Elemente de logică matematică[1]

Prof. Dr. Sergiu Rudeanu
Facultatea de Matematică şi Informatică
Universitatea Bucureşti

Logica matematică este un capitol fundamental al culturii matematice şi prin urmare ea trebuie să-şi găsească locul în orice sistem de învăţământ de nivel ridicat. Aceasta se referă nu numai la învăţământul universitar, ci şi la un învăţământ liceal cum este cel din ţara noastră. De asemenea, logica matematică este implicată organic în informatică, atât la nivel elementar cât şi în zonele teoretice superioare.

Având în vedere considerentele de mai sus, articolul de faţă îsî propune să ofere unui auditoriu cât mai larg o introducere elementară în logica matematică. Prin *caracter elementar* înţelegem faptul că noţiunile prezentate sunt exact noţiunile de logică matematică din manualul [14]; expunerea este însă mai amplă, aducând în plus numeroase precizări pe care autorul le consideră indispensabile bunei înţelegeri şi folosiri corecte a logicii matematice.

O concepţie asemănătoare o are capitolul de logică matematică din [4], care de altfel stă la baza prezentei prelegeri. Faţă de [4], în această lucrare apar noi comentarii teoretice, exemple de aplicaţii ale calculului proproziţiilor şi calculul predicatelor în matematică, precum şi semnalarea unor greşeli pe care experienţa didactică a autorului le relevă ca fiind frecvente. În schimb, întrucât articolul de faţă nu se mai adresează cu precădere elevilor (dar nici nu îi exclude), prezentarea este pe alocuri mai concentrată decât în [4].

Trimiterile la algebra universală, algebrele booleene şi programul de la Erlangen sunt facultative; cititorii neavizaţi pot să le omită fără a prejudicia înţelegerea restului textului. Cei care au dificultăţi în înţelegerea unora dintre comentariile cu grad de abstractizare mai ridicat, sunt sfătuiţi să treacă mai departe la prima lectură, urmând să revină asupra lor după un anumit timp.

[1] Articolul a apărut în revista *Gazeta de Informatică* nr. 10,11,12/1992 şi 1/1993.

1 Elemente de calculul propoziţiilor

1.1. Punctul de plecare al calculului propoziţiilor constă în faptul că se consideră dată o mulţime P_0 de propoziţii, fiecare din ele fiind adevărată sau falsă. În legătură cu aceasta se impun trei precizări:

În primul rând trebuie înţeleasă ipoteza – deloc banală – că fiecare propoziţie are o valoare de adevăr. Este clar că propoziţiile interogative ("Ce mai faci ?" etc), cele exclamative ("Ce frumos este !" etc), precum şi cele imperative ("Priveşte !" etc) nu au valoare de adevăr. Rămân în discuţie enunţurile, altfel spus propoziţiile declarative (în engleză *statements*), adică propoziţiile în care se fac anumite afirmaţii. Nu trebuie să credem că orice enunţ este adevărat sau fals. În sprijinul ultimei afirmaţii redăm mai jos o variantă modernă a paradoxului mincinosului, cunoscut încă din antichitate.

Să considerăm proproziţia "*eu mint*", cu înţelesul "*ceea ce spun în acest moment este fals*". Fie p această propoziţie; deci p este afirmaţia "*p este falsă*". Urmează că dacă p este adevărată, atunci p este falsă (conform însăşi afirmaţiei p), iar dacă p este falsă, atunci este fals că p este falsă, deci p este adevărată. Întrucât fiecare din cele două ipoteze asupra valorii de adevăr a propoziţiei p conduce la o contradicţie, suntem nevoiţi să acceptăm că această propoziţie nu are valoare de adevăr.

De asemenea, pare să nu aibă sens atribuirea unor valori de adevăr afirmaţiilor controversate exprimând subiectivitatea vorbitorilor; la fel în cazul unor afirmaţii vagi, al căror conţinut nu este clar. În această ordine de idei semnalăm existenţa logicilor cu mai multe valori, în care, înafară de adevăr şi fals, se consideră şi alte valori de adevăr (conform, de exemplu, [3], [13]).

În articolul de faţă rămânem în cadrul logicii clasice, adică în care se consideră numai două valori de adevăr.

În cele precedente am văzut exemple de propoziţii în sensul gramatical care nu intră în obiectul de studiu al logicii matematice, adică nu sunt propoziţii în sensul calculului propoziţional. Dimpotrivă, dacă p, q sunt propoziţii în sensul logicii matematice, atunci p *sau* q, p *si* q etc sunt propoziţii în sensul logicii matematice, dar din punctul de vedere al gramaticii acesteia din urmă, nu sunt propoziţii, ci fraze. Aşadar noţiunea de propoziţie cu care lucrează calculul propoziţional este diferită de noţiunea de propoziţie din gramatică.

Aceasta este a doua precizare care trebuia făcută.

A treia precizare este că problema determinării valorilor de adevăr ale propoziţiilor din mulţimea P_0 dată la început nu aparţine logicii matematice; de exemplu, dacă o propoziţie $p \in P_0$ este din domeniul chimiei, atunci stabilirea valorii de adevăr a propoziţiei p este o problemă a chimiei. Nu se presupune că am cunoaşte efectiv valorile de adevăr ale tuturor propoziţiilor din P_0; de exemplu, P_0 ar putea să conţină propoziţia "pentru orice număr natural $n > 2$, ecuaţia $x^n + y^n = z^n$ nu are soluţii (x, y, z) cu toate componentele pozitive" (cunoscută sub numele impropriu de marea teoremă a lui Fermat), a cărei valoare de adevăr este necunoscută în prezent.

1.2. Conform unei practici foarte răspândite, vom nota cu 0 şi 1 valorile de adevăr "*fals*" respectiv "*adevărat*"; alte notaţii frecvente în literatură folosesc iniţialele cuvintelor **fals** şi **adevărat** (în engleză *False* şi *True*).

Cele discutate în secţiunea **1.1** se pot rezuma spunând că se dă o mulţime P_0 de enunţuri şi o funcţie $v_0 : \ P0 \longrightarrow \{0, 1\}$, atât P_0 cât şi funcţia de adevăr v_0 nefiind specificate în mod concret.

1.3. Fie p, q două enunţuri (conform cu **1.1**). Vom nota cu

- $p \wedge q$ enunţul "*p şi q*",
- $p \vee q$ enunţul "*p sau q*",
- $p \longrightarrow q$ enunţul "*p implică q*" (care se mai poate citi şi *dacă p atunci q*",
- $p \longleftrightarrow q$ enunţul "*p este echivalent cu q*" (care se mai poate citi şi "*p dacă şi numai dacă q*"),
- $\neg p$ enunţul care neagă propoziţia p şi pe care îl citim "*non p*" (deşi ar trebui să îl citim "**nu** *p*"; în unele cazuri concrete negaţia poate apare în interiorul enunţului *p*; de exemplu ¬ "*Gina are o pisică*" este "*Gina nu are o pisică*"".

Conectorii logici $\wedge, \vee, \longrightarrow, \longleftrightarrow, \neg$ se numesc respectiv **conjuncţia, disjuncţia, implicaţia, echivalenţa** şi **negaţia**.

Obiectul de studiu a calculului propoziţiilor este mulţimea P a tuturor enunţurilor care se obţin plecând de la enunţurile din P_0 şi aplicând repetat, în toate modurile posibile, conectorii logici $\wedge, \vee, \longrightarrow, \longleftrightarrow, \neg$. Mai exact spus, mulţimea P se defineşte prin recurenţă astfel:

1. Dacă $p \in P_0$ atunci $p \in P$;
2. Dacă $p, q \in P$ atunci $p \wedge q,\ p \vee q,\ p \longrightarrow q,\ p \longleftrightarrow q,\ \neg p \in P$;
3. Orice propoziţie $p \in P$ se obţine aplicând de un număr finit de ori regulile (1) şi (2).

1.4. Asociem acum fiecărei propoziţii $p \in P$ o valoare de adevăr $v(p) \in \{0, 1\}$ prin următoarele reguli:

1. Dacă $p \in P_0$ atunci $v(p) = v_0(p)$;

2. Dacă $p, q \in P$ şi am asociat propoziţiilor p, q valorile de adevăr $v(p), v(q)$, atunci asociem propoziţiilor $p \wedge q$, $p \vee q$, $p \longrightarrow q$, $p \longleftrightarrow q$ şi $\neg p$ valorile de adevăr $v(p \wedge q)$, $v(p \vee q)$, $v(p \longrightarrow q)$, $v(p \longleftrightarrow q)$, $v(\neg p)$ date de tabelele

$v(p)$	$v(q)$	$v(p \wedge q)$	$v(p \vee q)$	$v(p \longrightarrow q)$	$v(\longleftrightarrow q)$
0	0	0	0	1	1
0	1	0	1	1	0
1	0	0	1	0	0
1	1	1	1	1	1

$v(p)$	$v(\neg p)$
0	1
1	0

Tabelele 1

Ţinând seama de definiţia din secţiunea **1.3**, prin care mulţimea P se construieşte recurent într-o infinitate numărabilă de paşi, ne putem da seama că prin aplicarea într-o infinitate numărabilă de paşi a regulilor (1) şi (2) de mai sus, fiecărei propoziţii $p \in P$ i se va asocia în mod unic o valoare de adevăr $v(p) \in \{0, 1\}$. Altfel spus, prin aplicarea regulilor (1) şi (2) de mai sus, funcţia $v_0 : P_0 \longrightarrow \{0, 1\}$ din secţiunea **1.2** se extinde în mod unic la o funcţie de adevăr $v : P \longrightarrow \{0, 1\}$.

O formulare şi mai precisă este că există o unică funcţie v care:

(i) prelungeşte funcţia v_0;

(ii) satisface condiţiile exprimate prin Tabelele 1.

Demonstraţia riguroasă a acestei ultime afirmaţii se face cu metodele algebrei universale şi depăşeşte cadrul acestui articol (conform, de exemplu, [18]).

Să numim *homomorfism* orice funcţie $v : P \longrightarrow \{0, 1\}$ care satisface condiţiile din Tabelele 1. Atunci proprietatea anterioară se enunţă sub forma: *orice funcţie* $v_0 : P_0 \longrightarrow \{0, 1\}$ *se prelungeşte în mod unic la un homomorfism.*

Corolarul 1 *Există o bijecţie între mulţimea funcţiilor* $v_0 : P_0 \longrightarrow \{0, 1\}$ *şi mulţimea homomorfismelor* $v : P \longrightarrow \{0, 1\}$. *Ea se obţine asociind fiecărei funcţii* v_0 *prelungirea ei homomorfă şi reciproc, asociind fiecărui homomorfism restricţia sa la submulţimea* P_0.

Observaţia 1 *În multe texte de calculul propoziţiilor, Tabelele* 1 *sunt redate sub o formă puţin neglijentă, în sensul că în locul capetelor de coloană* $v(p), v(q), v(p \wedge q), \ldots$ *figurează doar* $p, q, p \wedge q, \ldots$*, faptul că este vorba de valorile de adevăr ale acestor propoziţii şi nu de propoziţiile înseşi, subînţelegându-se în loc să fie notat explicit. Credem că această practică este nerecomandabilă, deoarece favorizează greşeala de a considera* $p, q \in \{0, 1\}$ *şi de a gândi tabelele* 1 *ca reprezentând egalităţile* $0 \wedge 0 = 0, 0 \vee 0 = 0, \ldots, \neg 0 = 1, \neg 1 = 0$*, ceea ce ar însemna tabelele operaţiilor* $\wedge, \vee, \longrightarrow, \longleftrightarrow, \neg$ *din algebra booleană* $\{0, 1\}$.

În ultima instanţă, confuzia între propoziţii şi valorile lor de adevăr conduce la greşeala pe care am putea-o numi supremă, de a crede că există doar două propoziţii: 0 *şi* 1 *!*

1.5.

1.5.1. Sa observăm că discuţia din secţiunea **1.1** a anticipat asupra noţiunii de propoziţie cu care lucrăm şi care a fost definită abia în secţiunea **1.3**. Conform celor arătate în secţiunea **1.4**, propoziţiile cu care lucrăm au într-adevăr valori de adevăr bine determinate, aşa cum se ceruse în secţiunea **1.1**.

1.5.2. Faptul că a studia numai propoziţiile din mulţimea P definită în secţiunea **1.3** ar putea să pară o restricţie artificială faţă de ideea, atractivă la prima vedere, de a considera mulţimea tuturor enunţurilor. În realitate nu există o astfel de mulţime, fapt care se poate demonstra în teoria axiomatică a mulţimilor (pentru cititorii având cunoştinţe în acest domeniu adăugăm că ideea demonstraţiei este de a arăta că există "*cel puţin tot atâtea*" enunţuri câte mulţimi, asociind fiecărei mulţimi M enunţul "M *este o mulţime*"). De altfel, cadrul pe care l-am fixat nici nu este limitativ, deoarece el ne permite să stabilim toate proprietăţile care ne interesează, iar atunci când dorim să specializăm calculul propoziţiilor într-un anumit domeniu, putem alege mulţimea P_0 suficient de cuprinzătoare, astfel încât mulţimea P să conţină toate propoziţiile care ne interesează în contextul respectiv.

1.5.3. Tabelele 1 constituie o definiţie: ele definesc valorile de adevăr ale propoziţiilor compuse în funcţie de valorile de adevăr ale propoziţiilor componente. Profesorii trebuie să explice elevilor faptul fundamental şi totodată uşor de înţeles că în cazul conjuncţiei, disjuncţiei, echivalenţei şi al negaţiei, această definiţie nu face altceva decât să reflecte înţelesul pe care îl au în mod obişnuit afirmaţiile "p şi q", "p sau q", "p dacă şi numai dacă q" şi negaţia propoziţiei p. În cazul implicaţiei, situaţia este diferită şi necesită unele precizări, pe care le facem în secţiunile **1.6, 1.7** şi **1.9.**

1.6. În vorbirea curentă, un enunţ de forma "*dacă* p *atunci* q" subînţelege afirmarea unei legături cauzale, care poate fi directă, adică "p *este cauza lui* q", sau indirectă, ca în exemplul "*dacă astăzi este joi, atunci mâine va fi vineri*". În logica matematică, propoziţia $p \longrightarrow q$ este desprinsă de orice astfel de subînţeles, determinarea valorii de adevăr a acestei propoziţii făcându-se pe baza valorilor de adevăr a propoziţiilor p, q şi a Tabelelor 1.

Să considerăm, de exemplu, propoziţiile:

"*dacă* $2 + 2 = 5$ *atunci* $3 + 3 = 4$",

"*dacă balena este peşte atunci apa este un lichid*",

"*dacă Napoleon a murit la Sfânta Elena, atunci fierul este un metal*".

În gândirea obişnuită aceste propoziţii vor fi considerate false sau chiar lipsite de sens (şi pot provoca ilaritate), deoarece in fiecare din ele nu există nici o legătură cauzală între *premisa* p şi *concluzia* q. În logica matematică abordarea este diferită: deoarece în fiecare caz propoziţiile componente p, q au valori de adevăr şi anume $v(p) = v(q) = 0$ în primul exemplu, $v(p) = 0$, $v(q) = 1$ în al doilea exemplu şi $v(p) = v(q) = 1$ în al treilea exemplu, rezultă că în fiecare din cele trei exemple propoziţia $p \longrightarrow q$ este legitimă şi $v(p \longrightarrow q) = 1$ conform Tabelelor 1.

1.7. Examinarea Tabelelor 1 ne arată că:

1. Dacă premisa p este falsă, atunci implicaţia $p \longrightarrow q$ este adevărată, oricum ar fi q. Această observaţie ste cunoscută sub numele de "*principiul implicaţiei adevărului prin fals*"; uneori ea se exprimă sub forma "*falsul implică orice*".

2. Dacă concluzia q este adevărată, atunci implicaţia $p \longrightarrow q$ este adevărată, orcium ar fi p.

3. Dacă premisa p şi implicaţia $p \longrightarrow q$ sunt adevărate, atunci concluzia q este adevărată. Această observaţie este cunoscută sub numele de *modus ponens*.

Aceste trei observaţii sunt importante, ele fiind folosite frecvent în matematică. De fapt, despre *modus ponens* se poate spune mai mult: el este silogismul de bază al gândirii noastre.

Observaţia 2 *Formularea "falsul implică orice" a fost uneori interpretată în sensul că adoptarea unei premise false p ar fi o tehnică prin care în matematică am putea "demonstra" orice concluzie q, deci în particular am putea demonstra orice propoziţie falsă ! În realitate observaţia* (1) *nu afirmă adevărul propoziţiei q ci adevărul propoziţiei* $p \longrightarrow q$ *(în secţiunea* **1.6** *nu susţinem că* $3 + 3 = 4$ *ci doar că propoziţia* "$2 + 2 = 5 \longrightarrow 3 + 3 = 4$" *este adevărată).*

1.8. În calculul propoziţiilor mulţimea de plecare P_0 şi funcţia de adevăr de plecare $v_0 : P_0 \longrightarrow \{0, 1\}$ rămân arbitrare, ceea ce conferă studiului un grad înalt de generalitate. În timp ce considerentele din secţiunea **1.6** au fost o aplicaţie în care am presupus în mod tacit că funcţia v_0 este dată de cunoştinţele noastre în diverse domenii, la nivelul general - teoretic ne interesează acele proprietăţi propoziţionale care sunt independente de alegerea funcţiei v_0, altfel spus **proprietăţile invariante** la orice schimbare a funcţiei v_0.

Să ne amintim acum că o propoziţie $p \in P$ este formată din propoziţii combinate între ele cu ajutorul conectorilor logici; la rândul lor, propoziţiile componente ar putea fi compuse din alte componente etc. Putem astfel considera mai multe descompuneri ale propoziţiei p, printre care o descompunere în propoziţii din P_0.

(În algebra universală se demonstrează că descompunerea în propoziţii din P_0 este unică şi tocmai această unicitate asigură existenţa unei prelungiri homomorfe unice a funcţiei v_0.)

În particular, $p \in P_0$ dacă şi numai dacă p nu se descompune în alte propoziţii.

În general valoarea de adevăr a unei propoziţii $p \in P$ depinde de valorile de adevăr ale propoziţiilor componente.

Spunem că p este o **tautologie** şi notăm acest fapt sub forma

$$\vdash p$$

dacă propoziţia p este adevărată oricare ar fi valorile de adevăr ale propoziţiilor componente.

Să detaliem definiţia de mai sus. Să presupunem că p se descompune în propoziţiile $p_1, \ldots, p_n$ combinate între ele cu ajutorul conectorilor logici. Spunem că p este o tautologie dacă, oricare ar fi $v(p_1), \ldots, v(p_n) \in \{0, 1\}$, calculând $v(p)$ din $v(p_1), \ldots, v(p_n)$ cu ajutorul Tabelelor 1, se obţine rezultatul $v(p) = 1$.

Acum este uşor de văzut că definiţia se poate reformula în modul următor:

"p este tautologie dacă şi numai dacă $v(p) = 1$ oricare ar fi homomorfismul $v : P \longrightarrow \{0, 1\}$.

Ultima variantă a definiţiei tautologiilor ne arată în acelaşi timp că prima variantă este corectă, în sensul că nu depinde de descompunerea aleasă a propoziţiei p considerate.

Să mai observăm că o propoziţie $p \in P_0$ nu poate fi o tautologie.

1.9. Introducem următoarele notaţii:

$(D1)$	$p \Longrightarrow q$	înseamnă	$\vdash p \longrightarrow q$;
$(D2)$	$p \Longleftrightarrow q$	înseamnă	$\vdash p \longleftrightarrow q$.

(oral, $\Longrightarrow$ şi $\Longleftrightarrow$ se citesc la fel ca $\longrightarrow$ şi respectiv $\longleftrightarrow$).

Observaţia 3

1. *$p \Longrightarrow q$ dacă şi numai dacă pentru orice homomorfism v pentru care $v(p) = 1$ avem şi $v(q) = 1$;*

2. $p \Longleftrightarrow q$ *dacă şi numai dacă* $v(p) = v(q)$ *pentru orice homomorfism* v*;*

3. $p \Longleftrightarrow q$ *dacă şi numai dacă* $p \Longrightarrow q$ *şi* $q \Longrightarrow p$*.*

Demonstraţie:

(1) Fie $p \Longrightarrow q$; dacă v este un homomorfism şi $v(p) = 1$, atunci deoarece $v(p \longrightarrow q) = 1$, Tabelele 1 ne arată că nu putem avea $v(q) = 0$, deci $v(q) = 1$. Reciproc, fie satisfăcută condiţia din enunţ; dacă v este un homomorfism, artunci nu putem avea $v(p) = 1$ şi $v(q) = 0$, deci Tabelele 1 ne arată că $v(p \longrightarrow q) = 1$.

(2), (3) se demonstrează asemănător.

Observaţia (1) arată că accepţiunea $(D1)$ dată relaţiei $p \Longrightarrow q$ este în acord cu folosirea semnului $\Longrightarrow$ în matematică. În primul rând în matematică folosim în mod tacit Tabelele 1, adică faptul că funcţia de adevăr este un homomorfism. Atunci când demonstrăm o teoremă $p \Longrightarrow q$, presupunem ipoteza p, adică presupunem $v(p) = 1$, după care demonstrăm $v(q) = 1$. Cu alte cuvinte, folosim caracterizarea dată de observaţia (1). În mod asemănător se constată că accepţiunea $(D2)$ dată relaţiei $p \Longleftrightarrow q$ este în acord cu folosirea semnului $\longleftrightarrow$ în matematică. Prin urmare prezintă interes studierea relaţiilor $\Longrightarrow$ şi $\Longleftrightarrow$ introduse prin $(D1)$ şi respectiv $(D2)$.

În acelaşi timp obţinem o justificare aposteriori a deifniţiei valorilor de adevăr pentru $p \longrightarrow q$; deşi definiţia este şocantă la prima vedere (cf. **1.6**), ea este de fapt în concordanţă cu practica demonstraţiilor matematice, aşa cum rezultă din cele precedente.

1.10. Să consemnăm acum principalele proprietăţi ale relaţiilor introduse.

Oricare ar fi propoziţiile p, q, r, p', q', avem

(1) $p \Longleftrightarrow p$;

(2) dacă $p \Longleftrightarrow q$ atunci $q \Longleftrightarrow p$;

(3) dacă $p \Longleftrightarrow q$ şi $q \Longleftrightarrow r$ atunci $p \Longleftrightarrow r$;

(4) dacă $p \Longleftrightarrow p'$ şi $q \Longleftrightarrow q'$ atunci

$$\begin{cases} p \wedge q \Longleftrightarrow p' \wedge q', & p \vee q \Longleftrightarrow p' \vee q', \quad p \longrightarrow q \Longleftrightarrow p' \longrightarrow q', \\ p \longleftrightarrow q \Longleftrightarrow p' \longleftrightarrow q', & \neg p \Longleftrightarrow \neg p'. \end{cases}$$

(5) $p \wedge q \Longleftrightarrow q \wedge p, \qquad p \vee q \Longleftrightarrow q \vee p$;

(6) $p \wedge (q \wedge r) \Longleftrightarrow (p \wedge q) \wedge r, \qquad p \vee (q \vee r) \Longleftrightarrow (p \vee q) \vee r$;

(7) $p \wedge (p \vee q) \Longleftrightarrow p, \qquad p \vee (p \wedge q) \Longleftrightarrow p$;

(8) $p \wedge p \Longleftrightarrow p, \qquad p \vee p \Longleftrightarrow p$;

(9) $p \wedge (q \vee r) \Longleftrightarrow (p \wedge q) \vee (p \wedge r), \qquad p \vee (q \wedge r) \Longleftrightarrow (p \vee q) \wedge (p \vee r)$;

(10) $p \wedge (\neg p \vee q) \Longleftrightarrow p \wedge q, \qquad p \vee (\neg p \wedge q) \Longleftrightarrow p \vee q$;

(11) $\neg(\neg p) \Longleftrightarrow p;$;

(12) $\neg(p \wedge q) \Longleftrightarrow \neg p \vee \neg q, \qquad \neg(p \vee q) \Longleftrightarrow \neg p \wedge \neg q$;

(13) $\vdash p \vee \neg p, \qquad \vdash \neg(p \wedge \neg p)$;

(14) dacă $p \Longrightarrow q$ şi $q \Longrightarrow r$, atunci $p \longrightarrow r$;

(15) $(p \wedge \neg q) \longrightarrow \neg p \iff (p \longrightarrow q), \qquad (p \wedge \neg q) \longrightarrow q \iff (p \longrightarrow q);$
(16) $p \Longrightarrow p \vee q, \qquad p \wedge q \Longrightarrow p;$
(17) $q \Longrightarrow p \vee q, \qquad p \wedge q \Longrightarrow q;$
(18) $p \longrightarrow q \iff \neg q \longrightarrow \neg p;$
(19) $p \longrightarrow q \iff \neg p \vee q;$
(20) $\neg(p \longrightarrow q) \iff p \wedge \neg q;$
(21) $p \wedge (p \longrightarrow q) \iff p \wedge q;$
(22) $p \longrightarrow (p \wedge q) \iff p \longrightarrow q;$
(23) $(p \longrightarrow q) \longrightarrow q \iff p \vee q;$
(24) $p \longrightarrow (q \longrightarrow r) \iff (p \wedge q) \longrightarrow r;$
(25) $p \wedge (p \longrightarrow q) \Longrightarrow q;$
(26) $p \Longrightarrow q \longrightarrow p;$
(27) $(p \longrightarrow q) \longrightarrow r \Longrightarrow p \longrightarrow (q \longrightarrow r);$
(28) $(p \longrightarrow q) \longrightarrow (p \longrightarrow r) \iff p \longrightarrow (q \longrightarrow r);$
(29) $p \longrightarrow q \Longrightarrow (r \longrightarrow p) \longrightarrow (r \longrightarrow q).$

În virtutea observaţiei (2) (observaţiei (1)) din secţiunea **1.9**, demonstraţia unei echivalenţe $p \iff q$ (unei implicaţii $p \Longrightarrow q$) se poate face dând valori de adevăr în toate modurile posibile propoziţiilor care compun propoziţiile p, q şi arătând că în fiecare caz $v(p) = v(q)$ (respectiv $v(p) = 0$ sau $v(p) = v(q) = 1$).

În mod analog se pot demonstra proprietăţile (2), (3), (4), (13), (14).

În general, aflăm dacă o propoziţie oarecare p este o tautologie sau nu cu ajutorul următorului algoritm. Fie descompunerea propoziţiei p în propoziţiile componente $p_1, \ldots, p_n \in P_0$. parcurgem un ciclu care generează cei 2^n vectori $(a_1, \ldots, a_n) \in \{0,1\}^n$; la fiecare pas calculăm $v(p)$ folosind valorile $v(p_i) = a_i$ $(1 \leq i \leq n)$. Dacă la un pas obţinem rezultatul $v(p) = 0$, algoritmul se opreşte cu răspunsul că p nu este o tautologie; dacă ciclul se termină, adică s-a obţinut rezultatul $v(p) = 1$ la fiecare pas, atunci $\vdash p$.

Faptul că se poate stabili algoritmic dacă o propoziţie oarecare este tautologie sau nu, constituie o proprietatea importantă, care se enunţă de obicei sub forma:

Calculul propoziţiilor este decidabil.

Demonstraţia proprietăţilor (1) – (29) poate fi scurtată, cu preţul pierderii caracterului algoritmic, dacă folosim în mod judicios următoarele consecinţe simple ale Tabelelor 1 : pentru orice $p, q \in P$:

(O_1) dacă $v(p) = 0$ atunci $v(p \wedge q) = 0$ şi $v(p \vee q) = v(q)$;
(O_2) dacă $v(p) = 1$ atunci $v(p \vee q) = 1$ şi $v(p \wedge q) = v(q)$.

Să demonstrăm de exemplu prima proprietate de distributivitate (9):

- Dacă $v(p) = 0$ atunci $v(p \wedge (q \vee r)) = 0$, $v(p \wedge q) = 0$, $v(p \wedge r) = 0$ deci $v((p \wedge q) \vee (p \wedge q)) = 0$;

- Dacă $v(p) = 1$ şi $v(q) = 0$ atunci $v(p \wedge (q \vee r)) = v(q \vee r) = v(r),\ v(p \wedge q) = 0,\ v(p \wedge r) = v(r)$, deci $v((p \wedge q) \vee (p \wedge r)) = v(r)$.

Cazul $v(p) = v(q) = 1$ şi $v(r) = 0$ se tratează analog.

- Dacă $v(p) = v(q) = v(r) = 1$ atunci $v(q \vee r) = 1,\ v(p \wedge (q \vee r)) = 1,\ v(p \wedge q) = v(p \wedge r) = 1$, deci $v((p \wedge q) \vee (p \wedge r)) = 1$.

Aşadar, demonstraţia s-a făcut examinând doar 3 cazuri în loc de 8.

O altă modalitate de demonstraţie, tot nealgoritmică, dar elegantă, constă în a demonstra ca mai sus o parte din proprietăţi, celelalte fiind demonstrate prin calcul pe baza proprietăţilor deja stabilite. De exemplu, pentru a demonstra (20) putem folosi pe rând (19), (12) şi (11), împreună cu (4):

$$\neg(p \longrightarrow q) \iff \neg(\neg p \vee q) \iff \neg\neg p \wedge \neg q \iff p \wedge \neg q$$

de unde (20) rezultă aplicând tranzitivitatea (3).

Cititorul este îndemnat să demonstreze toate proprietăţile (1) – (29) pe diverse căi.

1.11. Încheiem acest paragraf cu câteva precizări şi observaţii.

1.11.1. S-a făcut demult remarca simplă că orice limbă este constituită dintr-un vocabular, o gramatică şi totalitatea frazelor posibile ale limbii, construite pe aza vocabularului şi cu respectarea regulilor gramaticale. Prin analogie vorbim de *limbajul calculului propoziţiilor*, al cărui vocabular este format din elementele mulţimii P_0, conectorii logici şi parantezele, gramatica fiind dată de regulile $1-3$ din secţiunea **1.3**, iar rolul frazelor este jucat de propoziţiile mulţimii P. Semnele $\vdash$, $\Longrightarrow$ şi $\iff$ nu fac parte din limbajul calculului propoziţiilor, iar afirmaţiile de forma

$$\vdash p, \quad p \Longrightarrow q, \quad p \iff q$$

sunt afirmaţii despre limbajul calculului propoziţiilor; spunem că aceste afirmaţii fac parte din *metalimbajul calculului propoziţiilor*. Aşadar, cuvintele "şi", "dacă", "atunci" care apar în aceste afirmaţii dac parte din metalimbaj şi ar fi greşit să le stenagrofiem cu semnele $\wedge$, $\longrightarrow$ din limbaj.

O observaţie care marchează de asemenea diferenţa dintre limbaj şi metalimbaj este că semnele $\longrightarrow$, $\longleftrightarrow$ folosesc la construcţia elementelor din P, în timp ce $\Longrightarrow$, $\iff$ desemnează două relaţii binare pe mulţimea P.

Observaţia 4 *În unele răspunsuri la examene sau chiar în unele texte de logică matematică se notează propoziţiile compuse cu*

$$p \wedge q, \quad p \vee q, \quad p \longrightarrow q, \quad p \longleftrightarrow q, \quad \neg p$$

iar proprietăţi cum sunt (1) – (29) *se notează sub forma:*

$$p \longleftrightarrow p \vee p, \quad p \vee q \longleftrightarrow q \vee p \ \textit{etc.}$$

Alteori propoziţii compuse se notează cu

$$p \wedge q, \quad p \vee q, \quad p \Longrightarrow q, \quad p \iff q, \quad \neg p$$

iar proprietăţile se notează

$$p \Longleftrightarrow p \vee p, \quad p \vee q \Longleftrightarrow q \vee p \text{ etc.}$$

Ambele variante trădează confuzia între limbaj şi metalimbaj, ceea ce constituie o greşeală gravă. Putem folosi semnele $\Longrightarrow$ *şi* $\Longleftrightarrow$ *în metalimbaj, dar atunci proprietăţile de tipul* $(1)-(29)$ *trebuie notate folosind semnul* $\vdash$ *în faţă, iar proprietăţile în care intervin mai multe semne de implicaţie, semnul principal trebuie marcat prin noi perechi de paranteze faţă de scrierea din secţiunea* **1.10**; *de exemplu, proprietatea* (27) *se scrie*

$$\vdash ((p \Longrightarrow q) \Longrightarrow r) \quad \Longrightarrow \quad (p \Longrightarrow (q \Longrightarrow r)).$$

1.12. Este instructiv să recunoaştem printre tautologiile (1) – (29), câteva proprietăţi care stau la baza unor scheme de raţionament folosite mult în matematica de toate nivelele. Astfel:

- Proprietatea (18) justifică faptul că unele teoreme enunţate $p \Longrightarrow q$ sunt demonstrate sub forma $\neg q \Longrightarrow \neg p$;
- În proprietatea (15) recunoaştem două din schemele reducerii la absurd: pentru a demonstra $p \Longrightarrow q$, presupunem ipoteza p şi ipoteza de reducere la absurd $\neg q$; dacă reuşim să obţinem concluzia $\neg p$ sau concluzia q, teorema este demonstrată.
- Proprietatea (24) stă la baza aşa numitei *teoreme a deducţiei*, care arată că dacă ipoteza unei teoreme este p iar concluzia este de forma $q \longrightarrow r$, atunci pentru a demonstra teorema trebuie să presupunem ipotezele p şi q şi să demonstrăm concluzia r. Este surprinzător că această tehnică elementară provoacă dificultăţi multor elevi şi chiar unor studenţi !

Observaţia 5 *În matematică suntem adesea puşi în situaţia de a nega o proprozitie de forma* $p \longrightarrow q$. *Este trist să constatăm cât de mulţi practicanţi ai matematicii, incluzând unii profesori, nu ştiu să facă acest lucru! Răspunsul corect, furnizat de tautologia* (20), *este* $p \wedge \neg q$; *acest fapt ar trebui să fie evident pentru toată lumea, deoarece a nega* $p \longrightarrow q$ *înseamnă a ne plasa în singurul caz în care* $p \longrightarrow q$ *este falsă, iar acesta este cazul în care* p *este adevărată şi* q *este falsă, adică în care* $p \wedge \neg q$ *este adevărată. Dintre răspunsurile fanteziste la întrebarea "Care este negaţia propoziţiei* $p \longrightarrow q$*?", cel mai frecvent este răspunsul* $p \longrightarrow \neg q$. *Cititorul este îndemnat să stabilească legătura între acest răspuns şi cel corect:*

$$p \wedge \neg q \implies p \longrightarrow \neg q,$$

cele două propoziţii nefiind echivalente (conform cazului când p *este falsă).*

1.11.3. Propoziţiile

$$(p \longrightarrow q) \longrightarrow r \quad \text{şi} \quad p \longrightarrow (q \longrightarrow r)$$

nu sunt în general echivalente (vezi (27) pentru $v(p) = v(r) = 0$). De aceea, în propoziţiile în care apar mai multe semne $\longrightarrow$, trebuie puse toate parantezele, evitând astfel ambiguităţile.

2 Elemente de calculul predicatelor

2.1. Predicatele sunt enuţuri care depind de una sau mai multe variabile şi care devin propoziţii în sensul capitolului precedent atunci când toate variabilele de care depinde predicatul respectiv iau "valori" într-o mulţime precizată în prealabil.

Exemplul 1 *"x este om", "x este tatăl lui y", "x+y=z" etc.*

Prin înlocuirea variablelor care apar în aceste predicate cu indivizi concreţi, bine precizaţi, obţinem propoziţii adevărate sau false:

Exemplul 2 *"Socrate este om", "Mickey Mouse este om", "3 * 2 = 6", "7 * 5 = 15" etc.*

Dacă înlocuim variabilele cu "valori" luate la întâmplare, riscăm să obţinem afirmaţii fără sens, eventual hilare, cum ar fi "$Vasile * Ion = Mihai$" etc. De fapt însă, atunci când aplicăm calculul predicatelor într-un domeniu al matematicii, lucrăm numai cu predicate şi valori care se referă la obiectul studiului respectiv. De exemplu, în teoria mulţimilor lucrăm cu predicate ca $x \in z$, $y \subseteq z$ etc, iar valorile pe care le iau variabilele sunt elemente şi mulţimi; tot aşa, cine studiază geometria lucrează de fapt cu predicate specifice acestei discipline, iar variabilele semnifică puncte, drepte, curbe, plane, suprafeţe etc; etc.

Pentru a modela situaţia ilustrată prin exemplele de mai sus, în calculul predicatelor se postulează că variabilele iau valori într-o mulţime nevidă, numită **universul discursului**. Acesta este neprecizat, dar fixat pe tot parcursul studiului. (Universul discursului ar putea fi o clasă proprie în loc de mulţime, de exemplu clasa tuturor mulţimilor). Faptul că universul discursului este neprecizat, dar fixat, asigură generalitatea şi respectiv coerenţa demersului nostru.

2.2 Folosim notaţi de tipul $p(x), q(x, y), \ldots$ etc pentru a desemna predicate depinzând de o variabilă x, respectiv două variabile $x, y, \ldots$ etc.

În general, dacă nu se specifică altfel, notaţiile $p(x), q(x, y), \ldots$ nu exclud posibilitatea ca predicatele respective să depindă şi de alte variabile, care nu sunt menţionate explicit.

Calculul predicatelor utilizează **cuantificatorul universal** $\forall$ şi **cuantificatorul existenţial** $\exists$, care se citesc în modul care ne este familiar:

$\forall x \;\; p(x)$ se citeşte *pentru orice* x, $p(x)$;

$\exists x \;\; p(x)$ se citeşte *există* x *astfel încât* $p(x)$,

înţelesul fiind că pentru orice element x din universul discursului are loc proprietatea $p(x)$, respectiv că în universul discursului există un element x cu proprietatea $p(x)$.

Este esenţial să înţelegem că în expresiile de forma $\forall x\, p(x)$ şi $\exists x\, p(x)$, simbolul x nu mai reprezintă propriu zis o variabilă; nu este permis să înlocuim x cu un element x din universul discursului. De exemplu, fie universul discursului $\mathcal{R}$ şi $p(x)$ predicatul $x^2 - 9 = 0$. Este evident un non-sens să spunem

$$\textit{pentru orice } 3, \;\; 3^2 - 9 = 0,$$

dar şi exprimarea

$$\textit{există } 3 \textit{ astfel încât } 3^2 - 9 = 0$$

este defectuoasă: ea pare a spune că există ami mulţi 3, dintre care unii au proprietatea $3^2 - 9 = 0$. În concluzie, afirmaţiile care încep cu $\forall$ sau cu $\exists$ se referă la întregul univers al discursului şi nu la un element x, fie el specificat sau nu.

Din cele precedente rezultă că $\forall x \;\; p(x)$ şi $\exists x \;\; (p(x)$ sunt predicate depinzând de toate variabilele diferite de x de care depinde p. În particular, dacă predicatul p depinde numai de variabila x, atunci $\forall x \;\; p(x)$ şi $\exists x \;\; p(x)$ sunt propoziţii şi este important să reţinem că adevărul sau falsitatea acestor propoziţii depind atât de predicatul p cât şi de universul discursului.

Exemplul 3 *Să considerăm predicatele*

$$x < y, \quad x \neq 2, \quad x^2 - 3 = 0.$$

Atunci $\forall x \; (x < y)$ *şi* $\exists x \; (x < y)$ *sunt predicate în variabila* y*, iar*

$$\forall x \; (x \neq 2), \;\; \exists x \; (x \neq 2), \;\; \forall x \; (x^2 - 3 = 0) \textit{ şi } \exists x \; (x^2 - 3 = 0)$$

sunt propoziţii.

Dacă universul discursului este $\mathcal{Q}$*, atunci primele două propoziţii sunt adevărate, iar ultimele doua sunt false; dacă universul discursului este* $\mathcal{R}$ *sau* $\mathcal{C}$*, atunci prima şi a treia propoziţie sunt false iar celelalte două sunt adevărate.*

Următoarea terminologie, folosită în calculul predicatelor, reflacetă situaţia explicată mai sus. Într-o expresie de forma $\forall x \;\; p(x, y, \ldots)$ sau $\exists x \;\; p(x, y, \ldots)$ se spune că variabila x este o **variabilă cuantificată** sau **legată** sau **aparentă**, iar variabilele $y, \ldots$ sunt **libere**.

Să notăm că variabilele libere şi variabilele legate apar şi în alte contexte matematice. De exemplu, în $\int_0^y f(x)dx$, x este o variabilă aparentă iar y o variabilă liberă. O observaţie foarte utilă este că schimbarea numelui unei variabile legate cu un nume diferit de numele variabilelor libere dintr-o expresie, nu schimbă expresia respectivă.

(30) $\forall x\, p(x) = \forall t\, p(t), \qquad \exists x\, p(x) = \exists t\, p(t)$

dacă variabila t este diferită de variabilele libere din p. La fel, $\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(t)dt$ etc.

Observaţia 6 *În ultimii ani, destul de mulţi matematicieni din ţara noastră folosesc în scrierile şi/sau lecţiile lor notaţiile* $(\forall)x$, $(\exists)x$ *în loc de* $\forall x$, $\exists x$. *Există două motive pentru care scrierea simbolurilro cunatificatorilor între paranteze trebuie respinsă. Primul este un argument de autoritate: scrierea consacrată pe plan mondial este* $\forall x$, $\exists x$, *adică fără paranteze; de altfel şi (cei mai) mulţi matematicieni români folosesc scrierea consacrată. În particular, cititorul va putea constata că în nici una din lucrările care alcătuiesc bibliografia acestui articol nu se foloseşte notaţia* $(\forall)x$, $(\exists)x$. *Al doilea argument este că scrierea* $(\forall)x$, $(\exists)x$ *constituie o complicaţie inutilă, deoarece ea nu aduce nici o informaţie în plus faţă de scrierea normală. Trebuie adăugat aici că uneori se foloseşte scrierea* $(\forall x)$, $(\exists x)$, *care este de asemenea o complicaţie inutilă în cazul unui singur cuantificator, dar care poate uşura citirea în cazul mai multor cuantificatori succesivi:* $(\forall x)(\exists y)(\exists z)(\forall t)p(x, y, z, t)$ *se citeşte poate mai bine decât* $\forall x \exists y \exists z \forall t\; p(x, y, z, t)$, *deşi această din urmă scriere este şi ea lipsită de ambiguitate. În sfârşit, să mai menţionăm că există autori care scriu* (x) *pentru* $\forall x$.

Autorul acestui articol a întrebat pe câţiva dintre colegii săi care folosesc scrierea $(\forall), (\exists)$, *de ce pun aceste paranteze ? Răspunsul comun a fost că nu este vorba de o chestiune de principiu, ci de o obişnuinţă. Este uşor de constatat că obişnuinţa a pătruns în învăţământ şi proliferează pe această cale. Autorul articolului de faţă crede cu tărie că această chestiune nu este indiferentă, că nu trebuie să ne singularizăm în acest mod faţă de comunitatea matematică internaţiunală, ci trebuie să revenim la notaţia corectă* $\forall x$, $\exists x$, *chiar dacă cealaltă notaţie este folosită de câţiva distinşi matematicieni români pe care autorul îi stimează în cel mai înalt grad.*

2.3. Urmând o idee asemănătoare cu cea aplicată în calculul propozţiilor, în calculul predicatelor se presupune dată o mulţime neprecizată dar fixată de predicate, din care se alcătuiesc noi predicate prin aplicarea cuantificatorilor şi a conectorilor logici în toate modurile posibile. În scrierea acestor predicate trebuie respectată o regulă fundamentală şi anume că *într-un predicat orice variabilă liberă trebuie notată diferit de orice variabilă legată.*

Nerespectarea acestei reguli se numeşte **coliziunea variabilelor** şi ea invalidează scrierea predicatului respectiv. Atunci când din două predicate corect scrise alcătuim un nou predicat prin aplicarea unui conector logic, trebuie să ne asigurăm că nici noul predicat nu prezintă fenomenul de coliziune a variabilelor, ceea ce se poate realiza totdeauna cu ajutorul proprietăţii (30).

Exemplul 4 *Fie două predicate* $p(x, y), q(x, z)$. *Atunci* $\exists x\ p(x, y)$ *este un nou predicat, dar* $\exists x\ p(x, y) \vee q(x, z)$ *nu este predicat, deoarece prezintă coliziunea variabilei* x. *Pentru a depăşi această dificultate, considerăm o variabilă* $t \notin \{x, y, z\}$ *şi avem* $\exists x\ p(x, y) = \exists t\ p(t, y)$, *conform proprietăţii* (30); *acum putem introduce predicatul* $\exists t\ p(t, y) \vee q(x, y)$, *care este corect alcătuit.*

Din cele de mai sus rezultă regula:

Dacă P *şi* Q *sunt predicate astfel încât nici o variabilă liberă din* P *nu apare legată în* Q *şi nici o variabilă liberă din* Q *nu apare legată în* P, *atunci* $P \wedge Q$, $P \vee Q$, $P \longrightarrow Q$ *şi* $P \longleftrightarrow Q$ *sunt de asemnea predicate. Trecerea de la* P *la* $\neg P$ *nu este condiţionată de nici o restricţie.*

În Exemplul 4, ca şi în formulele $(10), (11) - (13), (15), (18) - (20)$ am folosit în mod tacit regulile de suprimare a parantezelor, pe care le vom explica acum. În algebra obişnuită, convenţiile de sypriumare a parantezelor provin dintr-o convenţie de ierarhizare a tăriei cu care leagă simbolurile diverselor operaţii; de exemplu, faptul că scrierea $x * y + z$ este înţeleasă ca reprezentând $(x * y) + z$ provine din convenţia că înmulţirea leagă mai tare decât adunarea.

În calculul predicatelor se adoptă următoarea ordine descrescătoare a tăriei cu care leagă simbolurile logice:

(31) $\forall, \exists, \neg \quad ; \quad \wedge, \vee \quad ; \quad \longrightarrow, \longleftrightarrow$

în care semnele ";" despart trei grupe de simboluri, fiecare grupă constând din simboluri de aceeaşi tărie. Acum este clar că, de exemplu,

$(\forall x\ p(x) \wedge \neg q(x, y)) \vee r(y, z) \longrightarrow (p(y) \longleftrightarrow q(y))$ înseamnă

$(((\forall x\ p(x)) \wedge (\neg q(x, y))) \vee r(y, z)) \longrightarrow (p(y) \longleftrightarrow q(y))$.

În acest exemplu, ca şi în formulele $(6), (7), (9), (10), (27) - (29)$, se poate observa că în prezenţa unor simboluri consecutive de aceeaşi tărie, punerea parantezelor este obligatorie. Este desigur o banalitate să precizăm că punerea parantezelor este obligatorie ori ce câte ori dorim să indicăm altă ordine de efectuare a operaţiilor decât aceea care ar rezulta în absenţa parantezelor.

Exemplul 5 *Să considerăm predicatul*

$$\forall x\ (p(x) \wedge q(x)).$$

Dacă suprimăm perechea de paranteze care marchează domeniul de acţiune al cuantificatorului $\forall$, *obţinem formula* $\forall x\ p(x) \wedge q(x)$.

Această formulă este incorect alcătuită, deoarece prezintă fenomenul de coliziune. Unii autori acceptă şi astfel de formule, ceea ce, explicat pe exemplul considerat, revine la faptul că formula este acceptată cu înţelesul $\forall y\ p(y) \wedge q(x)$, *conform* (30).

Observaţia 7 *Exemplul 5 coroborat cu avertismentul din Observaţia 6 ne arată că în timp ce parantezele care ar înconjura un cuantificator sunt indezirabile, parantezele care urmează imediat după $\forall x$ sau $\exists x$ (dacă există) sunt esenţiale, prezenţa sau absenţa lor putând schimba sensul formulei.*

2.4. Trecem acum la studiul deducţiei în calculul predicatelor, introducând notaţiile următoare. Fie $p(x,\ldots,z)$, $q(x,\ldots,z)$ predicate în care $(x,\ldots,z)$ este o mulţime de variabile conţinând toate variabilele libere din predicatele p şi q. Atunci

$(D3)$ $p(x,\ldots,z) \Longrightarrow q(x,\ldots,z)$ înseamnă

$$\vdash \forall x \ldots \forall z\ (p(x,\ldots,z) \longrightarrow q(x,\ldots,z));$$

$(D4)$ $p(x,\ldots,z) \Longleftrightarrow q(x,\ldots,z)$ înseamnă

$$\vdash \forall x \ldots \forall z\ (p(x,\ldots,z) \longleftrightarrow q(x,\ldots,z))^2.$$

Proprietăţile (1) – (29) din calculul propoziţiilor rămân valabile şi pentru calculul predicatelor (adică pentru predicate p, q, r, p', q' şi pentru $\Longrightarrow, \Longleftrightarrow$ date prin definţiile $(D3), (D4)$). În plus, sunt valabile următoarele proprietăţi:

(32) dacă $p(x) \Longleftrightarrow p'(x)$, atunci $\forall x\ p(x) \Longleftrightarrow \forall x\ p'(x)$, $\exists x\ p(x) \Longleftrightarrow \exists x\ p'(x)$,
(33) $\forall x\ p(x) \Longrightarrow \exists x\ p(x)$,
(34) $\neg\forall x\ p(x) \Longleftrightarrow \exists x\ \neg p(x)$,
(35) $\neg\exists x\ p(x) \Longleftrightarrow \forall x\ \neg p(x)$,
(36) $\forall x \forall y\ p(x,y) \Longleftrightarrow \forall y \forall x\ p(x,y)$,
(37) $\exists x \exists y\ p(x,y) \Longleftrightarrow \exists y \exists x\ p(x,y)$,
(38) $\exists x \forall y\ p(x,y) \Longleftrightarrow \forall y \exists x\ p(x,y)$,
(39) $\forall x\ (p(x) \wedge q(x)) \Longleftrightarrow \forall x\ p(x) \wedge \forall x\ q(x)$,
(40) $\exists x\ (p(x) \vee q(x)) \Longleftrightarrow \exists x\ p(x) \vee \exists x\ q(x)$,
(41) $\forall x\ p(x) \vee \forall x\ q(x) \Longrightarrow \forall x\ (p(x) \vee q(x))$,
(42) $\exists x\ (p(x) \wedge q(x)) \Longrightarrow \exists x\ p(x) \wedge \exists x\ q(x)$,
(43) $\forall x\ (p(x) \longrightarrow q(x)) \Longrightarrow \forall x\ p(x) \longrightarrow \forall x\ q(x)$,
(44) $\exists x\ (p(x) \longrightarrow \exists x\ q(x)) \Longrightarrow \exists x\ (p(x) \longrightarrow q(x))$,

oricare ar fi predicatele care intervin în formulele de mai sus. De asemenea, dacă predicatele notate simplu p, q nu depind de variabila x, atunci

(45) $\forall x\ p(x) \vee q \Longleftrightarrow \forall x\ (p(x) \vee q)$,
(46) $\exists x\ (p(x) \wedge q) \Longleftrightarrow \exists x\ p(x) \wedge q$,
(47) $\forall x\ (p \longrightarrow q(x)) \Longleftrightarrow p \longrightarrow \forall x\ q(x)$,
(48) $p \longrightarrow \exists x\ q(x) \Longleftrightarrow \exists x\ (p \longrightarrow q(x))$

[2] În [14], ca şi în alte lucrări, se foloseşte $\equiv$ pentru $\Longleftrightarrow$ din $(D2)$, semnul $\Longleftrightarrow$ fiind folosit numai cu înţelesul $(D4)$.

Proprietătîle $(33)-(35)$ pot fi considerate ca evidente (luate ca axiome). Totuşi, propunem cititorului următorul exerciţiu: să demonstreze una din proprietăţile $(34), (35)$ folosind cealaltă proprietate împreună cu proprietăţi stabilite în secţiunea **1.10.**. În cele ce urmează schiţăm demonstraţiile proprietăţilor (32) şi (36) – (48). La baza acestor demosntraţii se află o tehnică pe care am putea să o rezumăm în felul următor: se "descuantifică" expresia, ajungându-se la un element din universul discursului, se face un raţionament asupra acestui element, iar în final se "recuantifică".

Pentru a demonstra (36), presupunem $\vdash \forall x \forall y\ p(x, y)$. Fie x_0, y_0 din universul discursului. Atunci din ipoteză rezultă $\vdash \forall y\ p(x_0, y)$, apoi $\vdash p(x_0, y_0)$. cum x_0 este arbitrar, obţinem mai departe $\vdash \forall x\ p(x, y_0)$; dar y_0 este arbitrar, deci $\vdash \forall y \forall x\ p(x, y)$. Am demonstrat implicaţia directă; implicaţia inversă se arată analog.

Pentru a demonstra (38), să presupunem $\vdash \exists x \forall y\ p(x, y)$. Există deci un element x_0 în universul discursului astfel încât $\vdash \forall y\ p(x_0, y)$. Fie y_0 un element arbitrar din universul discursului. Deducem că $\vdash p(x_0, y_0)$ şi drept urmare $\vdash \exists x\ p(x, y_0)$. Cum elementul y_0 este arbitrar, obţinem în final $\vdash \forall y \exists x\ p(x, y)$.

Să demonstrăm acum (40). Fie $\vdash \exists x\ (p(x) \vee q(x))$. Atunci există un element x_0 în universul discursului astfel încât $\vdash p(x_0) \vee q(x_0)$. Sunt două posibilităţi: $\vdash p(x_0)$ (caz în care $\vdash \exists x\ p(x)$) sau $\vdash q(x_0)$ (caz în care $\vdash \exists x\ q(x)$). Folosind proprietăţile (16) şi (17) din calculul propoziţiilor, se vede că in ambele cazuri avem $\vdash \exists x\ p(x) \vee \exists x\ q(x)$. Reciproc, să presupunem că $\vdash \exists x\ p(x) \vee \exists x\ q(x)$. Atunci sunt posibile două cazuri:

1. $\vdash \exists x\ p(x)$. În acest caz considerăm un element x_0 astfel încât $\vdash p(x_0)$. Rezultă $\vdash p(x_0) \vee q(x_0)$, deci $\vdash \exists x\ (p(x) \vee q(x))$.

2. $\vdash \exists x\ q(x)$. Se obţine în mod analog aceeaşi concluzie.

Pentru a demonstra (43), presupunem $\vdash \forall x(p(x) \longrightarrow q(x))$. Vom considera două cazuri posibile:

1. $\vdash \forall x\ p(x)$. Fie x_0 un element arbitrar din universul discursului. Atunci din ipoteza generală şi ipoteza cazului **1** obţinem $\vdash (p(x_0) \longrightarrow q(x_0))$ şi respectiv $\vdash p(x_0)$. Folosind modus ponens (conform **1.7.**) obţinem $\vdash q(x_0)$. Cum x_0 este arbitrar, avem $\vdash q(x)$, deci $\vdash \forall x\ p(x) \longrightarrow \forall x\ q(x)$.

2. $\vdash \neg \forall x\ p(x)$. Rezultă $\vdash \forall x\ p(x) \longrightarrow \forall x\ q(x)$ pentru că premisa este falsă (conform **1.7.**).

Pentru proprietatea (44) recomandăm împărţirea demonstraţiei în două cazuri, după valoarea de adevăr a propoziţiei $\exists x\ q(x)$.

În virtutea proprietăţilor (41) – (44), demonstrarea echivalenţelor (45) – (48) se reduce la demonstrarea implicaţiilor de la dreapta la stânga. Să demonstrăm de exemplu (45). Presupunem $\vdash \forall x\ (p(x) \vee q)$. Considerăm două cazuri:

1. $\vdash q$. Rezultă imediat $\vdash \forall x\ p(x) \vee q$.

2. $\vdash \neg q$. Fie x_0 un element arbitrar în universul discursului. Atunci rezultă $\vdash p(x_0) \vee q$; dar q este falsă, deci $\vdash p(x_0)$. Elementul x_0 fiind arbitrar, obţinem $\vdash \forall x\ p(x)$, deci $\vdash \forall x\ p(x) \vee q$.

Cititorul este îndemnat să suplinească demosntraţiile pe care le-am omis. În final vom obţine validitatea tuturor proprietăţilor $(32)-(48)$. Dacă predicatele p, q depind şi de alte variabile decât x sau decât y, proprietăţile de mai sus rămân valabile şi demonstraţiile se reduc la cele precedente prin fixarea în mod arbitrar a celorlaltor variabile.

Un alt rezultat important este că fiecare dintre implicaţiile de mai sus, adică $(33), (38), (41) - (44)$ este *implicaţie proprie*, în sensul că implicaţia contrară nu are loc. Acest fapt se stabileşte prin contraexemple. În contextul nostru, contraexemplu poate să însemne nu numai alegerea unor predicate convenabile, ci şi alegerea convenabilă a universului discursului.

Faptul că implicaţia (38) este proprie apare ca evident. Vom remarca totuşi că aici intervine ipoteza că universul discursului este nevid.

Pentru implicaţia (38), fie universul discursului $\mathcal{N}$ şi predicatul $x \geq y$. Atunci este adevărat că $\forall y \exists x\ x \geq y$ (orice număr natural admite un majorant), dar este fals că $\exists x \forall y\ x \geq y$ (deoarece nu există un cel mai mare număr natural).

Fie $p(x)$ o proprietate astfel încât $\vdash \exists x\ p(x)$ şi $\vdash \exists x\ \neg p(x)$. Alegând $q(x) = \neg p(x)$, obţinem contraexemple care arată că implicaţiile (41) – (43) sunt proprii. Alegând drept $q(x)$ o proprietate mereu falsă ($\vdash \forall x\ \neg q(x)$), vedem că implicaţia (44) este proprie.

Observaţia 8 *Unii începători propun următoarea "demonstraţie" pentru reciproca implicaţiei* (41). *Presupunem* $\vdash \forall x\ (p(x) \vee q(x))$ *şi fie* x_0 *un element arbitrar din universul discursului. Atunci* $\vdash p(x_0) \vee q(x_0)$, *deci cel puţin una din proprietăţile* $p(x_0)$, $q(x_0)$ *este adevărată; de exemplu* $\vdash p(x_0)$. *Cum elementul* x_0 *este arbitrar, conchidem că* $\vdash \forall x\ p(x)$ *şi drept urmare avem* $\vdash \forall x\ p(x) \vee \forall x\ q(x)$. *Evident, greşeala constă în trecerea de la* $\vdash p(x_0)$ *la* $\vdash \forall x\ p(x)$*; este ca şi cum cineva trage un loc în plic (oarecare!), constată că a tras un bilet câştigător şi conchide că toate biletele sunt câştigătoare (analog pentru cazul când a tras un loz necâştigător) ! De remarcat că în demonstraţia proprietăţii* (45), *cazul* 2, *trecerea de la* $\vdash p(x_0)$ *la* $\vdash \forall x\ p(x)$ *este corectă deoarece împărţirea în cazuri nu a depins de* x_0, *fiind făcută înainte de alegerea lui* x_0.

2.5. În această secţiune trecem în revistă câteva aplicaţii.

2.5.1. În matematică folosim adesea şiruri de echivalenţe şi/sau implicaţii, ca de exemplu

(49) $P \Longleftrightarrow Q \Longleftrightarrow R \Longrightarrow S,$

unde P, Q, R, S sunt predicate. Este curios că unii dintre aceia care folosesc o astfel de notaţie nu cunosc semnificaţia ei; de exemplu, (49) înseamnă

(50) $P \Longleftrightarrow Q$ şi $Q \Longleftrightarrow R$ şi $R \Longrightarrow S.$

Această ignoranţă poate conduce la ambiguităţi. Să considerăm de exemplu, următorul mod de a redacta demonstraţia injectivităţii funcţiei logaritmice:

(51) $log\, x = log\, y \implies 10^{log\, x} = 10^{log\, y} \implies x = y \implies log$ este injecţie.

În virtutea interpretării de mai sus, şirul (51) înseamnă afirmarea succesivă a trei implicaţii, dintre care ultima pur şi simplu nu are sens: $x = y \implies log$ este injecţie. Adevarata intenţie a demonstraţiei apare clar prin introducerea unei perechi de paranteze:

(52) $(log\, x = log\, y \implies 10^{log\, x} = 10^{log\, y} \implies x = y) \implies log$ este injecţie.

Scrierea (52) are şi ea un cusur: săgeţile din interior au sensul $(D3)$ şi fac parte din metalimbajul calculului predicatelor, pe când a treia săgeată este din metalimbaj (conform **1.11.**) şi deci ar trebui notată în mod diferit. Redactarea optimă pare a fi

$$log\, x = log\, y \implies 10^{log\, x} = 10^{log\, y} \implies x = y \text{ deci } log \text{ este injecţie.}$$

2.5.2. În teoria mulţimilor şi prin urmare în întreaga matematică se folosesc notaţii de tipul $\{a_1, \ldots, a_n\}$. Definiţia riguroasă a mulţimii notate în acest mod este foarte simplă dacă folosim limbajul calculului predicatelor:

(53) $A = \{a_1, \ldots, a_n\} \iff \forall x\, (x \in A \longleftrightarrow x = a_1 \vee x = a_2 \vee \ldots \vee x = a_n)$

Observaţia 9 *Pe cât de răspândită, pe atât de greşită este părerea că atunci când scriem* $\{a_1, \ldots, a_n\}$ *trebuie să presupunem că elementele* $a_1, \ldots, a_n$ *sunt distincte două câte două. Este clar că în definiţia* (53) *nu intervine o astfel de clauză. De exemplu, scrierea* $\{3, 3, 2, 2, 3, 1, 1, 1\}$ *este perfect legitimă, iar în virtutea definiţiei* (53)*, a comutativităţii şi a idempotenţei (*(5) *şi respectiv* (8)*) rezultă*

(54) $\{3, 3, 2, 2, 3, 1, 1, 1\} = \{1, 2, 3\}.$

Ultima egalitate ne ilustrează şi faptul că absenţa cererii ca elementele $a_1, \ldots, a_n$ *să fie distincte nu contrazice concepţia lui Cantor potrivit căreia fiecare element al unei mulţimi este considerat o singură dată: scrierea din membrul stâng al relaţiei* (54) *este redundantă – ca şi cum am fi făcut mai multe fotografii ale fiecărui element – dar aceasta scriere desemnează o mulţime în sensul cantorian, după cum ne relevă membrul drept.*

În afară de argumentele principale de mai sus, există şi un argument pragmatic împotriva convenţiei ca elementele $a_1, \ldots, a_n$ *să fie neapărat distincte. Într-adevăr,* *o convenţie se introduce pentru a realiza o anumită simplificare a enunţurilor, prin eliminarea necesităţii de a enumera multe cazuri de excepţie: acesta este rolul unor convenţii cum ar fi $x^0 = 1$ sau introducerea mulţimii vide. În schimb convenţia în discuţie nu face decât să complice lucrurile. De exemplu, o formulă atât de simplă cum este*

$$\{a_1, \ldots, a_m\} \cup \{b_1, \ldots, b_n\} = \{a_1, \ldots, a_m, b_1, \ldots, b_n\}$$

ar deveni ilicită, deoarece nu este garantată respectarea convenţiei în membrul drept.

2.5.3. În analiza matematică se foloseşte scrierea de tipul $\forall x > 0,\ \exists y > 0$, care pare a nu se incadra în sistemul de scriere adoptat în calculul predicatelor. În realitate, semnificaţia scrierii din analiza matematică este dată de definiţiile:

(55) $\quad \forall x > 0\ p(x) = \forall x\ (x > 0 \longrightarrow p(x))$,

(56) $\quad \exists x > 0\ p(x) = \exists x\ (x > 0 \wedge p(x))$,

unde semnul $=$ înseamnă că membrul stâng este o notaţie presurtată pentru membrul drept.

Să vedem cum se neagă enunţurile de forma (55) şi cele de forma (56). Cititorul este îndemnat să identifice proprietăţile pe care le aplicăm la fiecare pas al calculelor de mai jos:

$\neg(\forall x > 0\ p(x)) = \neg\forall x\ (x > 0 \longrightarrow p(x)) \Longleftrightarrow \exists x\ \neg(x > 0 \longrightarrow p(x)) \Longleftrightarrow \exists x\ (x > 0 \wedge \neg p(x))$,

$\neg(\exists x > 0\ p(x)) = \neg\exists x\ (x > 0 \wedge p(x)) \Longleftrightarrow \forall x\ \neg(x > 0 \wedge p(x)) \Longleftrightarrow \forall x\ (\neg(x > 0) \vee \wedge\neg p(x)) \Longleftrightarrow \forall x\ (x > 0 \longrightarrow \neg p(x))$

şi prin urmare

(57) $\quad \neg(\forall x > 0\ p(x)) \quad \Longleftrightarrow \quad \exists x > 0\ \neg p(x)$,

(58) $\quad \neg(\exists x > 0\ p(x)) \quad \Longleftrightarrow \quad \forall x > 0\ \neg p(x)$.

Cititorul este îndemnat să reia diverse demonstraţii în limbajul epsilon-delta din analiza matematică şi să constate că ele sunt corecte, deoarece se bazează pe regulile (57), (58) de mai sus. Însă regulile (57), (58) trebuiau demonstrate, ceea ce am şi făcut.

2.5.4. După cum se ştie, un grup $(G, \circ)$ este format dintr-o mulţime G şi o operaţie binară $\circ : G \times G \longrightarrow G$ satisfăcând axiomele

(59) $\quad \forall x \forall y \forall z\ (x \circ y) \circ z = x \circ (y \circ z)$,

(60) $\quad \exists e \forall y\ x \circ e = e \circ x = x$,

(61) $\quad \forall x \exists x^{-1}\ x \circ x^{-1} = x^{-1} \circ x = e$.

Uneori, începătorii greşesc scrierea axiomei (60), inversând ordinea cuantificatorilor; profesorul face corectura necesară, explicând că prin inversare se obţine o afirmaţie mai slabă, care acceptă că fiecărui element x îi corespunde un element e, care s-ar putea schimba odată cu x. Din punctul de vedere al secţiunii **2.4**, greşeala revine la ignorarea faptului că implicaţia (38) este proprie.

Să mai observăm că în definiţia de mai sus se face o presupunere tacită: elementul e din axioma (60) coincide cu elementul e din axioma (61). Trebuie să înţelegem că această coincidenţă nu rezultă din calculul predicatelor. Într-adevăr, o propoziţie de forma $\exists x\ p(x) \wedge \exists x\ q(x)$ nu afirmă existenţa unui x care să satisfacă atât $p(x)$ cât şi $q(x)$; implicaţia (42) este proprie.

Pentru a afirma explicit coincidenţa elementului e din (60) cu elementul e din (61), trebuie să comasăm aceste axiome într-una singură:

(62) $\exists e\ (\forall x\ (x \circ e = e \circ x = x) \wedge \forall x \exists x^{-1}\ (x \circ x^{-1} = x^{-1} \circ x = e))$.

Un mod mai elegant de a înlătura neajunsul semnalat constă în schimbarea genului proxim al definiţiei grupurilor. Vom spune că un grup $(G, \circ, ^{-1}, e)$ este o mulţime G împreună cu 3 operaţii (o operaţie binară $\circ : G \times G \longrightarrow G$, o operaţie unară $^{-1} : G \longrightarrow G$ şi o operaţie zero-ară $e \in G$), satisfăcând axiomele (59) şi

(63) $\forall x\ x \circ e = e \circ x = x$,

(64) $\forall x\ x \circ x^{-1} = x^{-1} \circ x = e$.

Acest mod de a defini grupurile are şi alte avantaje, de natură algebrică, asupra cărora nu vom insistăm aici.

2.5.5. În scrierea matematică obişnuită cuantificatorii universali sunt uneori omişi, fiind subînţeleşi. În general această omisiune nu produce confuzii. Trebuie totuşi să fim atenţi: când negăm o afirmaţie pentru care cuantificarea universală este subînţeleasă, formula (34) introduce un cuantificator existenţial care trebuie să apară în mod explicit. Iată două exemple.

2.5.5.1. Când demonstrăm o teoremă $p(x) \Longrightarrow q(x)$ prin reducere la absurd, presupunem $\vdash \exists x\ (p(x) \wedge \neg q(x))$, conform ($D3$) şi (20).

2.5.5.2. Să considerăm relaţia de ordine $\leq$ şi relaţia de ordine strictă $<$ pe mulţimea $\mathcal{R}$ (sau pe o submulţime a lui $\mathcal{R}$ sau $\leq$, $<$ definite axiomatic pe o mulţime de natură neprecizată). Proprietatea de reflexivitate a relaţiei $\leq$ este scrisă adeseori:

(65) $x \leq x$,

iar proprietatea de ireflexivitate a relaţiei $<$ apare sub forma

(66) $x \not< x$,

în formulele (65) şi (66) subînţelegându-se cuantificatorul universal.

O greşeală foarte frecventă este aceea de a crede că ireflexivitatea este negaţia reflexivităţii. În realitate, reflexivitatea relaţiei $<$ înseamnă propoziţia falsă $\forall x\ x < x$, deci negaţia ei este $\exists x\ x \not< x$, pe când ireflexivitatea (66) este $\forall x\ x \not< x$. În virtutea implicaţiei proprii (33), constatăm că ireflexivitatea este o proprietate mai tare decât negaţia reflexivităţii. Tot aşa, necomutativitatea unei operaţii binare $\circ$ definite pe o anumită mulţime nu trebuie scrisă $x \circ y \neq y \circ x$, ci $\exists x \exists y\ x \circ y \neq y \circ x$.

3 Concluzii:

3.1. Materialul teoretic prezentat în acest articol constituie numai o mică parte din calculul propoziţiilor şi calculul predicatelor care – la rândul lor – sunt departe de a epuiza logica matematică. O prezentare enciclopedică a logicii matematice este oferită în [3].

3.2. Cititorul şi-a putut da seama că simbolismul matematic obişnuit prezintă unele derogări de la simbolismul logicii matematice, primul fiind mai "colocvial". În secţiunea **2.5** am ilustrat parţial acest aspect.

3.3. Este incontestabil că matematica şi informatica se bazează în mod esenţial pe logică şi că, prin urmare, stăpânirea unui minim de cunoştinţe de logică este indispensabil. Acesta este, de fapt, punctul de plecare al articolului de faţă.

3.4. În legătură cu poziţia logicii matematice în liceu, autorul crede că, oricât de bine ar fi predate o lecţie sau două de logică matematică în clasa IX, ele nu folosesc la nimic dacă după aceea tema este complet uitată (şi în particular scoasă din programa concursurilor de admitere în învăţământul superior). Cunoştinţele de logică matematică predate în clasa IX trebuie să devină un instrument folosit în permanenţă la lecţiile de geometrie, algebră, analiză şi desigur informatică. În articolul de faţă am dat câteva exemple în acest sens, iar cititorul poate descoperi singur numeroase altele.

Bibliografie

[1] G. Asser - *Einfuhrung in die matematishe Logik*. Teil I, II, Teubner, Leipzig 1972

[2] D. W. Barnes, J. M. Mack - *An Algebraic Introduction to Mathematical Logic*, Springer Verlag, Berlin/Heidelberg/New York 1975

[3] J. Barwise, ed. - *Handbook of Mathematical Logic*, vol. A-D. North-Holland, Amsterdam 1977

[4] M. Becheanu, V. Căzănescu, C. Năstăsescu, S. Rudeanu - *Logică matematică şi teoria mulţimilor pentru anul II liceu, clase speciale de matematică*, Editura didactică şi Pedagogică, Bucureşti 1972

[5] A. Dumitriu - *Logica polivalentă*, Editura enciclopedică Română, Bucureşti 1971

[6] Gh. Enescu - *Logica simbolică*, Editura Ştiinţifică, Bucureşti 1971

[7] H. Freudenthal - *Limbajul logicii matematice*, Editura Tehnică, Bucureşti 1975

[8] R. L. Goodstein - *Mathematical Logic*, Leicester Univ. Press 1957

[9] D. Hilbert, W. Ackermann - *Grundzuge der theoretishen Logik*, Springer-Verlag, berlin 1928, Ediţia V, 1967

[10] L. A. Lavrov, L. L. Maksimova - *Probleme de teoria mulţimilor şi logică matematică*, Editura Tehnică, Bucureşti 1974

[11] R. C. Lyndon - *Notes on Logic*, Van Nostrand, Princeton 1967

[12] Gr. C. Moisil - it Elemente de logică matematică şi teoria mulţimilor, Editura Ştiinţifică, Bucureşti 1968

[13] Gr. C. Moisil - *Lecţii despre logica raţionamentului nuanţat*, Editura Ştiinţifică şi Enciclopedică, Bucureşti 1975

[14] C. Năstăsescu, C. Niţă, Gh. Rizescu - *Matematică. Algebră. Manual pentru clasa IX*, Editura Didactică şi pedagogică, Bucureşti 1984

[15] P. S. Novikov - *Elemente de logică matematică*, Editura Ştiinţifică, Bucureşti 1966

[16] P. Rosenbloom - *The Elements of Mathematical Logic*, Dover Publ., New York 1950

[17] S. Rudeanu - *Despre algebrele booleene şi logica matematică*, gazeta matematică, 70 (1965), nr. 2-3

[18] S. Rudeanu - *Curs de bazele informaticii. Logică matematică: I. Eemente de algebră universală. II. calculul propoziţiilor*, Univ. Bucureşti 1977 (litografiat)

[19] S. Rudeanu - *Logică matematică.* În C. P. Popovici, S. Rudeanu, H. Georgescu - *Bazele informaticii, vol. II, cap. VII*, Univ. Bucuresţi 1991 (litografiat)