x) + \mu^2 \sum_{i=1}^m [(T'_i(x))^T f'(x)]^2.$$

Drept coeficient de descreștere se alege punctul de minim al funcției $\psi(\mu)$.

Deoarece $(T'_i(x))^T f'(x) = 2(T'_i(x))^T (T'(x))^T T(x)$ sunt componentele vectorului

$$2 \begin{pmatrix} (T'_1(x))^T \\ \vdots \\ (T'_m(x))^T \end{pmatrix} (T'(x))^T T(x) = 2T'(x)(T'(x))^T T(x)$$

expresia funcției $\psi(\mu)$ devine

$$\begin{aligned} \psi(\mu) &= \|T(x)\|_2^2 - 4\mu(T(x))^T T'(x)(T'(x))^T T(x) + 4\mu^2 \|T'(x)(T'(x))^T T(x)\|_2^2 = \\ &= \|T(x)\|_2^2 - 4\mu \|T'(x)(T'(x))^T T(x)\|_2^2 + 4\mu^2 \|T'(x)(T'(x))^T T(x)\|_2^2. \end{aligned}$$

Așadar

$$\mu = \operatorname{argmin} \psi(\mu) = \frac{\|(T'(x))^T T(x)\|_2^2}{2\|T'(x)(T'(x))^T T(x)\|_2^2}.$$

Aproximarea unei soluții a sistemului (20.4) se găsește cu șirul $(x^{(k)})_{k \in \mathbb{N}}$ definit prin formula de recurență

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} - \frac{\|(T'(x^{(k)}))^T T(x^{(k)})\|_2^2}{\|T'(x^{(k)})(T'(x^{(k)}))^T T(x^{(k)})\|_2^2} (T'(x^{(k)}))^T T(x^{(k)}). \quad (20.6)$$

20.3 Rezolvarea unei ecuații liniare prin metode de optimizare

Fie X un spațiu Hilbert real, $D(A)$ un subspațiu liniar al lui X , un operator liniar $A \in (D(A), X)^\#$ și $b \in X$. Problema studiată în această secțiune este rezolvarea ecuației

$$A(x) = b \quad (20.7)$$

Definiție 20.3.1 Operatorul liniar $A \in (D(A), X)^\#$ este

- *simetric* dacă $\langle A(x), y \rangle = \langle x, A(y) \rangle$, $\forall x, y \in D(A)$;
- *pozitiv* dacă $\langle A(x), x \rangle \geq 0$, $\forall x \in D(A)$;
- *strict pozitiv* dacă $\langle A(x), x \rangle > 0$, $\forall x \in D(A) \setminus \{0\}$;

- *tare pozitiv* dacă $\exists m > 0$ astfel încât $\langle A(x), x \rangle \geq m\|x\|^2, \quad \forall x \in D(A)$.

Dacă operatorul A este strict pozitiv atunci ecuația (20.7) are cel mult o soluție.

Atașam ecuației (20.7) funcționala $J : D(A) \rightarrow X$ definită prin

$$J(x) = \langle A(x), x \rangle - 2 \langle b, x \rangle \quad (20.8)$$

Au loc următoarele proprietăți simple ale funcționalei J .

SCHEIBER ERNEST

SCHEIBER ERNEST

SCHEIBER ERNEST

SCHEIBER ERNEST

SCH
EIBER ERNEST

Partea V

SCH
EIBER ERNEST

ANEXE

SCH
EIBER ERNEST

SCH
EIBER ERNEST

Anexa A

Noțiuni de teoria erorilor

În cursul rezolvării unei probleme numerice apar erori. Potrivit sursei, se pot distinge trei tipuri de erori:

1. *Erori inerente*, care provin din simplificarea modelului fizic în procesul de modelare matematică, din măsurătorile inițiale, din calculele anterioare problemei, etc.
2. *Erori de metodă*. În general metoda de calcul numeric construiește un șir de aproximații convergent către soluția problemei de calcul numeric, iar din punct de vedere practic se calculează un element al șirului de aproximații.
3. *Erori de rotunjire* în datele de intrare, în calcule și în datele de ieșire ca urmare a utilizării unui sistem de calcul ce folosește un mod specific de reprezentare a numerelor.

A.1 Eroare absolută și eroare relativă

Fie x o aproximație a valorii exacte $a \in \mathbb{R}$.

Definiția 1 $\Delta x = a - x$ este eroarea aproximației x ;
 $|\Delta x| = |a - x|$ este eroarea absolută a aproximației x ;
 $\delta x = \frac{|\Delta x|}{|a|}$ este eroarea relativă a aproximației x , ($a \neq 0$).

Noțiunile introduse se extind pentru elemente ale unui spațiu liniar normat prin

$$\|\Delta x\| = \|a - x\|, \quad \delta x = \frac{\|\Delta x\|}{\|a\|}.$$

A.2 Reprezentarea numerelor în virgulă mobilă

Fie $t, r, b \in \mathbb{N}^*$, $b > 1$ și notăm:

$b_1 = b - 1$ (cea mai mare cifră în baza b);

$q = \underbrace{b_1 \dots b_1}_r$ (cel mai mare număr în baza b având r cifre).

În cele ce urmează toate numerele naturale sunt scrise în baza b .

Orice număr $a \in \mathbb{R}_+$ se scrie succesiv

$$\begin{aligned} a &= a_e b^e + a_{e-1} b^{e-1} + \dots + a_1 b + a_0 + \frac{a_{-1}}{b} + \frac{a_{-2}}{b^2} + \dots = \\ &= \left(\sum_{k=0}^{\infty} a_{e-k} b^{-k} \right) b^e = \left(\sum_{k=0}^t a_{e-k} b^{-k} \right) b^e + \left(\sum_{k=t+1}^{\infty} a_{e-k} b^{-k} \right) b^{e-t}. \end{aligned} \quad (\text{A.1})$$

Notând $\tilde{f} = \sum_{k=0}^t a_{e-k} b^{-k}$ și $\tilde{g} = \sum_{k=t+1}^{\infty} a_{e-k} b^{-k}$ relația (A.1) devine

$$a = \tilde{f} b^e + \tilde{g} b^{e-t} \quad (\text{A.2})$$

Exemplul A.2.1 Fie $t = 4$, $s = 2$, $b = 10$ și $a = 1492.631435$.

Atunci $a = 1.492631435 \cdot 10^3 = 1.4926 \cdot 10^3 + 0.31435 \cdot 10^{-1}$.

Considerăm mulțimea

$$V_{t,r,b} = \{x \in \mathbb{R} : x = s \cdot f \cdot b^e\} \cup \{0\}$$

unde:

- f este un număr având t cifre după punctul zecimal și cu partea întreagă formată dintr-o singură cifră nenulă. $f = \overline{f_0 \cdot f_{-1} \dots f_{-tb}}$, $f_0 \neq 0$. f se numește mantisă și în același timp vom spune că f este o formă normalizată.
- e este un număr întreg de cel mult r cifre.
- s corespunde semnelui, $s = 1$ sau $s = -1$.

Astfel reprezentarea unui număr real a în virgulă mobilă este caracterizată de tripletul (s, e, f) . Reprezentarea lui $0 = 0b^{-q}$ este $(\pm 1, -q, 0)$.

Cel mai mic și cel mai mare număr pozitiv ale mulțimii $V_{t,r,b}$, sunt $m = 1.0 \cdot b^{-q}$ și respectiv $M = b_1 \cdot \underbrace{b_1 \dots b_1}_t \cdot b^q$.

Astfel $V_{t,r,b}$ este o submulțime de numere raționale a mulțimii

$$[-M, -m] \cup \{0\} \cup [m, M].$$

Reprezentarea unui număr real $a \in \mathbb{R}^*$ în virgulă mobilă se obține aproximând a printr-un element al mulțimii $V_{t,r,b}$.

Pornind de la reprezentarea (A.2) pentru $|a| = \tilde{f} b^e + \tilde{g} b^{e-t}$, cu \tilde{f} formă normalizată și e având cel mult r cifre, există mai multe procedee de construire a unei aproximații a lui a prin elementele mulțimii $V_{t,s,b}$.

1. Aproximarea prin trunchiere: $x = \tilde{f} b^e$.
2. Aproximarea prin rotunjire: $x = \begin{cases} \tilde{f} & \text{dacă } g < \frac{1}{2}b^{e-t} \\ \tilde{f} + b^{e-t} & \text{dacă } g \geq \frac{1}{2}b^{e-t} \end{cases}$

Aproximația lui a în $V_{t,r,b}$ va fi $\text{fl}(a) = \text{sgn}(a)x$.

A.3 Aritmetica numerelor reale reprezentate în virgulă mobilă

Definim operațiile aritmetice în $V_{t,s,b}$:

Adunarea / Scăderea. Pentru a aduna/scădea numerele $\text{fl}(a_1)$, $\text{fl}(a_2)$ se efectuează următoarele operații:

1. Se aduc numerele $\text{fl}(a_1)$ și $\text{fl}(a_2)$ la exponentul cel mai mare, păstrându-se numărul de zecimale (t) ale mantiselor;
2. Se adună/scad mantisele;
3. Se renormează rezultatul: dacă mantisa este diferită de 0 atunci se modifică exponentul astfel încât mantisa să fie o formă normalizată; dacă mantisa este 0, atunci exponentului i se atribuie valoarea $-q$.

Rezultatul astfel obținut îl notăm $\text{fl}(a_1) \oplus \text{fl}(a_2)$.

Exemplul A.3.1 Fie $t = 4$, $r = 2$, $b = 10$ și $a_1 = 99.01325$, $a_2 = 0.98724$. Să se calculeze $\text{fl}(a_1) \oplus \text{fl}(a_2)$.

Atunci $\text{fl}(a_1) = 9.9013 \cdot 10^1$, $\text{fl}(a_2) = 9.8724 \cdot 10^{-1}$ și

$$9.9013 \cdot 10^1 + 0.0987 \cdot 10^1 = 10.0000 \cdot 10^1 \rightarrow 1.0000 \cdot 10^2 = \text{fl}(a_1) \oplus \text{fl}(a_2).$$

Observație A.3.1 În general adunarea nu este asociativă, după cum rezultă din exemplul ($t=4$, $r=2$, $b=10$).

Exemplul A.3.2 Fie $a_1 = 0.0123$, $a_2 = 5678$, $a_3 = -5678$.

Ținând seama de egalitățile:

$$\text{fl}(a_1) = 1.2300 \cdot 10^{-2}, \quad \text{fl}(a_2) = 5.6780 \cdot 10^3, \quad \text{fl}(a_3) = -5.6780 \cdot 10^3$$

obținem

$$\begin{aligned} (\text{fl}(a_1) \oplus \text{fl}(a_2)) \oplus \text{fl}(a_3) &= (0.0000 \cdot 10^3 + 5.6780 \cdot 10^3) \oplus \text{fl}(a_3) = \\ &= 5.6780 \cdot 10^3 - 5.6780 \cdot 10^3 = 0.0000 \cdot 10^3 \rightarrow 0.0000 \cdot 10^{-99} \end{aligned}$$

și

$$\begin{aligned} \text{fl}(a_1) \oplus (\text{fl}(a_2) \oplus \text{fl}(a_3)) &= \text{fl}(a_1) \oplus (5.6780 \cdot 10^3 - 5.6780 \cdot 10^3) = \\ &= 1.2300 \cdot 10^{-2} + 0.0000 \cdot 10^{-99} = 1.2300 \cdot 10^{-2} + 0.0000 \cdot 10^{-2} = 1.2300 \cdot 10^{-2}. \end{aligned}$$

Înmulțirea/împărțirea. Produsul/câtul dintre $\text{fl}(a_1)$, $\text{fl}(a_2)$ se obține efectuând operațiile:

1. Se înmulțesc/împart mantisele și se adună/scad exponenții;
2. Se renormează rezultatul în sensul precizat la adunare/scădere.

Rezultatul se notează cu $\text{fl}(a_1) \odot \text{fl}(a_2)$.

Exemplul A.3.3 Fie $t=4$, $s=r$, $b=10$ și $a_1 = 40.1345$, $a_2 = 0.06346$. Să se calculeze $\text{fl}(a_1) \odot \text{fl}(a_2)$.

Atunci $\text{fl}(a_1) = 4.0134 \cdot 10^1$ și $\text{fl}(a_2) = 6.3460 \cdot 10^{-2}$. Rezultă:

$$4.0134 \cdot 10^1 \cdot 6.3460 \cdot 10^{-2} = 25.4690364 \cdot 10^{-1} \rightarrow 2.5469 \cdot 10^0 = \text{fl}(a_1) \odot \text{fl}(a_2).$$

Observație A.3.2 În general, înmulțirea nu este asociativă.

A.4 Protocolul IEEE 754

Protocolul IEEE (Institute for Electrical and Electronics Engineers) 754 fixează detaliile de implementare a reprezentării numerelor reale în virgulă mobilă.

Baza de numerotație este $b = 2$.

Fie $x = s f 2^e \in V_{t,r,2}$ reprezentarea în virgulă mobilă a unui număr a . În memoria calculatorului se va reține tripletul (σ, ϵ, ϕ) unde:

- σ corespunde semnului:
 - 0 pentru numere pozitive
 - 1 pentru numere negative
- ϕ corespunde mantisei f . Cifra unităților fiind diferită de 0 este neapărat 1. Această cifră nu este înregistrată. Dacă $f = \overline{f_0.f_{-1} \dots f_{-t_b}}$ atunci ϕ este șirul de cifre binare $\phi = (f_{-1}, \dots, f_{-t})$.
- Presupunem că $e \in \{e_{\min}, \dots, e_{\max}\}$, $e_{\min}, e_{\max} \in \mathbb{Z}$, cu cel mult r cifre binare. La exponentul e se adună o constantă E astfel încât pentru orice $e \in \{e_{\min}, \dots, e_{\max}\}$, $e \in \mathbb{Z}$, suma $e + E$ să fie un număr natural având cel mult r cifre binare. În felul acesta semnul exponentului nu mai trebuie precizat explicit. ϵ este șirul cifrelor binare ale sumei $e + E$, $\epsilon = (\epsilon_{r-1}, \dots, \epsilon_1, \epsilon_0)$.

Protocolul IEEE 754 permite și reprezentarea unor numere pentru care în relația (A.2) corespunzătoare, are loc inegalitatea $e < e_{\min}$. În acest caz $\epsilon = 0^1$ iar f este o formă nenormalizată, $f = \overline{0.f_{-1} \dots f_{-t_2}}$. Cel mai mic număr reprezentabil va fi 2^{-E-t} , căruia îi corespunde $\phi = \underbrace{(0, 0, \dots, 0, 1)}_{t \text{ elemente}}$.

Ultima cifră a mantisei ϕ se obține prin rotunjire.

Numărului 0 îi corespund $\epsilon \neq 0$ și $\phi = 0$.

Dacă $\epsilon = \underbrace{(1, 1, \dots, 1, 1)}_{r \text{ elemente}}$ și $\phi = 0$ atunci reprezentarea corespunde pentru ∞ .

Dacă $\epsilon = \underbrace{(1, 1, \dots, 1, 1)}_{r \text{ elemente}}$ și $\phi \neq 0$ atunci semnificația reprezentării este NaN (Not a Number).

Parametri utilizați pentru reprezentarea în simplă și dublă precizie.

¹Prin 0 s-a notat șirul cu toate elementele egale cu 0.

	Reprezentarea pe	
	4 octeți (simplă precizie)	8 octeți (dublă precizie)
e_{\min}	-126	-1022
e_{\max}	127	1023
E	127	1023
r	8	11
t	23	52

Exemplu. Fie $a = 0.1$. Reprezentarea în baza 2 a lui a este

$$a = \overline{0.000(1100)}_2 = \overline{1.(1001)}_2 2^{-4}.$$

1. Reprezentarea în simplă precizie. $e + E = 123 = \overline{1111011}_2$. Se obține reprezentarea

3	2	1	
10987654	32109876	54321098	76543210
$\sigma\epsilon$	ϕ		
00111101	11001100	11001100	11001101

Octeții reprezentării conțin valorile: 61,204,204,205.

2. Reprezentarea în dublă precizie. $e + E = 1019 = \overline{111111011}_2$. Se obține reprezentarea

6	5	4	
32109876	54321098	76543210	89765432
$\sigma\epsilon$	ϕ		
00111111	10111001	10011001	10011001
3	2	1	
10987654	32109876	54321098	76543210
10011001	10011001	10011001	10011010

Octeții reprezentării conțin valorile: 63,185,153,153,153,153,154.

Mediul de programare Java utilizează standardul IEEE 754 pentru reprezentarea numerelor reale – tipurile predefinite *float*, *double* – în virgulă mobilă.

A.5 Controlul erorii

Exemplificăm apariția și controlul erorii de metodă în problema calculului numărului \sqrt{e} astfel încât eroarea absolută să fie cel mult $\epsilon = 10^{-3}$.

Din egalitatea

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \frac{e^{\theta \cdot x} \cdot x^{n+1}}{(n+1)!} \quad (0 < \theta < 1)$$

pentru $x = \frac{1}{2}$ obținem

$$\sqrt{e} = 1 + \frac{1}{1!} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{2!} \cdot \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{n!} \cdot \frac{1}{2^n} + \frac{e^{\frac{\theta}{2}}}{(n+1)!} \cdot \frac{1}{2^{n+1}}.$$

Potrivit relației de mai sus, aproximația lui \sqrt{e} va fi

$$x = 1 + \frac{1}{1!} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{2!} \cdot \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{n!} \cdot \frac{1}{2^n}$$

termenul $\frac{e^{\frac{\theta}{2}}}{(n+1)!} \cdot \frac{1}{2^{n+1}}$ exprimă eroarea metodei de calcul. Pentru a putea efectua calculele trebuie să determinăm parametrul n , pe care îl alegem drept cel mai mic număr natural pentru care

$$\frac{e^{\frac{\theta}{2}}}{(n+1)!} \cdot \frac{1}{2^{n+1}} \leq \varepsilon.$$

Deoarece $\theta \in (0, 1)$, avem $e^{\frac{\theta}{2}} \leq e^{\frac{1}{2}} \leq e \leq 3$ și în consecință inegalitățile:

$$\frac{e^{\frac{\theta}{2}}}{(n+1)!} \cdot \frac{1}{2^{n+1}} \leq \frac{3}{2^{n+1} \cdot (n+1)!} \leq 10^{-3}$$

au loc pentru $n \geq 4$. Pentru $n = 4$ găsim

$$x = 1 + \frac{1}{1!} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{2!} \cdot \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3!} \cdot \frac{1}{2^3} + \frac{1}{4!} \cdot \frac{1}{2^4} = \frac{1265}{768}.$$

În general, suntem interesați în scrierea rezultatului sub formă de fracție zecimală. În cazul nostru rezultatul $\frac{1265}{768}$ apare ca o fracție periodică mixtă, dar din considerente practice rezultatul se va rotunji la un număr de zecimale. În felul acesta apare încă o eroare de trunchiere.

Fie numerele pozitive $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ astfel încât $\varepsilon_1 + \varepsilon_2 = \varepsilon$. Vom impune condiția ca eroarea metodei să fie mai mică decât ε_1 iar rotunjirea se va face la un număr de zecimale astfel încât eroarea de trunchiere să fie mai mică decât ε_2 .

Reamintim regulile de rotunjire ale unui număr

$$a = a_p \cdot 10^p + a_{p-1} \cdot 10^{p-1} + \dots = \sum_{k=0}^{\infty} a_{p-k} \cdot 10^{p-k}$$

scris în baza 10 la m cifre:

- dacă prima cifră omisă este mai mică decât 5, atunci ultima cifră păstrată se lasă nemodificată;
- dacă prima cifră omisă este mai mare decât 5, atunci ultima cifră păstrată se mărește cu o unitate;
- dacă prima cifră omisă este 5 și dacă după 5 urmează cifre diferite de 0, atunci ultima cifră păstrată se mărește cu o unitate, iar dacă după 5 urmează numai zerouri, atunci ultima cifră păstrată se mărește sau nu cu o unitate după cum este pară sau impară.

Eroarea absolută care se face în urma rotunjirii la m cifre este

$$|\Delta x| \leq \frac{1}{2} \cdot 10^{p-m+1}$$

Reluăm problema inițială, luând $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \frac{1}{2} \cdot 10^{-3}$. Inegalitatea

$$\frac{3}{2^{n+1} \cdot (n+1)!} < \frac{1}{2} \cdot 10^{-3}$$

are loc pentru orice $n \geq 5$. Pentru $n = 5$ obținem

$$x = 1 + \frac{1}{1!} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{2!} \cdot \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3!} \cdot \frac{1}{2^3} + \frac{1}{4!} \cdot \frac{1}{2^4} + \frac{1}{5!} \cdot \frac{1}{2^5}.$$

Determinăm numărul cifrelor la care efectuăm rotunjirea drept cel mai mic număr natural m pentru care

$$|\Delta y| = |x - y| \leq \frac{1}{2} \cdot 10^{-m+1} < \frac{1}{2} \cdot 10^{-3}.$$

Rezultă $m = 4$ și în consecință $y = 1.6487$.

O conexiune între o aproximație x a unui număr, rotunjirea lui x la m zecimale și aproximațiile prin lipsă și adaus ale numărului este dată de

Dacă x este o aproximație a numărului subunitar a astfel încât $|\Delta x| < \frac{1}{2} \cdot 10^{-m}$, atunci rotunjirea lui x la m zecimale coincide sau cu aproximarea prin lipsă, sau cu aproximarea prin adaus a lui a la m zecimale.

Într-adevăr, dacă $a = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a-k}{10^k}$, atunci aproximarea prin lipsă și prin adaus a lui a la m zecimale sunt:

$$\sigma_m = \sum_{k=1}^m \frac{a-k}{10^k} \text{ și respectiv } \tau_m = \sigma_m + \frac{1}{10^m}.$$

Fie y rotunjirea lui x la m zecimale. Din inegalitatea $|\Delta y| = |y - x| \leq \frac{1}{2} \cdot 10^{-m}$ deducem $|a - y| \leq |a - x| + |x - y| < 10^{-m}$.

Rezultă inegalitățile

$$\sigma_m - 10^{-m} \leq a - 10^{-m} < y < a + 10^{-m} \leq \tau_m + 10^{-m} = \sigma_m + 2 \cdot 10^{-m}.$$

Multiplicând cu 10^m , găsim

$$10^m \cdot \sigma_m - 1 < 10^m \cdot y < 10^m \cdot \sigma_m + 2.$$

Deoarece $10^m \cdot \sigma_m$, $10^m \cdot y \in N$, urmează că

$$10^m \cdot y = 10^m \cdot \sigma_m$$

sau

$$10^m \cdot y = 10^m \cdot \sigma_m + 1,$$

adică $y = \sigma_m$ sau $y = \sigma_m + 10^{-m} = \tau_m$.

Probleme și teme de seminar

P A.1 Să se elaboreze un program Java care să se verifice reprezentarea numerelor reale în virgulă mobilă.

```
import java.io.*;
public class Reprez{
    public static void main(String args[]){
        byte b[]=new byte[10];
        int x;
        try{
            ByteArrayOutputStream bos=new ByteArrayOutputStream();
            DataOutputStream dos=new DataOutputStream(bos);
            double a=0.1;
            System.out.println("a="+a);
            dos.writeDouble(a);
            b=bos.toByteArray();
            dos.close();
            bos.close();
            for(int i=0;i<b.length;i++){
                if(b[i]<0)
                    x=256+b[i];
                else
                    x=b[i];
                System.out.println(x);
            }
        }
        catch(IOException e){
            System.out.println(e.getMessage());
        }
    }
}
```

P A.2 Integrala $I_n = \int_0^1 \frac{x^n}{x+5} dx$ satisface relația de recurență $I_n + 5I_{n-1} = \frac{1}{n}$, $I_0 = \ln \frac{6}{5}$. Să se arate că utilizând formula de recurență, într-un program de calculator cu I_n reprezentat în virgula mobilă, se va obține $I_n < 0$. Problema apare datorită erorilor de rotunjire.

SCHEIBER ERNEST SCHEIBER ERNEST

SCHEIBER ERNEST SCHEIBER ERNEST

Anexa B

Implementarea metodelor iterative

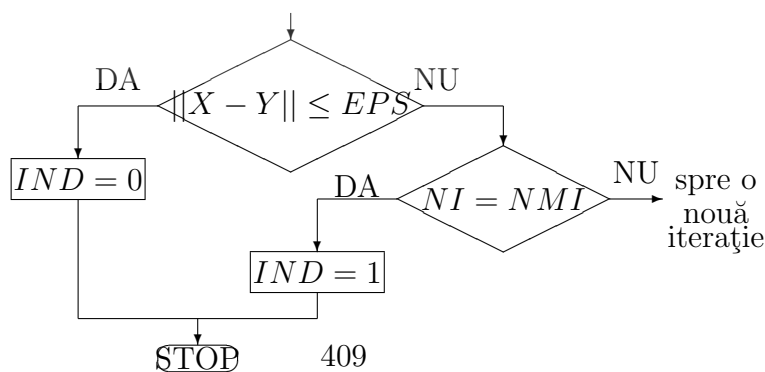
Metodele numerice iterative conduc la construirea unui șir de aproximații succesive $(x^k)_{k \in N}$ ale unei soluții căutate. Programarea metodei iterative necesită o regulă de oprire.

Este utilizată frecvent următoarea regulă de oprire:

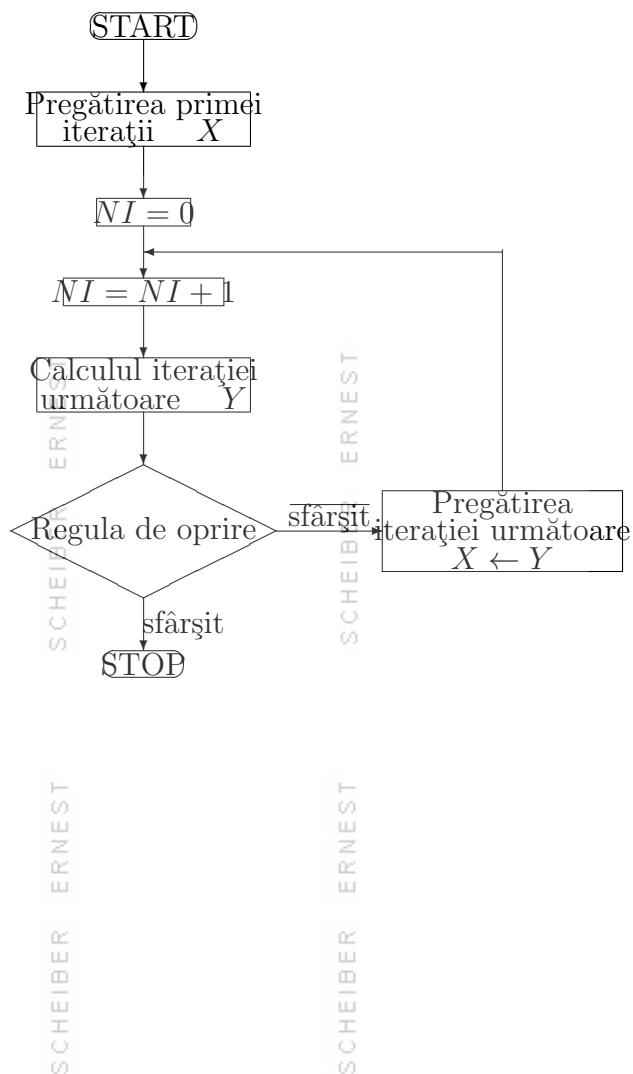
Dacă distanța între două aproximații succesive $x^k = X$ și $x^{k+1} = Y$ este mai mică decât un număr pozitiv EPS , sau dacă numărul de iterații executate NI este egal cu numărul maxim admis de iterații NMI atunci programul se oprește; iar în caz contrar se trece la o nouă iterație.

În cazul opririi calculului, se poziționează un indicator de răspuns IND pe 0, dacă distanța dintre aproximațiile succesive X și Y este mai mică decât EPS , iar în caz contrar pe 1.

Regula de oprire are schema logică:



Schema logică a unui algoritm relativ la o metodă iterativă este:



Anexa C

Identități trigonometrice

Au loc identitățile:

- $$\sum_{k=1}^n \sin(a + (k-1)h) = \frac{\sin \frac{nh}{2}}{\sin \frac{h}{2}} \sin(a + \frac{n-1}{2}h).$$
- $$\sum_{k=1}^n \cos(a + (k-1)h) = \frac{\sin \frac{nh}{2}}{\sin \frac{h}{2}} \cos(a + \frac{n-1}{2}h).$$
- $$\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^n \cos ka = \frac{\sin(n+\frac{1}{2})a}{2 \sin \frac{a}{2}}.$$
- $$1 + 2 \sum_{k=1}^{n-1} \cos ka + \cos na = \cot \frac{a}{2} \sin na.$$
- $$n + 2 \sum_{k=1}^{n-1} (n-k) \cos ka = \left(\frac{\sin \frac{na}{2}}{\sin \frac{a}{2}} \right)^2.$$
- $$\prod_{k=0}^{n-1} \sin(t + k\frac{\pi}{n}) = \frac{\sin nt}{2^{n-1}}, \quad 0 < t < \frac{\pi}{n}.$$

4.

$$\cot \frac{a}{2} \sin na = \frac{\sin(n+\frac{1}{2})a}{2 \sin \frac{a}{2}} + \frac{\sin(n-\frac{1}{2})a}{2 \sin \frac{a}{2}}$$

și se aplică identitatea de la pct. 3.

5. Considerăm descompunerea în factori a polinomului $z^n - e^{i2nt}$:

$$z^n - e^{i2nt} = \prod_{k=0}^{n-1} \left(z - \cos \frac{2nt + 2k\pi}{n} - i \sin \frac{2nt + 2k\pi}{n} \right).$$

Pentru $z := 1$ rezultă

$$-2i \sin nt (\cos nt + i \sin nt) = \prod_{k=0}^{n-1} \left(-2i \sin \left(t + \frac{k\pi}{n} \right) \left(\cos \left(t + \frac{k\pi}{n} \right) + i \sin \left(t + \frac{k\pi}{n} \right) \right) \right).$$

Din egalitatea modulelor rezultă identitatea cerută.

SCHEIBER ERNEST SCHEIBER ERNEST

SCHEIBER ERNEST SCHEIBER ERNEST

Anexa D

Determinarea parametrilor unor metode numerice

Pentru a putea folosi o metodă numerică, parametrii care intervin trebuie determinate exact. În acest scop se pot utiliza produse program de calcul simbolic. Aplicațiile care urmează se bazează pe *Derive*.

1. Numerele lui Cotes sunt

$$C_{n,i} = \frac{(-1)^{n-i}}{ni!(n-i)!} \int_0^n q(q-1) \dots (q-i+1)(q-i-1) \dots (q-n) dq.$$

Programarea în *Derive* este

```
#1: cotes(n,i):=(-1)^i/(n i!(n-i)!) int(product(if(j≠i,q-j,1),j,0,n),q,0,n)
```

Tabloul numerelor lui Cotes se obține prin simplificarea expresiei

```
#2: vector(vector(cotes(n,i),i,0,n),n,1,4)
```

Rezultă:

```
#3: [[1/2, 1/2], [1/6, 2/3, 1/6], [1/8, 3/8, 3/8, 1/8], [7/90, 16/45, 2/15, 16/90, 7/90]]
```

2. Calculul nodurilor și coeficienților formulei de integrare numerică de tip Gauss $\rho(x) = 1$. Polinoamele ortogonale cu ponderea $\rho(x) = 1$, în

intervalul $[a, b]$ sunt polinoamele lui Legendre

$$P_n(x) = \frac{n!}{(2n)!} [(x-a)^n (x-b)^n]^{(n)}$$

#1: `p(n,x):=n!/(2n)! dif((x-a)^n(x-b)^n,x,n)`

Pentru formula de integrare numerică Gauss cu n noduri, acestea sunt rădăcinile polinomului Legendre $P_n(x)$.

#2 #2: `nod(n):=solve([p(n,x)=0],x)`

Nodurile formulelor de integrare numerică pentru $n \in \{1, 2, 3, , 4\}$ sunt

#3: `vector(nod(n),n,1,4)`

Comanda `Simplify` produce

$$\begin{aligned} \#4: & \left[\left[x = \frac{a+b}{2} \right], \left[x = \frac{\sqrt{3} \cdot |a-b|}{6} + \frac{a+b}{2}, x = \frac{\sqrt{3} \cdot |a-b|}{6} - \frac{a+b}{2} \right], \right. \\ & \left[x = \frac{a+b}{2}, x = \frac{\sqrt{15} \cdot |a-b|}{10} + \frac{a+b}{2}, x = \frac{\sqrt{15} \cdot |a-b|}{10} - \frac{a+b}{2} \right], \\ & \left[x = \sqrt{\frac{\sqrt{30}}{70} + \frac{3}{28}} \cdot |a-b| + \frac{a+b}{2}, x = \frac{a+b}{2} - \sqrt{\frac{\sqrt{30}}{70} + \frac{3}{28}} \cdot |a-b|, \right. \\ & \left. x = \sqrt{\frac{3}{28} - \frac{\sqrt{30}}{70}} \cdot |a-b| + \frac{a+b}{2}, x = \frac{a+b}{2} - \sqrt{\frac{3}{28} - \frac{\sqrt{30}}{70}} \cdot |a-b| \right] \end{aligned}$$

Coeficienții formulei de integrare numerică Gauss se pot obține în *Derive* folosind formula

$$A_i = \frac{(n!)^4 (b-a)^{2n+1}}{(2n!)^2 (x_i - a)(b - x_i) [P'_n(x_i)]^2} = \frac{(n!)^4 (b-a)^{2n+1}}{(2n!)^2 (x_i - a)(b - x_i) \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n (x_i - x_j)^2}$$

#5: `C(n,i):=(n!)^4(b-a)^(2n+1)/(((2n)!)^2
(rhs(nod(n)sub i)-a)(b-rhs(nod(n) sub i))
product(
if(j=i,1,(rhs(nod(n) sub i)-rhs(nod(n) sub j))^2),`

j,1,n))

Formăm vectorul coeficienților

```
#6: coef(n):=vector(C(n,i),i,1,n)
```

și simplificăm expresia

```
#7: vector(coef(n),n,1,3)
#8: [[b-a], [b-a/2, b-a/2], [4*(b-a)/9, 5*(b-a)/18, 5*(b-a)/18]]
```

Pentru $n \geq 4$, fixăm valorile lui $a = -1$ și $b = 1$ și deoarece calculele se efectuează numeric, utilizăm programul

```
#1: a:=-1
#2: b:=1
#3: p(n,x):=n!/(2n)! dif((x-a)^n(x-b)^n,x,n)
#4: nod(n):=nsolutions(p(n,x),x)
#5: C(n,i):=(n!)^4(b-a)^(2n+1)/(((2n)!)^2
      (nod(n) sub i-a)(b-nod(n) sub i)
      product(
        if(j=i,1,(nod(n) sub i-nod(n) sub j)^2),
        j,1,n))
#6: coef(n):=vector(C(n,i),i,1,n)
```

Cu comanda Simplify/Approximate expresiile nod(4) și coef(4) produc nodurile

```
[0.8611363115, -0.8611363115, 0.3399810435, -0.3399810435]
```

și respectiv coeficienții formulei de integrare numerică

```
[0.3478548451, 0.3437548451, 0.6521451548, 0.6521451548]
```

3. Calculul coeficienților schemei de calcul Adams sunt

$$\beta_j = (-1)^j \sum_{i=j}^r \binom{i}{j} \alpha_i \quad j = 0, 1, \dots, r$$

unde

$$\begin{aligned} \alpha_0 &= p + q \\ \alpha_i &= \frac{1}{i!} \int_{-q}^p z(z+1) \dots (z+i-1) dz \quad i = 1, 2, \dots, r. \end{aligned}$$

Calculul acestor coeficienți se programează în *Derive* prin

```
#1  $\alpha(i,p,q) := \text{if}(i=0,p+q, 1/i! \text{int}(\text{product}(z+j, j, 0, i-1), z, -q, p))$ 
#2  $\beta(r,j,p,q) := (-1)^j \text{sum}(\text{comb}(k,j) \alpha(k,p,q), k, j, r)$ 
```

Coeficienții schemei de calcul Adams - Bashforth ($p = 1, q = 0$) se obțin din

```
#3  $\text{vector}(\text{vector}(\beta(r,j,1,0), j, 0, r), r, 1, 5)$ 
#4  $[[[\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}], [\frac{23}{12}, -\frac{4}{3}, \frac{5}{12}], [\frac{55}{24}, -\frac{59}{24}, \frac{37}{24}, -\frac{3}{8}], [\frac{1901}{720}, -\frac{1387}{360}, \frac{109}{30}, -\frac{637}{360}, \frac{251}{720}],$ 
 $[\frac{4277}{1440}, -\frac{2641}{480}, \frac{4991}{720}, -\frac{3649}{720}, \frac{959}{480}, -\frac{95}{288}]]$ 
```

Coeficienții schemei de calcul Adams - Moulton ($p = 0, q = 1$) se obțin din

```
#5  $\text{vector}(\text{vector}(\beta(r,j,0,1), j, 0, r), r, 1, 5)$ 
#6  $[[[\frac{1}{2}, \frac{1}{2}], [\frac{5}{12}, \frac{2}{3}, -\frac{1}{12}], [\frac{3}{24}, \frac{19}{24}, -\frac{5}{24}, \frac{1}{24}], [\frac{251}{720}, \frac{323}{360}, -\frac{11}{30}, \frac{53}{360}, -\frac{19}{720}],$ 
 $[\frac{95}{288}, \frac{1427}{1440}, -\frac{133}{240}, \frac{241}{720}, -\frac{173}{1440}, \frac{3}{160}]]$ 
```


Anexa E

Îmbunătățirea convergenței

E.1 Ordinul de convergență al unui șir

Definiție E.1.1 Fie $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ un șir convergent într-un spațiu normat, $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_*$. Dacă există un număr $r > 0$ astfel încât

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\|x_{n+1} - x_*\|}{\|x_n - x_*\|^r} = c, \quad 0 < c < \infty,$$

atunci șirul $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ are ordinul de convergență r .

În funcție de r se utilizează terminologia:

convergență liniară $r = 1$
convergență superliniară $1 < r < 2$
convergență pătratică $r = 2$

Observație E.1.1 Dacă există $M > 0$ astfel încât

$$\|x_{n+1} - x_*\| \leq M \|x_n - x_*\|^s, \quad \forall n \geq n_0$$

atunci ordinul de convergență este cel puțin s .

Fie r ordinul de convergență al șirului $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$. Dacă $r < s$ atunci

$$\frac{\|x_{n+1} - x_*\|}{\|x_n - x_*\|^s} = \frac{\|x_{n+1} - x_*\|}{\|x_n - x_*\|^r} \frac{1}{\|x_n - x_*\|^{s-r}} \rightarrow \infty, \quad n \rightarrow \infty,$$

ceea ce contrazice condiția din observație.

Definiție E.1.2 Dacă $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_*$ și $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{y_n - x_*}{x_n - x_*} = 0$ atunci șirul $(y_n)_n$ converge mai rapid decât șirul $(x_n)_n$.

E.2 Îmbunătățirea convergenței unui șir

Teorema E.2.1 *Dacă*

- $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$
- $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1} - a}{a_n - a} = k, \quad k \neq 1$

atunci șirul $x_n = a_n - \frac{(a_{n+1} - a_n)^2}{a_{n+2} - 2a_{n+1} + a_n}$ converge mai repede către a decât șirul $(a_n)_n$.

Demonstrație. Notăm $e_n = a_n - a$. Ipotezele teoremei se scriu $\lim_{n \rightarrow \infty} r_n = 0$ și $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{e_{n+1}}{e_n} = k$. Au loc egalitățile

$$\begin{aligned} \frac{x_n - a}{a_n - a} &= \frac{e_n - \frac{(e_{n+1} - e_n)^2}{e_{n+2} - 2e_{n+1} + e_n}}{e_n} = \frac{e_{n+2}e_n - e_{n+1}^2}{e_n(e_{n+2} - 2e_{n+1} + e_n)} = \\ &= \frac{\frac{e_{n+2}}{e_{n+1}} \frac{e_n}{e_{n+1}} - 1}{\frac{e_n}{e_{n+1}} \left(\frac{e_{n+2}}{e_{n+1}} - 2 + \frac{e_n}{e_{n+1}} \right)}. \end{aligned}$$

În consecință

$$\frac{x_n - a}{a_n - a} = \frac{k \frac{1}{k} - 1}{\frac{1}{k} \left(k - 2 + \frac{1}{k} \right)} = 0. \quad \blacksquare$$

E.3 Transformarea lui Euler

Fie seria alternantă $S(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k a_k x^k$ căruia îi asociem seria

$$\tilde{S}(x) = \frac{1}{x+1} \left(a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \Delta a_{k-1} x^k \right),$$

unde $\Delta a_{k-1} = a_k - a_{k-1}$.

Introducem sumele parțiale

$$\begin{aligned} S_n(x) &= \sum_{k=0}^n (-1)^k a_k x^k \\ \tilde{S}_n(x) &= \frac{1}{x+1} \left(a_0 + \sum_{k=1}^n (-1)^k \Delta a_{k-1} x^k \right) \end{aligned}$$

Au loc egalitățile

$$\begin{aligned}\tilde{S}_n(x) &= \frac{1}{x+1} \left(a_0 + \sum_{k=1}^n (-1)^k (a_k - a_{k-1}) x^k \right) = \\ &= \frac{1}{x+1} \left(\sum_{k=0}^n (-1)^k a_k x^k - \sum_{k=1}^n (-1)^k a_{k-1} x^k \right) = \\ &= \frac{1}{x+1} \left(\sum_{k=0}^n (-1)^k a_k x^k \right) - \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^{k+1} a_k x^{k+1} = S_{n-1}(x) + \frac{(-1)^n a_n x^n}{x+1}.\end{aligned}$$

Dacă seria $S(x)$ este convergentă atunci din egalitatea de mai sus rezultă că și seria $\tilde{S}(x)$ este convergentă, având aceeași sumă

$$S(x) = \tilde{S}(x) = \frac{1}{x+1} \left(a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \Delta a_{k-1} x^k \right). \quad (\text{E.1})$$

Aplicând repetat egalitatea (E.1) se obțin succesiv egalitățile

$$\begin{aligned}S(x) &= \frac{1}{x+1} \left(a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \Delta a_{k-1} x^k \right) = \frac{a_0}{x+1} - \frac{x}{x+1} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \Delta a_k x^k = \\ &= \frac{a_0}{x+1} - \frac{x}{(x+1)^2} \left(\Delta a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \Delta^2 a_{k-1} x^k \right) = \\ &= \frac{a_0}{x+1} - \frac{x \Delta a_0}{(x+1)^2} + \left(\frac{x}{x+1} \right)^2 \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \Delta^2 a_k x^k = \\ &= \frac{a_0}{x+1} - \frac{x \Delta a_0}{(x+1)^2} + \frac{x^2}{(x+1)^3} \left(\Delta^2 a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \Delta^3 a_{k-1} x^k \right) = \\ &\dots = \frac{1}{x+1} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \Delta^k a_0 \left(\frac{x}{x+1} \right)^k.\end{aligned}$$

Definiție E.3.1 Transformata Euler a seriei $S(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k a_k x^k$ este seria

$$\mathcal{S}(x) = \frac{1}{x+1} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \Delta^k a_0 \left(\frac{x}{x+1} \right)^k.$$

În particular, pentru $x = 1$ se obține

$$\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k a_k = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{2^{k+1}} \Delta^k a_0.$$

Probleme și teme de seminar

P E.1 Utilizând transformata Euler să se arate egalitățile

$$\ln 2 = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k+1} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(k+1)2^{k+1}}$$
$$\frac{\pi}{4} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1} = \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{k!}{(2k+1)!!}$$

SCHEIBER ERNEST

SCHEIBER ERNEST

SCHEIBER ERNEST

SCHEIBER ERNEST

Anexa F

Determinarea ordinelor de convergență ale metodelor de rezolvare paralelă a ecuațiilor polinomiale utilizând instrumente de calcul simbolic

Este suficient să considerăm polinomul $P(z) = (z - a)(z - b)(z - c)$ și prima componenta $T_1(\mathbf{z})$ a unei metode de calcul paralel a rădăcinilor unui polinom $z^{(k+1)} = T(z^{(k)})$.

Pentru a verifica condițiile Teoremei 18.6.1, datorită proprietăților de simetrie este suficient să calculăm

$$\begin{array}{cccccc} \frac{\partial T_1(\mathbf{z})}{\partial z_1} & \frac{\partial T_1(\mathbf{z})}{\partial z_2} & & & & \\ \frac{\partial^2 T_1(\mathbf{z})}{\partial z_1^2} & \frac{\partial^2 T_1(\mathbf{z})}{\partial z_1 \partial z_2} & \frac{\partial^2 T_1(\mathbf{z})}{\partial z_2^2} & \frac{\partial^2 T_1(\mathbf{z})}{\partial z_2 \partial z_3} & & \\ \frac{\partial^3 T_1(\mathbf{z})}{\partial z_1^3} & \frac{\partial^3 T_1(\mathbf{z})}{\partial z_1^2 \partial z_2} & \frac{\partial^3 T_1(\mathbf{z})}{\partial z_1 \partial z_2^2} & \frac{\partial^3 T_1(\mathbf{z})}{\partial z_2^3} & \frac{\partial^3 T_1(\mathbf{z})}{\partial z_2^2 \partial z_3} & \\ \frac{\partial^4 T_1(\mathbf{z})}{\partial z_1^4} & \frac{\partial^4 T_1(\mathbf{z})}{\partial z_1^3 \partial z_2} & \frac{\partial^4 T_1(\mathbf{z})}{\partial z_1^2 \partial z_2^2} & \frac{\partial^4 T_1(\mathbf{z})}{\partial z_1 \partial z_2^3} & \frac{\partial^4 T_1(\mathbf{z})}{\partial z_2^4} & \frac{\partial^4 T_1(\mathbf{z})}{\partial z_2^3 \partial z_3} & \frac{\partial^4 T_1(\mathbf{z})}{\partial z_2^2 \partial z_3^2} \\ \vdots & & & & & & \end{array}$$

Se vor calcula succesiv elementele liniilor de mai sus până la apariția primului element nenul.

Programul de calcul simbolic utilizat este *Mathematica*.

- **Metoda Durand-Kerner**

$$T_1(z_1, z_2, z_3) = z_1 - \frac{P(z_1)}{(z_1 - z_2)(z_1 - z_3)}$$

Programul *Mathematica* este

```
In[1] :=
  T1[z1, z2, z3] :=
    z1 - (z1 - a) * (z1 - b) * (z1 - c) / ((z1 - z2) * (z1 - z3))
In[2] :=
  D[T1[z1, z2, z3], z1] /. {z1 -> a, z2 -> b, z3 -> c}
Out[2] := 0
In[3] :=
  D[T1[z1, z2, z3], z2] /. {z1 -> a, z2 -> b, z3 -> c}
Out[3] := 0
In[4] :=
  Simplify[D[T1[z1, z2, z3], z1, z2] /. {z1 -> a, z2 -> b, z3 -> c}]
Out[4] := 1 / (-a + b)
```

- **Metoda Erlich**

$$T_1(z_1, z_2, z_3) = z_1 - \frac{P(z_1)}{(z_1 - z_2)(z_1 - z_3) - P(z_1) \left(\frac{1}{z_1 - z_2} + \frac{1}{z_1 - z_3} \right)}$$

Programul *Mathematica* corespunzător este

```
In[1] :=
  T1[z1, z2, z3] :=
    z1 - (z1 - a) * (z1 - b) * (z1 - c) / ((z1 - z2) * (z1 - z3) -
      (z1 - a) * (z1 - b) * (z1 - c) *
      (1 / (z1 - z2) + 1 / (z1 - z3)))
In[2] :=
  D[T1[z1, z2, z3], z1] /. {z1 -> a, z2 -> b, z3 -> c}
Out[2] := 0
In[3] :=
  D[T1[z1, z2, z3], z2] /. {z1 -> a, z2 -> b, z3 -> c}
Out[3] := 0
In[4] :=
  Simplify[D[T1[z1, z2, z3], {z1, 2}] /. {z1 -> a, z2 -> b, z3 -> c}]
```

$$\text{Out [4]} := \frac{2(-2a+b+c)}{(a-b)(a-c)}$$

• Metoda Noureïn

$$\begin{aligned} T_1(z_1, z_2, z_3) &= z_1 - \frac{P(z_1)}{(z_1 - z_2)(z_1 - z_3) \left[1 + \frac{P(z_2)}{(z_2 - z_1)(z_2 - z_3)(z_1 - z_2)} + \frac{P(z_3)}{(z_3 - z_1)(z_3 - z_2)(z_1 - z_3)} \right]} = \\ &= z_1 - \frac{P(z_1)}{(z_1 - z_2)(z_1 - z_3) + \frac{(z_1 - z_3)P(z_2)}{(z_2 - z_1)(z_2 - z_3)} + \frac{(z_1 - z_2)P(z_3)}{(z_3 - z_1)(z_3 - z_2)}} \end{aligned}$$

Programul *Mathematica* este

```
In[1] :=
  T1[z1, z2, z3] :=
    z1 - (z1 - a) * (z1 - b) * (z1 - c) / ((z1 - z2) * (z1 - z3) +
      (z2 - a) * (z2 - b) * (z2 - c) * (z1 - z3) / ((z2 - z1) * (z2 - z3)) +
      (z3 - a) * (z3 - b) * (z3 - c) * (z1 - z2) / ((z3 - z1) * (z3 - z2)))
In[2] :=
  D[T1[z1, z2, z3], z1] /. {z1 -> a, z2 -> b, z3 -> c}
Out[2] := 0
In[3] :=
  D[T1[z1, z2, z3], z2] /. {z1 -> a, z2 -> b, z3 -> c}
Out[3] := 0
In[4] :=
  Simplify[D[T1[z1, z2, z3], {z1, 2}] /. {z1 -> a, z2 -> b, z3 -> c}]
Out[4] := 0
In[5] :=
  Simplify[D[T1[z1, z2, z3], z1, z2] /. {z1 -> a, z2 -> b, z3 -> c}]
Out[5] := 0
In[6] :=
  Simplify[D[T1[z1, z2, z3], {z2, 2}] /. {z1 -> a, z2 -> b, z3 -> c}]
Out[6] := 0
In[7] :=
  Simplify[D[T1[z1, z2, z3], z2, z3] /. {z1 -> a, z2 -> b, z3 -> c}]
Out[7] := 0
In[7] :=
  Simplify[D[T1[z1, z2, z3], {z1, 2}, z2] /. {z1 -> a, z2 -> b, z3 -> c}]

Out [4] := -\frac{2}{(a-b)^2}
```

- Metoda Wang-Zheng

$$T_1(z_1, z_2, z_3) = z_1 - \frac{2P(z_1)P'(z_1)}{2P'^2(z_1) - P(z_1)P''(z_1) - 2P^2(z_1) \left(\frac{1}{(z_1-z_2)^2} + \frac{1}{(z_1-z_2)(z_1-z_3)} + \frac{1}{(z_1-z_3)^2} \right)}$$

Programul *Mathematica* este

```

In[1] :=
  P[x_] := x^3 - (a+b+c)*x*x + (a*b+b*c+c*a)*x - a*b*c
  D1P[x_] := 3*x*x - 2*(a+b+c)*x + a*b+b*c+c*a
  D2P[x_] := 6*x - 2*(a+b+c)
In[2] :=
  T1[z1, z2, z3] :=
    z1 - 2*P[z1]*D1P[z1] / ((2*D1P[z1]*D1P[z1] - P[z1]*D2P[z1] -
    2*P[z1]*P[z1]*
    (1/(z1-z2)^2 + 1/((z1-z2)*(z1-z3)) + 1/(z1-z3)^2))
In[3] :=
  D[T1[z1, z2, z3], z1] /. {z1->a, z2->b, z3->c}
Out[3] := 0
In[4] :=
  D[T1[z1, z2, z3], z2] /. {z1->a, z2->b, z3->c}
Out[4] := 0
In[5] :=
  Simplify[D[T1[z1, z2, z3], {z1, 2}] /. {z1->a, z2->b, z3->c}]
Out[5] := 0
In[6] :=
  Simplify[D[T1[z1, z2, z3], z1, z2] /. {z1->a, z2->b, z3->c}]
Out[6] := 0
In[7] :=
  Simplify[D[T1[z1, z2, z3], {z2, 2}] /. {z1->a, z2->b, z3->c}]
Out[7] := 0
In[8] :=
  Simplify[D[T1[z1, z2, z3], z2, z3] /. {z1->a, z2->b, z3->c}]
Out[8] := 0
In[9] :=
  Simplify[D[T1[z1, z2, z3], {z1, 3}] /. {z1->a, z2->b, z3->c}]
Out[9] := 0
In[10] :=

```



```
Simplify[D[T1[z1,z2,z3],{z1,2},z2]/.{z1->a,z2->b,z3->c}]
Out[10]:= 0
In[11]:=
Simplify[D[T1[z1,z2,z3],z1,{z2,2}]/.{z1->a,z2->b,z3->c}]
Out[11]:= 0
In[12]:=
Simplify[D[T1[z1,z2,z3],{z2,3}]/.{z1->a,z2->b,z3->c}]
Out[12]:= 0
In[13]:=
Simplify[D[T1[z1,z2,z3],{z2,2},z3]/.{z1->a,z2->b,z3->c}]
Out[13]:= 0
In[14]:=
Simplify[D[T1[z1,z2,z3],{z1,3},z2]/.{z1->a,z2->b,z3->c}]
Out[14]:=  $\frac{6(-3a+b+2c)}{(a-b)^3(a-c)}$ 
```

SCHEIBER ERNEST

SCHEIBER ERNEST

SCHEIBER ERNEST

SCHEIBER ERNEST

SCHEIBER ERNEST SCHEIBER ERNEST

SCHEIBER ERNEST SCHEIBER ERNEST

Anexa G

Deducerea schemelor de calcul de tip Runge – Kutta cu ajutorul calculului simbolic

Deducerea tabelor Butcher care definesc schemele de calcul de tip Runge – Kutta, în cazul ordinilor de consistență mai mare decât 2 este foarte laborioasă.

Această problemă se poate rezolva eficient utilizând produse informatice de calcul simbolic (*Mathematica* sau *Maple*).

Fie problema Cauchy

$$\dot{x}(t) = f(t, x(t)) \quad t \in [0, T] = I \quad (\text{G.1})$$

$$x(0) = x^0 \quad (\text{G.2})$$

unde $f : I \times R^d \rightarrow R^d$ și presupunem că problema (G.1) – (G.2) are o soluție unică $x(t)$ definită în I .

Fie $m, n \in N^*$, $h = \frac{T}{n}$. În I se consideră nodurile $t_i = ih, \forall i \in \{0, 1, \dots, n\}$ și se notează prin $\mathbf{u}_h = \{u_i \mid 0 \leq i \leq n\}$ o soluție discretă (adică u_i aproximează $x(t_i)$).

Schema de calcul de tip Runge – Kutta cu m trepte este

$$\begin{cases} \frac{u_{i+1} - u_i}{h} - F_m(h, t_i, u_i; f) = 0, & 0 \leq i \leq n-1 \\ u_0 = x^0 \end{cases} \quad (\text{G.3})$$

unde $F_m(h, t, x; f) = \sum_{i=1}^m p_i k_i(h)$, cu

$$k_i(h) = f(t + a_i h, x + h \sum_{j=1}^m b_{i,j} k_j(h)) \quad 1 \leq i \leq m.$$

Parametrii necunoscuți $(p_i)_i, (a_i)_i, (b_{i,j})_{i,j}$ se determină astfel încât să se maximizeze ordinul de consistență r : dacă $x(t)$ este soluția problemei Cauchy (G.1) – (G.2) atunci

$$\frac{x(t+h) - x(t)}{h} - F_m(h, t, x(t); f) = h^r \Phi(t, h), \quad \Phi(t, 0) \neq 0. \quad (\text{G.4})$$

Condiția (G.4) se reformulează prin: $h = 0$ este un zero de multiplicitate $r + 1$ pentru funcția $q_m(h) = x(t+h) - x(t) - hF_m(h, t, x(t); f)$, sau

$$q_m^{(i)}(0) = 0 \quad 0 \leq i \leq r. \quad (\text{G.5})$$

Aceste condiții conduc la un sistem algebric de ecuații neliniare.

Soluția obținută se prezintă sub forma tabelului Butcher

a_1	$b_{1,1}$	\dots	$b_{1,m}$
a_2	$b_{2,1}$	\dots	$b_{2,m}$
\dots	\dots	\dots	\dots
a_m	$b_{m,1}$	\dots	$b_{m,m}$
	p_1	\dots	p_m

Dacă $a_1 = 0$ și $b_{i,j} = 0$ pentru $j \geq i$ atunci schema de calcul de tip Runge – Kutta este explicită.

În cele ce urmează deducem schema de calcul explicită de tip Runge Kutta în 4 trepte cât și pe cea implicită în două trepte, utilizând *Mathematica*.

G.1 Schema de calcul explicită de tip Runge – Kutta în 4 trepte

Se utilizează derivarea globală Dt, substituția /. și substituția repetată //.

La început deducem expresia derivatelor lui $x(t)$

```
In[1] := e1:=f[t,x[t]]
In[2] := e2:=Dt[e1,t]/.x'[t]->f[t,x[t]]
e2
Out[3]= f[t,x[t]]f^{(0,1)}[t,x[t]]+f^{(1,0)}[t,x[t]]
In[4] := e3:=Simplify[Dt[e2,t]/.x'[t]->f[t,x[t]]]
e3
Out[5]= f[t,x[t]]^2f^{(0,2)}[t,x[t]]+f^{(0,1)}[t,x[t]]f^{(1,0)}[t,x[t]]+
f[t,x[t]](f^{(0,1)}[t,x[t]]^2+2f^{(1,1)}[t,x[t]])+f^{(2,0)}[t,x[t]]
```

```
In[6] := e4:=Simplify[Dt[e3,t]/. x'[t]->f[t,x[t]]
e4
Out[7]= f[t,x[t]]3f(0,3)[t,x[t]]+
f(0,1)[t,x[t]]2f(1,0)[t,x[t]] + 3f(1,0)[t,x[t]]f(1,1)[t,x[t]]+
f[t,x[t]]2(4f(0,1)[t,x[t]]f(0,2)[t,x[t]] + 3f(1,2)[t,x[t]]) +
f(0,1)[t,x[t]]f(2,0)[t,x[t]]+
f[t,x[t]](f(0,1)[t,x[t]]3 + 5f(0,1)[t,x[t]]f(1,1)[t,x[t]] +
3(f(0,2)[t,x[t]]f(1,0)[t,x[t]] + f(2,1)[t,x[t]])) + f(3,0)[t,x[t]]
```

În continuare fixăm datele schemei ce calcul explicită de tip Runge – Kutta

```
In[8] :=
k1[h_] := f[t,x[t]]
k2[h_] := f[t+a[2]*h,x[t]+h*b[2,1]*k1[h]]
k3[h_] := f[t+a[3]*h,x[t]+h*b[3,1]*k1[h]+h*b[3,2]*k2[h]]
k4[h_] := f[t+a[4]*h,x[t]+h*b[4,1]*k1[h]+
h*b[4,2]*k2[h]+h*b[4,3]*k3[h]]
q[h_] := x[t+h]-x[t]-h*(p[1]*k1[h]+p[2]*k2[h]+
p[3]*k3[h]+p[4]*k4[h])
```

și calculăm expresiile $q^{(s)}(0)$, $s = 1, 2, 3, 4$.

```
In[13] := ex1:=Simplify[Dt[q[h],h]/.Dt[t,h]->0]
In[14] := ex2:=Simplify[ex1/.{h->0, x'[t]->e1}]
ex2
Out[15]= -f[t,x[t]](-1 + p[1] + p[2] + p[3] + p[4])
```

De unde găsim ecuația

$$p_1 + p_2 + p_3 + p_4 = 1 \quad (\text{G.6})$$

```
In[16] := q1[h_] := ex1
In[17] := ex3:=Simplify[Dt[q1[h],h]/.Dt[t,h]->0]
In[18] := ex4:=Simplify[ex3/.{h->0,x'[t]->e1,x''[t]->e2}]
ex4
Out[20]= -f[t,x[t]](-1 + 2b[2,1]p[2] + 2b[3,1]p[3] + 2b[3,2]p[3]+
2b[4,1]p[4] + 2b[4,2]p[4] + 2b[4,3]p[4])f(0,1)[t,x[t]]-
```

$$(-1 + 2a[2]p[2] + 2a[3]p[3] + 2a[4]p[4])f^{(1,0)}[t, x[t]]$$

Ecuatiile găsite sunt

$$b_{2,1}p_2 + (b_{3,1} + b_{3,2})p_3 + (b_{4,1} + b_{4,2} + b_{4,3})p_4 = \frac{1}{2} \quad (\text{G.7})$$

$$a_2p_2 + a_3p_3 + a_4p_4 = \frac{1}{2} \quad (\text{G.8})$$

In[21] := q2[h_] := ex3

In[22] := ex5 := Simplify[Dt[q2[h], h] /. Dt[t, h] -> 0]

In[23] := ex6 := Simplify[ex5 /. {h -> 0, x'[t] -> e1, x''[t] -> e2, D[x[t], {t, 3}] = e3}]

ex6

Out[24] = $-f[t, x[t]]^2$

$$(-1 + 3b[2, 1]^2p[2] + 3(b[3, 1] + b[3, 2])^2p[3] + 3(b[4, 1] + b[4, 2] + b[4, 3])^2p[4])$$

$$f^{(0,2)}[t, x[t]] - (-1 + 6a[3]b[4, 3]p[4] + 6a[2](b[3, 2]p[3] + b[4, 2]p[4]))$$

$$f^{(0,1)}[t, x[t]]f^{(1,0)}[t, x[t]] - f[t, x[t]]$$

$$((-1 + 6(b[3, 1] + b[3, 2])b[4, 3]p[4] + 6b[2, 1](b[3, 2]p[3] + b[4, 2]p[4]))$$

$$f^{(0,1)}[t, x[t]]^2 + 2(-1 + 3a[2]b[2, 1]p[2] + 3a[3](b[3, 1] + b[3, 2])p[3] +$$

$$3a[4](b[4, 1] + b[4, 2] + b[4, 3])p[4])f^{(1,1)}[t, x[t]] -$$

$$(-1 + 3a[2]^2p[2] + 3a[3]^2p[3] + 3a[4]^2p[4])f^{(2,0)}[t, x[t]]$$

Se obțin ecuațiile

$$b_{2,1}^2p_2 + (b_{3,1} + b_{3,2})^2p_3 + (b_{4,1} + b_{4,2} + b_{4,3})^2p_4 = \frac{1}{3} \quad (\text{G.9})$$

$$a_2b_{3,2}p_3 + (a_2b_{4,2} + a_3b_{4,3})p_4 = \frac{1}{6} \quad (\text{G.10})$$

$$b_{2,1}b_{3,2}p_3 + (b_{2,1}b_{4,2} + (b_{3,1} + b_{3,2})b_{4,3})p_4 = \frac{1}{6} \quad (\text{G.11})$$

$$a_2b_{2,1}p_2 + a_3(b_{3,1} + b_{3,2})p_3 + a_4(b_{4,1} + b_{4,2} + b_{4,3})p_4 = \frac{1}{3} \quad (\text{G.12})$$

$$a_2^2p_2 + a_3^2p_3 + a_4^2p_4 = \frac{1}{3} \quad (\text{G.13})$$

In[25] := q3[h_] := ex5

In[26] := ex7 := Simplify[Dt[q3[h], h] /. Dt[t, h] -> 0]

In[27] := ex8:=Simplify[ex3//.{h->0,x'[t]->e1,x''[t]->e2,
D[x[t],{t,3}]=e3,D[x[t],{t,4}]=e4}]

ex8

Out[28]= $-f[t, x[t]]^3$

$$\begin{aligned}
& (-1 + 4b[2, 1]^3 p[2] + 4(b[3, 1] + b[3, 2])^3 p[3] + 4(b[4, 1] + b[4, 2] + b[4, 3])^3 p[4]) \\
& f^{(0,3)}[t, x[t]] - (1 + 24a[2]b[3, 2]b[4, 3])f^{(0,1)}[t, x[t]]^2 f^{(1,0)}[t, x[t]] - \\
& 3(-1 + 8a[2]a[3]b[3, 2]p[3] + 8a[4](a[2]b[4, 2] + a[3]b[4, 3])p[4]) \\
& f^{(1,0)}[t, x[t]]f^{(1,1)}[t, x[t]] + f[t, x[t]]^2 \\
& (-4(-1 + 3b[2, 1]b[3, 2](b[2, 1] + 2(b[3, 1] + b[3, 2]))p[3] + 3(b[2, 1]^2 b[4, 2] + \\
& 2b[2, 1]b[4, 2](b[4, 1] + b[4, 2] + b[4, 3]) + (b[3, 1] + b[3, 2])b[4, 3] \\
& (b[3, 1] + b[3, 2] + 2(b[4, 1] + b[4, 2] + b[4, 3])))p[4])f^{(0,1)}[t, x[t]] \\
& f^{(0,2)}[t, x[t]] - 3(-1 + 4a[2]b[2, 1]^2 + 4a[3](b[3, 1] + b[3, 2])^2 p[3] + \\
& 4a[4](b[4, 1] + b[4, 2] + b[4, 3])^2 p[4])f^{(1,2)}[t, x[t]] - \\
& (-1 + 12a[3]^2 b[4, 3]p[4] + 12a[2]^2 (b[3, 2]p[3] + b[4, 2]p[4])) \\
& f^{(0,1)}[t, x[t]]f^{(2,0)}[t, x[t]] + f[t, x[t]]((1 - 24b[2, 1]b[3, 2]b[4, 3]p[4])f^{(0,1)}[t, x[t]]^3 - \\
& 3(-1 + 8(a[2]b[3, 2](b[3, 1] + b[3, 2])p[3] + \\
& (b[4, 1] + b[4, 2] + b[4, 3])(a[2]b[4, 2] + a[3]b[4, 3])p[4])) \\
& f^{(0,2)}[t, x[t]]f^{(1,0)}[t, x[t]] - (-5 + 24((a[2] + a[3])b[2, 1]b[3, 2]p[3] + \\
& ((a[2] + a[4])b[2, 1]b[4, 2] + (a[3] + a[4])(b[3, 1] + b[3, 2])b[4, 3])p[4])) \\
& f^{(0,1)}[t, x[t]]f^{(1,1)}[t, x[t]] - 3(-1 + 4a[2]^2 b[2, 1]p[2] + 4a[3]^2 (b[3, 1] + b[3, 2]) \\
& p[3] + 4a[4]^2 (b[4, 1] + b[4, 2] + b[4, 3])p[4])f^{(2,1)}[t, x[t]] - \\
& (-1 + 4a[2]^3 p[2] + 4a[3]^3 p[3] + 4a[4]^3 p[4])f^{(3,0)}[t, x[t]]
\end{aligned}$$

Ultimele ecuații sunt

$$b_{2,1}^3 p_2 + (b_{3,1} + b_{3,2})^3 p_3 + (b_{4,1} + b_{4,2} + b_{4,3})^3 p_4 = \frac{1}{4} \quad (\text{G.14})$$

$$a_2 b_{3,2} b_{4,3} p_4 = \frac{1}{24} \quad (\text{G.15})$$

$$a_2 a_3 b_{3,2} p_3 + a_4 (a_2 b_{4,2} + a_3 b_{4,3}) p_4 = \frac{1}{8} \quad (\text{G.16})$$

$$b_{2,1} b_{3,2} (b_{2,1} + 2(b_{3,1} + b_{3,2})) p_3 + (b_{2,1}^2 b_{4,2} + 2b_{2,1} b_{4,2} (b_{4,1} + b_{4,2} + b_{4,3}) +$$

$$(b_{3,1} + b_{3,2})b_{4,3}(b_{3,1} + b_{3,2} + 2(b_{4,1} + b_{4,2} + b_{4,3}))p_4 = \frac{1}{3} \quad (\text{G.17})$$

$$a_2 b_{2,1}^2 p_2 + a_3 (b_{3,1} + b_{3,2}) p_3 + a_4 (b_{4,1} + b_{4,2} + b_{4,3})^2 p_4 = \frac{1}{4} \quad (\text{G.18})$$

$$a_2^2 b_{3,2} p_3 + (a_2^2 b_{4,2} + a_3^2 b_{4,3}) p_4 = \frac{1}{12} \quad (\text{G.19})$$

$$b_{2,1} b_{3,2} b_{4,3} p_4 = \frac{1}{24} \quad (\text{G.20})$$

$$a_2 b_{3,2} (b_{3,1} + b_{3,2}) p_3 + (b_{4,1} + b_{4,2} + b_{4,3}) (a_2 b_{4,2} + a_3 b_{4,3}) p_4 = \frac{1}{8} \quad (\text{G.21})$$

$$(a_2 + a_3) b_{2,1} b_{3,2} p_3 + ((a_2 + a_4) b_{2,1} b_{4,2} + (a_3 + a_4) (b_{3,1} + b_{3,2}) b_{4,3}) p_4 = \frac{5}{24} \quad (\text{G.22})$$

$$a_2^2 b_{2,1} p_2 + a_3^2 (b_{3,1} + b_{3,2}) p_3 + a_4^2 (b_{4,1} + b_{4,2} + b_{4,3}) p_4 = \frac{1}{4} \quad (\text{G.23})$$

$$a_2^3 p_2 + a_3^3 p_3 + a_4^3 p_4 = \frac{1}{4} \quad (\text{G.24})$$

Din (G.15) și (G.20) rezultă că $a_2 = b_{2,1}$; din (G.10) și (G.11) rezultă că $a_3 = b_{3,1} + b_{3,2}$; din (G.7) și (G.8) rezultă că $a_4 = b_{4,1} + b_{4,2} + b_{4,3}$.

Se observă că între ecuațiile (G.6)-(G.24) au loc echivalențele (G.7) \equiv (G.8); (G.13) \equiv (G.12) \equiv (G.9); (G.24) \equiv (G.23) \equiv (G.18) \equiv (G.14); (G.16) \equiv (G.21); (G.15) \equiv (G.22); (G.22) \equiv (G.16) + (G.19); (G.17) \equiv 2 (G.16) + (G.19).

Sistemul redus devine

```
In[29] := eq1:=p[1]+p[2]+p[3]+p[4]==1
eq2:=b[2,1]*p[2]+(b[3,1]+b[3,2])*p[3]+
(b[4,1]+b[4,2]+b[4,3])*p[4]==1/3
eq3:=b[2,1]^2*p[2]+(b[3,1]+b[3,2])^2*p[3]+
(b[4,1]+b[4,2]+b[4,3])^2*p[4]==1/3
eq4:=b[2,1]^3*p[2]+(b[3,1]+b[3,2])^3*p[3]+
(b[4,1]+b[4,2]+b[4,3])^3*p[4]==1/4
eq5:=b[2,1]*b[3,2]*p[3]+
(b[2,1]*b[4,2]+(b[3,1]+b[3,2])*b[4,3])*p[4]==1/6
eq6:=b[2,1]*(b[3,1]+b[3,2])b[3,2]*p[3]+(b[4,1]+b[4,2]+b[4,3])*
(b[2,1]*b[4,2]+(b[3,1]+b[3,2])*b[4,3])*p[4]==1/8
eq7:=b[2,1]^2*b[3,2]*p[3]+
(b[2,1]^2*b[4,2]+(b[3,1]+b[3,2])^2*b[4,3])*p[4]==1/12
eq8:=b[2,1]*b[3,2]*b[4,3]*p[4]==1/24
```

Dacă


```
In[30] := b[2,1] := 1/2
          b[3,2] := 1/2
```

atunci

```
In[31] := Solve[{eq1, eq2, eq3, eq4, eq5, eq6, eq7, eq8},
                {p[1], p[2], p[3], p[4], b[3,1], b[4,1], b[4,2], b[4,3]}]
```

```
Out[31] = {{p[1] -> 0, p[2] -> 2/3, p[3] -> 1/6, b[3,1] -> -1/2, b[4,1] -> -3/2,
            b[4,2] -> 3/2, b[4,3] -> 1, p[4] -> 1/6}, {p[1] -> 1/6, p[2] -> 1/3, p[3] -> 1/3,
            b[3,1] -> 0, b[4,1] -> 0, b[4,2] -> 0, b[4,3] -> 1, p[4] -> 1/6}}
```

Ultima soluție corespunde schemei de calcul clasice de tip Runge – Kutta în 4 trepte.

G.2 Schema de calcul implicită de tip Runge – Kutta în 2 trepte

Într-o foaie nouă de calcul calculăm din nou derivatele pentru $\dot{x}(t) = f(t, x(t))$. Datele schemei de calcul implicită de tip Runge – Kutta în 2 trepte sunt

```
In[6] :=
r1[h_] := f[t+a[1]*h, x[t]+h*b[1,1]*k1[h]+h*b[1,2]*k2[h]]
r2[h_] := f[t+a[2]*h, x[t]+h*b[2,1]*k1[h]+h*b[2,2]*k2[h]]
q[h_] := x[t+h] - x[t] - h*(p[1]*r1[h]+p[2]*r2[h])
```

și calculăm expresiile $q^{(s)}(0)$, $s = 1, 2, 3$.

```
In[7] := ex1 := Simplify[Dt[q[h], h] /. Dt[t, h] -> 0]
In[8] := ex2 := Simplify[ex1 /. {h -> 0, x'[t] -> e1}]
          ex2
Out[9] = -f[t, x[t]](-1 + p[1] + p[2])
In[10] := r11 := Simplify[Dt[r1[h], h] /. {Dt[t, h] -> 0, h -> 0,
          k1[0] -> r1[0], k2[0] -> r2[0]}]
In[11] := r21 := Simplify[Dt[r2[h], h] /. {Dt[t, h] -> 0, h -> 0,
          k1[0] -> r1[0], k2[0] -> r2[0]}]
In[12] := q1[h_] := ex1
In[13] := ex3 := Simplify[Dt[q1[h], h] /. Dt[t, h] -> 0]
In[14] := ex4 := Simplify[ex3 /. {h -> 0, x'[t] -> e1, x''[t] -> e2,
```

```

k1[0]->r1[0],k2[0]->r2[0]}
ex4
Out [15]= -f[t,x[t]](-1+2b[1,1]p[1]+2b[1,2]p[1]+2b[2,1]p[2]+2b[2,2]p[2])
          f(0,1)[t,x[t]]+(1-2a[1]p[1]-2a[2]p[2])f(1,0)[t,x[t]]
In [16]:= q2[h_]:=ex3
In [17]:= ex5:=Simplify[Dt[q2[h],h]/.Dt[t,h]->0]
In [18]:= ex6:=Simplify[ex5/.{h->0,x'[t]->e1,x''[t]->e2,
D[x[t],{t,3}]->e3,k1[0]->r1[0],k2[0]->r2[0],k1'[0]->r11,k2'[0]->r21}]
ex6
Out [19]= -f[t,x[t]]2
          (-1+3(b[1,1]+b[1,2])2p[1]+3(b[2,1]+b[2,2])2p[2])f(0,2)[t,x[t]]-
          (-1+6a[1](b[1,1]p[1]+b[2,1]p[2])+6a[2](b[1,2]p[1]+b[2,2]p[2]))
          f(0,1)[t,x[t]]f(1,0)[t,x[t]]-f[t,x[t]]
          ((-1+6(b[1,1]2+b[1,1]b[1,2]+b[1,2](b[2,1]+b[2,2]))p[1]+
          6((b[1,1]+b[1,2])b[2,1]+b[2,1]b[2,2]+b[2,2]2)p[2])f(0,1)[t,x[t]]2+
          2(-1+3a[1](b[1,1]+b[1,2])p[1]+3a[2](b[2,1]+b[2,2])p[2])f(1,1)[t,x[t]])+
          (1-3a[1]2p[1]-3a[2]2p[2])f(2,0)[t,x[t]]

```

Rezultă sistemul algebric neliniar

$$p_1 + p_2 = 1 \quad (\text{G.25})$$

$$a_1 p_1 + a_2 p_2 = \frac{1}{2} \quad (\text{G.26})$$

$$(b_{1,1} + b_{1,2})p_1 + (b_{2,1} + b_{2,2})p_2 = \frac{1}{2} \quad (\text{G.27})$$

$$a_1^2 p_1 + a_2^2 p_2 = \frac{1}{3} \quad (\text{G.28})$$

$$a_1(b_{1,1} + b_{1,2})p_1 + a_2(b_{2,1} + b_{2,2})p_2 = \frac{1}{3} \quad (\text{G.29})$$

$$(b_{1,1} + b_{1,2})^2 p_1 + (b_{2,1} + b_{2,2})^2 p_2 = \frac{1}{3} \quad (\text{G.30})$$

$$(a_1 b_{1,1} + a_2 b_{1,2})p_1 + (a_1 b_{2,1} + a_2 b_{2,2})p_2 = \frac{1}{6} \quad (\text{G.31})$$

$$(b_{1,1}(b_{1,1} + b_{1,2}) + b_{1,2}(b_{2,1} + b_{2,2}))p_1 + (b_{2,1}(b_{1,1} + b_{1,2}) + b_{2,2}(b_{2,1} + b_{2,2}))p_2 = \frac{1}{6} \quad (\text{G.32})$$

Dacă $a_1 = b_{1,1} + b_{1,2}$, $a_2 = b_{2,1} + b_{2,2}$, $p_1 = p_2 = \frac{1}{2}$ atunci se deduce soluția uzuală

```
In[20] := eq1:=b[1,1]+b[1,2]+b[2,1]+b[2,2]==1
          eq2:=(b[1,1]+b[1,2])^2+(b[2,1]+b[2,2])^2==2/3
          eq3:=(b[1,1]+b[2,1])(b[1,1]+b[1,2])+
              (b[1,2]+b[2,2])*(b[2,1]+b[2,2])==1/3
          b[1,1]:=β
```

```
In[24] := Solve[{eq1,eq2,eq3},{b[1,2],b[2,1],b[2,2]}
```

```
Out[24]=
```

$$\left\{ \left\{ b[1,2] \rightarrow \frac{1}{6}(3 - \sqrt{3} - 6\beta), b[2,1] \rightarrow \frac{1}{6}(3 + \sqrt{3} - 6\beta), b[2,2] \rightarrow \beta \right\}, \right.$$

$$\left. \left\{ b[1,2] \rightarrow \frac{1}{6}(3 + \sqrt{3} - 6\beta), b[2,1] \rightarrow \frac{1}{6}(3 - \sqrt{3} + 6\beta), b[2,2] \rightarrow \beta \right\} \right\}$$

SCHEIBER ERNEST

SCHEIBER ERNEST

SCHEIBER ERNEST

SCHEIBER ERNEST

SCHEIBER ERNEST SCHEIBER ERNEST

SCHEIBER ERNEST SCHEIBER ERNEST

Anexa H

Reprezentarea mulțimii de A-stabilitate

Cazul schemei de calcul de tip Runge – Kutta

Mulțimii de A-stabilitate a unei scheme de calcul de tip Runge–Kutta explicită este dată de soluția inecuație $|R(z)| \leq 1$, unde $R(z)$ este funcția de stabilitate.

Pentru a obține frontiera ei se rezolvă ecuația $R(z) = e^{it}$, în necunoscuta z , pentru o mulțime discretă de valori $t \in [0, 2k\pi]$, $k \in N$.

Programul *MathCAD* (în cazul schemei de calcul Euler îmbunătățită) este

$$\begin{aligned} R(z) &::= 1 + z + \frac{z^2}{2} \\ p(u, v, t) &::= \operatorname{Re}(R(u + i \cdot v)) - \cos(t) \\ q(u, v, t) &::= \operatorname{Im}(R(u + i \cdot v)) - \sin(t) \\ n &:= 30 \quad h := \frac{2 \cdot \pi}{n} \quad k := 2 \\ i &:= 0..k \cdot n - 1 \quad s_i := i \cdot h \\ r(u, v, t, i) &:= (t - s_i)^2 \end{aligned}$$

Given

$$\begin{aligned} p(u, v, t) &= 0 \\ q(u, v, t) &= 0 \\ r(u, v, t, i) &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{pmatrix} x_i \\ y_i \\ \tau_i \end{pmatrix} := \text{Find}(u, v, t)$$

Șirul $(x_i, y_i)_i$ reprezintă coordonatele unor puncte de pe frontiera domeniului de A-stabilitate. Utilizarea acestui program în cazul altor scheme de calcul de tip Runge – Kutta presupune modificarea expresia funcției de stabilitate $R(z)$ și eventual a parametrilor n, k .

Cazul schemei de calcul de tip Adams

Pentru o schemă de calcul de tip Adams scrisă sub forma

$$a_p u_{k+p} + a_{p-1} u_{k+p-1} + \dots + a_0 u_k - h[b_p f(t_{k+p}, u_{k+p}) + b_{p-1} f(t_{k+p-1}, u_{k+p-1}) + \dots + b_0 f(t_k, u_k)] = 0.$$

ecuația caracteristică corespunzătoare problemei de test este

$$\rho(x) - z\sigma(x) = 0$$

unde

$$\begin{aligned} \rho(x) &= a_p x^p + a_{p-1} x^{p-1} + \dots + a_1 x + a_0 \\ \sigma(x) &= b_p x^p + b_{p-1} x^{p-1} + \dots + b_1 x + b_0 \end{aligned}$$

Frontiera mulțimii de A-stabilitate este dată de

$$z = \frac{\rho(e^{it})}{\sigma(e^{it})} \quad t \in [0, 2\pi]$$

Programul *MathCAD* (în cazul schemei de calcul Adams-Bashforth, $r=2$) este

$$\rho(z) := z^3 - z^2 \quad \sigma(z) := \frac{1}{12} \cdot (23 \cdot z^2 - 16 \cdot z + 5)$$

$$n := 50 \quad h := \frac{2\pi}{n} \quad i := 0.2 * n - 1 \quad s_i := i \cdot h$$

$$x_i := \text{Re} \left(\frac{\rho(e^{i \cdot s_i})}{\sigma(e^{i \cdot s_i})} \right) \quad y_i := \text{Re} \left(\frac{\rho(e^{i \cdot s_i})}{\sigma(e^{i \cdot s_i})} \right)$$

Șirul $(x_i, y_i)_i$ reprezintă coordonatele unor puncte de pe frontiera domeniului de A-stabilitate. Utilizarea acestui program în cazul altor scheme de calcul de tip Adams presupune modificarea polinoamelor ρ, σ și eventual a parametrului n .

Bibliografie

- [1] ASCHER U.M., PETZOLD L.R., 1998, *Computer Methods for Ordinary Differential Equations and Differential Algebraic Equations*. SIAM.
- [2] BERBENTE C., MITRAN S., ZANCU S., 1997, *Metode numerice*. Ed. Tehnică, București.
- [3] BEU T., 1992, *Calcul numeric în Turbo Pascal*. Ed. MicroInformatica, Cluj - Napoca.
- [4] BUCUR C. M., POPEEA C. A., SIMION G. G., 1983, *Matematici speciale. Calcul numeric*. E.D.P., București.
- [5] COMAN G., 1995, *Analiză numerică*. Ed. Libris, Cluj.
- [6] CUCULESCU I., 1967, *Analiză numerică*. Ed. tehnică, București.
- [7] DEMIDOVITCH B., MARON I., 1973, *Eléments de calcul numérique*. Ed. Mir, Moscou.
- [8] DUMITRESCU B., POPEEA C., JORA B., 1998, *Metode de calcul numeric matriceal. Algoritmi fundamentali*. Ed. All, București.
- [9] GRIGORE G., 1984, *Lecții de analiză numerică*. Univ. București, (litografiat)
- [10] GODUNOV S.R., REABENKI V.S., 1977, *Scheme de calcul cu diferențe*. Ed. Tehnică, București.
- [11] IACOB C., HOMENTCOVSCHI D., MARCOV N., NICOLAU A., 1983, *Matematici clasice și moderne*. vol. IV, Ed. Tehnică, București.
- [12] ICHIM I., MARINESCU G., 1986, *Metode de aproximare numerică*. Ed. Acad. Române, București.

- [13] IGNAT C., ILIOI C., JUCAN T., 1989, *Elemente de informatică și calcul numeric*. Univ. "Al. I. Cuza" Iași. (litografiat)
- [14] ILIOI C., 1980, *Probleme de optimizare și algoritmi de aproximare a soluțiilor*. Ed. Acad. R.S.R., București.
- [15] IORGA V., JORA B., 1996, *Programare numerică*. Ed. Teora, București.
- [16] ISERLES A., 2006, *Numerical Analysis*. Part 1B, <http://www.damtp.cam.ac.uk/user/na/Part1B> (handouts).
- [17] KANTOROVITCH L.V., KRYLOV V.I., 1950, *Metode aproximative ale analizei superioare*. Gosudarstvennoe izd., Moskva.
- [18] KINCAID D., CHENEY W., 1991, *Numerical Analysis. Mathematics of scientific computing*. Brooks/Cole, Pacific Grove, California.
- [19] MARCIUK G.I., 1983, *Metode de analiză numerică*. Ed. Acad. R.S.R., București.
- [20] MARINESCU G., 1974, *Analiza numerică*. Ed. Acad. R. S. R., București.
- [21] MARTIN O., 1998, *Probleme de analiză numerică*. Ed. MatrixRom, București.
- [22] MĂRUȘTER Șt., 1981, *Metode numerice în rezolvarea ecuațiilor neliniare*. Ed. tehnică, București.
- [23] MICULA Gh., 1978, *Funcții spline și aplicații*. Ed. tehnică, București.
- [24] MOSZYNSKI K., 1978, *Metode numerice de rezolvare a ecuațiilor diferențiale ordinare*. Ed. tehnică, București.
- [25] OLVER F.W.J., LOZIER D.W., BOISVERT R.F., CLARK C.W. (Editors), 2010, *NIST Handbook of Mathematical Functions*. Cambridge University Press, dlmf.nist.gov.
- [26] POSTOLACHE M., 1994, *Metode numerice*. Ed. Sirius, București.
- [27] PĂVĂLOIU I., 1976, *Introducere în teoria aproximării soluțiilor ecuațiilor*. Ed. Dacia, Cluj-Napoca.
- [28] PĂVĂLOIU I., 1981, *Rezolvarea ecuațiilor prin interpolare*. Ed. Dacia, Cluj-Napoca.

- [29] RAȘA I., VLADISLAV T., 1998, *Analiză numerică*. Ed. Tehnică, București.
- [30] ȘABAC I. G., COCÂRLAN P., STĂNĂȘILĂ O., TOPALĂ A., 1983, *Matematici speciale*. Vol II, E.D.P., București.
- [31] SAMARSKI A.A., 1987, *Introducere în metode numerice*. Ed. Nauka, Moskva.
- [32] SCHEIBER E., LUPU M., 2003, *Rezolvarea asistată de calculator a problemelor de matematică*. Ed. Matrix-Rom, București.
- [33] SCHIOP A., 1972, *Metode aproximative în analiza neliniară*. Ed. Acad. R.S.R., București.
- [34] SCHIOP A., 1975, *Metode numerice pentru rezolvarea ecuațiilor diferențiale*. Ed. Acad. R.S.R., București.
- [35] SCHIOP A., 1978, *Analiza unor metode de discretizare*. Ed. Acad. R.S.R., București.
- [36] STANCU D. D., COMAN G., (Ed), 2001, *Analiză numerică și teoria aproximării*, Vol. I, II, III, Ed. Presa Universitară Clujeană, Cluj-Napoca.
- [37] STEWART G.W., 1998, *Afternotes goes to graduate school: lectures on advanced numerical analysis*. SIAM.
- [38] STOYAN G., TAKÓ G., 1995, *Numerikus módszerek*. Vol. I, II, III, Ed. ELTE - Typotex, Budapest.
- [39] TEMAM R., 1973, *Metode numerice de rezolvare a ecuațiilor funcționale*. Ed. Tehnică, București.
- [40] UDRIȘTE C., IFTODE V., POSTOLACHE M., 1996, *Metode numerice de calcul*. Ed. Tehnică, București.
- [41] VLADISLAV T., RAȘA I., 1997, *Analiză numerică*. Ed. Tehnică, București.
- [42] Завьялов Ю. С., Квасов Б. И., Мирошниченко В. Л., 1980, *Методы сплайн-функций*. Наука, Москва.