4. MECANICĂ ANALITICĂ

4.1. Introducere

Mecanica newtoniană studiază mişcarea corpurilor macroscopice care se deplasează cu viteze mici în comparaţie cu viteza luminii pe baza unei abordări locale a problemei. Afirmăm aceasta în sensul că, aşa cum am discutat anterior, o dată cunoscute poziţia şi viteza unui corp la un anumit moment de timp t şi ştiind forţele care acţionează asupra corpului, se pot afla poziţia şi viteza corpului la momentul de timp $t' = t + dt$ şi, în consecinţă, prin integrarea ecuaţiilor de mişcare, poziţia şi viteza la orice moment de timp.

Studiul evoluţiei unui sistem fizic se poate face însă şi pe baza unei abordări globale a problemei, tratarea mişcării pe care o poate avea un corp într-un câmp de forţe conservativ fiind bazată pe un **principiu de extremum**. Un astfel de principiu arată că mişcarea are loc întotdeauna pe acea traiectorie pentru care o anumită funcţie care descrie starea sistemului îşi atinge extremumul. În cazul mecanicii clasice, o astfel de formulare este **mecanica analitică** elaborată de Lagrange şi Hamilton la sfârşitul sec. al XVIII-lea şi, respectiv, în secolul al XIX-lea. Mecanica analitică este folosită în studiul sistemelor mecanice alcătuite dintr-un număr mare de constituienţi, aşa cum sunt sistemele de particule studiate de fizica statistică, cât şi pentru sistemele mecanice cu legături.

De altfel, studiul unui proces fizic pe baza unui principiu de extremum datează anterior formulării de către Hamilton a principiului de extremum care-i poartă numele şi care stă la baza elaborării mecanicii analitice.

Astfel, în optică, **principiul lui Fermat** afirmă că lumina se propagă între două puncte din spaţiu pe acel drum Γ pentru care timpul necesar propagării este minim:

$$\int_{1\Gamma}^{2} dt = \min . \tag{4.1}$$

Dintre toate drumurile virtual posibile Γ' (fig. 4.1), drumul real Γ fiind cel care satisface principiul lui Fermat, înseamnă că la trecerea de pe acesta pe oricare din drumurile Γ' trebuie ca variația integralei (4.1) să fie nulă, adică:

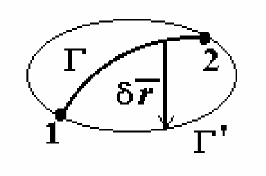


Fig. 4.1

$$\delta \int_{1\Gamma}^{2} dt = 0 . \tag{4.2}$$

Ținând cont că

$$dt = \frac{dl}{v} = \frac{1}{c}\,\frac{c}{v} \cdot dl = \frac{1}{c} n\, dl \tag{4.3}$$

unde n este indicele de refracție al mediului în care se propagă lumina, iar c este viteza luminii în vid, rezultă că principiul lui Fermat mai poate fi scris şi sub forma:

$$\delta \int_{1\Gamma}^{2} n\, dl = 0 . \tag{4.4}$$

Aceasta înseamnă că între două puncte din spațiu lumina se propagă astfel încât drumul optic să fie minim.

Revenind acum la mecanică, şi anume la studiul mişcării unui corp într-un câmp de forțe conservativ, să ne reamintim că suma dintre energiile cinetică T şi potențială U ale corpului, adică energia totală $E = T + U$ rămâne constantă în timpul mişcării.

În schimb, evoluția mişcării este dată de transformarea energiei cinetice în energie potențială şi reciproc, această transformare fiind descrisă cel mai bine de funcția lui Lagrange L :

$$L \overset{\text{def.}}{=} T - U \tag{4.5}$$

a cărei variație în timpul mişcării este:

$$\Delta L = 2\Delta T = -2\Delta U . \tag{4.6}$$

Definind **acțiunea *S*** ca integrala după timp a lui L de-a lungul treiectoriei Γ :

$$S \overset{\text{def.}}{=} \int_{t_1 \Gamma}^{t_2} L\,dt = \int_{t_1 \Gamma}^{t_2} (T - U)\,dt \tag{4.7}$$

principiul de extremum al lui Hamilton, care reprezintă baza mecanicii analitice, stipulează că transformarea între energia cinetică şi potenţială are loc astfel încât actiunea S să prezinte un extremum. Aceasta revine la a spune că variaţia acţiunii între traiectoria reală Γ şi orice treiectorie virtuală infinit apropiată este nulă:

$$\delta S = \delta \int_{t_1 \Gamma}^{t_2} L\,dt = \delta \int_{t_1 \Gamma}^{t_2} (T - U)\,dt = 0\,. \tag{4.8}$$

Traiectoria Γ pentru care se realizează extremumul acţiunii este **traiectoria reală**.

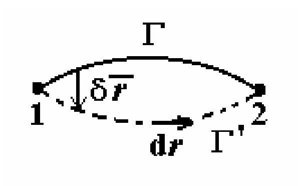


Fig. 4.2

Pentru a clarifica conţinutul ecuaţiei (4.8) ce exprimă principiul lui Hamilton este necesar să precizăm semnificaţia următoarelor notaţii. Notăm prin diferenţiala $d\,(d\vec{r}, d\vec{v}, dt, \text{etc.})$, **diferenţa** a două valori ale unei mărimi considerate între două puncte vecine infinit apropiate plasate de-a lungul aceleaşi traiectorii şi prin **variaţia** δ, $(\delta\vec{r}, \delta\vec{v}, \text{etc.})$, diferenţa dintre valorile unei mărimi considerate la acelaşi moment de timp, dar pe două traiectorii diferite, infinit apropiate (fig. 4.2).

Traiectoria reală şi treiectoriile virtuale sunt considerate între aceleaşi puncte, iniţial şi final, astfel că la momentele de timp t_1 (iniţial) şi t_2 (final) $\delta\vec{r} = 0$.

Să exemplificăm principiul lui Hamilton pentru cazul simplu al aruncării unui corp pe verticală în câmp gravitaţional uniform. În acest caz, ştim că pentru un punct material de masă m energia cinetică şi energia potenţială au expresiile:

$$T = \frac{m\dot{y}^2}{2}, \quad U = mgy\,. \tag{4.9}$$

Pentru a diferenţia traiectoria reală Γ de traiectoriile virtuale Γ', vom nota coordonata spaţială pentru traiectoria reală cu y şi pentru traiectoriile virtuale Γ' cu $y = \underline{y} + \delta y$. Ştiind că $\delta t = 0, \delta y(t_1) = \delta y(t_2) = 0$ şi ţinând cont că

$\delta\dot{y} = \delta\dfrac{dy}{dt} = \dfrac{d}{dt}(\delta y)$, putem calcula variația energiei potențiale şi respectiv cinetice:

$$\delta U = U_{\Gamma'} - U_{\Gamma} = U(\underline{y} + \delta y) - U(\underline{y}) \cong U(\underline{y}) + \frac{dU}{dy}\delta y - U(\underline{y}) = \frac{dU}{dy}(y)\delta y$$

$$\delta T = T_{\Gamma'} - T_{\Gamma} = \frac{m}{2}(\underline{\dot{y}} + \delta\dot{y})^2 - \frac{m}{2}\underline{\dot{y}}^2 = \frac{m}{2}\left(\underline{\dot{y}}^2 + 2\underline{\dot{y}}\delta\dot{y} + \delta\dot{y}^2\right) - \frac{m}{2}\underline{\dot{y}}^2 \cong m\underline{\dot{y}}\delta\dot{y}.$$

(4.10)

Astfel, principiul lui Hamilton:

$$\delta S = \delta\int_{t_1\Gamma}^{t_2}(T-U)dt = \int_{t_1\Gamma}^{t_2}(\delta T - \delta U)dt = 0 \qquad (4.11)$$

se va scrie:

$$\delta S = \int_{t_1}^{t_2} m\underline{\dot{y}}\frac{d}{dt}(\delta y)dt - \int_{t_1}^{t_2}\frac{dU}{dy}(y)\delta y\, dt = 0\,. \qquad (4.12)$$

Luând prima integrală şi calculând-o prin părți, obținem:

$$\int_{t_1}^{t_2} m\underline{\dot{y}}\frac{d}{dt}(\delta y)dt = m\underline{\dot{y}}\delta y\Big|_{t_1}^{t_2} - \int_{t_1}^{t_2} m\ddot{y}(\delta y)dt = -\int_{t_1}^{t_2} m\ddot{y}(\delta y)dt$$

unde s-a ținut cont de condițiile $\delta y(t_1) = \delta y(t_2) = 0$. Astfel, principiul lui Hamilton (4.11) conduce la:

$$\delta S = -\int_{t_1}^{t_2}\left[m\ddot{y} + \frac{dU(y)}{dy}\right]\cdot\delta y\cdot dt = 0\,. \qquad (4.13)$$

Ecuația (4.13) trebuie să fie valabilă pentru orice δy, ceea ce implică

$$m\ddot{y} = -\frac{dU}{dy} = F\,. \qquad (4.14)$$

Constatăm astfel că, plecând de la principiul lui Hamilton, am regăsit ecuația fundamentală a mecanicii newtoniene, ceea ce corespunde faptului că cele două formalisme sunt echivalente.

Înainte de a trece la prezentarea formalismelor Lagrange şi Hamilton trebuie să luăm în discuție problema **forțelor de legătură**. Acestea, spre deosebire de **forțele fundamentale**, cum ar fi forța gravitațională, $\vec{F} = k\frac{m_1 m_2}{r^2}\frac{\vec{r}}{r}$, sau forța Lorentz $\vec{F} = q\left(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}\right)$ şi de **pseudoforțele de inerție**, nu sunt forțe introduse printr-o ecuație de definiție, ci ele reprezintă forțe de reacțiune ale legăturilor, acestea fiind definite prin ecuațiile ce stabilesc locul geometric al punctelor prin care trece punctul material.

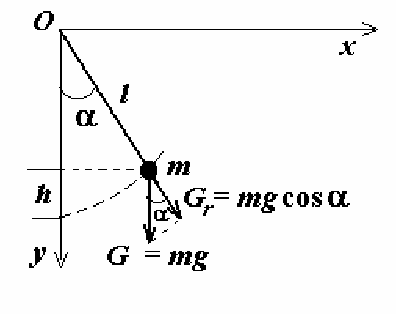


Fig. 4.3

Astfel, apare o problemă inversă în care forțele nu pot fi calculate decât după aflarea legilor de mişcare ale mobilului. Pentru a înțelege mai clar o astfel de situație să analizăm un exemplu simplu, şi anume să considerăm un punct material de masă m suspendat de un punct fix O printr-o bară rigidă de masă inerțială nulă şi de lungime l (fig. 4.3).

Dacă asupra punctului material nu se mai exercită alte constrângeri, atunci ecuația care descrie legătura este $x^2 + y^2 + z^2 = l^2$ (punctul material se mişcă pe sfera de rază l), iar dacă mişcarea are loc doar într-un plan vertical, atunci punctul material este supus la două legături, date de ecuațiile:

$$x^2 + y^2 = l^2 \text{ şi } z = 0. \tag{4.15}$$

Conform acestora punctul material se mişcă pe cercul de rază l în planul $z = 0$. În acest caz, forța de legătură este

$$F_l = G_r + \frac{mv^2}{l}. \tag{4.16}$$

Observăm că pentru a calcula forța (4.16) trebuie să cunoaştem viteza punctului material care, ținând cont de legea conservării energiei:

$$\frac{mv_0^2}{2} = mgh + \frac{mv^2}{2} \tag{4.17}$$

poate fi calculată doar dacă se cunosc condițiile inițiale ale mişcării.

Presupunând că punctul material este aruncat din poziția $x = 0, y = l$, cu viteza inițială $\vec{v}_0 = v_0 \cdot \vec{1}_x$ rezultă că în punctul de coordonată $y = l - h$ viteza este $v = \sqrt{v_0^2 - 2gh}$. Notând coordonata de-a lungul arcului de cerc cu s, $h = h(s)$ şi $v = \frac{ds}{dt}$, prin integrare se obține $s = s(t)$.

Forța de legătură (4.16) se obține deci prin substituirea expresiei vitezei.

Eliminarea forței de legătură şi, ca atare, a caracterului de problemă inversă poate fi realizată observând că, spre deosebire de un punct material liber care posedă trei grade de libertate, descrise de coordonatele x, y, z, punctul material din exemplul considerat, supus la cele două constrângeri descrise de cele două ecuații de legătură, este obligat să se mişte pe traiectoria de rază l în planul $z = 0$, având deci un singur grad de libertate descris de unghiul α, sau de lungimea arcului de cerc corespunzător acestuia. Aceste variabile le vom numi **coordonate generalizate**. Ele pot fi totdeauna obținute pornind de la coordonatele carteziene x, y, z şi de la ecuațiile care descriu legăturile.

Ecuațiile (4.15), reprezentând un sistem de 2 ecuații cu 3 necunoscute, conduc, prin rezolvare, la o singură variabilă independentă ataşată gradului de libertate al sistemului. Explicit, soluțiile ecuațiilor (4.15) sunt:

$$\begin{aligned} x &= l \sin\alpha \\ y &= l \cos\alpha \end{aligned} \tag{4.18}$$

respectiv componentele carteziene ale vitezei punctului material sunt:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= l\dot{\alpha}\cos\alpha \\ \dot{y} &= -l\dot{\alpha}\sin\alpha. \end{aligned} \tag{4.19}$$

După cum vom vedea în continuare, stabilirea coordonatelor independente pe care le vom numi, aşa cum am spus, coordonate generalizate ne permite prin formalismul mecanicii analitice eliminarea forțelor de legătură şi obținerea unui algoritm direct de rezolvare a acestui tip de probleme.

Să trecem, în continuare, la analiza cazului general al unui sistem format din mai multe puncte materiale.

Pentru un sistem de N puncte materiale care nu sunt supuse nici unei constrângeri, numărul gradelor de libertate este:

$$f_0 = 3N \tag{4.20}$$

iar coordonatele generalizate sunt chiar coordonatele carteziene x_j, y_j, z_j, cu $j = 1,2,...,N$. Dacă sistemul de N puncte materiale este supus unui număr de l constrângeri, descrise de ecuațiile $g_s(x_j, y_j, z_j) = 0$, cu $s = 1,2,...,l$, atunci numărul gradelor de libertate ale sistemului este $f = 3N - l$.

Trebuie astfel să se aleagă f coordonate generalizate, notate simbolic q_i, cu $i = 1,2,...,f$, rezultând f viteze generalizate $\dot{q}_i = \frac{dq}{dt}$ în funcție de care se vor exprima coordonatele şi vitezele carteziene ale punctelor materiale ce alcătuiesc sistemul:

$$x_j = x_j(q_i), \quad y_j = y_j(q_i), \quad z_j = z_j(q_i). \tag{4.21}$$

Dat fiind că $q_i = q_i(t)$, ec. (4.21) reprezintă funcții implicite de timp care prin derivare ne conduc la expresiile vitezelor carteziene, care se observă că depind atât de coordonatele generalizate q_i cât şi de vitezele generalizate $\dot{q}_i$:

$$\dot{x}_j = \sum_{i=1}^{f} \frac{\partial x_j}{\partial q_i}\dot{q}_i = \dot{x}_j(q_i, \dot{q}_i), \; \dot{y}_j = \sum_{i=1}^{f} \frac{\partial y_j}{\partial q_i}\dot{q}_i = \dot{y}_j(q_i, \dot{q}_i),$$

$$\dot{z}_j = \sum_{i=1}^{f} \frac{\partial z_j}{\partial q_i}\dot{q}_i = \dot{z}_j(q_i, \dot{q}_i). \tag{4.22}$$

Astfel, sistemul de N puncte materiale supuse la l constrângeri şi, în consecință, având $f = 3N - l$ grade de libertate este descris complet de setul de coordonate şi viteze generalizate $(q_i, \dot{q}_i)$, cu $i = 1,2,....,f$.

Se defineşte spațiul de configurație ca fiind spațiul cu f dimensiuni ale cărui coordonate sunt coordonatele generalizate. Un punct din acest spațiu reprezintă **configurația sistemului** în sensul în care coordonatele unui punct din spațiul de configurație determină, prin intermediul ecuațiilor (4.21) coordonatele carteziene ale tuturor punctelor sistemului şi, ca atare, configurația geometrică a sistemului.

Un proces mecanic, care reprezintă trecerea sistemului dintr-o stare inițială Σ_1 într-o altă stare Σ_2, va fi reprezentat în spațiul de configurație printr-o **traiectorie**. Trebuie menționat că procesele ce pot fi reprezentate în spațiul de configurație sunt strict **procese mecanice**, care nu presupun sub nici o formă existența unor fenomene disipative prin care energia mecanică să se transforme în altă formă de energie.

4.2. Formalism Lagrange

Primul pas în formularea mecanicii analitice dată de Lagrange constă în definirea funcției $L = L(q_i, \dot{q}_i, t)$, care-i poartă numele, care este o funcție de stare ce descrie complet din punct de vedere mecanic starea sistemului.

Principiul lui Hamilton postulează existența funcției S, numită **actiune**:

$$S = \int_{t_1}^{t_2} L(q_i, \dot{q}_i, t)dt \tag{4.23}$$

care **înregistrează un extremum pe traiectoria reală** în raport cu valorile sale calculate pe oricare din traiectoriile virtuale învecinate cu traiectoria reală:

$$\delta S = \delta \int_{t_1}^{t_2} L(q_i, \dot{q}_i, t)dt = 0 . \tag{4.24}$$

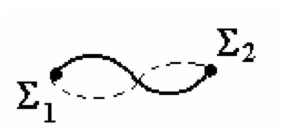


Fig. 4.4

Reamintim că traiectoria reală şi cele virtuale sunt trasate între aceleaşi două stări, inițială Σ_1 şi finală Σ_2 (fig. 4.4), astfel încât

$$\delta q_i(t_1) \equiv \delta q_i(t_2) \equiv 0 \tag{4.25}$$

variațiile coordonatelor generalizate fiind calculate la acelaşi moment de timp, astfel că, $\delta t = 0$. Din principiul lui Hamilton derivă imediat ecuațiile lui Lagrange. Astfel, vom calcula:

$$\delta S = \int_{t_1}^{t_2} \delta L(q_i, \dot{q}_i, t)dt = \int_{t_1}^{t_2} \left(\sum_{i=1}^{f} \frac{\partial L}{\partial q_i} \delta q_i + \sum_{i=1}^{f} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \delta \dot{q}_i \right) dt .$$

Ținând seama că $\delta\dot{q}_i = \delta\left(\dfrac{dq_i}{dt}\right) = \dfrac{d}{dt}\delta q_i$, termenii celei de-a doua sume de sub integrală se integrează prin părți:

$$\int_{t_1}^{t_2} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\delta\dot{q}_i\,dt = \int_{t_1}^{t_2} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\frac{d}{dt}\delta q_i\,dt = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\delta q_i\Big|_{t_1}^{t_2} - \int_{t_1}^{t_2}\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\delta q_i\,dt.$$

Deoarece $\delta q_i(t_1) \equiv \delta q_i(t_2) \equiv 0$, rezultă:

$$\delta S = \int_{t_1}^{t_2}\sum_{i=1}^{f}\left(\frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right)\delta q_i\,dt.$$

Conform principiului lui Hamilton $\delta S \equiv 0$ şi cum variațiile δq_i sunt arbitrare şi independente, acest lucru nu se poate realiza decât dacă toate parantezele care apar în termenii sumei de sub integrală sunt nule:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0, \quad i = 1,2,\dots,f. \tag{4.26}$$

Acestea sunt **ecuațiile Lagrange** care constituie un sistem de f ecuații de ordinul doi cu f necunoscute $q_i = q_i(t)$ care reprezintă coordonatele generalizate.

Soluția generală a ecuațiilor Lagrange va cuprinde un număr de $2f$ constante care vor fi determinate din condițiile inițiale.

Pentru un sistem de puncte materiale libere, drept coordonate generalizate se pot lua chiar coordonatele carteziene x_j, y_j, z_j, iar ecuațiile Lagrange pentru fiecare punct material sunt:

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_j} &= \frac{\partial L}{\partial x_j}\\ \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{y}_j} &= \frac{\partial L}{\partial y_j}\\ \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{z}_j} &= \frac{\partial L}{\partial z_j}.\end{aligned} \tag{4.27}$$

Dacă se înmulțesc aceste ecuații cu versorii axelor de coordonate şi se adună, atunci, introducând notațiile:

$$\vec{1}_x \frac{\partial}{\partial \dot{x}_j} + \vec{1}_y \frac{\partial}{\partial \dot{y}_j} + \vec{1}_z \frac{\partial}{\partial \dot{z}_j} = \frac{\partial}{\partial \vec{v}_j}$$
$$\vec{1}_x \frac{\partial}{\partial x_j} + \vec{1}_y \frac{\partial}{\partial y_j} + \vec{1}_z \frac{\partial}{\partial z_j} = \frac{\partial}{\partial \vec{r}_j} \qquad (4.28)$$

rezultă pentru fiecare punct material ecuația:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \vec{v}_j} = \frac{\partial L}{\partial \vec{r}_j}. \qquad (4.29)$$

Se defineşte, de asemenea, **impulsul generalizat** p_i, conjugat unei coordonate generalizate q_i:

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \qquad (4.30)$$

şi **forța generalizată** Q_i, conjugată cu o coordonată generalizată q_i:

$$Q_i = \frac{\partial L}{\partial q_i}. \qquad (4.31)$$

Pentru un punct material liber raportat la un referențial cartezian impulsul conjugat este:

$$\vec{p}_j = \frac{\partial L}{\partial \vec{v}_j} \qquad (4.32)$$

iar forța conjugată este:

$$\vec{F}_j = \frac{\partial L}{\partial \vec{r}_j}. \qquad (4.33)$$

Ținând cont de definițiile (4.30) şi (4.31), ecuațiile Lagrange (4.26) se scriu:

$$\dot{p}_i = Q_i \qquad (4.34)$$

şi, în particular, pentru punctul material liber, ecuația Lagrange (4.29) devine):

$$\vec{F}_j = \dot{\vec{p}}_j. \qquad (4.35)$$

Ecuația (4.35) nu este altceva decât legea a II-a a lui Newton în forma ei cea mai generală, valabilă nu numai în mecanica clasică ci şi în mecanica relativistă.

Pentru un proces elementar care se desfăşoară între o stare inițială Σ_1, pentru care coordonatele generalizate sunt q_i şi o stare învecinată Σ_2, de coordonate generalizate $q_i + dq_i$, se defineşte **lucrul mecanic elementar** $d\mathscr{L}$:

$$d\mathscr{L} = \sum_{i=1}^{f} Q_i \, dq_i \,. \tag{4.36}$$

Dacă procesul se desfăşoară între două stări oarecare de-a lungul unei curbe Γ date, atunci lucrul mecanic este:

$$\mathscr{L}_{1\to 2} = \int_{1\Gamma}^{2} \sum_{i=1}^{f} Q_i \, dq_i \,. \tag{4.37}$$

Pentru un sistem de puncte materiale libere care evoluează între două stări învecinate definite față de un sistem cartezian, lucrul mecanic elementar este:

$$d\mathscr{L} = \sum_{j=1}^{N} \vec{F}_j \, d\vec{r}_j \tag{4.38}$$

iar pentru un proces care are loc între două stări Σ_1 şi Σ_2 lucrul mecanic este:

$$\mathscr{L} = \int_{1}^{2} \sum_{j=1}^{N} \vec{F}_j \, d\vec{r}_j \,. \tag{4.39}$$

Trebuie subliniat că într-un câmp de forțe conservative lucrul mecanic nu depinde de drumul Γ urmat ci numai de stările inițială şi finală.

4.3. Ecuațiile canonice ale lui Hamilton

În cadrul formalismului Lagrange starea unui sistem mecanic este descrisă de coordonatele generalizate q_i, care dau configurația sistemului, precum şi de vitezele generalizate $\dot{q}_i$ corespunzătoare fiecărei coordonate generalizate. Acestea alcătuiesc un sistem de $2f$ parametri independenți care o dată rezolvate ecuațiile Lagrange şi cunoscute condițiile inițiale sunt perfect determinați şi definesc complet starea sistemului.

Se pot alege însă alături de coordonatele generalizate şi alți parametrii decât vitezele generalizate pentru a descrie starea sistemului şi anume impulsurile generalizate.

Astfel, ansamblul acestor $2f$ parametri, adică f coordonate generalizate şi f impulsuri generalizate, defineşte un spaţiu cu $2f$ dimensiuni, numit **spaţiul fazelor**. Un punct din spaţiul fazelor descrie complet starea sistemului iar evoluţia sistemului mecanic se traduce prin traiectoria urmată de punctul reprezentativ al stării sistemului în acest spaţiu.

Spaţiul de configuraţie f dimensional, de coordonate q_i, reprezintă un subspaţiu al spaţiului fazelor şi defineşte doar configuraţia sistemului de puncte materiale spre deosebire de spaţiul fazelor $2f$ dimensional care defineşte starea dinamică a sistemului.

Fiecare din cele f perechi (p_i, q_i) poartă numele de **variabile canonic conjugate**.

Hamilton a definit o **nouă funcţie de stare** H, **numită hamiltoniană**, care depinde de variabilele canonice:

$$H(p,q,t) = \sum_{i=1}^{f} p_i \dot{q}_i - L(q,\dot{q},t) \tag{4.40}$$

unde în expresia lui H s-a notat pe scurt ansamblul celor f coordonate generalizate cu q şi, respectiv, impulsurile generalizate cu p.

Cu ajutorul hamiltonienei se poate obţine o nouă formă a ecuaţiilor de mişcare pornind tot de la principiul lui Hamilton, dar acum acţiunea este exprimată în funcţie de H:

$$S = \int_{t_1}^{t_2} L(q,\dot{q},t)\,dt = \int_{t_1}^{t_2} \left[\sum_{i=1}^{f} p_i \dot{q}_i - H(p,q,t)\right] dt. \tag{4.41}$$

Să calculăm acum variaţia lui S:

$$\delta S = \int_{t_1}^{t_2} \delta\left[\sum_{i=1}^{f} p_i \dot{q}_i - H(p,q,t)\right] dt =$$

$$= \int_{t_1}^{t_2} \left[\sum_{i=1}^{f} p_i \delta\dot{q}_i + \sum_{i=1}^{f} \dot{q}_i \delta p_i - \sum \frac{\partial H}{\partial q_i}\delta q_i - \sum \frac{\partial H}{\partial p_i}\delta p_i\right] dt.$$

Calculând prin părţi integrala unui termen din prima sumă şi ţinând seama că $\delta q_i(t_1) \equiv 0, \delta q_i(t_2) \equiv 0$, obţinem:

$$\int_{t_1}^{t_2} p_i \delta \dot{q}_i \, dt = \int_{t_1}^{t_2} p_i \frac{d}{dt} \delta q_i \, dt = p_i \delta q_i \Big|_{t_1}^{t_2} - \int_{t_1}^{t_2} \frac{dp_i}{dt} \delta q_i \, dt = \int_{t_1}^{t_2} - \dot{p}_i \delta q_i \, dt .$$

Astfel, principiul lui Hamilton se scrie:

$$\int_{t_1}^{t_2} \left[-\sum \left(\dot{p}_i + \frac{\partial H}{\partial q_i} \right) \delta q_i + \sum \left(\dot{q}_i - \frac{\partial H}{\partial p_i} \right) \delta p_i \right] dt = 0 .$$

Pentru ca integrala să fie nulă oricare ar fi variațiile δq_i şi δp_i independente trebuie ca fiecare paranteză de sub sumele de mai sus să fie nulă, ceea ce implică:

$$\begin{aligned} \dot{p}_i &= -\frac{\partial H}{\partial q_i} \\ \dot{q}_i &= \frac{\partial H}{\partial p_i}. \end{aligned} \tag{4.42}$$

Acest sistem de $2f$ ecuații diferențiale de ordinul întâi pentru variabilele canonice p_i şi q_i constituie **ecuațiile canonice ale lui Hamilton**. Prin integrarea ecuațiilor Hamilton se obțin expresiile explicite ale variabilelor canonice care conțin $2f$ constante de integrare ce pot fi determinate dacă se cunosc condițiile inițiale ale mişcării:

$$\begin{aligned} p_i &= p_i(t, C_1, \ldots, C_{2f}) \\ q_i &= q_i(t, C_1, \ldots, C_{2f}). \end{aligned}$$

Pentru sistemele izolate, sau care se mişcă în câmpuri de forțe conservative, una dintre constantele de integrare arbitrare poate fi ales momentul de timp t_0, astfel că $p_i = p_i(t_0, C_1, \ldots, C_{2f-1})$ şi $q_i = q_i(t_0, C_1, \ldots, C_{2f-1})$. Dacă se elimină timpul între cele $2f$ ecuații reprezentate de expresiile variabilelor canonice se pot obține cele $2f-1$ constante arbitrare ca funcții de variabilele canonice:

$$C_k = C_k(p_1, \ldots, p_f; q_1, \ldots, q_f) \text{ unde } k = 1, \ldots, 2f-1 .$$

Aceste mărimi îşi păstrează valoarea constantă în timpul mişcării şi se numesc **integrale prime ale mişcării**. Ele satisfac condițiile:

$$\frac{dC_k}{dt} = 0, \quad \frac{\partial C_k}{\partial t} = 0 .$$

Pentru punctele materiale libere a căror mişcare este raportată la un referențial cartezian, ecuațiile lui Hamilton sunt:

$$\dot{\vec{p}}_j = -\frac{\partial H}{\partial \vec{r}_j}$$
$$\dot{\vec{r}}_j = \frac{\partial H}{\partial \vec{p}_j}. \qquad (4.43)$$

O altă alternativă de obținere a ecuațiilor de mişcare o reprezintă **ecuația Hamilton – Jacobi** care poate fi obținută plecând de la acțiunea S definită în funcție de H:

$$S = \int \left(\sum p_i \dot{q}_i - H \right) dt.$$

Se observă că expresia de sub integrală, $\sum p_i \dot{q}_i\, dt - H dt$, reprezintă dS:

$$dS = \sum p_i\, dq_i - H dt. \qquad (4.44)$$

astfel că S este o funcție doar de q_i şi t. Atunci, calculând diferențiala funcției $S(q_i, t)$, obținem:

$$dS = \sum \frac{\partial S}{\partial q_i} dq_i + \frac{\partial S}{\partial t} dt. \qquad (4.45)$$

Prin identificarea coeficienților celor două expresii ale lui dS, rezultă:

$$p_i = \frac{\partial S}{\partial q_i}$$
$$H = -\frac{\partial S}{\partial t}. \qquad (4.46)$$

În a doua ecuație (4.46), $H + \frac{\partial S}{\partial t} = 0$, ținând cont de faptul că $H = H(p_i, q_i, t)$, se înlocuiesc impulsurile $p_i = \frac{\partial S}{\partial q_i}$, şi se obține **ecuația Hamilton – Jacobi**:

$$H\left(q_1, ..., q_f; \frac{\partial S}{\partial q_1}, ..., \frac{\partial S}{\partial q_f}; t \right) + \frac{\partial S}{\partial t} = 0. \qquad (4.47)$$

Ecuația Hamilton – Jacobi, a cărei metodă de integrare este în general mai dificilă, este echivalentă cu ecuațiile Lagrange şi Hamilton.

4.4. Paranteze Poisson. Derivata totală în raport cu timpul a unei mărimi mecanice

Fie două mărimi mecanice care sunt funcții de variabilele canonice şi de timp:

$$\begin{aligned} \varphi &= \varphi(p_i, q_i, t) \\ \psi &= \psi(p_i, q_i, t). \end{aligned} \tag{4.48}$$

Prin definiție, **paranteza Poisson** formată cu aceste două funcții, notată $[\varphi, \psi]$, este dată de expresia:

$$[\varphi, \psi] = \sum_{i=1}^{f} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial p_i} \frac{\partial \psi}{\partial q_i} - \frac{\partial \varphi}{\partial q_i} \frac{\partial \psi}{\partial p_i} \right). \tag{4.49}$$

Parantezele Poisson prezintă o serie de proprietăți care, pornind de la relația de definiție, rezultă imediat:

$$\begin{aligned} &[\varphi, \psi] = -[\psi, \varphi] \\ &[\varphi, \text{const.}] = 0 \\ &[\varphi, -\psi] = -[\varphi, \psi] = [-\varphi, \psi] \\ &[\varphi_1 + \varphi_2, \psi] = [\varphi_1, \psi] + [\varphi_2, \psi] \\ &[\varphi_1 \cdot \varphi_2, \psi] = [\varphi_1, \psi]\varphi_2 + \varphi_1[\varphi_2, \psi]. \end{aligned} \tag{4.50}$$

Derivata în raport cu timpul a unei paranteze Poisson este:

$$\frac{\partial}{\partial t}[\varphi, \psi] = \left[\frac{\partial \varphi}{\partial t}, \psi \right] + \left[\varphi, \frac{\partial \psi}{\partial t} \right]. \tag{4.51}$$

Dacă una din funcții este o variabilă canonică, atunci:

$$\begin{aligned} [\varphi, p_k] &= -\frac{\partial \varphi}{\partial q_k} \\ [\varphi, q_k] &= \frac{\partial \varphi}{\partial p_k}. \end{aligned} \tag{4.52}$$

În cazul în care ambele funcții ale parantezei Poisson sunt variabile canonice, atunci:

$$[p_k, q_\ell] = \delta_{k\ell} \tag{4.53}$$

unde $\delta_{k\ell}$ este simbolul lui Kronecker:

$$\delta_{k\ell} = \begin{cases} 1, & k = \ell \\ 0, & k \neq \ell. \end{cases} \tag{4.54}$$

O problemă de interes deosebit este calcularea derivatei totale în raport cu timpul a unei mărimi mecanice care, după cum vom vedea, poate fi exprimată cu ajutorul parantezelor Poisson.

Astfel, pentru o mărime mecanică $\varphi = \varphi(p_i, q_i, t)$, derivata totală în raport cu timpul este:

$$\frac{d\varphi}{dt} = \frac{\partial\varphi}{\partial t} + \sum_{i=1}^{f}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial q_i}\dot{q}_i + \frac{\partial\varphi}{\partial p_i}\dot{p}_i\right).$$

Folosind ecuațiile Hamilton:

$$\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i}$$

$$\dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i}$$

şi înlocuind $\dot{p}_i$ şi $\dot{q}_i$, aceasta capătă forma:

$$\frac{d\varphi}{dt} = \frac{\partial\varphi}{\partial t} + [H, \varphi]. \tag{4.55}$$

Astfel, dependența explicită de timp a unei variabile mecanice este dată de derivata parțială după timp iar variația implicită este dată de paranteza Poisson a hamiltonienei cu variabila mecanică considerată.

Folosind rezultatul obținut, observăm că ecuațiile Hamilton pot fi scrise şi sub forma:

$$\begin{aligned} \dot{p}_i &= [H, p_i] \\ \dot{q}_i &= [H, q_i]. \end{aligned} \tag{4.56}$$

Trebuie menționat că pentru o constantă a mişcării C_k avem:

$$[H, C_k] = 0. \tag{4.57}$$

4.5. Legi de conservare

Aşa cum s-a discutat, există o serie de mărimi numite **constante ale mişcării**, care îşi păstrază valoarea constantă în timp în decursul evoluției sistemului mecanic.

Printre acestea, un rol aparte îl joacă energia mecanică totală, impulsul total şi momentul cinetic total ale unui sistem care, pentru cazul studiat aici, al câmpurilor de forţe conservative, sunt constante ale mişcării. Invarianţa lor în timp rezultă din ecuaţiile Lagrange şi Hamilton, dar ele au o semnificaţie mult mai profundă, dată de faptul că legile de conservare ale acestor mărimi sunt echivalente cu proprietăţile de uniformitate a timpului, respectiv, de omogenitate şi izotropie a spaţiului.

Astfel, legea conservării impulsului total exprimă omogenitatea spaţiului, legea conservării momentului cinetic total exprimă izotropia spaţiului iar uniformitatea timpului îşi găseşte expresia în legea conservării energiei mecanice totale.

Legea conservării energiei mecanice totale

Considerăm un sistem alcătuit din N puncte materiale, care evoluează în condiţiile unui timp uniform. Din punct de vedere fizic, aceasta înseamnă că fenomenele fizice se derulează la fel la orice moment de timp, ceea ce revine la a spune că rezultatul oricărui experiment fizic este acelaşi indiferent de momentul de timp la care este efectuat. Cum, din punct de vedere mecanic, evoluţia unui sistem este descrisă de funcţia Hamilton, aceasta revine la invarianţa hamiltonienei la orice translaţie temporală. Astfel, considerând două momente de timp infinit apropiate t şi respectiv, $t' = t + \delta t$, hamiltoniana va respecta egalitatea $H(t) = H(t + \delta t)$, oricare ar fi δt. Aceasta revine la a spune că H nu depinde explicit de timp, adică $\frac{\partial H}{\partial t} = 0$.

Conform ecuaţiei (4.55):

$$\frac{dH}{dt} = \frac{\partial H}{\partial t} + [H, H]. \tag{4.58}$$

Deoarece $[H, H] = 0$, şi ţinând seama de faptul că $\frac{\partial H}{\partial t} = 0$, rezultă:

$$\frac{dH}{dt} = 0 \tag{4.59}$$

adică

$$H(p_i, q_i) = \text{const.} = E. \tag{4.60}$$

Astfel, uniformitatea timpului implică cu necesitate conservarea energiei mecanice totale a sistemului.

Se evidențiază astfel o interdependență fundamentală între timp şi energie care vom vedea că joacă un rol esențial în mecanica cuantică.

Mai trebuie subliniat faptul că ecuația (4.60) reprezintă ecuația unei hipersuprafețe $2f-1$ dimensională în spațiul fazelor. În condițiile date, evoluția sistemului corespunde unei traiectorii în spațiul fazelor care este integral conținută în hipersuprafața $E = H = \text{const}$.

Conservarea impulsului total

Considerăm un sistem de N puncte materiale care evoluează în condițiile unui spațiu omogen. Din punct de vedere fizic aceasta înseamnă că rezultatul unei experiențe trebuie să fie acelaşi indiferent de locul din spațiu în care aceasta se desfăşoară. Din punct de vedere mecanic, acesta revine la faptul că hamiltoniana trebuie să fie invariantă la orice translație de ansamblu a sistemului de puncte materiale.

Pentru aceasta, să considerăm că cele N puncte materiale ale sistemului, de vectori de poziție $\vec{r}_j$, cu $j = 1,\ldots,N$, suferă o aceeaşi translație $\delta\vec{r}_j = \varepsilon$, noii vectori de poziție fiind $\vec{r}_j + \delta\vec{r}_j = \vec{r}_j + \vec{\varepsilon}$, translație ce trebuie să lase hamiltoniana neschimbată, $H(\vec{r}_j) = H(\vec{r}_j + \vec{\varepsilon})$. Aceasta înseamnă că la translația de vector $\vec{\varepsilon}$ a punctelor sistemului variația hamiltonianei trebuie să fie nulă:

$$\delta H = \sum_{j=1}^{N} \frac{\partial H}{\partial \vec{r}_j} \delta\vec{r}_j = \sum_{j=1}^{N} \frac{\partial H}{\partial \vec{r}_j} \cdot \vec{\varepsilon} = 0 .$$

Cum $\vec{\varepsilon}$ este arbitrar şi nenul rezultă că:

$$\sum_{j=1}^{N} \frac{\partial H}{\partial \vec{r}_j} = 0 .$$

Acum, ținând cont de (4.52), avem:

$$\left[H, \vec{p}_j\right] = -\frac{\partial H}{\partial \vec{r}_j} .$$

Dacă lăsăm ca j să parcurgă toate valorile, $j = 1,\ldots,N$, şi adunăm aceste expresii, rezultă:

$$\left[H, \sum_{j=1}^{N} \vec{p}_j\right] = \left[H, \vec{P}\right] = -\sum_{j=1}^{N} \frac{\partial H}{\partial \vec{r}_j} = 0 .$$

Aceasta înseamnă că **impulsul mecanic total al sistemului** $\vec{P}$:

$$\vec{P} = \sum_{j=1}^{N} \vec{p}_j \tag{4.61}$$

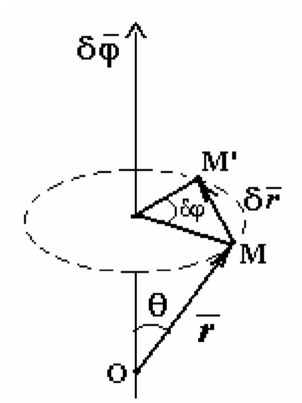
are paranteza Poisson cu hamiltoniana nulă:

$$\left[H, \vec{P}\right] = 0 \tag{4.62}$$

Cum impulsurile generalizate ale punctelor materiale nu depind explicit de timp, $\frac{\partial \vec{p}_j}{\partial t} = 0$, atunci şi $\frac{\partial \vec{P}}{\partial t} = \sum \frac{\partial \vec{p}_j}{\partial t} = 0$ şi ţinând cont de (4.62) rezultă, în conformitate cu ecuaţia (4.55), că impulsul mecanic total al sistemului se conservă atunci când mişcarea sistemului are loc într-un spaţiu omogen:

$$\frac{d\vec{P}}{dt} = 0 \Rightarrow \vec{P} = \text{const.} \tag{4.63}$$

Conservarea momentului cinetic total



Considerăm un sistem de puncte materiale care evoluează în condiţiile unui spaţiu izotrop. Prin spaţiu izotrop înţelegem că indiferent de orientarea sistemului rezultatul oricărei experienţe fizice este acelaşi. Acesta revine la condiţia ca hamiltoniana sistemului să fie invariantă la rotaţii.

Să admitem că sistemul alcătuit din N puncte materiale efectuează o rotaţie de acelaşi unghi în jurul unei axe fixe. Datorită izotropiei spaţiului rotaţia trebuie să lase hamiltoniana sistemului neschimbată:

$$\delta H = 0 . \tag{4.64}$$

Pentru a calcula δH este comod să considerăm că mişcarea de rotaţie este raportată la un sistem de coordonate sferice r, θ, φ (fig. 4.5).

Fie $\delta\varphi$ unghiul de rotaţie al unui punct material corespunzător deplasării elementare $\delta\vec{r}$. Vedem din fig. 4.5 că $|\delta\vec{r}| = \delta\varphi \cdot r\sin\theta$ iar vectorul $\delta\vec{r}$ este perpendicular pe planul format de $\delta\vec{\varphi}$ şi $\vec{r}$, astfel că putem scrie:

$$\delta\vec{r} = \delta\vec{\varphi} \times \vec{r}. \tag{4.65}$$

De aici rezultă:

$$\begin{aligned} \delta\vec{v} &= \delta\varphi \times \dot{\vec{r}} \\ \delta\vec{p} &= \delta\varphi \times \vec{p}. \end{aligned} \tag{4.66}$$

Acum, pentru sistemul de N puncte materiale să considerăm că toate punctele efectuează o rotaţie în jurul unei axe cu acelaşi unghi $\delta\vec{\varphi}_j = \vec{\alpha}$, ceea ce ne permite să scriem:

$$\begin{aligned} \delta\vec{r}_j &= \delta\vec{\varphi}_j \times \vec{r}_j = \vec{\alpha} \times \vec{r}_j \\ \delta\vec{p}_j &= \delta\vec{\varphi}_j \times \vec{p}_j = \vec{\alpha} \times \vec{p}_j. \end{aligned}$$

Calculând δH:

$$\delta H = \sum_{j=1}^{N} \frac{\partial H}{\partial \vec{r}_j}\delta\vec{r}_j + \sum_{j=1}^{N} \frac{\partial H}{\partial \vec{p}_j}\delta\vec{p}_j = \sum_{j=1}^{N} \frac{\partial H}{\partial \vec{r}_j}\left(\vec{\alpha} \times \vec{r}_j\right) + \sum_{j=1}^{N} \frac{\partial H}{\partial \vec{p}_j}\left(\vec{\alpha} \times \vec{p}_j\right)$$

şi ţinând cont că $\vec{a}\left(\vec{b} \times \vec{c}\right) = \vec{b}\left(\vec{c} \times \vec{a}\right)$, ecuaţia (4.64) devine:

$$\delta H = \vec{\alpha} \sum_{j=1}^{N} \left[\vec{r}_j \times \frac{\partial H}{\partial \vec{r}_j} + \vec{p}_j \times \frac{\partial H}{\partial \vec{p}_j} \right] = 0 \tag{4.67}$$

Ţinând cont de proprietăţile parantezelor Poisson (4.52), derivatele hamiltonienei, date de:

$$\begin{aligned} \frac{\partial H}{\partial \vec{r}_j} &= -\left[H, \vec{p}_j\right] \\ \frac{\partial H}{\partial \vec{p}_j} &= \left[H, \vec{r}_j\right] \end{aligned}$$

pot fi înlocuite în (4.67) şi deoarece $\vec{\alpha} \neq 0$, rezultă:

$$\sum_{j=1}^{N}\left\{-\vec{r}_j\times\left[H,\vec{p}_j\right]+\vec{p}_j\times\left[H,\vec{r}_j\right]\right\}=0\,. \tag{4.68}$$

Pe de altă parte în conformitate cu proprietățile parantezelor Poisson se poate arăta că pentru orice funcție $\varphi = \varphi(\vec{r},\vec{p})$ este valabilă relația:

$$\left[\varphi,\vec{r}\times\vec{p}\right]=\vec{r}\times\left[\vec{\varphi},\vec{p}\right]+\left[\vec{\varphi},\vec{r}\right]\times\vec{p}\,.$$

Ținând cont de această relație ecuația (4.68) devine:

$$\sum_{j=1}^{N}\left[H,\vec{r}_j\times\vec{p}_j\right]=\left[H,\sum_{j=1}^{N}\vec{r}_j\times\vec{p}_j\right]=\left[H,\vec{M}\right]=0 \tag{4.69}$$

unde

$$\vec{M}=\sum_{j=1}^{N}\vec{r}_j\times\vec{p}_j \tag{4.70}$$

este **momentul cinetic total al sistemului**.

Deaorece $\dfrac{\partial\vec{r}_j}{\partial t}=0,\dfrac{\partial\vec{p}_j}{\partial t}=0$ rezultă că $\dfrac{\partial\vec{M}}{\partial t}=0$ şi atunci ținând cont de (4.69), derivata totală în raport cu timpul a momentului cinetic total este nulă:

$$\frac{d\vec{M}}{dt}=\frac{\partial\vec{M}}{\partial t}+\left[H,\vec{M}\right]=0\,. \tag{4.71}$$

Aceasta înseamnă că:

$$\vec{M}=\text{const.} \tag{4.72}$$

adică momentul cinetic total este o constantă a mişcării în condițiile unui spațiu izotrop.

4.6. Teorema Liouville

Teorema Liouville afirmă ca *volumul ocupat în spațiul fazelor de un domeniu Δ este invariant în raport cu evoluția starilor cuprinse in domeniu.*

Fie un domeniu Δ care la momentul t ocupă în spațiu fazelor volumul:

$$\Omega = \underbrace{\int \ldots \int}_{\Delta} dp_1,\ldots,dp_f\, dq_1,\ldots,dq_f\,.$$

Pentru domeniul considerat fiecare punct reprezintă o stare a sistemului şi în urma evoluției stării respective, acesta va descrie o traiectorie în spațiul fazelor. La un moment ulterior de timp t', domeniul Δ va ocupa volumul

$$\Omega' = \underbrace{\int \ldots \int}_{\Delta} dp_1',\ldots,dp_f'\, dq_1',\ldots,dq_f'$$

Pentru fiecare stare, între variabilele canonice p_i' şi q_i', la momentul de timp $t' = t + dt$ şi variabilele canonice p_i şi q_i, la momentul de timp t, există relațiile:

$$\begin{aligned} p_i' &= p_i + \dot{p}_i\, dt \\ q_i' &= q_i + \dot{q}_i\, dt. \end{aligned} \tag{4.73}$$

Dacă considerăm că trecerea de la variabilele p_i şi q_i la p_i' şi q_i' este o transformare de coordonate, atunci putem scrie:

$$\underbrace{\int \ldots \int}_{\Delta} dp_1',\ldots,dp_f'\, dq_1',\ldots,dq_f' = \underbrace{\int \ldots \int}_{\Delta} dp_1,\ldots,dp_f\, dq_1,\ldots,dq_f \tag{4.74}$$

unde D, determinantul transformării, ținând cont de (4.73) este:

$$D = \begin{vmatrix} \frac{\partial p_1'}{\partial p_1} & \frac{\partial p_1'}{\partial p_2} \ldots & \frac{\partial p_1'}{\partial q_1} \ldots & \frac{\partial p_1'}{\partial q_f} \\ \frac{\partial p_2'}{\partial p_1} & \frac{\partial p_2'}{\partial p_2} \ldots & \frac{\partial p_2'}{\partial q_1} \ldots & \frac{\partial p_2'}{\partial q_f} \\ . & & & \\ . & & & \\ \frac{\partial q_f'}{\partial p_1} & \ldots\ldots & \ldots\ldots & \frac{\partial q_f'}{\partial q_f} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 + \frac{\partial \dot{p}_1}{\partial p_1} dt & \frac{\partial \dot{p}_1}{\partial p_2} dt & \ldots & \frac{\partial \dot{p}_1}{\partial q_f} dt \\ \frac{\partial \dot{p}_2}{\partial p_1} dt & \ldots & \ldots & \frac{\partial \dot{p}_2}{\partial q_f} dt \\ . & & & \\ . & & & \\ \frac{\partial \dot{q}_f}{\partial p_1} dt & \ldots & \ldots & 1 + \frac{\partial \dot{q}_f}{\partial q_f} dt \end{vmatrix}.$$

Dezvoltând determinantul şi neglijând termenii de ordin superior $\left(dt^2, dt^3,\ldots, \text{etc.}\right)$, rezultă:

$$D = 1 + \sum_{i=1}^{f} \frac{\partial \dot{p}_i}{\partial p_i} dt + \sum_{i=1}^{f} \frac{\partial \dot{q}_i}{\partial q_i} dt . \tag{4.75}$$

Ținând cont că $\dot{p}_i$ şi $\dot{q}_i$ sunt date de ecuațiile Hamilton, expresia lui D devine:

$$D = 1 + \sum_{i=1}^{f} \left[\frac{\partial}{\partial p_i} \left(-\frac{\partial H}{\partial q_i} \right) + \frac{\partial}{\partial q_i} \left(\frac{\partial H}{\partial p_i} \right) \right] dt = 1 . \tag{4.76}$$

Atunci, conform transformarii de coordonate (4.73) rezultă:

$$\Omega = \Omega'$$

rezultat care reprezintă chiar teorema Liouville.

4.7. Legea inerției

Să considerăm un punct material care evoluează în condițiile de spațiu omogen şi izotrop şi timp uniform.

Datorită omogenității spațiului şi uniformității timpului am obținut anterior:

$$H(\vec{p}, \vec{r}, t) = H(\vec{p}) .$$

În plus, datorită izotropiei spațiului, hamiltoniana nu depinde de orientarea sistemului:

$$H = H\left(p^2\right)$$

adică ea depinde doar de modulul impulsului, adică de p^2. În acest caz, prima ecuație Hamilton se scrie:

$$\dot{\vec{p}} = -\frac{\partial H\left(p^2\right)}{\partial \vec{r}} = 0 \tag{4.77}$$

ci:

$$\vec{p} = \text{const.} \tag{4.78}$$

A doua ecuație Hamilton se scrie:

$$\vec{v} = \dot{\vec{r}} = \frac{\partial H\left(p^2\right)}{\partial \vec{p}} = \frac{\partial H\left(p^2\right)}{\partial p^2} \cdot \frac{\partial (\vec{p} \cdot \vec{p})}{\partial \vec{p}} = 2 \frac{\partial H\left(p^2\right)}{\partial p^2} \vec{p} . \tag{4.79}$$