

7. Gravitația

Studiul mișcării planetelor își are începuturile în astronomie, în observațiile și analizele asupra traiectoriilor Soarelui, a Lunii și a celor cinci planete vizibile cu ochiul liber (Mercur, Venus, Marte, Jupiter și Saturn). Cuvântul planetă derivă din greacă, unde înseamnă dorință. Ei studiau aceste corpuri care "stăteau cumva atârinate deasupra capului lor", considerându-le ca divine și multe dintre activitățile zilnice crezând că sunt influențate de poziția lor. De aceea doreau să le prezică viitoarele poziții.

Astronomul grec Ptolemeu a propus un sistem în care Pământul era în centru și toate celelalte planete, Soarele, Luna se învârtteau în jurul său. Alegând o combinație anume de mase și viteze, el putea să prezică mișcarea planetelor cu o acuratețe destul de bună. Schema lui a fost adoptată și a supraviețuit mai mult de 1000 ani, până la Copernicus.

Acesta a stabilit modelul heliocentric, mult mai simplu, în care Soarele este în centru și a demonstrat că toate măsurătorile verifică acest lucru. Tycho Brahe (1546-1601), care s-a născut la trei ani după moartea lui Copernicus, a imaginat un sistem în care Pământul era în centru, Soarele și Luna se roteau în jurul său, iar celelalte planete se roteau în jurul Soarelui. Oricum, după el au rămas însemnări multiple cu o acuratețe de 2 minute de arc (un minut de arc are 1/60 grade).

Observațiile lui Tycho au fost moștenite de către Kepler (1571-1630), care a obținut cele trei legi empirice ale sale.

7.1. Legile lui Kepler. Legea atracției universale (gravitaționale)

Legile de mișcare ale planetelor în jurul Soarelui au fost stabilite de Johann Kepler după calcule de aproape două decenii, pe baza observațiilor de mare precizie ale lui Tycho Brahe și ele au următorul enunț:

1. Planetele se mișcă în jurul Soarelui pe traiectorii eliptice, Soarele aflându-se în unul din focare
2. Razele vectoare, duse de la Soare la planetă, descriu arii egale în timp egal, adică viteza areolară sau sectorială este constantă (Fig. 7.1.1.)
3. Pătratele timpilor de revoluție ale planetelor în jurul Soarelui sunt proporționale cu cuburile semiaxelor mari ale elipselor:

$$T^2 = k \cdot r^3 \qquad 7.1.1.$$

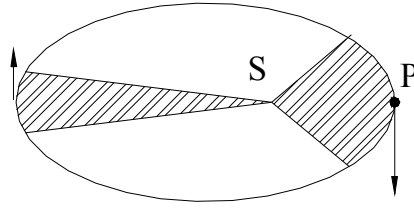


Fig.7.1.1.

Pentru a scrie aria descrisă de raza vectorie, folosim formula ariei triunghiului (produsul laturilor cu sinusul unghiului dintre ele):

$$\Delta S \cong \frac{1}{2} r(r + \Delta r) \sin(\Delta \varphi) \xrightarrow{\Delta \varphi \rightarrow 0} dS = \frac{r^2 d\varphi}{2} \text{ sau } \frac{|\vec{r}| |d\vec{r}| \sin(\vec{r}, d\vec{r})}{2} \Rightarrow d\vec{S} = \frac{1}{2} \vec{r} \times d\vec{r} \quad 7.1.2.$$

Ultima expresie ne arată că aria elementară se poate reprezenta printr-un vector perpendicular pe arie (Fig. 7.1.2.).

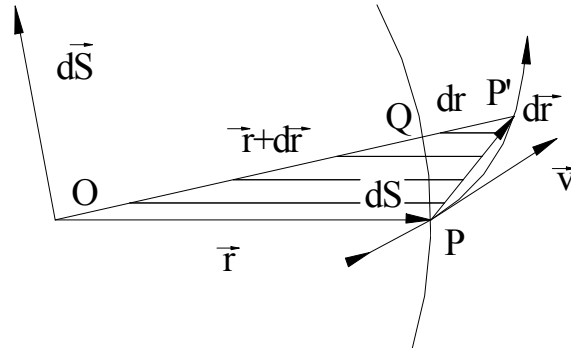


Fig.7.1.2.

Viteza areolară se definește ca fiind variația ariei descrise de raza vectorie a planetei în unitatea de timp:

$$\vec{\Omega} = \frac{d\vec{S}}{dt} = \frac{1}{2} \vec{r} \times \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{1}{2} \vec{r} \times \vec{v} = \frac{1}{2m} \vec{r} \times \vec{p} = \frac{1}{2m} \vec{L} \quad 7.1.2.$$

Pentru mișcarea plană, formula vitezei areolare devine:

$$\Omega = \frac{dS}{dt} = \frac{1}{2} r^2 \frac{d\varphi}{dt} = \frac{1}{2} r^2 \dot{\varphi} \rightarrow L = 2m\Omega = mr^2 \dot{\varphi} = I\dot{\varphi} \quad 7.1.3.$$

Legea a doua ne spune că viteza areolară este constantă, dar folosind ultima expresie se poate spune că vectorul moment cinetic al planetei față de Soare este constant.

Din legile lui Kepler, pe baza legii fundamentale a dinamicii, Newton a dedus legea atracției universale.

Dacă aproximăm traiectoria eliptică a planetelor cu un cerc, atunci vitezele unghiulară și liniară sunt constante, iar asupra planetei se exercită o forță centripetă:

$$F = m \frac{v^2}{r} = m \omega^2 r = 4\pi^2 m \frac{r}{T^2} \xrightarrow{\text{legea 3 Kepler}} F = \frac{4\pi^2}{k} \frac{m}{r^2} \propto \frac{m}{r^2} \quad 7.1.4.$$

Deci forța exercitată de Soare asupra planetei este proporțională cu masa planetei și invers proporțională cu pătratul distanței dintre ele. Dar conform principiului trei al mecanicii, o forță egală și de sens contrar se exercită din partea planetei asupra Soarelui,

deci forța atracției dintre ele trebuie să fie proporțională și cu masa Soarelui. Alegând convenabil constanta, se scrie expresia forței atracției universale:

$$F = -\gamma \frac{mM}{r^2} \quad 7.1.5.$$

unde m este masa planetei, M este masa Soarelui (sau a celui alt corp între care se exercită forțele reciproc), r este distanța dintre ele, iar $\gamma = 6,67 \cdot 10^{-11} \text{ Nm}^2 / \text{kg}^2$ este constanta atracției universale. Forțele gravitaționale sunt importante numai dacă unul din corpuri are dimensiuni astronomice (om-Pământ) sau ambele (între corpuri cerești).

Să vedem dacă înțelegem fizica

Dacă gravitația dintre Soare și Pământ ar fi întreruptă, ar mai fi valabilă legea a doua a lui Kepler?

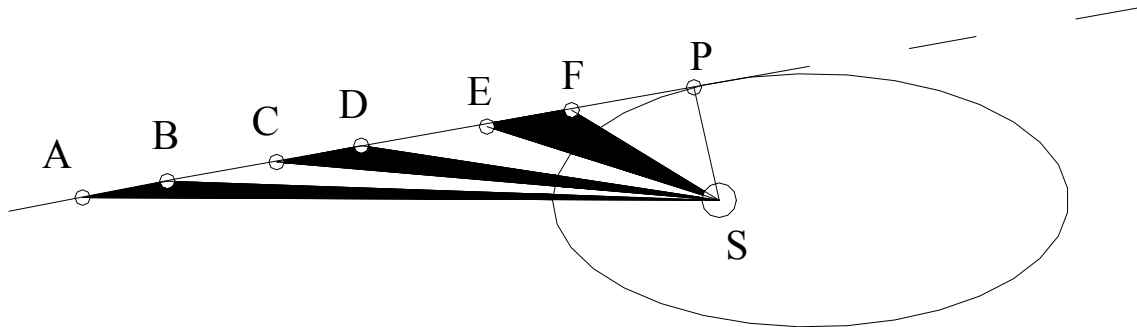


Fig. 7.1.3.

Dacă linia imaginară ce unește Soarele și planeta mătură arii egale, atunci aceasta este echivalent cu a spune că momentul cinetic al planetei în raport cu Soarele se conservă (este constant).

Dacă se îndepărtează gravitația, planeta se va mișca rectiliniu pe o dreaptă tangentă la traiectorie în punctul de desprindere, cu viteza din momentul desprinderii. Adică segmente egale ($AB=CD=EF$) sunt parcurse în timpi egali. Iar ariile triunghiurilor sunt egale (baze egale și aceeași înălțime SP)

Să vedem dacă înțelegem fizica

Într-o peșteră din interiorul Pământului, forța atracției gravitaționale este mai mare, mai mică sau aceeași ca la suprafața Pământului?

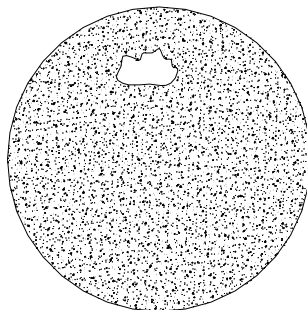


Fig. 7.1.4.

7.2. Mișcarea în câmp central

Un câmp de forțe central este un spațiu în care acționează forțele centrale. Acestea sunt forțe al căror modul depinde de modulul vectorului de poziție, iar direcția forței centrale coincide cu cea a vectorului de poziție, adică:

$$\vec{F} = F(r) \frac{\vec{r}}{r}$$

Dacă $F(r) > 0$, atunci forța este de respingere, iar dacă $F(r) < 0$, atunci forța este de atracție. Deoarece modulul forței depinde doar de mărimea vectorului de poziție nu și de direcția sa (nu depinde de unghiurile dintre vectorul de poziție și axe), atunci câmpul de forțe central are o simetrie sferică.

Exemple de câmp de forțe central sunt: câmpul gravitațional și câmpul electrostatic.

7.2.1. Mișcarea pe o curbă oarecare

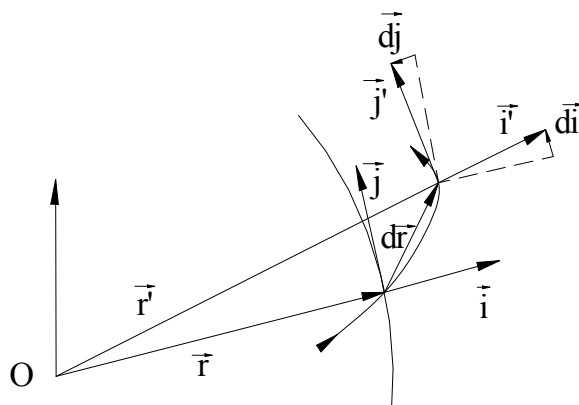


Fig. 7.2.1.

Dacă considerăm un corp care execută o mișcare într-un plan, atunci variația vectorului de poziție se descompune în două componente, pe două axe alese de-a lungul direcției radiale momentane și perpendicular pe aceasta (vezi capitolul de cinematică, ultima formulă de la viteze, când avem doi termeni, unul transversal care exprimă faptul că traiectoria este curbilinie și unul de-a lungul razei care exprimă faptul că arce egale sunt parcurse în timpi inegali):

$$d\vec{r} = \vec{i} dr + \vec{j} r d\varphi \Rightarrow \frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{i} \frac{dr}{dt} + \vec{j} r \frac{d\varphi}{dt} \Rightarrow \vec{v} = v_r \vec{i} + v_\varphi \vec{j} \quad 7.2.1.$$

Derivând expresia vitezei ținând cont de formulele Poisson, vom obține expresia vectorului accelerație totală și componentele sale radiale și transversale:

$$\dot{\vec{v}} = \vec{a} = \dot{\vec{i}} \dot{r} + \vec{i} \ddot{r} + \dot{\vec{j}} r \dot{\varphi} + \vec{j} \dot{r} \dot{\varphi} + \vec{j} r \ddot{\varphi} = \vec{i} (\ddot{r} - r \dot{\varphi}^2) + \vec{j} (r \ddot{\varphi} + 2 \dot{r} \dot{\varphi}) = \vec{i} a_r + \vec{j} a_\varphi \quad 7.2.2.$$

Accelerația transversală se mai poate scrie folosind viteza areolară:

$$a_\varphi = \frac{1}{r} \frac{d}{dt} \left(r^2 \frac{d\varphi}{dt} \right) = \frac{1}{r} (r^2 \dot{\varphi})^\bullet = \frac{2}{r} \dot{\Omega} \quad 7.2.3.$$

Legea fundamentală a dinamicii se scrie pe componente:

$$F_r = m a_r = m (\ddot{r} - r \dot{\varphi}^2), F_\varphi = m a_\varphi = m (r \ddot{\varphi} + 2 \dot{r} \dot{\varphi}) \quad 7.2.4.$$

7.2.2. Mișcarea în jurul unui centru de forțe

În cazul câmpului central de forțe, se alege în centrul forțelor - originea sistemului de referință și polul față de care se calculează momentele forțelor și momentul cinetic. În acest caz, $F_\varphi = 0, F_r = F$ și la fel la accelerații. În acest caz, teorema momentului cinetic față de centrul forțelor se scrie:

$$\dot{\vec{L}} = \vec{M} = 0 \Rightarrow \vec{L} = \text{const.} = \vec{r} \times \vec{p} = 2m\vec{\Omega} \quad 7.2.5.$$

Rezultă celebra integrală a momentului cinetic sau conservarea momentului cinetic:

$$L = 2m\Omega = m r^2 \dot{\varphi} = \text{const.} \quad 7.2.6.$$

Adică **mișcarea este plană și viteza areolară este constantă** (așa cum a dedus și Kepler din măsurători experimentale).

Ecuția mișcării (pornind de la principiul fundamental) se scrie doar pentru componenta radială:

$$m(\ddot{r} - r \dot{\varphi}^2) = F \stackrel{\text{mutam termenii}}{\Rightarrow} m\ddot{r} = F + m r \dot{\varphi}^2 = F + F' \quad 7.2.6.$$

unde F' joacă rol de forță centrifugă. Aceasta este o forță conservativă, deci putem defini o energie potențială centrifugă:

$$F' = m r \dot{\varphi}^2 = \frac{L^2}{m r^3} = -\frac{d}{dr} \left(\frac{L^2}{2m r^2} \right) = -\frac{dU'}{dr} \quad 7.2.7.$$

În acest fel problema devine unidimensională, de-a lungul razei. Energia cinetică este:

$$E_c = \frac{m v^2}{2} = \frac{m}{2} (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\varphi}^2) = \frac{m \dot{r}^2}{2} + \frac{L^2}{2m r^2} = \frac{m \dot{r}^2}{2} + U' \quad 7.2.8.$$

Înmulțind ecuația mișcării cu dr sau aplicând direct teorema energiei cinetice, se obține:

$$dE_c = d \left(\frac{m \dot{r}^2}{2} + \frac{L^2}{2m r^2} \right) = F dr = dW \stackrel{\text{forțe conservative}}{\Rightarrow} dE_c = d \left(\frac{m \dot{r}^2}{2} + \frac{L^2}{2m r^2} \right) = -dU \quad 7.2.9.$$

Atunci vom obține integrala energiei sau teorema de conservare a energiei totale:

$$\left(\frac{m \dot{r}^2}{2} + \frac{L^2}{2m r^2} + U \right) = E = \text{const.} \quad 7.2.10.$$

7.3. Câmpul gravitațional și potențialul gravitațional

Un corp simte prezența altui corp, aflat la o anumită distanță și interacționează cu acesta prin intermediul unui câmp – câmpul gravitațional. În jurul oricărui corp există un astfel de câmp și orice corp simte câmpurile gravitaționale ale corpurilor care îl înconjoară. Pentru a caracteriza câmpul gravitațional s-au introdus câteva mărimi fizice, scalare și vectoriale:

1. **Intensitatea câmpului gravitațional** este o mărime vectorială și se definește ca fiind raportul dintre forța exercitată de către câmp asupra unei particule punctiforme și masa acestei „probe”:

$$\vec{\Gamma} \stackrel{def}{=} \frac{\vec{F}}{m} \Rightarrow \vec{F} = m\vec{\Gamma} = m\vec{a} \Rightarrow \vec{a} = \vec{\Gamma} \quad 7.3.1.$$

Am putut scrie relația anterioară în virtutea egalității dintre masa inerțială și masa gravifică. Rezultă că o particulă supusă numai unui câmp gravitațional va căpăta o accelerație egală cu intensitatea câmpului, independent de masa sa, de natura substanței, de dimensiunile sau forma sa. Din legea atracției universale, rezultă forma intensității câmpului gravitațional:

$$\vec{\Gamma} = -\gamma \frac{M}{r^2} \frac{\vec{r}}{r} \quad 7.3.2.$$

unde semnul minus indică caracterul atractiv al câmpului.

2. **Energia potențială** a particulei m în câmpul gravitațional al corpului M este:

$$dU = -\vec{F}d\vec{r} \Rightarrow U = -\int_{\infty}^r \vec{F}dr = -\gamma \frac{mM}{r} \quad 7.3.3.$$

Rezultă: câmpul gravitațional este un câmp conservativ.

3. **Potențialul câmpului gravitațional** este o mărime scalară și se definește ca fiind energia potențială a particulei de probă raportată la masa acesteia, sau altfel, prin lucrul mecanic efectuat de forțele câmpului pentru a deplasa particula m la infinit, împărțit la masa acesteia:

$$dV \stackrel{def}{=} -\vec{\Gamma}d\vec{r} \Rightarrow V = \frac{U}{m} = -\gamma \frac{M}{r} \Rightarrow U = mV \quad 7.3.4.$$

Diferența de potențial între două puncte ale câmpului este egală cu minus lucrul mecanic efectuat de forțele câmpului între aceste două puncte. **Linii de câmp** sunt radiale, **suparfețele echipotențiale** sunt sfere concentrice cu corpul generator de câmp, iar **sensul** vectorului intensitate câmp gravitațional este spre corpul generator de câmp gravitațional.

Legătura între intensitatea câmpului gravitațional și potențialul său este:

$$\vec{\Gamma} = -gradV \quad 7.3.5.$$

4. **Energia de interacțiune a două particule** se deduce ținând cont de formula energiei potențiale:

$$U = -\gamma \frac{m_1 m_2}{r} = \frac{m_1}{2} \left(-\gamma \frac{m_2}{r} \right) + \frac{m_2}{2} \left(-\gamma \frac{m_1}{r} \right) = \frac{m_1 V_1}{2} + \frac{m_2 V_2}{2} \quad 7.3.6.$$

unde V_1 este potențialul în punctul în care se află corpul cu masa m_1 . Iar pentru un sistem de N particule: $U = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^N m_k V_k$ unde V_k este potențialul în punctul în care se află corpul cu masa m_k .

5. **Energia de legătură** este energia de interacțiune a unui sistem de corpuri, luată cu semn schimbat, adică energia necesară pentru a desface sistemul în părțile componente și a le duce la infinit. Ea este egală și cu energia degajată la formarea sistemului din particulele libere aduse de la infinit.

7.4. Aplicație. Mișcarea planetelor

nr.	Planeta	$a =$ semiaxa mare a traectoriei (U.A.)	$T =$ perioada mișcării în jurul Soarelui 10^6 (s)	$T^2 / a^3 \cdot 10^{-19} \text{ m}^{-3} \text{ s}^2$
1	Mercur	0,377	7,60	2,982
2	Venus	0,723	19,3	2,949
3	Pământ	1,000	31,60	2,986
4	Marte	1,523	59,4	2,989
5	Jupiter	5,202	374	2,973
6	Saturn	9,554	930	2,968
7	Uranus	19,217	2660	2,983
7	Neptun	30,109	5200	2,964
9	Pluto	39,600	7720	2,947

$$1\text{U.A.} = 1,495 \cdot 10^{11} \text{ m}$$

Conica este curba obținută prin secționarea unui con cu un plan. Ecuația unei conice se obține egalând cu zero funcția de mai jos:

$$f(x, y) = a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33}$$

Pentru a vedea tipul conice, se calculează determinantul:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}^2$$

Dacă $\Delta > 0$, conica este o **elipsă**, dacă $\Delta = 0$, conica este o **parabolă**, $\Delta < 0$, conica este o **hiperbolă**.

Focarele conice sunt punctele în raport cu care suma distanțelor, d ela orice punct de pe conică la acestea este o constantă. Elipsa și hiperbola au două focare, pe când parabola are unul singur. Elipsa are două semiaxe, a-semiaxa mare și b-semiaxa mică.

În coordonate polare r și φ , ecuația conice se scrie:

$$r = \frac{p}{1 + e \cos \varphi}$$

unde $p = b^2 / a$, iar e este **excentricitatea**, care are expresiile:

$$e = \begin{cases} \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a} < 1, \text{ pentru elipsa} \\ \frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{a} > 1, \text{ pentru hiperbola} \\ 1, \text{ pentru parabola} \\ 0, \text{ pentru cerc } (a = b) \end{cases}$$

Considerăm mișcarea unei planete pe o traiectorie eliptică, cu Soarele într-unul din focare. Atunci viteza sa areolară se scrie în funcție de aria elipsei: $\Omega = \frac{2\pi \cdot ab}{T}$

Să vedem dacă înțelegem fizica

Să presupunem că am trăi pe lună și Pământul ar fi deasupra capului, după cât timp am vedea Pământul apunând?

7.5. Aplicație: Sateliți artificiali

Condiția ca un satelit să aibă o mișcare pe o orbită circulară staționară în jurul Pământului, este ca forța centrifugă și cea a atracției universale să fie egale și de sens contrar:

$$\gamma \frac{M_p m}{r^2} = m \frac{v^2}{r}$$

De aici rezultă valoarea vitezei pe care trebuie să o aibă satelitul pe traiectoria sa

$$v_{01} = \sqrt{\gamma \frac{M_p}{r}}$$

Dacă considerăm un satelit care se mișcă foarte aproape de Pământ încât raza traiectoriei sale este aproximativ raza Pământului, atunci se obține o viteză numită **prima viteză cosmică**: $v_0 = 7910 \text{ km/h}$

Pentru ca un corp să iasă din sfera de influență a Pământului, mișcarea acestuia trebuie să se efectueze pe o parabolă în jurul Pământului și nu pe o elipsă. Se demonstrează că viteza de evadare de sub acțiunea Pământului este:

$$v_{02} = \sqrt{2\gamma \frac{M_p}{r_p}} = 11\,710 \text{ m/s}$$

aceasta se numește **a doua viteză cosmică**.

Pentru ca un corp să iasă din sfera de influență a Soarelui, mișcarea acestuia trebuie să aibă loc pe o parabolă în jurul Soarelui. Se demonstrează că viteza de evadare de sub acțiunea Soarelui este:

$$v_{03} = \sqrt{2\gamma \frac{M_S}{r_s}} = 16\,700 \text{ m/s}$$

care se numește **a treia viteză cosmică** sau viteza de evadare din sistemul solar.

Să vedem dacă înțelegem fizica

Dacă Pământul nu ar avea munți, clădiri, ar putea un satelit să călătorească la o distanță de suprafața Pământului, egală cu înălțimea unui copac?

Să vedem dacă înțelegem fizica

hjmncercetătorii americani: "Îi cunoaștem viteza și altitudinea, îi putem afla masa?"