Prof. Dr. Mihai ANASTASIEI

CAPITOLE SPECIALE DE GEOMETRIE

Suport de curs, Master I

Iaşi–2009

Cuprins

Prefaţa

Acest text a fost scris pentru a servi ca bază a cursului opţional "Capitole speciale de geometrie" de la programele de master "Structuri matematice fundamentale" şi "Didactica Matematicii", prevazut pentru anul I Master semestrul al II-lea.

Am ales capitole care să completeze cursul de "Varietăţi diferenţiabile" din anul III licenţă şi care totodată să constituie o introducere la cursul general, obligatoriu, de "Geometrie diferenţială" prevăzut in semestrul I, anul II Master.

Noţiunea care transgresează cele doua capitole este aceea de formă diferenţială, utilă de asemenea in teoria integrării, in teoria ecuaţiilor cu derivate parţiale şi in formularea unor modele matematice în fizica (electromagnetism, teorii gauge).

In Capitolul I construim pe o cale directă algebra exterioară a formelor diferenţiale pe o varietate diferenţiabilă şi operatorul de diferenţiere exterioară pe care-l legăm de operatorii clasici :gradient, rotor, divergenţă. Introducem grupurile de coomologie deRham, numerele Betti şi caracteristica Euler-Poincare. Considerand şi un produs scalar (metrică Riemanniană) definim operatorul * Hodge, codiferenţiala exterioară şi Laplacianul pentru forme de grad oarecare. Stabilim proprietăţi, formule de calcul şi enunţăm teorema de descompunere a lui Hodge.

In secţiunea dedicată aplicaţiilor in electromagnetism, scriem ecuaţiile Maxwell clasice in context relativist (dimensiune 4) şi le exprimăm apoi cu ajutorul operatorilor de diferenţiere şi codiferenţiere.

In Capitolul al II-lea, cu titlul "Ecuaţii de structură pentru hipersuprafeţe. Aplicaţii" incepem prin a prezenta primele elemente din teoria hipersuprafeţelor in R^{n+1} (definiţie, hiperspaţiu tangent,normală, forma I-a fundamentală) intr-o formă paralelă cu cea de prezentare a suprafeţelor la cursul de "Geometria curbelor şi suprafeţelor " din anul II, licenţă. Introducem apoi derivata covariantă pe hipersuprafaţă prin proiecţia pe hiperspaţiul tangent a derivatei covariante din R^{n+1}. Simultan obţinem şi forma a II-a fundamentală. Deducem formulele Gauss şi Weingarten precum şi condiţiile de integrabilitate date de ecuaţiile lui Gauss şi Codazzi-Mainardi.

In continuare introducem ecuaţiile de structură pentru R^{n+1} şi pentru o hipersuprafaţă. Acestea din urmă includ curbura hipersuprafeţei. Pentru $n = 2$ ecuaţiile de structură conduc la o expresie specială pentru curbura Gaussiană, expresie utilă in demonstraţia formulei lui Gauss -Bonnet, expusă in finalul capitolului.

Textul acesta va fi completat in cadrul seminariilor cu calcule detaliate şi explicaţii care să asigure o inţelegere optimă a cursului.

Iaşi, ianuarie 2009

Prof. dr. Mihai Anastasiei

1

Teoria Hodge-de Rham cu aplicaţii în electromagnetism

1.1. Teorema lui Stokes. Forme exterioare. Diferenţiala exterioară

Fie C o regiune (domeniu) în planul (x, y) i.e. în $\mathbb{R}^2$ cu frontiera ∂C (o curbă).

În manualele de Analiză matematică se arată că în anumite ipoteze are loc:

Teorema 1.1.1 (formula lui Green)**.**

$$\int_{\partial C} P(x,y)dx + Q(x,y)dy = \iint_C \left(\frac{\partial Q(x,y)}{\partial x} - \frac{\partial P(x,y)}{\partial y} \right) dxdy.$$

Fie $A = P(x,y)dx + Q(x,y)dy$ o 1-formă şi $da = \left(\dfrac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dxdy$, 2-forma obţinută din A prin operaţia d de diferenţiere exterioară).

Cu aceste notaţii teorema lui Green se poate rescrie într-o formă care în alte contexte se numeşte *formula lui Stokes.*

Teorema 1.1.2 (Formula lui Stokes)**.**

$$\int_{\partial C} = \iint_C dA.$$

Această formulă are loc într-un cadru foarte general pe care-l schiţăm în continuare sub formă de paşi de la particular la general.

Pasul 1. Înlocuim $\mathbb{R}^2$ cu $\mathbb{R}^n$ cu coordonatele $(x^1, \ldots, x^n)$. Gîndim coordonate $x^i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, (x^1, \ldots, x^i, \ldots, x^n) \to x^i, i = 1, \ldots, n$. În formula generală $df = \frac{\partial f}{\partial x^1} dx^1 + \ldots + \frac{\partial f}{\partial x^n} dx^n$ expresia dx^i este exact diferenţiala funcţiei coordonată x^i. Scriem $df = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x^i} dx^i$ sau mai scurt $df = \frac{\partial f}{\partial x^i} dx^i$ (convenim ca să se sumeze după indicii care apar sus şi jos şi nu vom mai scrie simbolul $\sum$) şi avem un exemplu de 1-formă pe $\mathbb{R}^n$.

În general, $A = \sum_{i=1}^n a_i(x^1, \ldots, x^n) dx^i = a_i(x) dx^i$ este o 1-formă pe $\mathbb{R}^n$.

Pe mulţimea $dx^1, dx^2, \ldots, dx^n$ definim o operaţie de *produs exterior* notată prin "$\wedge$" cu proprietăţile:

- asociativitatea, distributivitatea faţă de adunare, omogenă în raport cu funcţiile şi *anticomutativă.*

Observaţia 1.1.1. Din anticontinuitatea rezultă că produsele cu cel puţin doi factori egali se anulează. Avem deci produsele:

$dx^1, \ldots, dx^n$ în număr de n,
$dx^1 \wedge dx^2, dx^1 \wedge dx^3, \ldots dx^{n-1} \wedge dx^n$ pe scurt $dx^i \wedge dx^j$ cu $i < j$ în număr de C_n^2,
$dx^{i_1} \wedge dx^{i_2} \wedge \ldots \wedge dx^{i_p}$ cu $i_1 < i_2 < \ldots < i_p$ în număr de C_n^p
$dx^{1_1} \wedge dx^{i_1} \wedge \ldots \wedge dx^{i_{n-1}}$ cu $i_1 < i_2 < \ldots < i_{n-1}$ în număr de $C_n^{n-1} = n$
$dx^1 \wedge dx^2 \wedge \ldots \wedge dx^1 -$ un singur produs.

Considerăm mulţimea combinaţiilor liniare formule formate cu aceste produse cu coeficienţi funcţii pe $\mathbb{R}^n$. Se obţine un modul finit generat peste inelul $C^\infty(\mathbb{R}^n)$ al funcţiilor pe $\mathbb{R}^n$.

Este avantajos să considerăm funcţiile pe $\mathbb{R}^n$ ca 0-forme şi să scriem $f \wedge dx^k := f dx^k$ şi atunci modulul de mai sus să-l privim ca spaţiu liniar peste $\mathbb{R}$. Produsul exterior definit iniţial numai pe diferenţialele $\{dx^1, \ldots, dx^n\}$ se poate extinde natural pentru oricare două elemente din spaţiul liniar al combinaţiilor formale descris mai sus. Combinaţiile de factori omogeni de exemplu cu produse de p diferentiale, se numesc p-forme. Avem:

$$B = \sum_{i<j} b_{ij} dx^i \wedge dx^j = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} b_{ij} dx^i \wedge dx^j = \frac{1}{2} b_{ij} dx^i \wedge dx^j \text{ cu } b_{ji} = -b_{ij}.$$

Egalitatea a doua rezultă din anticomutativitate.

$$C = \sum_{i_1<i_2<\ldots<i_p} C_{i_1 i_2 \ldots i_p} dx^{i_1} \wedge \ldots \wedge dx^{i_p} = \frac{1}{p!} C_{i_1 i_2 \ldots i_p} dx^{i_1} \wedge \ldots \wedge dx^{i_p}$$

cu $C_{i_1 i_2 \ldots i_p}$ factori totali antisimetrici este o p-formă

$$a(x) dx^1 \wedge dx^2 \wedge \ldots dx^n - \text{o}n - \text{formă}.$$

Mulţimea p-formelor are structură de spaţiu liniar şi se va nota prin $\Lambda^p(\mathbb{R}^n)$. Dimensiunea sa este C_n^p şi o bază este formată din produsele $dx^{i_1} \wedge \ldots \wedge dx^{i_p}$ cu $i_1 < i_2 < \ldots < i_p$.

Mulţimea tuturor formelor $\Lambda(\mathbb{R}^n)$ apare ca sumă directă:

$$\Lambda(\mathbb{R}^n) = \Lambda^0(\mathbb{R}^n) \oplus \Lambda^1(\mathbb{R}^n) \oplus \ldots \oplus \Lambda^p(\mathbb{R}^n) \oplus \ldots \oplus \Lambda^n(\mathbb{R}^n)$$

şi observam anterior că are structură de spaţiu liniar. Produsul exterior se poate extinde în mod evident la oricare două elemente (forme) din $\Lambda(\mathbb{R}^n)$ cu păstrarea proprietăţilor de asociativitate, de distributivitate faţă de sumă, omogeneitatea în raport cu numerele reale iar anticomutativitatea capătă forma generală: $\omega \wedge \theta = (-1)^{pq} \theta \wedge \omega$ unde ω este o p-formă şi θ este o q-formă. Numerele p şi q se mai numesc şi gradele celor două forme. Aşadar avem:

Teorema 1.1.3. *$(\Lambda(\mathbb{R}^n), +, \cdot_{\mathbb{R}}, \Lambda)$ este o algebră necomutativă numită algebra (exterioară) a formelor exterioare pe $\mathbb{R}^n$.*

Pasul 2. Trecem de la $\mathbb{R}^n$ la o varietate diferenţială M de dimensiune n. Definim mai întâi forme locale pe M. Pe varietatea M avem un atlas de harţi locale. Fie (U, φ) un element al acestui atlas. Deci U este deschis în M şi $\varphi : U \to \varphi(U) \subset \mathbb{R}^n$ este un heomeomorfism prin care pe U se introduc coordonate adică pentru orice punct $x \in U$ avem

$\varphi(x) = (x^1, \ldots, x^n) \in \mathbb{R}^n$. Dată o funcţie $f : U \to \mathbb{R}$, spunem că este diferenţiabilă dacă $f \circ \varphi^{-1} : \varphi(U) \to \mathbb{R}$ este diferenţiabilă şi definim $(df)(x) = d(f \circ \varphi^{-1})(\varphi(x))$. În particular, pentru funcţiile coordonate $x^i : U \to \mathbb{R}$, $x \to x^i \in \mathbb{R}$ obţinem diferenţialele dx^i.

Cu aceste diferenţiale putem proceda ca mai sus şi obţinem algebra exterioară a formelor pe $U \subset M$ notată prin $\Lambda(U) = \Lambda^0(U) \oplus \Lambda^1(U) \oplus \ldots \oplus \Lambda^p(U) \ldots \oplus \Lambda^n(U)$.

O p-formă se scrie ca şi mai sus:

$$\omega = \frac{1}{p!}\omega_{i_1 \ldots i_p} dx^i \wedge \ldots \wedge dx^{i_p}$$

cu coeficienţii $\omega_{i_1 \ldots i_p}$ total antisimetrici în indicii $i_1 \ldots i_p$ (schimbarea poziţiei a oricăror doi indici schimbă semnul lui $\omega_{i_1 \ldots i_p}$.

Construcţia se poate efectua pentru fiecare domeniu de hartă locală.

Ne punem problema ce se întâmplă pe intersecţii de domenii de hărţi locale.

Dacă $\varphi(x) = (x^1, \ldots, x^n)$ şi $\psi(x) = (\widetilde{x}^1, \ldots, \widetilde{x}^n)$, legătura între cele două sisteme de coordonate este dată de $\psi \circ \varphi^{-1} : \varphi(U \cap V) \to \psi(U \cap V)$:

$$\widetilde{x}^i = \widetilde{x}^i(x^1, \ldots, x^n), \ \ \text{rang}\left(\frac{\partial \widetilde{x}^i}{\partial x^j}\right) = n. \tag{1.1.1}$$

Rezultă imediat

$$d\widetilde{x}^i = \frac{d\widetilde{x}^i}{dx^k} dx^k. \tag{1.1.2}$$

Fie o 2-formă $b_{ij} dx^i \wedge dx^j$ pe U şi o 2-formă $\widetilde{b}_{ij} dx^i \wedge d\widetilde{x}^j$ pe V. Pe $U \cap V$ vom avea, folosind (1.1.2):

$$\widetilde{b}_{ij} d\widetilde{x}^i \wedge d\widetilde{x}^j = \widetilde{b}_{ij} \frac{\partial \widetilde{x}^i}{\partial x^k} \frac{\partial \widetilde{x}^j}{\partial x^h} dx^k \wedge dx^h$$

şi deci coincidenţa cu $b_{ij} dx^k \wedge dx^h$ are loc dacă şi numai dacă

$$b_{ij} = \widetilde{b}_{ij} \frac{\partial \widetilde{x}^i}{\partial x^k} \frac{\partial \widetilde{x}^j}{\partial x^h}. \tag{1.1.3}$$

Aşadar dacă are loc (1.1.3) cele două 2-forme coincid pe $U \cap V$ şi împreună definesc o 2-formă pe $U \cup V$. Dacă adăugăm W pe care definim $\widehat{b}_{ij} d\widehat{x}^i \wedge d\widehat{x}^j$ cu

$$(3') \qquad b_{ij} = \widehat{b}_{ij} \frac{\partial \widehat{x}^i}{\partial x^k} \frac{\partial \widehat{x}^j}{\partial x^k},$$

avem a 2-formă definită pe $U \cup W$ şi dacă $\widehat{b}_{ij}$ satisface o condiţie similară cu (3) o putem defini pe $V \cup W$ şi deci avem o 2-formă pe $U \cup V \cup W$ şi putem continua până găsim o 2-formă pe M pentru că $M = \bigcup_{\alpha \in A_\alpha} U$, $\{(U_\alpha, \varphi_\alpha)_{\alpha \in A}\}$ atlas pe M. Aşadar în general o 2-formă pe M este un set de funcţii $\{b_{ij}, \widetilde{b}_{ij}, \widehat{b}_{ij}, \ldots, \}$ definite pe domenii de hărţi locale, funcţii legate pe intersecţii de formule de tip (1.1.3). Similar putem defini p-formele cu $p = 1, 2, \ldots, n$ şi definind operaţiile de adunare, înmulţirea cu scalari şi înmulţirea exterioară local (prin reducere la $U \subset M$) obţinem algebra exterioară a formelor pe M notată $\Lambda(M) = \Lambda^0(M) \oplus \Lambda^1(M) \oplus \ldots \oplus \Lambda^m(M)$. O p-formă $\omega \in \Lambda^p(M)$ va fi cunoscută printr-o reprezentare locală a ei $\omega = \frac{1}{p!} \omega_{i_1 i_2 \ldots i_p} dx^i \wedge \ldots \wedge dx^{i_p}$, iar într-o altă hartă locală vom avea $\omega = \frac{1}{p!} \widetilde{\omega}_{j_1 \ldots j_p} d\widehat{x}^{j_1} \wedge \ldots \wedge d\widehat{x}^{j_p}$ cu

$$\omega_{i_1 \ldots i_p} = \widetilde{\omega}_{j_1 \ldots j_p} \frac{\partial \widetilde{x}^{j_1}}{\partial x^i} \frac{\partial \widetilde{x}^{j_2}}{\partial x^{i_2}} \cdots \frac{\partial \widetilde{x}^{j_p}}{\partial x^{i_p}}.$$

Operatorul de diferenţiere exterioară (diferenţala exterioară)

Operatorul de diferenţiere exterioară d este definit pe algebra $\Lambda(M)$, aplică o formă diferenţială de grad p într-o formă diferenţială de grad $q + 1$ şi are proprietăţile:

(i) Dacă forma ω se anulează pe $U \subset M$, atunci şi $d\omega$ se anulează pe U (d are caracter local).

(ii) d este $\mathbb{R}$-liniar:

$$d(\omega + \theta) = d\omega + d\theta$$

$$dk\omega = kd\omega, k \in \mathbb{R}.$$

(iii) Dacă ω este de grad p,

$$d(\omega \wedge \theta) = d\omega \wedge \theta + (-1)^p \omega \wedge d\theta.$$

(iv) $d \circ d = 0 \quad (d^2 = 0)$.

Există d**:** pentru $\omega = \frac{1}{p!}\omega_{1_1 \dots i_p} dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_p}$ definim $d\omega = \frac{1}{p!} d\omega_{i_1 \dots i_p} \wedge dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_p}$.

Rezultă: $d\omega$ are grad $p+1$.

(i) dacă $\omega_{i_1 \dots i_p} = 0$, pe $U \subset M$ clar că $d\omega = 0$ pe U.

(ii) este evidentă.

(iii) se demonstrează prin inducţie după p.

$$p = 1 \quad \omega = \omega_i dx^i, \quad \theta = \frac{1}{k!}\theta_{j_1 \dots j_k} dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{j_k}.$$

Coeficienţii formei $\omega \wedge \theta$ sunt $\sum_{\sigma(i)\sigma(j_1) < \dots < \sigma(j_k)} \omega_{\sigma(i)} \theta_{\sigma(j_1) \dots \sigma(j_k)}$ sau $\omega \wedge \theta = \frac{1}{1!k!}\omega_i \theta_{j_1 \dots j_k} dx^i \wedge \dots \wedge dx^{j_k}$. Avem:

$$\begin{aligned}
d(\omega \wedge \theta) &= \frac{1}{k!} d(\omega_i \theta_{j_1 \dots j_k}) \wedge dx^i \wedge dx^{j_1} \wedge \dots \wedge dx^{j_k} = \\
&= \frac{1}{k!} d\omega_i \wedge dx^i \wedge dx^{j_1} \wedge \dots \wedge dx^{j_k} \theta_{j_1 \dots j_k} + \\
&\quad + \frac{1}{k!}\omega_i d\theta_{j_1 \dots j_k} \wedge dx^i \wedge dx^{j_1} \wedge \dots \wedge dx^{j_k} = \\
&= d\omega \wedge \theta - \omega \wedge d\theta = d\omega \wedge \theta + (-1)^1 \omega \wedge d\theta.
\end{aligned}$$

Acelaşi calcul cu grad $\omega = p$. Apar p schimbări de ordine adică $(-1)^p$.

(iv) $d \circ d = d^2 = 0$ se demonstrează prin inducţie.

$$q = 0, \omega = f, df \text{ este 1-formă } df = \frac{\partial f}{\partial x^i} dx^i$$

$$q = 1, d(df) = d\left(\frac{\partial f}{\partial x^i}\right) \wedge dx^i = \frac{\partial^2 f}{\partial x^j \partial x^i} dx^j \wedge dx^i =$$

$$\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^j \partial x^i} - \frac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^j}\right) dx^j \wedge dx^i = 0$$

pentru că derivatele de ordin 2 comută.

Pentru p oarecare $d(d\omega) = 0$ conform definiţei formei $d\omega$, proprietăţii (iii) şi condiţiei $d^2 = 0$ pentru $q = 1$ i.e. $d(dx^i) = 0$, $dd\omega_{i_1 \ldots \omega_p} = 0$.

Operatorul d cu proprietăţile de msi sus este unic în sensul că dacă d' este un alt operator cu proprietăţile de mai sus care coincide cu d pe 0-forme, din cele patru proprietăţi rezultă că el coincide cu d. În adevăr, se obţine pentru $d'\omega$ aceeaşi expresie ca pentru $d\omega$.

Revenim la R^3:

- orice funcţie scalară $f(x, y, z)$ este o 0-formă;

- $df = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy + \frac{\partial f}{\partial z}dz$ este o 1-formă numită şi gradientul lui f.

- pentru a 1-formă $\omega = Pdx + Qdy + Rdz$, $\alpha = d\omega$ este a 2-formă numită şi *rotor*:

$$\begin{aligned} d\omega &= (P_x dx + P_y dy + P_z dz) \wedge dx + (Q_x dx + Q_y dy + Q_z dz) \wedge dy \\ &\quad + (R_z dx + R_y dy + R_z dz) \wedge dz = \\ &= (Q_x - P_y) dx \wedge dy + (R_y - Q_z) dy \wedge dz + (P_z - R_x) dz \wedge dx. \end{aligned}$$

Pentru orice 2-formă α, $\alpha = Adx \wedge dy + Bdy \wedge dz + Cdz \wedge dx$, $\beta = d\alpha$ este a 3-formă numită şi divergenţă:

$$\begin{aligned} \beta &= \frac{\partial A}{\partial z} dz \wedge dx \wedge dy + \frac{\partial B}{\partial x} dx \wedge dy \wedge dz + \frac{\partial C}{\partial y} dy \wedge dz \wedge dx \\ &= \left(\frac{\partial A}{\partial z} + \frac{\partial B}{\partial x} + \frac{\partial C}{\partial y} \right) dx \wedge dy \wedge dz. \end{aligned}$$

Observaţia 1.1.2. *Pentru a obţine o formă mai simetrică a divergenţei trebuie luat* $\alpha = Ady \wedge dz + Bdz \wedge dx + Cdx \wedge dy$ *şi atunci* $\beta = \left(\frac{\partial A}{\partial x} + \frac{\partial B}{\partial y} + \frac{\partial C}{\partial z} \right) dx \wedge dy \wedge dz.$

Din $d^2 = 0$ rezultă:

$$\mathrm{rot}(\mathrm{grad}\, f) \equiv 0$$

$$\mathrm{div}\,(\mathrm{rot}\, \omega) \equiv 0.$$

Alternativ aceste noţiuni se pot introduce astfel:

Considerăm operatorul Hamilton $\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right)$ ca operator "vectorial". Si atunci definim:

$\operatorname{grad} f = \nabla f = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}\right)$; ca un câmp vectorial pe R^3.

Pentru un vector $X = (P, Q, R)$ pe R^3 definim:

$$\operatorname{div} X = \nabla \cdot X = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \text{ (produs scalar)}$$

$$\operatorname{rot} X = \nabla \times X = (R_y - Q_z, P_z - R_x, Q_x - P_y). \text{ (produs vectorial)}$$

Se verifică prin calcul direct

$$\operatorname{div}(\operatorname{rot} X) = 0$$

$$\operatorname{rot}(\operatorname{grad} f) \equiv 0.$$

Teorema lui Stokes: $\int_{\partial C} \omega = \int_C d\omega$ generală, pentru n-dimensiuni, conţine pe lângă teorema lui Green şi celelalte teoreme din calculul integral.

În $\mathbb{R}^2$: C o regiune plan şi ∂C frontiera ei.

ω o 1-formă: teorema lui Stokes se reduce la teorema lui Green.

În $\mathbb{R}^3$:

(i) $\int_{\partial S} \omega = \int_S d\omega$ cu S suprafaţă.

Vectorial:

$$\int_{\partial S = C} Pdx + Qdy + Rdz = \int_S (R_y - Q_z)dydz$$
$$+(P_z - R_x)dzdx + (Q_x - P_y)dxdy.$$

(se numeşte formula lui Stokes în [MN])

i) Fie K un corp în $\mathbb{R}^3$ şi S suprafaţa frontieră.

$$\int_S FdS = \int_K \operatorname{rot} FdK$$

unde dS este element de supafaţă şi dK este element de volum (formula lui Gauss-Ostrogradski în [MN]). Echivalent,

$$\int_S Pdydz + Qdzdx + Rdxdy = \iiint_K \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right) dxdydz.$$

Dacă introducem $\overrightarrow{n}$ normal la S şi $\overrightarrow{V} = (P, Q, R)$ se poate arăta că $\iiint_K \operatorname{div} \overrightarrow{V} dxdydz = \iint_S \overrightarrow{V} \cdot \overrightarrow{n} dS$.

Observaţia 1.1.3. *Formula lui Stokes conţine formulele de legătură între integrale curbilinii, de suprafaţă şi de volum studiate în cursurile de calcul integral.*

1.2. Bazele teoriei Hodge-de Rham

Fie M o varietate diferenţială, $\Lambda(M)$ algebra ei exterioară şi d operatorul de diferenţiere exterioară.

Definiţia 1.2.1. *O formă β se numeşte închisă dacă $d\beta = 0$. Forma β se numeşte exactă dacă există α încât $\beta = d\alpha$.*

Propoziţia 1.2.1. *Orice formă exactă este închisă.*

Demonstraţie. $\beta = d\alpha \Rightarrow d\beta = d^2\alpha = 0$ $(d^2 = 0)$!

Reciproca este numai *local* adevărată şi este cunoscută ca *Lema lui Poincaré*. Dată o p-formă închisă $\alpha \in \Lambda^p(U)$ cu $U \subset M$, orice punct $m \in U$ admite o vecinătate pe care există o $(p-1)$-formă $\beta \in \Lambda^{p-1}(U)$ astfel că $d\beta = \alpha|_U$. □

Există o versiune globală a acestei leme dar cu o ipoteză suplimentară:

Orice formă închisă pe o varietate netedă *contractibilă* este exactă. (M este contractibilă dacă aplicaţia $id : M \to M$ este omotopă cu o aplicaţie constantă $c : M \to M, x \to x_0$ fixat în M).

Lema lui Poincaré generalizează şi unifică două rezultate de calcul vectorial:

- Dacă $\operatorname{rot} X = 0$, atunci local $X = \operatorname{grad} f$.

- Dacă div$X = 0$, atunci local $X = \operatorname{rot} Y$.

În $\mathbb{R}^3$ avem submulţimi 1-dim (curbele), cu frontiera din doua puncte sau vidă, 2-dim (suprafeţe) cu frontiera o curbă sau vidă (ex. sfera) şi 3-dim (corpuri) cu frontiera suprafeţe. Dacă pe acestea se introduce şi o orientare se vor numi p-domenii sau p-lanţ. Similar într-o varietate n-dim. vom avea p-lanţuri cu $p = 1, \ldots, n$.

Un p-lanţ $C \in C_p(M)$ se va numi *ciclu* dacă frontiera $\partial C = 0$ adică este vidă. Un lanţ C se va numi *frontieră* dacă $C = \partial B$ cu $B \in C_p(M)$. Evident că $\partial(\partial C) = 0$ i.e. $\partial^2 = 0$. Aşadar, ∂ este similar cu d şi se numeşte operator frontieră.

Prin dualitate p-formele se mai numesc colanţuri, iar o formă ω închisă se va numi cociclu. O formă exactă se va numi şi cofrontieră.

Dualitatea p-forme şi p-lanţuri este mai precisă şi este dată de o aplicaţie

$$\begin{aligned}
\Lambda^p(M) \times C_p(M) &\rightarrow \mathbb{R} \\
(\omega, C) &\rightarrow \int_C \omega := \langle C, \omega \rangle \text{ (produs scalar)}
\end{aligned}$$

Exemplul 1.2.1.

$$\begin{array}{llll}
p = 1, & \omega = a_i dx^i & \langle C, \omega \rangle = \displaystyle\int_C dx^1 + a_2 dx^2 + \ldots + a_n dx^n \\
p = 2 & \omega = a_{ij} dx^i \wedge dx^j & \\
& C = S - \text{suprafaţă} & \langle C, \omega \rangle = \displaystyle\iint_S a_{11} dx^1 \wedge dx^2 + \ldots + \\
p = 3 & \omega = adxdydz & \\
& C = K\text{corp} & \langle C, \omega \rangle = \displaystyle\iiint_K adxdydx.
\end{array}$$

Teorema lui Stokes: $\int_{\partial C} \omega = \int_C d\omega$ revine la a scrie $\langle \partial C, \omega \rangle = \langle C, d\omega \rangle$ (d cu ∂ sunt autoadjuncţi în raport cu $\langle , \rangle$).

Avem $\langle \partial^2 C, \omega \rangle = \langle \partial C, d\omega \rangle = \langle C, d^2\omega \rangle = 0$, $\forall \omega$ şi deci $\partial^2 C = 0$ i.e. operatorul ∂ are proprietatea $\partial^2 = 0$.

Pentru $\mathbb{R}^3$ avem următorul *complex de colanţuri*

$$0 \longrightarrow \Lambda^0(\mathbb{R}^3) \xrightarrow[grad]{d} \Omega^1(\mathbb{R}^3) \xrightarrow[\text{rot}]{d} \Omega^2(\mathbb{R}^3) \xrightarrow[div]{d} \Omega^3(\mathbb{R}^2) \longrightarrow 0$$

Din $d^2 = 0$ rezultă că $Im\, d \subseteq \ker d$.

După Lema lui Poincaré aveam egalitate numai local pe $U \subset M$ caz în care şirul respectiv este local exact. Dual avem un *complex de lanţuri*

$$0 \longleftarrow C_0(\mathbb{R}^3) \xleftarrow[\partial]{} C_1(\mathbb{R}^3) \xleftarrow[\partial]{} C_2(\mathbb{R}^3) \xleftarrow[\partial]{} C_3(\mathbb{R}^3) \longleftarrow 0$$

În general pe o varietate M cu n dimensiuni avem *complexul de colanţuri:*

$$0 \to \Lambda^0(M) \xrightarrow{d} \Lambda^1(M) \xrightarrow{d} \dots \xrightarrow{d} \Lambda^p(M) \xrightarrow{d} \Lambda^{p+1}(M) \to \dots \to \Lambda^n(M) \to 0.$$

În $\Lambda^p(M)$ avem două substaţii vectoriale: $\ker := Z^p(M), Imd := B^p(M)$ cu proprietatea că $B^p(M) \subset Z^p(M)$. Spaţiul factor $H^p_{DR}(M) = Z^p(M)/B^p(M)$ se numeşte grup de coomologie de Rham pentru varietatea M. Se numeşte grup pentru că se are în vedere structura grupală aditivă dar prin construcţie este un $\mathbb{R}$-spaţiu liniar.

Definiţia 1.2.2. *Numerele* $b_p = \dim H^p_{DR}$ *se numesc numerele Betti ale varietăţii* M*.*

Observaţia 1.2.1. 1) $H^0_{DR}(M)$ este format din mulţimea funcţiilor $f \in M$ cu $df = 0$, deci $f = \text{const.}$ (M conexă) şi deci $H^0_{DR}(M) \simeq \mathbb{R}$ şi $b_0(M) = 1$.

2) Numerele Betti pot fi diferite de zero numai pentru $p = 0, 1, 2, \dots, n = \dim M$.

([Gh], p. 258, ex. de calcul pentru S_1).

3) $\alpha, \beta \in \Lambda^p(M)$ sunt coomologe sau aparţin la aceeaşi clasă de coomologie $[\alpha]$ dacă $\alpha - \beta$ este exactă i.e. $\exists\gamma$ încât $\alpha = \beta + d\gamma$.

Dual, folosind complexul de lanţuri:

$$0 \longleftarrow C^0(M) \longleftarrow C^1(M) \longleftarrow \dots \longleftarrow C^p(M) \longleftarrow \dots \longleftarrow C^n(M) \longleftarrow 0$$

definim $H_p(M) : Z_p(M)/B_p(M) = \ker(\partial : C_p(M) \to C_{p-1}(M))/Im(\partial : C_{p+1}(M) \to C_p(M))$ care se numesc grupuri de omologie.

$$\dim H_p(M) = b_p(M) \text{ (Teorema lui de Rham)}$$

Definiţia 1.2.3. *Se numeşte caracteristica Euler-Poincare*

$$\chi(M) = \sum_{p=0}^{n} (-1)^p b_p = b_0 - b_1 + b_2 - b_3 \ldots$$

Propoziţia 1.2.2. *Dacă varietatea conexă M este contractibilă, atunci $H^p_{DR}(M) = 0$, $\forall p = 1, 2, \ldots, n$ şi deci $\chi(M) = b_0 = 1$.*

Demonstraţie. După Lema lui Poincaré avem $Z^p(M) = B^p(M)$ şi deci $H^p_{DR}(M) = 0$, $p = 1, 2, \ldots, n$. □

1.3. Operatorul Hodge $*$

Definiţia 1.3.1. Operatorul Hodge $*$ este o aplicaţie $* : \Lambda^p(M) \to \Lambda^{n-p}(M)$ cu proprietăţile

(i) $\alpha \wedge *\beta = \beta \wedge *\alpha = \langle \alpha, \beta \rangle \mu$

(ii) $* * \alpha = (-1)^{p(n-p)}\alpha$

(iii) $*(c_1\alpha + c_2\beta) = c_1 * \alpha + c_2 * \beta$;

(iv) $\alpha \wedge *\alpha = 0 \Rightarrow \alpha = 0$.

În (i) apar notaţii care necesită explicaţii suplimentare. De fapt operatorul $*$ se poate defini numai pe varietăţi Riemanniene orientate.

O varietate Riemanniană este o varietate pentru care spaţiul tangent T_xM, $x \in M$ este dotat cu un produs scalar $g(x)$ care depinde diferenţiabil de $x \in M$. Fie U o hartă locală centrată în x cu funcţii coordonate (x^i), $x^i : U \to \mathbb{R}$, $x \to (x^1, \ldots, x^i, \ldots, x^n) \to x^i \in \mathbb{R}$. Atunci

$(\frac{\partial}{\partial x^i}|_x)$ constituie o bază în T_xM şi notăm $g_{ij}(x) = g(x)(\frac{\partial}{\partial x^i}|_x, \frac{\partial}{\partial x^j}|_x)$. Cu x variabil în U obţinem funcţiile $x \to g_{ij}(x) = g(x)(\frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j})$ care se numesc componentele metricii Riemanniene $g : x \to g(x)$ pe U. Dependenţa diferenţiabilă de x a funcţiei $g : x \to g(x)$, $x \in M$ este echivalentă prin definiţie cu diferenţiabilitatea funcţiilor (componentelor) $g_{(ij)}(x)$.

Pentru că $g(x)$ este un produs scalar, aceste componente au proprietăţile

1) $g_{ij}(x) = g_{ij}(x), \forall x \in U, \forall U \subset M$(simetria);

2) $g_{ij}\xi^i\xi^j > 0, \forall(\xi^i) \in \mathbb{R}^n(\xi^i) \neq 0$ (pozitivă definire).

Fie $\widetilde{U}$ o altă hartă locală care conţine x adică $x \in U \cap \widetilde{U} \neq \emptyset$ şi $\widetilde{g}_{ij}(x)$ componentele metricii Riemanniene $g : x \to g(x)$, $x \in M$ pe $\widetilde{U}$.

Relaţiile $\frac{\partial}{\partial x^i} = \frac{\partial \widetilde{x}^j}{\partial x^i}\frac{\partial}{\partial \widetilde{x}^j}$, unde $\widetilde{x}^j = x^j(x^1, \ldots, x^n)$, $\det(\frac{\partial \widetilde{x}^j}{\partial x^i}) \neq 0$ sunt schimbările de coordonate, implică

$$g_{ij}(x) = \frac{\partial \widetilde{x}^k}{\partial x^i}\frac{\partial \widetilde{x}^h}{\partial x^j}\widetilde{g}_{kh}(\widetilde{x}(x)). \tag{1.3.1}$$

Relaţiile (1.1.3) permit recuperarea metricii Riemanniene $g : x \to g(x) : T_xM \times T_xM \to \mathbb{R}$ (produs scalar) din componentele sale locale.

Mai exact, o metrică Riemanniană se poate defini ca seturi de funcţii reale (g_{ij}) cu proprietăţile 1) şi 2) definite pe domenii de hărţi locale şi care pe intersecţii de asemenea domenii sunt legate prin 3).

Observăm că din 2) rezultă $\det(g_{ij}) \neq 0$ (condiţie de nedegenerare).

Condiţia 2) poate fi slăbită cerând ca forma pătratică $g_{ij}\xi^i\xi^j$ să rămână nedegenretă ($\det(g_{ij}) \neq 0$) dar să nu fie pozitiv definită (echivalent negativ definită) ci să fie *semidefinită* adică prin aducere la forma canonică să aibă un număr de pătrate cu semnul (+) şi un număr de pătrate cu semnul (-). Pentru $n = 4$ putem avea situaţiile esenţiale $(- + ++)$ sau $(- - ++)$ ambele de interes pentru fizica teoretică.

În această ipoteză mai slabă spunem că avem o metrică semi-Riemanniană sau pseudo-Riemanniană. În cazul signaturii $(-, ++\ldots+)$ se vorbeşte de metrică Lorentz.

Perechea (M, g) cu g metrică Riemanniană sau semi-Riemanniană se numeşte *varietate Riemanniană* sau *semi-Riemanniană*. În particular, putem vorbi de varietate Lorentz.

În general, o variatate se numeşte orientabilă dacă admite un atlas pentru care matricile Jacobiene ale schimbărilor de coordonate $\widetilde{x}^i = \widetilde{x}^i(x^j)$ au determinant pozitiv adică $J = \det(\frac{\partial \widetilde{x}^i}{\partial x^j}) > 0$. Pentru o n-formă $a(x)dx^1 \wedge \ldots \wedge dx^n = \widetilde{a}(\widetilde{x}(x)d\widetilde{x}^1 \wedge \ldots \wedge d\widetilde{x}^n)$, formula generală de schimbare a componentelor ne conduce la $a(x) = \widetilde{a}(x)J(x)$. Dacă în egalitatea (1.1.3) trecem la egalitatea determinaţilor obţinem:

$$\det(g_{ij}(x)) = J^2(x)\det(\widetilde{g}_{ij}(\widetilde{x}(x)))$$

şi observăm că dacă M este varietate orientabilă putem deduce că

$$\sqrt{\det(g_{ij}(x))} = J(x)\sqrt{\det(\widetilde{g}_{ij}(\widetilde{x}(x)))}.$$

Aşadar $\sqrt{\det(g_{ij}(x))}$ este componentă de n-formă, cu alte cuvinte este bine definită n-forma

$$\mu = \sqrt{\det(g_{ij}(x))}dx^1 \wedge dx^2 \wedge \ldots \wedge dx^n)$$

numită şi formă volum pe (M, g) orientabilă. Avem astfel explicată notaţia μ din formula (i) de definire a produsului $*$. Uneori μ se notează prin dv.

În continuare considerăm M varietatea Riemanniană orientabilă. Metrica Riemanniană $g(g_{ij})$ defineşte produsul scalar a două câmpuri vectoriale $X = X^i \frac{\partial}{\partial x^i}$ şi $Y = Y^j \frac{\partial}{\partial x^j}$ prin $\langle X, Y \rangle = g_{ij}X^iY^j$. Fie (g^{jk}) inversa matricii g_{ij} adică $g_{ij}g^{jk} = \delta_i^k = 1$, dacă $i = k$ şi 0 în rest. Se verifică imediat că dacă $\alpha = \alpha_i dx^i$ şi $\beta = \beta_j dx^j$ prin formula $\langle \alpha, \beta \rangle = g^{ij}\alpha_i\beta_j$ se obţine un produs scalar în mulţimea $\Lambda^1(M)$.

Formula poate fi extinsă la p-forme:

$$\alpha = \frac{1}{p!}\alpha_{i_1 \ldots i_p} dx^{i_1} \wedge \ldots \wedge dx^{i_p},\ \beta = \frac{1}{p!}\beta_{j_1 \ldots j_p} dx^{i_1} \wedge \ldots dx^{j_p}$$

$$\langle \alpha, \beta \rangle = g^{i_1 j_1} g^{i_2 j_2} \ldots g^{i_p j_p} \alpha_{i_i \ldots i_p} \beta_{j_1 \ldots j_p}$$

(sumare după indicii $i_1 \dots i_p, j_1 \dots j_p$). Cu aceasta avem semnificaţia completă a condiţiei (i) din definiţia produsului Hodge $*$.

Pentru n-forma volum dv avem $*dv = f$ (funcţie, 0-formă). După (ii) avem şi $*f = dv$. Condiţia (i) scrisă pentru $\alpha = \beta = dv$ conduce la $dv \wedge *dv = \langle dv, dv\rangle dv$ sau $fdv = \langle dv, dv\rangle dv$ şi urmează $f \equiv 1$ deoarece $\langle dv, dv\rangle = 1$. Dacă M este compactă se defineşte volmul ei prin formula

$$\mathrm{vol}(M) = \int_M dv = \int_M *1.$$

Notăm şi următoarea consecinţă a formulei (i):

$$\omega \wedge *\omega = \|\omega\|^2 dv, \quad \|\omega\| = \sqrt{\langle \omega, \omega\rangle}.$$

În [GhO], p. 70, Vol. 2 se stabilesc expresii locale pentru $*\omega$:

$$(*\omega)_{j_1 \dots j_{n-p}} = \frac{1}{\sqrt{\det(g_{ij})}} \sum_{\sigma(1)\dots\sigma(p)} \varepsilon_\sigma \omega_{\sigma(1)\dots\sigma(p)} g_{j_1\sigma(p+1)\dots} g_{j_{n-p}\sigma(n)}$$

cu sumare după toate permutările σ ale mulţimii $(1, \dots, p, \dots, n)$ şi $\varepsilon_\sigma = \pm 1$ după cum σ este permutare pară sau impară.

Aplicaţie. Fie $M \equiv R$ cu $g_{ij} = \delta_{ij}$. Rezultă $\det(g_{ij}) = 1$. Fie (x, y, z) coordonatele în $\mathbb{R}^3$. Rezultă că $*dx$ este o 2-formă care se poate scrie ca o combinaţie liniară de tipul $adx \wedge dy + bdy \wedge dx + cdz \wedge dx$. Se obţine: $*dx = dy \wedge dz$, $*dy = dz \wedge dx$, $*dz = dx \wedge dy$ (A se vedea M. Spivak, Vol. 4).

Produs scalar Hodge

Fie două p-forme α şi β cu suport compact (sau M compactă). Definim aplicaţia $\langle , \rangle : \Lambda^p(M) \times \Lambda^p(M) \to \mathbb{R}$,

$$(\alpha, \beta) \to \langle \alpha, \beta\rangle = \int_M \alpha \wedge *\beta (= \int_M \langle \alpha, \beta\rangle dv).$$

Propoziţia 1.3.1. *Aplicaţia $\langle , \rangle$ este un produs scalar i.e. este biliniară simetrică şi pozitiv definită.*

Demonstraţia rezultă imediat din proprietăţile i)-iii) ale operatorului $*$. De exemplu, $\langle\alpha,\alpha\rangle = \int_M \alpha\wedge *\alpha = \int_M \|\alpha\|^2 dv \geq 0$ şi avem egalitate cu zero numai dacă $\|\alpha\| = 0 \Rightarrow \alpha = 0$.

Pentru orice p-forma α definim funcţionala normă prin

$$\|\alpha\| = \int_M \langle\alpha,\alpha\rangle * 1 = \int_M \alpha\wedge *\alpha.$$

Observaţia 1.3.1. Se poate arăta că ecuaţia Euler-Lagrange pentru această funcţională revin la $\Delta\alpha = 0$, unde Δ este Laplacianul Hodge ce va fi definit mai jos.

Operatorul de codiferenţiere

Pe $\Lambda^p(M)$ avem produsul scalar $\langle,\rangle$ precum şi operatorul de diferenţiere exterioară $d : \Lambda^p(M) \to \Lambda^{p+1}(M)$.

Definiţia 1.3.2. Se numeşte *operator de codiferenţiere exterioară* o aplicaţie liniară $\delta : \Lambda^p(M) \to \Lambda^{p-1}(M)$ definită prin: $\delta = (-1)^{n(p+1)+1} * d*$ sau echivalent $d = (-1)^{np} * \delta *$.

Observaţia 1.3.2. 1) Dacă n este par (în Relativitate), atunci $\delta = - * d*$ sau $d = - * \delta *$.

2) Dacă f este 0-formă, atunci $*f$ este o n-formă şi $d(*f) = 0$, deci $\delta f = 0$.

Propoziţia 1.3.2. *Operatorul de codiferenţiere δ are proprietăţile:*

i) $d\circ\delta = \delta^2 = 0$ *(amintim că şi $d^2 = 0$);*

ii) $\delta * = (-1)^{p+1} * d$, $*\delta = (-1)^p * d$;

iii) $d\delta * = *\delta d$; $*d\delta = \delta d *$.

Demonstraţie. Toate rezultă prin calcul direct folosind proprietăţile lui d şi $*$. □

Laplacianul Hodge este operatorul $\Delta : \Lambda^p(M) \to \Lambda^p(M)$ definit prin $\Delta = d\delta + \delta d = (d+\delta)^2$.

Propoziţia 1.3.3. Δ *are proprietăţile:*

i) $\delta\Delta = \Delta\delta = \delta d\delta$;

ii) $d\Delta = \Delta d = d\delta d$;

iii) $*\Delta = \Delta *$.

Definiţia 1.3.3. 1) Dacă $\delta\omega = 0$, ω se numeşte coînchisă şi dacă $\omega = \delta\theta$ ea se numeşte coexactă.

2) O p-formă ω se numeşte *armonică* dacă $\Delta\omega = 0$.

Propoziţia 1.3.4. $\Delta\alpha = 0 \Leftrightarrow d\alpha = 0$ *şi* $\delta\alpha = 0$.

Demonstraţie. Implicaţia $\Leftarrow$ este evidentă. Invers, $\Delta\alpha = 0 \Rightarrow \langle\alpha, \Delta\alpha\rangle = 0$. Dar $\langle\alpha, \Delta\alpha\rangle = \langle\alpha, d\delta\alpha\rangle + \langle\alpha, \delta d\alpha\rangle = \langle\delta\alpha, \delta\alpha\rangle + \langle d\alpha, d\alpha\rangle$ şi egalitatea cu zero implică separat $\langle\delta\alpha, \delta\alpha\rangle = 0$, $\langle d\alpha, d\alpha\rangle = 0$ adică $d\alpha = 0$ şi $\delta\alpha = 0$. □

În demonstraţie am folosit

Propoziţia 1.3.5. *Fie* $\omega \in \Lambda^p(M)$ *şi* $\theta \in \Lambda^{p+1}(M)$. *Atunci*

$$\langle d\omega, \theta\rangle = \langle\omega, \delta\theta\rangle$$

unde $\langle , \rangle$ *este produsul scalar Hodge.*

Demonstraţie. $d(\omega \wedge *\theta) = d\omega \wedge *\theta + (-1)^p\omega \wedge d * \theta$.

Definiţia lui $\delta = (-1)^{n(p+1)+1} * d*$, în baza proprietăţii ii) a lui $* : *^2 = (-1)^{p(n-p)} \Leftrightarrow *^{-1}(-1)^{p(n-p)} = * \Leftrightarrow *^{-1} = (-1)^{p(n-1)}*$ ($p(n-p)$ şi $p(n-1)$ au aceeaşi paritate) se rescrie: $\delta = (-1)^{n(p+1)+1}(-1)^{p(n-1)} *^{-1} d* = (-1)^p *^{-1} d *$.

Reţinem deci forma echivalentă: $\delta = (-1)^p *^{-1} d *$. Rezultă $d * \theta = (-1)^{p+1} * \delta\theta$ şi înlocuind mai sus:

$$d(\omega \wedge *\theta) = d\omega \wedge *\theta - \omega \wedge *\delta\theta.$$

Conform definiţiei:

$$\langle d\omega, \theta\rangle = \int_M d\omega\wedge*\theta = \int_M d(\omega\wedge*\theta) + \int_M \omega\wedge*\delta\theta = \int_M \omega\wedge*\delta\theta = \langle\omega, \delta\theta\rangle.$$

Am folosit teorema lui Stokes $\int_M d(\omega \wedge *\theta) = \int_{\partial M} \omega \wedge *\theta = 0$ pentru că M este prin ipoteză cu frontieră vidă. $\square$

Această propoziţie ne arată că δ este adjunctul lui d în raport cu $\langle , \rangle$. Cu substituţii convenabile rezultă şi $\langle \delta\alpha, \beta \rangle = \langle \alpha, d\beta \rangle$. Arătăm acum că Δ este autoadjunct în raport cu produsul scalar Hodge $\langle , \rangle$.

Propoziţia 1.3.6. *Are loc egalitatea* $\langle \Delta\omega, \theta \rangle = \langle \omega, \Delta\theta \rangle$ *pentru orice* $\omega, \theta \in \Lambda^p(M)$.

Demonstraţie.

$$\begin{aligned}
\langle \Delta\omega, \theta \rangle &= \langle d\delta\omega + \delta d\omega, \theta \rangle = \langle d\delta\omega, \theta \rangle + \langle \delta d\omega, \theta \rangle \\
&= \langle \delta\omega, \delta\theta \rangle + \langle d\omega, d\theta \rangle = \langle \omega, \delta\theta \rangle + \langle \omega, \delta d\theta \rangle \\
&= \langle \omega, (\delta + \delta d)\theta \rangle = \langle \omega, \Delta\theta \rangle.
\end{aligned}$$

$\square$

Observaţia 1.3.3. *Dacă* $\omega = f$ *este 0-formă, avem*

$$\Delta f = d\delta f + \delta df = \delta df = \delta(\frac{\partial f}{\partial x^i} dx^i).$$

În [GhO, Vol. 2, p. 76] se arată că pentru o p-formă ω coeficienţii lui $\delta\omega$ sunt daţi de formula:

$$(\delta\omega)_{h_1 \dots h_{p-1}} = -g^{ij} (\nabla_i \omega)_{j h_1 \dots h_{p-1}}$$

unde ∇_i este derivarea covariantă în raport cu $\frac{\partial}{\partial x^i}$. Pentru o 1-formă $\alpha = \alpha_j dx^j$, avem:

$$(\nabla_X \alpha)(Y) = X\alpha(Y) - \alpha(\nabla_X Y)$$

şi deci $(\nabla_i \alpha)_j = \partial_i \alpha_j - \Gamma^k_{ij} \alpha_k$. Rezultă că $\delta\alpha$ este funcţia $-g^{ij}(\partial_i \alpha_j - \Gamma^k_{ij} \alpha_k)$. În particular, pentru $\omega = \frac{\partial f}{\partial x^i} dx^i$ obţinem

$$\delta df = -g^{ij} \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^j} - \Gamma^k_{ij} \frac{\partial f}{\partial x^k} \right).$$

Aşadar pentru funcţii $f : M \to \mathbb{R}$, Laplacianul este

$$\Delta f = -g^{ij}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^j} - \Gamma_{ij}^k \frac{\partial f}{\partial x^k}\right).$$

Această expresie constituie generalizarea Laplacianului pentru funcţii definite pe varietatea Riemanniană orientată (M, g). În unele manuale se omite semnul $(-)$. Dacă $(M, g) \equiv (R^n, \langle , \rangle)$, atunci $g^{ij} = \delta^{ij}$, $\pi_{ij}^k \equiv 0$ şi obţinem

$$\Delta f = -\sum_i \frac{\partial^2 f}{\partial x^{i^2}} = -\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^{12}} + \frac{\partial^2 f}{\partial x^{22}} + \ldots + \frac{\partial^2 f}{\partial x^{nn}}\right).$$

Pentru $n = 3$, $-\Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$.

Observaţia 1.3.4. În $\mathbb{R}^3$ dacă identificăm:

funcţiile scalare cu o-forme

câmpurile vectoriale cu 1-forme

fluxurile i.e. produsele vectoriale de 2 vectori cu 2-forme

densităţile i.e. produsele mixte cu trei forme

atunci

grad $\to d$ pe o-forme

div $\to \delta$ pe 1-forme

rot $\to *d$ pe 1-forme

div grad $\to \Delta$: pe o-forme

$\mathrm{rot} \circ \mathrm{rot} - \mathrm{grad}\,\mathrm{div} \to \Delta$ pe 1-forme.

Într-adevăr: pentru f $\operatorname{grad} f = (\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z})$ care se identifică cu 1-forma $df = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy + \frac{df}{dz}dz$.

Pentru $\omega = Pdx + Qdy + Rdz$, $\operatorname{div}\omega = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}$, iar formula generală pentru $d\omega$, particularizată la R^3 cu $\langle,\rangle$ dat de δ_{ij} conduce la

$$-\delta^{ij}\partial_i\alpha_j = -\left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}\right) = -\operatorname{div}\omega$$

(apare o diferenţă de semn care poate fi anihilată considerând $(-\delta_{ij})$. Pentru ω identificat cu (P, Q, R) avem

$$\operatorname{rot}\omega = \nabla \times (P, Q, R) = \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial R}{\partial y}, \frac{\partial R}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial z}, \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)$$

care se identifică cu 1-forma

$$\left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial R}{\partial y}\right)dx + \left(\frac{\partial R}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial z}\right)dy + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)dz.$$

Trebuie arătat că $*d\omega$ este exact această 1-formă. Pentru o funcţie f avem $\operatorname{grad} f = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}\right)$ şi $\operatorname{div}\operatorname{grad} f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \Delta f$.

Operatorii d şi δ sunt adjuncţi sau duali în sensul că dacă α este o p-formă şi β o $p+1$-formă avem:

$$(d\alpha, \beta) = (\alpha, \delta\beta) \text{ şi } (\delta\alpha, \beta) = (\alpha, d\beta).$$

Într-adevăr, relaţia $\int_M d(\alpha \wedge *\beta) = 0$ este echivalentă cu

$$\int_M d\alpha \wedge *\beta + \int_M \alpha \wedge (-1)^p d * \beta = 0$$

. A doua integrală din această sumă se scrie în forma

$$\int_M \alpha \wedge (-1)^p * (*d * \beta) = -\int_M \alpha \wedge *\delta\beta$$

şi deci suma devine $(d\alpha, \beta) - (\alpha, \delta\beta) = 0$.

Ca un corolar se obţine că Laplacianul Hodge $D = d\delta + \delta d$ este autoadjunct adică

$$(\Delta\alpha, \beta) = (\alpha, \Delta\beta).$$

Într-adevăr, fiecare membru al acestei egalităţi se rescrie în forma $(d\alpha, d\beta) + (\delta\alpha, \delta\beta)$.

Cum $(\Delta\alpha, \alpha) = (d\alpha, d\alpha) + (d\alpha, \delta\alpha) \geq 0$ cu egalitate numai dacă $\Delta\alpha = 0$, operatorul Δ este pozitiv definit (eliptic).

Teorema de descompunere a lui Hodge. Fie M o varietate Riemanniană netedă, compactă, orientabilă. Penru orice p-formă pe M $(p \leq n = \dim M)$ $\omega \in \Lambda^p(M)$ există şi sunt unice formele $\alpha \in \Lambda^{p-1}(M)$, $\beta \in \Lambda^{p+1}(M)$ şi o formă armonică $\gamma \in \Lambda^p(M)$ (i.e. $\Delta\gamma = 0$) astfel încât

$$\omega = d\alpha + \delta\beta + \gamma$$

(orice formă se scrie ca suma dintre o formă exactă, una coexactă şi una armonică).

Observăm că $(d\alpha, \delta\beta) = (\alpha, \delta^2\beta) = 0$, adică formule δ_α şi δ_β sunt ortogonale.

Fizicienii spun că $d\alpha$ este componenta longitudinală, iar $d\beta$ este componenta transversală în această descompunere.

Pentru $p = 0$ rezultă că orice funcţie f pe M se scre în forma $f = \delta\beta + \gamma$ cu γ o funcţie armonică şi β o 1-formă. Pe baza formulei care dă δ (v. [GhO], vol. II, p76) obţinem $f = \gamma - g^{ij}\frac{\partial\beta_j}{\partial x^i}$, cu γ soluţie a ecuaţiei $g^{ij}(\frac{\partial^2\gamma}{\partial x^i \partial x^j} - \Gamma_{ij}^k \frac{\partial\gamma}{\partial x^k}) = 0$. Pentru $p = 1$ avem: $\omega = df + \delta\beta + \gamma$, unde f este o funcţie, β o 2-formă şi γ o 1-formă armonică.

Versiune vectorială: orice câmp vectorial se poate descompune într-o sumă de două câmpuri vectoriale, unul cu divergenţă zero şi celălalt cu rotor zero. Din $(\Delta\gamma, \gamma) = (d\gamma, d\gamma) + (\delta\gamma, \delta\gamma)$ rezultă că dacă g este armonică atunci $d\gamma = 0$ şi $d\gamma = 0$. Fie ω o formă închisă i.e. $d\omega = 0$. În descompunerea Hodge, $\delta\beta$ trebuie să fie zero. În adevăr, $d\omega = 0$ implică $d\delta\beta = 0$ şi $0 = (d\delta\beta, \beta) = (\delta\beta, \delta\beta)$ implică $\delta\beta = 0$.

Rezultă că $\omega = d\alpha + \gamma$ (descompunere Hodge scurtă). Aşadar ω şi γ diferă prin $d\alpha$ i.e. definesc aceiaşi clasă de coomologie $[\omega] \in H^p(M)$.

Lema 1.3.1. *Două forme armonice diferite nu pot fi coomoloage adică nu pot fi în aceeaşi clasă de coomologie.*

Într-adevăr, fie γ şi γ' armonice coomoloage diferite adică $\gamma' = \gamma + d\theta$. Din armonicitate rezultă $\delta\gamma = \delta\gamma' = 0$ şi deci $\delta d\theta = 0$, iar $o = (\delta d\theta, \theta) = (d\theta, d\theta)$ implică $d\theta = 0$, contradicţie.

Asadar orice clasă de coomologie conţine o formă armonică (după descompunerea scurtă Hodge) şi numai una. Altfel spus, dacă notăm prin $\mathcal{H}^p(M)$ mulţimea p-formelor armonice, aplicaţia $\gamma \to [\gamma], \mathcal{H}^p(M) \to H^p(M)$ care asociază fiecărei forme armonice clasa ei de coomologie, este un izomorfism de spaţii liniare.

Definim o aplicaţie $e : H^p(M) \times H^{n-p}(M) \to \mathbb{R}$ astfel: $([\alpha], [\beta]) \to e([\alpha], [\beta]) = \int_M \widetilde{\alpha} \wedge \widetilde{\beta}$, unde $\widetilde{\alpha}$ este p-forma arminică ce corespunde clasei $[\alpha]$ şi similar se defineşte $\widetilde{\beta}$.

Propoziţia 1.3.7. *Aplicaţia e este o formă biliniară nedegenerată.*

Demonstraţie. Condiţia de biliniaritate este imediată. Demonstrăm că este nedegenerată pe $H^p(M)$ astfel: fie $[\alpha] \neq 0$ şi $\widetilde{\alpha} \neq 0$. Rezultă că $\int_M \widetilde{\alpha} \wedge *\widetilde{\alpha} = \langle \widetilde{\alpha}, \widetilde{\alpha} \rangle > 0$. Notăm $\widetilde{\beta} = *\widetilde{\alpha}$ şi calculăm $\Delta\widetilde{\beta} = \Delta * \widetilde{\alpha} = *\Delta\widetilde{\alpha} = 0$. Deci $\widetilde{\beta}$ este armonică şi cum $\int_M \widetilde{\alpha} \wedge \widetilde{\beta} > 0$ avem că $e([\alpha], [\beta]) \neq 0$ (se demonstrează contrara condiţiei uzuale de nedegenerare).

Procedăm asemănător plecând cu $[\beta] \neq 0$ şi $\widetilde{\beta} \neq 0$ şi obţinem nedegenerarea pe $H^{n-p}(M)$.
Definim $e^\sharp : H^p(M) \to H^{n-p}(M)$ astfel:

$$[\alpha] \to \widetilde{\alpha} \to *\widetilde{\alpha} \to e^\sharp([\alpha]).$$

Definiţia este corectă pentru că am observat că $*\widetilde{\alpha}$ este armonică. Aplicaţia $e^\sharp$ este un izomorfism de spaţii liniare pe baza propoziţiei precedente.

Ca un corolar al acestui izomorfism avem următoarea proprietate a numerelor Betti: $b_p(M) = b_{n-p}(M)$ pentru orice $p^0 = 1, 2, \ldots, n$. De aici rezultă că în cazul dimensiunii impare, caracteristica Euler-Poincare $\chi(M) = 0$. În adevăr, $\chi(M)$ conţine $2k+2$ termeni cu semne alternând şi cu egalitatea $b_p(M) = b_{n-p}(M)$ ei se reduc doi câte doi

$$b_0 - b_1 + b_2 - b_3 + \ldots - b_{n-2} + b_{n-1} - b_n = 0.$$

$\square$

1.4. Aplicaţie în teoria electromagnetismului

În teoria electromagnetismului (pe scurt elm) întâlnim:

E - câmpul electirc,

H -câmpul magnetic

D -deplasarea electrică

B -inducţa magnetică.

În vid avem: $D = \varepsilon_0 E$, $H = \frac{1}{\mu_0} B$ unde ε_0 şi μ_0 sunt constante care satisfac: $\varepsilon_0 \mu_0 = 1/c^2$, cu c viteza luminii în vid.

Întâlnim de asemenea densitatea de curent J. Amintim că am notat în $\mathbb{R}^3$ prin ∇ operatorul vectorial $\nabla = (\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z})$ numit şi operatorul Hamilton.

Entităţile menţionate satisfac ecuaţiile Maxwell:

$$\nabla \cdot D = \rho \text{ (Legea lui Coulomb)} \tag{1.4.1}$$

$$\nabla \times H = J + \frac{\partial D}{\partial t} \text{ (Legea lui Ampere)} \tag{1.4.2}$$

$$\nabla \times E + \frac{\partial B}{\partial t} = 0 \text{ (Legea lui Faraday)} \tag{1.4.3}$$

$$\nabla \cdot B = 0 \text{ (absenţa polilor magnetici liberi).} \tag{1.4.4}$$

Acestea se pot rescrie astfel:

$$\begin{aligned}
&\operatorname{div} D = \rho,\\
&\operatorname{rot} H = J + \frac{\partial D}{\partial t},\\
&\operatorname{rot} E + \frac{\partial B}{\partial t} = 0,\\
&\operatorname{div} B = 0.
\end{aligned}$$

În plus, J satisface ecuaţia de continuitate:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot J = 0 \ \ (\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div} J = 0).$$

Observaţia 1.4.1. D, H, J, E *sunt câmpuri vectoriale care depind de* x, y, z *dar şi de* t *(timp).*

Din (1.4.4) rezultă că local $B = \operatorname{rot} A$ sau $B = \nabla \times A$, unde A este un vector numit vector potenţial. Rezultă că $\frac{\partial B}{\partial t} = \nabla \times \frac{\partial A}{\partial t}$ şi (1.4.3) devine

$$\nabla \times \left(E + \frac{\partial A}{\partial t}\right) = 0 \Leftrightarrow \operatorname{rot}\left(E + \frac{\partial A}{\partial t}\right) = 0. \tag{1.4.5}$$

Din nou local (consecinţa lemei lui Poincaré), $E + \frac{\partial A}{\partial t}$ este un gradient adică există o funcţie ϕ numită potenţial scalar încât

$$E + \frac{\partial A}{\partial t} = -\nabla \phi \Leftrightarrow E = -\nabla \phi - \frac{\partial A}{\partial t}. \tag{1.4.6}$$

(Semnul " $-$ " se alege convenţional). Aşadar B şi E sunt complet determinaţi de A şi ϕ. Ecuaţiile (1.4.1) şi (1.4.2) conduc respectiv la ecuaţiile

$$\nabla^2 \phi + \frac{\partial}{\partial t}(\nabla \cdot A) = -\rho/\varepsilon_0 \tag{1.4.7}$$

$$\nabla^2 \cdot A - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 A}{\partial^2 t} - \nabla(\nabla \cdot A + \frac{1}{c^2}\frac{\partial \phi}{\partial t}) = -\mu_0 J. \tag{1.4.8}$$

Având în vedere că $\nabla \times (\nabla\Lambda) = 0$ pentru orice funcţie Λ, rezultă că $B = \nabla \times A$ rămâne neschimbat la transformarea $A \to A' = A + \nabla\Lambda$. La fel, E rămâne neschimbat la transformarea

$$\phi \to \phi' = \phi - \frac{\partial \Lambda}{\partial t}.$$

Putem astfel alege un set $(A, \emptyset)$ care să satisfacă *condiţia Lorentz*:

$$\nabla \cdot A + \frac{1}{c^2}\frac{\partial \phi}{\partial t} = 0.$$

Atunci ecuaţiile (1.4.7) şi (1.4.8) capătă formă de ecuaţii de undă, una pentru ϕ si una pentru A:

$$\nabla^2 \phi - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \phi}{\partial^2 t} = -\rho/\varepsilon_0, \tag{1.4.9}$$

$$\nabla^2 A - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 A}{\partial t^2} = -\mu J. \tag{1.4.10}$$

Deci electromagnetismul are asemănări cu undele.

În ecuaţiile precedente t (timpul) are un rol privilegiat, separat de x, y, z. Dar t poate fi considerat şi ca a patra dimensiune si forma cu variabilele x, y, z un spaţiu 4-dimensional.

Din raţiuni fizice şi calculatorii se ia $x^0 = ct$, $x^1 = x$, $x^2 = y$, $x^3 = z$ şi se consideră spaţiul 4-dimensional cu coordonatele (x^0, x^1, x^2, x^3). Distanţa $dx^2 + dy^2 + dz^2$ se înlocuieşte cu distanţa $ds^2 = (dx^0)^2 - (dx^1)^2 - (dx^2)^2 - (dx^3)^2 = c^2dt^2 - (dx^1)^2 - (dx^2)^2 - (dx^3)^2$. Distanţa ds^2 este invariantă la transformările Lorentz, o submulţime a lor fiind dată de forma:

$$\begin{pmatrix} x'^0 \\ x'^1 \\ x'^2 \\ x'^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \operatorname{ch}\xi & -\operatorname{sh}\xi & 0 & 0 \\ -\operatorname{sh}\xi & \operatorname{ch}\xi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^0 \\ x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix}$$

care se pot rescrie:

$$\begin{aligned} x'^0 &= \gamma(x^0 - \beta x^1) \\ x'^1 &= \gamma(x^1 - \beta x^0) \\ x'^2 &= x^2 \\ x'^3 &= x^3. \end{aligned}$$

În spaţiul 4-dimensional considerat se utilizează notaţiile

$$\partial_\alpha \equiv \left(\frac{\partial}{\partial x^0}, \nabla\right)$$

$$\Box \equiv \frac{\partial^2}{\partial (x^0)^2} - \nabla^2.$$

Cu aceste notaţii, dacă punem ϕ şi A la un loc pentru a forma un 4-potenţial $A^\alpha = (\phi, cA)$ şi definim $J^\alpha = (\rho, \frac{1}{c}\boldsymbol{J})$, ecuaţiile (1.4.9) şi (1.4.10) se pot uni în forma

$$\Box A^\alpha = \frac{1}{\varepsilon_0} J^\alpha \tag{1.4.11}$$

şi condiţia Lorentz se reduce la

$$\partial_\alpha A^\alpha = 0 \text{ (sumare după } \alpha = 0, 1, 2, 3). \tag{1.4.12}$$

Dacă definim

$$(F^{\alpha\beta}) = \begin{pmatrix} 0 & -E_{x^1} & -E_{x^2} & -E_{x^3} \\ E_{x^1} & 0 & -cB_{x^3} & cB_{x^2} \\ E_{x^2} & cB_{x^3} & 0 & -cB_{x^1} \\ E_{x^3} & -cB_{x^2} & cB_{x^1} & 0 \end{pmatrix}$$

şi

$$\mathcal{F}^{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} 0 & -cB_{x^1} - cB_{x^2} & -cB_{x^3} & \\ cB_{x^1} & 0 & E_{x^3} & -E_{x^2} \\ cB_{x^2} & -E_{x^3} & 0 & E_{x^1} \\ cB_{x^3} & E_{x^2} & -E_{x^1} & 0 \end{pmatrix}$$

unde indicii arată componentele după axele x^1, x^2, x^3, ecuaţiile Maxwell neomogene se scriu în forma

$$\partial_\alpha F^{\alpha\beta} = \frac{1}{\varepsilon_0} J^\beta \text{ (sumare după } \alpha)$$

iar ecuaţiile Maxwell omogene capătă forma

$$\partial_\alpha \mathcal{F}^{a\beta} = 0 \text{ (sumare după } \alpha).$$

1.5. Ecuaţiile Maxwell exprimate cu forme diferenţiale

Fie spaţiul Lorentz $\mathbb{R}^{1,3}$ cu coordonatele (x^0, x^1, x^2, x^3) cu $x^0 = ct$ şi metrica $ds^2 = c^2dt^2 - (dx^1)^2 - (dx^2)^2 - (dx^3)^2$. Rescriem ecuaţiile Maxwell clasice în forma

$$\nabla \cdot \boldsymbol{B} = 0 \tag{1.5.1}$$

$$\nabla \times \boldsymbol{E} + c\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial x^0} = 0, \tag{1.5.2}$$

$$\nabla \cdot \boldsymbol{E} = \frac{1}{\varepsilon_0}\rho, \tag{1.5.3}$$

$$\nabla \times \boldsymbol{B} = \mu_0 \boldsymbol{J} + \frac{1}{c}\frac{\partial E}{\partial x^0}, \tag{1.5.4}$$

folosind legăturile între D, E şi B, H respectiv precum şi $x^0 = ct$.

Pentru a simplifica ecuaţiile Maxwell omogene (1.5.1) şi (1.5.2) se introduce o 2-formă F numită "Faraday":

$$\begin{aligned} F &= -E_1 dx^0 \wedge dx^1 - E_2 dx^0 \wedge dx^2 - E_3 dx^0 \wedge dx^3 + \\ &\quad + c(B_1 dx^2 \wedge dx^3 + B_2 dx^3 \wedge dx^1 + B_3 dx^1 \wedge dx^2). \end{aligned} \tag{1.5.5}$$

Aici E_i şi B_i sunt componentele câmpurilor respective după axele x^1, x^2, x^3. Acestea sunt funcţii de x^0, x^1, x^2, x^3. Calculăm

$$\begin{aligned}
dF &= -\frac{\partial E_1}{\partial x^2}dx^0 \wedge dx^1 \wedge dx^2 - \frac{\partial E_1}{\partial x^3}dx^0 \wedge dx^1 \wedge dx^3 + \frac{\partial E_2}{\partial x^1}dx^0 \wedge dx^1 \wedge dx^2 \\
&\quad -\frac{\partial E_2}{\partial x^3}dx^0 \wedge dx^2 \wedge dx^3 + \frac{\partial E_3}{\partial x^1}dx^0 \wedge dx^1 \wedge dx^3 + \frac{\partial E_3}{\partial x^2}dx^0 \wedge dx^2 \wedge dx^3 \\
&\quad +c\left(\frac{\partial B_1}{\partial x^1}dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3 + \frac{\partial B_1}{\partial x^0}dx^0 \wedge dx^2 \wedge dx^3 + \cdot + \cdot\right) \\
&= (c\nabla \cdot B)dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3 + \\
&\quad +\left(c\frac{\partial B_1}{\partial x_0} + \frac{\partial E_1}{\partial x^3} - \frac{\partial E_3}{\partial x^1}\right)dx^0 \wedge dx^2 \wedge dx^3 \\
&\quad +\left(c\frac{\partial B_2}{\partial x_0} + \frac{\partial E_1}{\partial x^3} - \frac{\partial E_3}{\partial x^1}\right)dx^0 \wedge dx^3 \wedge dx^1 \\
&\quad +\left(c\frac{\partial B_3}{\partial x_0} + \frac{\partial E_1}{\partial x^1} - \frac{\partial E_3}{\partial x^2}\right)dx^0 \wedge dx^1 \wedge dx^2 = 0
\end{aligned}$$

în baza ecuaţiilor (1.5.1) şi (1.5.2). Invers, $dF = 0$ implică (1.5.1) şi (1.5.2). Aşadar ecuaţiile Maxwell omogone sunt echivalente cu ecuaţia

$$dF = 0 \quad (Feste2 - \text{forma "Faraday"}) \tag{1.5.6}$$

Pentru a trata similar ecuaţiile neomogene, observăm că dacă trecem $\boldsymbol{B} \to \boldsymbol{E}$ şi $\boldsymbol{E} \to -\boldsymbol{B}$ în (1.5.1) şi (1.5.2) obţinem ceva ce seamănă oarecum cu ecuaţiile (1.5.3) şi (1.5.4). Această observaţie sugerează introducerea 2-formei numită Maxwell:

$$\begin{aligned}
M &= c(B_1dx^0 \wedge dx^1 + B_2dx^0 \wedge dx^2 + B_3dx^0 \wedge dx^3) \\
&\quad +E_1dx^2 \wedge dx^3 + E_2E_1dx^3 \wedge dx^1 + E_3E_1dx^1 \wedge dx^2 \qquad (1.5.7)
\end{aligned}$$

Amintim că operatorul Hodge $* : \Lambda^k(M) \to \Lambda^{n-k}(M)$ este astfel că $\alpha \wedge *\beta = g(\alpha, \beta)d\,\mathrm{vol}_g$, unde $d\,\mathrm{vol}_g = \sqrt{|\det(g_{ij})|}dx^1 \wedge dx^2 \wedge \ldots \wedge dx^n$ şi dacă $\alpha = \frac{1}{b!}\alpha_{i_1 \ldots i_k}dx^{i_1} \wedge \ldots \wedge dx^{i_k}$ şi $\beta = \frac{1}{k!}\beta_{j_1 \ldots j_k}dx^{j_1} \wedge \ldots \wedge dx^{j_k}$,

$$g(\alpha, \beta) = \alpha_{i_1 \ldots i_k}\beta_{j_1 \ldots j_k}g^{i_1 j_1} \ldots g^{i_k j_k},$$

unde (g^{ij}) este inversa matricii (g_{ij}).

În cazul nostru $(g_{ij}) = \mathrm{diag}(1,-1,-1,-1)$, $\det(g_{ij}) = -1$, $(g^{ij}) = \mathrm{diag}(1,-1,-1,-1)$ şi operatorul $*$ este determinat de următoarele reguli (acţiunea lui pe baze):

$*1 = dx^0 \wedge dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3,$

$*(dx^0 \wedge dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3) = -1,$

$*dx^0 = dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3, \quad *(dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3) = dx^0$

$*dx^1 = dx^0 \wedge dx^2 \wedge dx^3, \quad *(dx^0 \wedge dx^2 \wedge dx^3) = dx^1$

$*dx^2 = dx^0 \wedge dx^3 \wedge dx^1, \quad *(dx^0 \wedge dx^3 \wedge dx^1) = dx^2$

$*dx^3 = dx^0 \wedge dx^1 \wedge dx^2, \quad *(dx^0 \wedge dx^1 \wedge dx^2) = dx^3$

$*(dx^0 \wedge dx^1) = -dx^2 \wedge dx^3, \quad *(dx^0 \wedge dx^2) = -dx^3 \wedge dx^1$

$*(dx^0 \wedge dx^3) = -dx^1 \wedge dx^2, \quad *(dx^1 \wedge dx^2) = dx^0 \wedge dx^3$

$*(dx^3 \wedge dx^1) = dx^0 \wedge dx^2, \quad *(dx^2 \wedge dx^3) = dx^0 \wedge dx^1$

Cu aceste formule se poate verifica imediat că $M = *F$. Calculăm apoi dM privind la ecuaţiile (1.5.3) şi (1.5.4) cu ρ o funcţie. Obţinem:

$$\begin{aligned}
*dM &= \nabla E dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3 + \\
&\quad + \left(\frac{\partial E_1}{\partial x^0} - c\left(\frac{\partial B_3}{\partial x^2} - \frac{\partial B_2}{\partial x^3}\right)\right) dx^0 \wedge dx^2 \wedge dx^3 \\
&\quad + \left(\frac{\partial E_2}{\partial x^0} - c\left(\frac{\partial B_1}{\partial x^3} - \frac{\partial B_3}{\partial x^1}\right)\right) dx^0 \wedge dx^3 \wedge dx^1 \\
&\quad + \left(\frac{\partial E_3}{\partial x^0} - c\left(\frac{\partial B_2}{\partial x^1} - \frac{\partial B_1}{\partial x^2}\right)\right) dx^0 \wedge dx^1 \wedge dx^2 \\
&= \frac{1}{\varepsilon_0}\rho dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3 - \\
&\quad - c\mu_0 J_1 dx^0 \wedge dx^2 \wedge dx^3 - c\mu_0 J_2 dx^0 \wedge dx^3 \wedge dx^1 \\
&\quad - c\mu_0 J_3 dx^0 \wedge dx^1 \wedge dx^2.
\end{aligned}$$

Sau altfel scris:

$$*d*F = \frac{1}{\varepsilon_0}\widetilde{J},$$

unde $\widetilde{J}$ este o 1-formă numită ”4-curent”

$$\widetilde{J} = \rho dx^0 - \frac{1}{c}(J_1 dx^1 + J_2 dx^2 + J_3 dx^3). \tag{1.5.8}$$

Dar $*d* = \delta$ şi deci pe baza formulelor (1.5.3) şi (1.5.4) obţinem $\delta F = \frac{1}{\varepsilon_0}\widetilde{J}$. Invers, această relaţie implică (1.5.3) şi (1.5.4). Aşadar ecuaţiile Maxwell neomogene sunt echivalente cu

$$\delta F = \frac{1}{\varepsilon_0}\widetilde{J} \ \ (\widetilde{J} \text{ 1-forma 4-curent}). \tag{1.5.9}$$

În concluzie, în $\mathbb{R}^{1,4}$ ecuaţiile Maxwell au forma

$$dF = 0, \quad \delta F = \frac{1}{\varepsilon_0}\widetilde{J}. \tag{1.5.10}$$

Aceste forme permit formularea ecuaţiilor Maxwell în mod abstract, pe o varietate diferenţială oarecare.

Observaţia 1.5.1. *Din $\delta F = \frac{1}{\varepsilon_0}\widetilde{J}$, deducem, folosind $\delta^2 = 0$, că $\delta\widetilde{J} = 0 \Leftrightarrow \frac{\partial\rho}{\partial x^0} + \frac{1}{c}\nabla \cdot J = 0$ sau $\frac{\partial\rho}{\partial t} + \nabla \cdot J = 0$ ecuaţie numită şi legea de conservare care ne spune că sarcina totală este invariantă.*

2

Ecuaţii de structură pentru hipersuprafeţe. Aplicaţii

2.1. Hipersuprafeţe în spaţiul euclidian E^{n+1}

Identificăm spaţiul euclidian E^{n+1} cu $\mathbb{R}^{n+1}$ folosind un reper ortonormat fixat şi considerăm hipersuprafeţele ca submulţimi în $\mathbb{R}^{n+1}$.

Definiţia 2.1.1. Se numeşte *hipersuprafaţă* în $\mathbb{R}^{n+1}$ o submulţime $S = h(U)$ cu $h : U \to \mathbb{R}^{n+1}$ o imersie de clasă $C^s(s \geq 1, s \in \mathbb{N})$ şi U o submulţime din $\mathbb{R}^n$.

Vom da aplicaţia h prin formulele:

$$\begin{aligned}
&x^1 = x^1(u^1, \ldots, u^n),\\
&x^2 = x^2(u^1, \ldots, u^n),\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&x^n = x^n(u^1, \ldots, u^n),\\
&x^{n+1} = x^{n+1}(u^1, \ldots, u^n), \quad (u^1, u^2, \ldots, u^n) \in U.
\end{aligned} \tag{2.1.1}$$

Condiţia ca aplicaţia h să fie imersie este

$$\operatorname{rang}\left(\frac{\partial x^\alpha}{\partial x^i}\right) = n, \tag{2.1.2}$$

unde indicii $\alpha, \beta = 1, 2, \ldots, n+1$ şi indicii $i, j, k \ldots$ vor lua valori de la 1 la n.

Observaţia 2.1.1. Dacă în Definiţia 1.1 cerem ca U să fie mulţime deschisă şi aplicaţia h să fie scufundare (imersie şi homeomorfism pe imagine) atunci $S = h(U)$ se numeşte *hipersuprafaţă elementară.* Se arată ([2]) că orice punct al unei hipersuprafeţe aparţine cel puţin unei hipersuprafeţe elementare. În continuare ne vom restrânge consideraţiile la hipersuprafeţe elementare. Perechea (U, h) se numeşte parametrizare a hipersuprafeţei elementare S.

Fie $\varphi : V \to U$, V deschis în $\mathbb{R}^n$ un difeomorfism de ecuaţii

$$u^i = u^i(\widetilde{u}^1, \widetilde{u}^2, \ldots, \widetilde{u}^n),\ \text{rang}\left(\frac{\partial u^i}{\partial \widetilde{u}^j}\right) = n,\ i, j = 1, \ldots, n. \tag{2.1.3}$$

Se constată imediat că $(V, h \circ \varphi)$ este o nouă parametrizare a hipersuprafeţei elementare S.

Aplicaţia φ se numeşte schimbare de parametri pe S. Vom cnsidera numai noţiuni geometrce, adică independente de parametrizare cu care eventual se definesc.

Imaginea prin h a unei curbe $c : (-\varepsilon, \varepsilon) \to U$, $t \to c(t)$, $\varepsilon > 0$, adică $h \circ c$ se numeşte curbă pe S. Presupunem c fără puncte singulare.

Fie ecuaţia curbei c:

$$u^i = u^i(t),\ \ t \in (-\varepsilon, \varepsilon),\ \text{rang}\left(\frac{du^i}{dt}\right) = 1. \tag{2.1.4}$$

Ecuaţia curbei $h \circ c$ este

$$x^\alpha = x^\alpha(u^i(t)),\ \ t \in (-\varepsilon, \varepsilon) \tag{2.1.5}$$

şi nu are puncte singulare pentru că din egalităţile

$$\frac{dx^\alpha}{dt} = \frac{dx^\alpha}{du^i}\frac{du^i}{dt} \tag{2.1.6}$$

rezultă că rang $\left(\frac{dx^\alpha}{dt}\right) = 1$.

Fie $p_0 = h(c(0))$ cu $c(0) = (u_0^1, \ldots, u_0^n)$. Spunem că $(u_0^1, \ldots, u_0^n)$ sunt coordonatele curbilinii ale lui $p_0 \in S$ cu parametrizarea (U, h).

Condiţia că h este scufundare ne asigură că orice curbă prin p_0 conţinută în S este de forma $h \circ c$.

Definiţia 2.1.2. *Numim vector tangent la S în p_0 vectorul tangent în p_0 la o curbă conţinută în S.*

Fie prin $p_0 \in S$ curbele $c_i : (-\varepsilon, \varepsilon) \to U$ de ecuaţii

$$u^1 = u_0^1, \dots, u^i = u_0^i + t, \dots u^n = u_0^n,\ t \in (-\varepsilon, \varepsilon). \tag{2.1.7}$$

Vectorul tangent în p_0 la curba $h \circ c_i$ este cf (2.1.6):

$$h_i = \left(\frac{\partial x^1}{\partial u^i}, \frac{\partial x^2}{\partial u^i}, \dots, \frac{\partial x^n}{\partial u^i}, \frac{\partial x^{n+1}}{\partial u^i}\right) := \left(\frac{\partial x}{\partial u^i}\right), i\ 1, \dots, n. \tag{2.1.8}$$

Curbele (c_i) date de (2.1.7) se numesc curbe (linii) parametrice prin p_0.

Vectorii (h_i) $i = 1, 2, \dots, n$ sunt liniar independenţi datorită condiţiei (1.2). Egalităţile (2.1.6) ne arată că orice alt vector X tangent la S în p_0 este o combinaţie liniară de (h_i) adică

$$X = \sum_{i=1}^{n} X^i h_i \text{ cu } X^i = \frac{du^i}{dt}(0). \tag{2.1.9}$$

Putem deci spune că (h_i) generează un spaţiu vectorial de dimensiune n care coincide cu mulţimea vectorilor tangenţi la S în p_0. Aşadar această mulţime este un spaţiu vectorial de dimensiune n. Acest spaţiu vectorial, notat $T_{p_0}S$, se numeşte *spaţiu tangent la S în p_0*. Evident că el este subspaţiu de codimensiune 1 în $T_{p_0}\mathbb{R}^{n+1}$.

Observaţia 2.1.2. *În legătură cu formula (2.1.9), notăm că există o convenţie, propusă de A. Einstein, de a omite semnul Σ când o sumare se face după un indice sau mai mulţi care apar în expresia respectivă sus şi jos. Această convenţie numită şi convenţia indicelui mut este amplu folosită în cărţile de geometrie diferenţială, de mecanică, de fizică teoretică. O vom adopta în continuare şi vom scrie (1.9) în forma $X = X^i h_i$.*

Vectorul $h_1 \times h_2 \times \ldots \times h_n$ definit de determinantul simbolic

$$\begin{vmatrix} \dfrac{\partial x^1}{\partial u^1} & \ldots & \frac{\partial x^1}{\partial u^n} & e_1 \\ \ldots\ldots & & & \\ \dfrac{\partial x^1}{\partial u^1} & \ldots & \dfrac{\partial x^n}{\partial u^n} & e_n \\ \dfrac{\partial x^{n+1}}{\partial u^1} & \ldots & \dfrac{\partial x^{n+1}}{\partial u^n} & e_{n+1} \end{vmatrix}$$

unde $(e_1, e_2, \ldots, e_{n+1})$ este baza canonică în $\mathbb{R}^{n+1}$, se numeşte produsul vectorial al vectorilor $h_1, \ldots, h_n$.

Vectorul $h_1 \times h_2 \times \ldots \times h_n$ este nenul pentru că vectorii $h_1, \ldots, h_n$ sunt liniar independenţi şi în plus, un calcul cu determinanţi, ne arată că el este perpendicular pe fiecare din factorii $h_1, \ldots, h_n$. Vom nota prin N versorul vectorului $h_1 \times h_2 \times \ldots \times h_n$.

Ansamblul $\{P_0, (h_1, h_2, \ldots, N)\}$ este un reper în $\mathbb{R}^{n+1}$ şi cu p_0 variabil pe hipersuprafaţa S obţinem un reper mobil pe S numit şi reper Gauss.

Identitatea lui Lagrange, aplicată vectorilor $h_1, \ldots, h_n$ se scrie:

$$(h_1 \times h_2 \times \ldots \times h_n)^2 = \det(g_{ij}) =: \Delta,$$

unde $g_{ij} = \langle h_i, h_j \rangle$ (produsul scalar al vectorilor h_i, h_j). Rezultă că $\|h_1 \times h_2 \times \ldots \times h_n\| = \sqrt{\Delta}$.

Fie $p \in S$ un punct oarecare. Spaţiul tangent $T_pR^{n+1} \simeq \mathbb{R}^{n+1}$ este dotat cu produsul scalar $\langle , \rangle$ uzual încât $\langle e_\alpha, e_\beta \rangle = \delta_{\alpha\beta} = 0$ pentru $\alpha \neq \beta$ şi 1 pentru $\alpha = \beta$.

Acesta induce un produs scalar pe $T_pS \subset T_p\mathbb{R}^{n+1}$ pe care-l vom nota prin

$$g_p : T_pS \times T_pS \to R,\ (X, Y) \to g_p(X, Y) = \langle X, Y \rangle$$

cu X şi Y tangenţi la S dar priviţi ca vectori în $\mathbb{R}^{n+1}$. Aplicaţia $p \to g_p$, $p \in S$ o vom numi forma I-a fundamentală a hipersuprafeţei S. Fie $X = X^i h_i$ şi $Y = Y^j h_j$. Biliniaritatea produsului scalar $\langle , \rangle$ ne conduce la egalităţile

$$g_p(X, Y) = X^i Y^j \langle h_i, h_j \rangle = g_{ij} X^i Y^j.$$

Funcţiile $g_{ij}(p) = \langle h_i, h_j\rangle$ se numesc coeficienţii formei I-a fundamentale a hipersuprafeţei S. Am văzut mai sus că $\det(g_{ij}) > 0$, inegalitate care rezultă şi din faptul că forma pătratică $X \to g(X, X)$ este pozitiv definită.
Fie o schimbare de parametri pe S de forma (2.1.3). Rezultă

$$x^\alpha = x^\alpha(u^1(\widetilde{u}, \ldots, \widetilde{u}^n), \ldots, u^n(\widehat{u}^1, \ldots, \widehat{u}^n))$$

şi prin derivare obţinem

$$\widetilde{h}_k := \left(\frac{\partial x}{\partial \widetilde{u}^k}\right) = \left(\frac{\partial x}{\partial \widetilde{u}^i}\frac{\partial \widetilde{u}^i}{\partial u^k}\right) = \left(h_i \frac{\partial \widetilde{u}^i}{\partial u^k}\right) \tag{2.1.10}$$

şi în continuare

$$\widetilde{g}_{kh} := g(\widetilde{h}_k, \widetilde{h}_l) = g_{ij}\frac{\partial \widetilde{u}^i}{\partial u^k}\frac{\partial \widetilde{u}^j}{\partial u^l}. \tag{2.1.11}$$

Aşadar coeficienţii (g_{ij}) se comportă, la o schimbare de parametri, ca şi componentele unui tensor covariant de tip $(0, 2)$, simetric ($g_{ij} = g_{ji}$). Fie T_p^*S spaţiul dual lui T_pS numit şi spaţiu cotangent în $p \in S$. Notăm prin (du^j) baza de covectori duală bazei (h_i) adică $du^j(h_i) = \delta_i^j$. Folosind coeficienţii g_{ij} putem construi expresia

$$ds^2 = g_{ij}du^i du^j \quad \left(du^i du^j = \frac{1}{2}(du^i \otimes du^j + du^j \otimes du^i)\right) \tag{2.1.12}$$

care se numeşte de asemenea forma I-a fundamentală a hipersuprafeţei S.

2.2. Derivata covariantă pe o hipersuprafaţă

Fie $\widetilde{Y}$ un câmp vectorial definit pe un deschis din $\mathbb{R}^{n+1}$ şi $\widetilde{X}$ un vector fixat $p \in R^{n+1}$ adică $\widetilde{X} \in T_p\mathbb{R}^{n+1}$. Expresia

$$D_{\widetilde{X}}\widetilde{Y}|_p := D\widetilde{Y}|_p(\widetilde{X}) = \lim_{t\to 0}\frac{1}{t}(\widetilde{Y}(p + t\widetilde{X}) - \widetilde{Y}(p)) \tag{2.2.1}$$

se numeşte derivaa direcţională a lui $\widetilde{Y}$ in direcţia $\widetilde{X}$. Fie în baza canonică $\widetilde{Y} = (\widetilde{Y}^{\beta}(x))$, $\widetilde{X} = (\widetilde{X}^{\alpha})$. Cu formula lui Taylor rezultă imediat

$$(2.2.2) \qquad D_{\widetilde{X}}\widetilde{Y}|_p = (\widetilde{X}^{\alpha}\frac{\partial \widetilde{Y}^{\beta}}{\partial x^{\alpha}}), \text{ unde } p = (x^{\alpha}) \in \mathbb{R}^{n+1}.$$

Observăm că dacă $c : (-\varepsilon, \varepsilon) \to \mathbb{R}^n$, $t \to c(t)$ este o curbă cu $c(0) = p$ şi $\dot{c}(0) = \widetilde{X}$, avem $D_{\widetilde{X}}\widetilde{Y} = \lim_{t\to 0} \frac{\widetilde{Y}(c(t)) - \widetilde{Y}(\beta)}{t}$ pentru că în baza canonică se obţine aceeasi expresie (2.2). Aşadar derivata după direcţie depinde de $\widetilde{X}$ şi de valorile lui $\widetilde{Y}$ pe o curbă diferenţiabilă oarecare cu $c(0) = p$ şi $\dot{x}(0) = \widetilde{X}$.

Fie o funcţie diferenţiabilă pe un deschis care conţine p în $\mathbb{R}^{n+1}$. Folosind curba c de mai sus definim derivata lui f în direcţia $\widetilde{X}$ prin

$$(2.2.3) \qquad D_{\widetilde{X}} f = \lim_{t\to 0} \frac{f(c(t)) - (p)}{t}$$

şi constatăm imediat că avem

$$(2.2.4) \qquad D_{\widetilde{X}} f = \left(X^{\alpha}\frac{\partial f}{\partial x^{\alpha}} \right).$$

În particular, pentru două câmpuri vectoriale $\widetilde{Y}, \widetilde{Z}$ pe $\mathbb{R}^{n+1}$ avem: $D_{\widetilde{X}}\langle \widetilde{Y}, \widetilde{Z}\rangle = \widetilde{X}^{\alpha}\frac{\partial}{\partial x^{\alpha}}(\sum_{\beta} \widetilde{Y}^{\alpha}\widetilde{Z}^{\beta})$ şi după efectuarea derivatei rezultă

$$(2.2.5) \qquad D_{\widetilde{X}}\langle \widetilde{Y}, \widetilde{Z}\rangle = \langle D_{\widetilde{X}}\widetilde{Y}, \widetilde{Z}\rangle + \langle \widetilde{Y}, D_{\widetilde{X}}\widetilde{Y}\rangle$$

(regula de derivare a produsului scalar).

Fie X, Y câmpuri vectoriale tangente la S. Acestea se pot scrie în forma $X = X^i(u)h_i$, $Y = Y^j(u)h_j$ cu (X^i) şi (Y^j) funcţii diferenţiabile de parametri $(u^1, \ldots, u^n)$.

Putem calcula $D_X Y$ dar în general rezultatul nu va fi un câmp vectorial tangent la S. Vom avea o descompunere în sumă de componentă tanenţială şi componentă normală

$$(2.2.6) \qquad D_X Y = (D_X Y)^{\text{tang}} + (D_X Y)^{\text{normal}}.$$

Componenta tangenţială este o combinaţie liniară de $(h_1, \ldots, h_n)$, iar componenta normală este proporţională cu versorul normal N, factorul de proporţionalitate, obţinut înmulţind scalar (2.2.6) cu N fiind $\langle D_X Y, N\rangle$.

Vom nota $(D_X Y)^{\text{tang}} = \nabla_X Y$. După (2.2.6) avem

$$\nabla_X Y = D_X Y - \langle D_X Y, N\rangle N. \tag{2.2.7}$$

Expresia $\nabla_X Y$ dată de (2.2.7) se numeşte derivata covariantă a câmpului vectorial Y tangent la S în direcţia câmpului vectorial X, tangent la S. Vom nota $\langle Y, N\rangle = 0$, prin aplicarea formulei (2.2.5) obţinem şi $b(X,Y) = -\langle Y, D_X N\rangle$. Egalitatea (2.2.7) se poate rescrie în forma

$$D_X Y = \nabla_X Y + b(X,Y)N \quad \text{(formula lui Gauss)}. \tag{2.2.8}$$

Pe baza formulei (2.2.2) se verifică imediat că aplicaţia $(\widetilde{X}, \widetilde{Y}) \to D_{\widetilde{X}} \widetilde{Y}$ este 1) aditivă în $\widetilde{X}$, 2) omogenă în $\widetilde{X}$, 3) aditivă în $\widetilde{Y}$ şi satisface 4) $D_{\widetilde{X}} f\widetilde{Y} = D_{\widetilde{Y}} f \cdot Y + f D_{\widetilde{X}} \widetilde{Y}$, unde $\widetilde{X}, \widetilde{Y}$ sunt câmpuri vectoriale pe $\mathbb{R}^{n+1}$ şi f este o funcţie reală definită pe $\mathbb{R}^{n+1}$.

Aplicaţia $(X,Y) \to \nabla_X Y$, X, Y câmpuri tangente la S are proprietăţi similare adică

1. $\nabla_{X_1+X_2} Y = \nabla_{X_1} Y + \nabla_{X_2} Y$,
2. $\nabla_{fX} Y = f \nabla_X Y$,
3. $\nabla_X (Y_1 + Y_2) = \nabla_X Y_1 + \nabla_X Y_2$,
4. $\nabla_X (fY) = \nabla_X f \cdot Y + f \nabla_X Y$,

cu X_1, X_2, Y_1, Y_2 câmpuri vectoriale tangente la S şi f funcţie reală pe S.

Am insisat pe proprietăţile 1)-4) pentru că acestea constituie, întrun cadru abstract mai general, definiţia operatorlui de derivare covariantă.

În plus, proprietatea (2.2.5) se transformă, prin restricţia la câmpuri tangente, în

$$\nabla_X g(Y,Z) = g(\nabla_X Y, Z) + g(Y, \nabla_X Z), \ X, Y, Z \in TS. \tag{2.2.9}$$

Revenim la formula lui Gauss (2.2.8) şi o scriem în baza $(h_1, \ldots, h_n)$ a spaţiului T_pS. Avem:

$$D_{h_i}h_j = D_{\frac{\partial x}{\partial u^i}}\frac{\partial x}{\partial u^j} = \frac{\partial x^\alpha}{\partial u^i}\frac{\partial(\frac{\partial x}{\partial u^j})}{\partial x^\alpha} = \frac{\partial^2 x}{\partial u^i \partial u^j}.$$

Notăm $\nabla_{h_i}h_j = \Gamma^k_{ji}h_k$ şi $b(h_i, h_j) = b_{ij}$. Cu acestea, formula $D_{h_i}h_j = \nabla_{h_i}h_j + b(h_i, h_j)N$ devine

$$\frac{\partial^2 x}{\partial u^i \partial u^j} = \Gamma^k_{ji}h_k + b_{ij}N. \tag{2.2.10}$$

Funcţiile $(\Gamma^k_{ji}(u))$ se numesc simbolii Christoffel (de specia a II-a).

Prin înmulţirea scalară în (2.2.10) cu h_s obţinem

$$\Gamma^k_{ji}g_{ks} = \frac{\partial^2 x}{\partial x^i \partial x^j}. \tag{2.2.11}$$

Funcţiile $[ji; k] := \Gamma^k_{ji}g_{ks}$ se numesc simbolii Christoffel de specia I-a.
Din formula (2.2.11) citim că $\Gamma^k_{ji} = \Gamma^k_{ij}$ pentru că în partea ei dreaptă avem simetrie în i, j.
Privind acum (2.2.10) constatăm că $b_{ij} = b_{ji}$. Aşadar aplicaţia $b : T_pS \times T_pS \to \mathbb{R}$, $(X, Y) \to b(X, Y))$ numită *forma a II-a* a hipersuprafeţei S este smetrică.
Derivarea covariantă $(X, Y) \to \nabla_X Y$ numită şi conexiune liniară pe S este deerminată de coeficienţii (Γ^k_{ji}). Vom arăta că aceştia sunt complet determinaţi de coeficientîi formei I-a fundamentală a hipersuprafeţei.

Teorema 2.2.1. *Derivata covariantă ∇ depinde numai de forma I-a fundamentală a hipersuprafeţei, adică aparţine gemetriei intrinseci a hipersuprafeţei.*

Demonstraţie. Scriem formula (2.2.9) în baza $(h_1, \ldots, h_n)$ luând $X = h_i$, $Y = h_j$, $Z = h_k$. Rezultă:

$$\frac{\partial g_{jk}}{\partial u^i} = \Gamma^r_{ji}g_{rk} + \Gamma^r_{ki}g_{jr}. \tag{2.2.12}$$

Aici am folosit şi $h_i f = \frac{\partial x^d}{\partial x^i}\frac{\partial f}{\partial x^\alpha} = \frac{\partial f}{\partial u^i}$ pentru o funcţie reală definită pe S.
În (2.2.12) permutăm ciclic indicii i, j, k şi obţinem încă două inegalităţi asemănătoare. Înmulţim una dintre ele cu -1 de exemplu prima şi le adunăm membru cu membru. Datorită simetriei in i, j a funcţiilor (Γ^k_{ij}), în partea dreaptă se produc reduceri de termeni şi în final se obţine egalitatea

$$2\Gamma^r_{jk} g_{ir} = \frac{\partial g_{ji}}{\partial u^k} + \frac{\partial g_{ki}}{\partial u^j} - \frac{\partial g_{jk}}{\partial u^i}.$$

Înmulţind această egalitate cu inversa (g^{is}) a matricii (g_{ij}) deducem

$$\Gamma^s_{jk} = \frac{1}{2} g^{si}\left(\frac{\partial g_{ji}}{\partial u^k} + \frac{\partial g_{ki}}{\partial u^j} - \frac{\partial g_{jk}}{\partial u^i}\right). \tag{2.2.13}$$

Aşadar coeficienţii (Γ^s_{jk}) sunt determinaţi complet de coeficienţii (g_{ij}) şi derivatele lor, q.e.d. □

Mai explicit, pentru $X = X^i h_i$, $Y = Y^j h_j$ pe baza proprietăţilor 1-4

$$\nabla_X Y = X^i\left(\frac{\partial Y^k}{\partial u^i} + \Gamma^k_{ji} Y^j\right) h_k. \tag{2.2.14}$$

Expresia

$$Y^k_{j;i} = \frac{\partial Y^k}{\partial u^i} + \Gamma^k_{ji} Y^j \tag{2.2.15}$$

se numeşte derivata covariantă a câmpului vectorial tangent $Y = (Y^k)$. Considerăm câmpul vectorial $D_X N$ cu X tangent la S. Acesta se descompune în forma

$$D_X N = (D_X N)^{\text{tang}} + (D_X N)^{\text{normal}}.$$

Dar din $\langle N, N\rangle = 1$, prin derivare covariantă rezultă $\langle D_X N, N\rangle = 0$. Aşadar $(D_X N)^{\text{normal}} = 0$. Notăm $(D_X N)^{\text{tang}} = -AX$. Din proprietăţile 1-4 ale derivării covariante rezultă că aplicaţia $A : T_p S \to$

T_pS, $X \to AX$ este un operator liniar. Acesta se numeşte operatorul lui Weingarten sau shape operator.
Formula

$$D_X N = -AX \tag{2.2.16}$$

se numeşte *formula lui Weingarten.*
Formulele lui Gauss şi Weingarten sunt esenţiale în geometria hipersuprafeţelor. Ele sunt analoage formulelor lui Frenet din teoria curbelor. Derivăm în raport cu X identitatea $\langle Y, N\rangle = 0$, cu Y câmp vectorial tangent la S. Obţinem $\langle D_X Y, N\rangle + \langle Y, D_X N\rangle = 0$. Pe baza formulelor Gauss şi Weingarten rezultă

$$g(AX, Y) = b(X, Y), \quad X, Y \in TS \tag{2.2.17}$$

relaţie care ne arată că 2-forma b este determinată de A şi reciproc.
Simetria 2-formei b implică

$$g(AX, Y) = g(X, AY), \quad X, Y \in TS \tag{2.2.18}$$

adică operatorul A este autoadjunct relativ la g. Dacă notăm $Ah_i = A_i^j h_j$, formula (2.2.16) cu $X = h_i$, $Y = h_k$ ne conduce la $A_i^j g_{jk} = b_{ik}$ sau

$$A_i^j = g^{jk} b_{ki}. \tag{2.2.19}$$

Rezultă că în baza $(h_1, \ldots, h_n)$ formula lui Weingarten se scrie în forma

$$\frac{\partial N}{\partial u^i} = -g^{jk} b_{ki} h_j = -A_i^j h_j, \tag{2.2.20}$$

unde $N = (N^\alpha(x(u)))$ este versorul normal la S.

Încheiem această secţiune cu definirea croşetului a două câmpuri vectoriale.

Fie $\widetilde{X} = (\widetilde{X}^\alpha)$ şi $\widetilde{Y} = (\widetilde{Y}^\alpha)$ câmpuri vectoriale pe $\mathbb{R}^{n+1}$. Se numeşte croşetul lor câmpul vectorial notat

$$[\widetilde{X}, \widetilde{Y}] = \left(\widetilde{X}^\alpha \frac{\partial \widetilde{Y}}{\partial x^\alpha} - \widetilde{Y}^\alpha \frac{\partial \widetilde{Y}^\alpha}{\partial x^\alpha} \right).$$

Dacă avem în vedere definiţia deriatei covariante rezultă imediat

$$[\widetilde{X},\widetilde{Y}] = D_{\widetilde{X}}\widetilde{Y} - D_{\widetilde{Y}}\widetilde{X}, \quad \forall \widetilde{X},\widetilde{Y}. \tag{2.2.21}$$

Dacă $X = X^i h_i$, $Y = Y^i h_j$ sunt câmpuri vectoriale tangente la S,având în vedere că $X = (X^i \frac{\partial x^\alpha}{\partial x^i})$ şi $Y = (Y^i \frac{\partial x^\beta}{\partial u^i})$, în urma unui calcul se constată că

$$[X,Y] = \left(X^i \frac{\partial Y^j}{\partial u^i} - Y^i \frac{\partial X^j}{\partial u^i} \right) h_j. \tag{2.2.22}$$

Pe de altă parte, formula lui Gauss în combinaţie cu formula (2.2.20) şi simetria formei a II-a fundamentale ne dă imediat

$$[X,Y] = \nabla_X Y - \nabla_Y X. \tag{2.2.23}$$

Dacă screm (2.2.22) pentru $X = h_i, Y = h_j$, având în vedere că $[h_i,h_j] = 0$, rezultă că (2.2.22) este echivalentă cu simetria coefcienţilor Christoffel, adică $\Gamma^k_{ij} = \Gamma^k_{ji}$.
Notăm că derivarea covariantă (conexiunea) ∇ satisface

a) $X_g(Y,Z) = g(\nabla_X Y, Z) + g(Y, \nabla_X Z)$ (compatibilitatea cu metrica g).

b) $T(X,Y) := \nabla_X Y - \nabla_Y X - [X,Y] = 0.$

Într-un context mai general, T se numeşte torsiunea conexiunii ∇ iar conexiunea ∇ cu proprietăţile a) şi b) se numeşte conexiunea Levi-Civita.

2.3. Ecuaţii de structură Maurer-Cartan

Reluăm formulele lui Gauss şi Weingarten scrise în reperul lui Gauss $(h_1, h_2, \ldots, h_n, N)$ în notaţiile:

$$h_{ij} = \frac{\partial^2 x}{\partial x^i \partial x^j}, \; \frac{\partial N}{\partial u^i} = N_i,$$

$$(FG) \qquad h_{ij} = \Gamma^k_{ij} h_k + b_{ij} N$$

$$(FW) \qquad N_i = -A^j_i h_j.$$

Formulele (FG) şi (FW) constituie un sistem de ecuaţii cu derivate parţiale în necunoscutele (h_i, N), $i = 1, \ldots, n$. O condiţie necesară de integrabilitate (existenţă a solutîilor) este să aibă loc egalităţile:

$$\begin{aligned} h_{ij,k} &:= \frac{\partial^3 x}{\partial u^i \partial u^j \partial u^k} = \frac{\partial^3 x}{\partial u^i \partial u^k \partial u^j} = h_{ik,j}, \\ N_{i,j} &= \frac{\partial^2 N}{\partial u^i \partial u^j} = \frac{\partial^2 N}{\partial u^j \partial u^i} = N_{j,i} \end{aligned}$$

impuse de comutativitatea derivatelor de ordin superior.
Derivăm (FG) membru cu membru în raport cu u^k şi în rezultat folosim din nou (FG) şi (FW). În formula astfel obţinută schimbăm j cu k şi obţinem o nouă formulă pe care o scădem membru cu membru din precedenta şi obţinem o combinaţie liniară de $(h_1, \ldots, h_n, N)$ egală cu zero.
Egalând cu zero coeficienţii vectorului $h_1, \ldots, h_n, N$ obţinem :

$$(EG) \qquad \frac{\partial \Gamma^s_{ij}}{\partial u^k} - \frac{\partial \Gamma^s_{ik}}{\partial u^j} + \Gamma^r_{ij}\Gamma^s_{rk} - \Gamma^r_{ik}\Gamma^s_{rj} = b_{ij}A^s_k - b_{ik}A^s_j, \quad \forall i, j, k,$$

numită ecuaţia lui Gauss.

$$(ECM) \qquad \frac{\partial b_{ij}}{\partial u^k} - \frac{\partial b_{ik}}{\partial u^j} + \Gamma^r_{ij} b_{rk} - \Gamma^r_{ik} b_{rj} = 0, \quad \forall i, j, k,$$

numită ecuaţia Codazzi-Mainardi.
Condiţia $N_{i,j} = N_{j,i}$ nu conduce la noi ecuaţii ci doar la o reformulare a (ECM).

Expresia

$$(2.3.1) \qquad R^s_{ijk} = \frac{\partial \Gamma^s_{ij}}{\partial u^k} - \frac{\partial \Gamma^s_{ik}}{\partial u^j} + \Gamma^r_{ij}\Gamma^s_{rk} - \Gamma^r_{ik}\Gamma^s_{rj}$$

se numeşte tensor de curbură.

Cu această notaţie (EG) se scrie

$$(EG') \qquad R^s_{ijk} = (b_{ij}b_{km} - b_{ik}b_{jm})g^{ms}$$

şi prin înmulţire cu g_{sh} obţinem

$$(EG'') \qquad R_{hijk} = b_{ij}b_{kh} - b_{ik}b_{jh}, \text{ unde } R_{hijk} = g_{hs}R^s_{ijk}.$$

Din această formă a ecuaţiei lui Gauss, rezultă imediat următoarele proprietăţi ale lui R_{hijk} :

$$R_{hijk} = -R_{hikj}, \quad R_{hijk} = -R_{ihjk},$$
$$R_{hijk} = R_{jkhi}, \quad R_{hijk} + R_{hjki} + R_{hkij} = 0.$$

În cazul unei suprafeţe, adică $n = 2$ şi deci $i, j, k, h = 1, 2$ se constată că din cele 2^4 funcţii R_{hijk} este esenţială una singură: R_{1212}.
Ecuaţia Gauss se reduce în acest caz la

$$(EG_2) \qquad R_{1212} = b_{11}b_{22} - b^2_{12}.$$

Curbura totală suprafeţei este dată de formula $K = \frac{b_{11}b_{22}-b^2_{12}}{g_{11}g_{22}-g^2_{12}}$. Aşadar rezultă

$$(2.3.2) \qquad K = \frac{R_{1212}}{g_{11}g_{22} - g^2_{12}}$$

relaţie care ne arată că funcţia curbură totală K este complet determinată de coeficienţii primei forme fundamentale şi derivatele lor până la ordinul al doilea. Cu alte cuvinte curbura totală K nu depinde de forma a doua fundamentală, adică este intrinsec legată de suprafaţă. Rezultatul acesta se mai numeşte si teorema Egregium a lui C.F. Gauss.

Formulele (FG) şi (FW) descriu variaţia reperului Gauss $(h_1, \dots, h_n, N)$ pe hipersuprafaţa S.

Acesta este un reper particular. Ne interesează variaţia unui reper mobil oarecare $(X_1, \dots, X_n, X_{n+1})$ cu $X_{n+1} = N$. Pentru a o stabili deschidem aici o paranteză. Pentru simplitate vom începe cu un reper

mobil $(X_1, \ldots, X_n)$ pe $\mathbb{R}^n$. Aşadar $(X_1, \ldots, X_n)$ sunt câmpuri vectoriale liniar independente depinzând de $p(x^1, \ldots, x^n)$, deci $X_i = (X_i^j(x))$. Cum $T_p\mathbb{R}^n \simeq \mathbb{R}^n$ privim X_i fie ca element în T_pR^n fie ca element în $\mathbb{R}^n$ fie ca element în $\mathbb{R}^n$ defint de componentele $(X_i^j(x))$. Putem de asemenea privi X_i ca o funcţie $X_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ care asociază la $(x^1, \ldots, x^n)$ componentele (X_i^j). Vom spune că este o funcţie $\mathbb{R}^n$-valuată.
Funcţiile $\mathbb{R}^n$-valuate se pot aduna şi înmulţi cu scalari , operaţii definite punctual şi pe componente.
Putem de asemenea introduce diferenţiala $dX_i = (dX_i^j)$ care este o 1-formă $dX_i : T_pR^n \to \mathbb{R}^n$, $dX_i(X) = (dX_i^j(X))$, unde $dX_i^j : T_p^n \to R$ este diferenţiala uzuală funcţiei $X_i^j : R^n \to R$. Cum dX_i are valori în $\mathbb{R}^n$ vom spune că este o 1-formă $\mathbb{R}^n$-valuată. Noţiunea de 1-formă $\mathbb{R}^n$-valuată se extinde natural la q-forme $\mathbb{R}^n$-valuate $q = 1, \ldots, n$. Cu acestea se pot face operaţiile care se fac cu q-forme obişnuite şi se obţine *algebra exerioară* a formelor R^n-valuate. Se extinde de asemenea operatorul de diferenţiere exterioară care este liniar şi satisface $d^2 = 0$.

Fie $p = \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ aplicaţia identitate pe $\mathbb{R}^n$. O privim ca funcţie R^n-valuată (0-formă) şi considerăm diferenţiala ei dp ca 1-formă $\mathbb{R}^n$-valuată. Pentru $X \in T_p\mathbb{R}^n$, $dp(X)$ este un element din $\mathbb{R}^n$ adică o combinaţie liniară $(X_1, \ldots, X_n)$. Astfel spus, putem scrie

$$dp(X) = \theta^i(X)X_i \ \text{(sumare după } i = 1, \ldots, n) \tag{2.3.3}$$

Din liniaritatea diferenţialei rezultă că θ^i depind liniar de X, adică $\theta^i : T_p\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ sunt 1-forme uzuale. In general, $dp(X) = X$ şi în particular $dp(X_j) = \theta^i(X_j)X_i$ sau $X_j = \theta^i(X_j)$ deci $\theta^i(X_j) = \delta_j^i$. Aşadar 1-formele $(\theta^1, \ldots, \theta^n)$ formează un reper în $T_p^*\mathbb{R}^n$, dual reperului $(X_1, \ldots, X_n)$ în $T_p\mathbb{R}^n$. Acesta este mobil pe $\mathbb{R}^n$. Fie 1-formele $\mathbb{R}^n$-valuate dX_i. Pentru $X \in T_p\mathbb{R}^n$, $dX_i(X)$ este un element în $\mathbb{R}^n \simeq T_p\mathbb{R}^n$ şi deci putem scrie

$$dX_i(X) = \omega_i^j(X)X_j \Leftrightarrow dX_i = \omega_i^j X_j. \tag{2.3.4}$$

Rezultă că $\omega_i^j : T_pR^n \to \mathbb{R}$ sunt n^2 1-forme uzuale. Cu $X_i = (X_i^k)$ şi $X = (X^h)$ avem $dX_i(X) = (dX_i^k(X)) = (X^h \frac{\partial X_i^k}{\partial x^h}) = D_X X_i$, unde D_X

este deriata în direcţia X. Aşadar putem scrie

$$\omega_i^j(X)X_j = D_X X_i \tag{2.3.4'}$$

şi aplicând θ^k rezultă

$$\omega_i^k(X) = \theta^k(D_X X_i) \tag{2.3.4''}$$

Avem aşadar $n + n^2$ 1-forme θ^i, ω_j^i pe $\mathbb{R}^n$. Acestea nu sunt arbitrare. Ele satisfac

Ecuaţiile de structură ale spaţiului $\mathbb{R}^n$

$$d\theta^i + \omega_k^i \wedge \theta^k = 0, \quad d\omega_j^i + \omega_k^i \wedge \omega_j^k = 0. \tag{ES}$$

Într-adevăr, dacă scriem $dp = t^i \wedge X_i$ privind X_i ca 0-formă $\mathbb{R}^n$, prin diferenţiere exterioară obţinem $0 = d^2p = d\theta^i \wedge X_i - \theta^i \wedge dX_i = (d\theta^i - \theta^j \wedge \omega_j^i)X_i$, deci $d\theta^i + \omega_j^i \wedge \theta^j = 0$. Similar, prin diferenţiere exterioară a egalităţii $dX_i = \omega_i^j \wedge X_j$ obţinem $0 = d^2X_i = d\omega_i^j \wedge X_j - \omega_i^j \wedge dX_j = (d\omega_i^j - \omega_i^k \wedge \omega_k^j)X_j$, adică $d\omega_i^j + \omega_k^j wedge \omega_i^k = 0$, ceea ce trebuia demonstrat.
Dacă introducem matricile $\omega = [\omega_j^i], \theta = (\theta^i)$, (ES) se pot scrie în forma

$$d\theta = -\omega \wedge \theta, \quad d\omega = -\omega \wedge \omega. \tag{ES'}$$

Teorema 2.3.1. *Pentru un reper ortonormat $(X_1, \ldots, X_n)$ în $\mathbb{R}^n$, 1-formele ω_j^i satisfac ecuaţiile*

$$\omega_j^i = -\omega_i^j, \tag{2.3.5}$$

adică matricea ω este antisimetrică.

Demonstraţie. Avem $0 = d\langle X_i, X_j\rangle = \langle dX_i, X_j\rangle + \langle X_i, X_j\rangle$. Folosind (2.3.4) şi $\langle X_i, X_j\rangle = \delta_{ij}$, rezultă imedat (2.3.5).

Revenim la hipersuprafaţa $S \subset \mathbb{R}^{n+1}$ şi considerăm un reper mobil ortonormat $(X_1, \ldots, X_n, N)$, unde primele n câmpuri vectoriale sunt tangente la S şi N este câmpul vectorial normal la S. Baza duală este $(\theta^1, \ldots, \theta^n, \theta^{n+1})$. După (2.3.4 cu Y câmp vectorial tangent la S avem:

$$D_Y X_j = \omega_j^i(Y) X_i + \omega_j^{n+1}(Y) N.$$

Comparând această egalitate cu (FG) scrisă pentru $D_Y X_j$ obţinem imediat

$$\omega_j^i(Y) X_i = \nabla_Y X_i \tag{2.3.6}$$

(2.3.7)
$$\omega_j^{n+1}(Y) = \langle D_Y X_j, N \rangle = -\langle X_j, D_Y N \rangle = \langle X_j, AY \rangle = b(X_j, Y)$$

după formula (FW). Aşadar primele n linii şi n coloane din matricea 1-formelor definite de reperul $(X_1, \ldots, X_n, N)$ determină conexiunea pe S iar ultima linie şi ultima coloană (elementele lor diferă doar prin semn) determină forma a doua fundamentală a hipersuprafeţei S. Din (2.3.4) rezultă că a da (ω_j^i) este echivalent cu a da ∇.
Prima ecuaţie de structură se descompune în forma:

$$d\theta^i + \omega_j^i \wedge \theta^j + \omega_{n+1}^i \wedge \theta^{n+1} = 0$$
$$d\theta^{n+1} + \omega_j^{n+1} \wedge \theta^j = 0.$$

A doua ecuaţie este identic verificată pentru că dacă o calculăm pentru perechea (X_k, X_h) obţinem

$$b(X_k, X_h) - b(X_h, X_k) = 0 (\text{forma a-II-a este simetrică }).$$

În prima ecuaţie notăm $\omega_{n+1}^i \wedge \theta^{n+1} = -\ominus^i$ şi o rescriem în forma

$$d\theta^i + \omega_j^i \wedge \theta^j = \Theta^i. \tag{2.3.8}$$

Numim 1-formele Θ^i 1-forme de torsiune.
A doua ecuaţie de structură se descompune astfel:

$$d\omega_j^i + \omega_k^i \wedge \omega_j^k + \omega_{n+1}^i \wedge \omega_j^{n+1} = 0$$
$$d\omega_j^{n+1} + \omega_k^{n+1} \wedge \omega_j^k = 0.$$

A doua ecuaţe este echivalentă cu ecuaţiile Codazzi-Mainardi. În prima notăm $-\omega^i_{n+1} \wedge \omega^{n+1}_j = \Omega^i_j$ şi o scriem în forma

$$d\omega^i_j + \omega^i_k \wedge \omega^k_j = \Omega^i_j. \tag{2.3.9}$$

2-formele Ω^i_j se numesc 1-forme de curbură şi se determină prin următorul calcul:

$$\begin{aligned}
&g(X_i, \nabla_X \nabla_Y X_j - \nabla_Y \nabla_X X_j - \nabla_{[X,Y]} X_j) = \\
&\theta^i(\nabla_X \omega^k_j(Y) X_k - \nabla_Y \omega^k_j(X) X_k - \omega^k_j([X,Y]) X_k) = \\
&\theta^i(\omega^k_j(Y)\omega^h_k(X) X_h - \omega^k_j(X)\omega^h_k(Y) X_h + \\
&X\omega^k_j(Y) X_k - Y\omega^k_j(X) X_k - \omega^k_j([X,Y]) X_k) \\
&= \omega^k_j(Y)\omega^i_k(X) - \omega^k_j(X)\omega^i_k(Y) + X\omega^i_j(Y) - Y\omega^i_j(X) - \omega^i_j([X,Y]) = \\
&= \omega^i_k \wedge \omega^k_j(X,Y) + d\omega^i_j(X,Y) = \\
&= [d\omega^i_j + \omega^i_k \wedge \omega^k_j](X,Y).
\end{aligned}$$

Aşadar $\Omega^i_j(X,Y) = g(X_i, R(X,Y)X_j) = R(X_i, X_j, X, Y)$=tensorul Riemann de curbură al hipersuprafeţei S.

Ecuaţiile (2.3.8) şi (2.3.9) se numesc de structură ale hipersuprafeţei S.

Un calcul în reperul $(X_1, \ldots, X_n, N)$ ne conduce la $\Theta^i \equiv 0$ ceea ce înseamnă că nu avem torsiune, deci conexiunea Levi-Civita ∇ este fără torsiune. Pentru $n = 2$, (2.3.10) se reduce la $\Omega'_2 = d\omega^1_2 + \omega^1_i \wedge \omega^1_2$. Dar $\Omega^1_2(X_1, X_2) = g(R(X_1, X_2)X_2, X_1) = \det(A) = K$. Rezultă

$$K\theta^1 \wedge \theta^2 = d\omega^1_2. \tag{2.3.10}$$

□

După (2.3.7) avem $\omega^1_2(Y)X_1 = \nabla_Y X_2$. Prin înmulţire scalară cu X_1, obţinem

$$\omega^1_2(Y) = g(\nabla_Y X_2, X_1) = -g(X_2, \nabla - Y X_1) = -\omega^2_1(Y) \tag{(2.3.10')}$$

pentru orice câmp vectorial tangent X.

Observaţia 2.3.1. $\theta^1 \wedge \theta^2$ este elementul de arie al suprafeţei noat uneori prin dA. Dacă $\theta^1 = \theta^1_1 du + \theta^1_2 dv$, $\theta^2 = \theta^2_1 du + \theta^2_2 dv$, rezultă $\theta^1 \wedge \theta^2 = (\theta^1_1\theta^2_2 - \theta^1_2\theta^2_1) du \wedge dv = \sqrt{EG - F^2} dudv = dA$.

Pentru a demonstra (2.3.10) am folosit egalităţile

$$\det(A) = k \text{ şi } \det(A) = g(R(X_1, X_2)X_2, X_1).$$

Prima egalitate rezultă din egalităţile $A^i_j = g^{ik} b_{kj}$ prin considerarea determinanţilor $\det(A^i_j) = \frac{1}{\det(g_{ij})}\det(b_{ij}) = \frac{b_{11}b_{22} - b^2_{22}}{g_{11}g_{22} - g^2_{12}} = K$ (curbura Gauss).
Pentru a demonstra a doua egalitate putem folosi versiunea ecuaţiei (EG_2) scrisă în reperul ortonormat (X_1, X_2). Ea are aceeaşi formă ca (EG_2) numai că $R_{1212} = g(R(X_1, X_2)X_2, X_1)$ şi $g(X_i, X_j) = \delta_{ij}$. Formula $b_{ij} = A^k_i g_{jk}$ devine atunci $b_{ij} = A^j_i$ adică $b_{11} = A'_1$, $b_{12} = A^2_1$, $b_{21} = A^1_2$, $b_{21} = A^2$ şi expresia $b_{11}b_{22} - b^2_{12}$ se reduce la $\det(A)$.
Aceeaşi egalitate rezultă din ecuaţiile Gauss şi Codazzi-Mainardi, scrise invariant (independent de bază), pe care le deducem în continuare.

Fie D derivarea covariantă în $\mathbb{R}^{n+1}$. Se verifică uşor că

$$D_X D_Y Z - D_Y D_X Z - D_{[X,Y]} Z = 0, \quad \forall X, Y, Z \tag{2.3.11}$$

câmpuri vectoriale pe $\mathbb{R}^{n+1}$. Expresia din partea stângă din (2.3.11) se numeşte tensorul de curbură a lui $\mathbb{R}^{n+1}$ iar (2.3.11) ne spune că acesta este zero. Se mai spune că $\mathbb{R}^{n+1}$ este un spaţiu plat (nu are curbură). În ecuaţia (2.3.11) cu X, Y, Z câmpuri tangente la S folosim repetat (FG) şi (FW), iar în final egalăm cu zero componenta tangenţială şi normală deci partea stângă a ecuaţiei (2.3.11). Obţinem

$$\nabla_X \nabla_Y Z = -\nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{[X,Y]} Z = b(Y, Z)AX - b(X, Z)AY$$

$$b(X, \nabla_Y Z) - b(Y, \nabla_X Z) - b([X, Y], Z) + \nabla_X b(Y, Z) - \nabla_Y b(X, Z) = 0.$$

Expresia
(2.3.12)

$$R(X, Y)Z = \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{[X,Y]} Z, \quad X, Y, Z \text{ câmpuri}$$

vectoriale tangente la S, se numeşte tensorul de curbură a lui S. În baza naturală $(h_1, \ldots, h_n)$ acesta are expresia (2.3.1).
Dacă avem în vedere şi egalităţile $b(X, Y) = g(AX, Y) = g(X, AY)$ prima formulă obţinută se scrie
(2.3.13)

$$R(X, Y)Z = b(Y, Z)AX - b(X, Z)AY = g(AY, Z)AX - g(AX, Z)AY$$

şi este echivalentă cu (EG).

În a doua formulă obţinută folosim:

$$\nabla_X b(Y, Z) = \nabla_X g(AY, Z) = g(\nabla_X AY, Z) + g(AY, \nabla_X Z)$$

şi versiunea ei cu $X \to Y$ şi $Y \to X$. După reduceri se obţine $g(\nabla_X AY - \nabla_Y AX - A[X, Y], Z) = 0, \forall Z, X, Y$ şi deci

$$\nabla_X AY - \nabla_Y AX - A[X, Y] = 0, \tag{2.3.14}$$

formulă echivalentă cu (ECM).
Pentru $n = 2$ şi reperul ortonormat $\{X_1, X_2\}$ din (2.3.14) rezultă $R(X_1, X_2)X_2 = g(AX_2, X_2)AX_1 - g(AX_1, X_2)AX_2$ şi prin înmulţire scalară cu X_1, obţinem

$$\begin{aligned} g(R(X_1, X_2)X_2, X_1) &= g(AX_1, X_1)g(AX_2, X_2) - g(AX_1, X_2)g(AX_2, X_1) \\ &= \det(A) \end{aligned}$$

în baza ortonotmată $\{X_1, X_2\}$.

Observaţia 2.3.2. Expresia $g(R(X, Y)Z, W) =: R(W, Z; X, Y)$ se numeşte tensorul Riemannian de curbură al hipersuprafeţei S. Cu ajutorul formulei (2.3.14) se verifică următoarele identităţi:

1) $R(W, Z; X, Y) = -R(W, Z; Y, X)$,
2) $R(W, Z; X, Y) = -R(Z, W, X, Y)$,
3) $R(W, Z; X, Y) + R(W, X; Y, Z) + R(W, Y; Z, X) = 0$, (suma ciclică după X, Y, Z).
4) $R(W, Z; X, Y) = R(X, Y; W, Z)$.

Există şi alţi tensori cu proprietăţile 1) -4) cu rol important în geometria varietăţilor diferenţiabile.

2.4. Teorema Gauss-Bonnet pentru suprafeţe

Fie $U \subset \mathbb{R}$ mulţime deschisă şi $h : U \to \mathbb{R}^3$ o suprafaţă fără puncte singulare. Considerăm în U o submulţime B care este interiorul unei curbe închise de clasă C^2 notată prin γ, parametrizată cu lungimea de arc şi orientată invers acelor de ceasornic. Mulţimea B este difeomorfă cu un disc închis. Frontiera $\partial B = \gamma$. Notăm $c = h \circ \gamma$ şi obţinem o curbă pe S. Aceasta poate fi gândită ca o curbă în spaţiu şi atunci au loc formulele lui Frenet care introduc invarianţii curbură k şi torsiunea τ. Dar fiind pe S este natural să admită şi niste inarianţi legaţi de S. Aceştia sunt curbura normală, curbura geodezică şi torsiunea geodezică. Ei depind de k şi τ (a se vedea [2]). În continuare vom introduce curbura geodezică k_g pe o cale diferită.

Fie $c = h \circ \gamma : [0, L] \to S$, $s \to c(s) = (c^\alpha(s)), \alpha = 1, 2, 3$. Vectorul $\dot{c}(s)$ este $(\frac{dc^\alpha}{ds})$ şi observăm că pentru o funcţie $f(s) = f(c(s))$ definită pe c avem $\dot{c}(s)f = D_{\dot{c}(s)}f = (\frac{dc^\alpha}{ds}\frac{\partial f}{\partial x^\alpha}) = \frac{df}{ds}$, iar pentru un câmp vectorial X definit pe c avem: $D_{\dot{c}}X = \frac{dc^\beta}{ds}\frac{\partial X^\alpha}{\partial x^\beta} = (\frac{dX^\alpha}{ds})$. În particular, $D_{\dot{c}}\dot{c} = \ddot{c}(= \frac{d\dot{c}}{ds})$. Descompunem $\ddot{c}$ în componente tangenţială si normală:

$$\ddot{c} = (\ddot{c})^T + \langle \ddot{c}, N \rangle N.$$

Avem $\langle \ddot{c}, N \rangle = \langle D_{\dot{c}}\dot{c}, N \rangle = -\langle \dot{c}, D_{\dot{c}}N \rangle$. Dar după (FW), $D_{\dot{c}}N = -A\dot{c}$. Aşadar $\langle \ddot{c}, N \rangle = \langle \dot{c}, A\dot{c} \rangle = b(\dot{c}, \dot{c})$. Funcţia $k_n = b(\dot{c}, \dot{c})$ se numeşte curbură normală. În punctul $c(0) = p$ ea depinde numai de $\dot{c}(0) = X$ şi nu depinde de c. Aşadar

$$\ddot{c} = (\ddot{c})^\top + k_n N.$$

Comparăm această formulă cu formula lui Gauss:

$$D_{\dot{c}}\dot{c} = \nabla_{\dot{c}}\dot{c} + b(\dot{c}, \dot{c})N.$$

Rezultă că $(\ddot{c})^\top = \nabla_{\dot{c}}\dot{c}$. Vectorul $(\ddot{c})^\top$ este perpendicular pe $\dot{c}$ şi conţinut în planul tangent la S.

Notăm $\dot{c} = e_1$, prin e_2 versorul lui $(\ddot{c})^\top$ şi $k_g = \|(\ddot{c})^\top\| = \|\nabla_{\dot{c}}\dot{c}\|$. Rezultă imediat

$$\nabla_{e_1} e_1 = k_g e_2, \qquad (2.4.1)$$

$$\nabla_{e_1} e_2 = -\kappa_g e_1. \qquad (2.4.2)$$

Aceste formule sunt similare cu formulele lui Frenet pentru curbe plane. Funcţia definită şi prin

$$k_g = g(\nabla_{e_1} e_1, e_2), \tag{2.4.3}$$

se numeşte curbura geodezică a curbei c. Ea este similară curburii unei curbe plane. Curbele pentru care $k_g = 0$ se numesc geodezice.
Cu această pregătire putem enunţa o primă versiune locală a teoremei lui Gauss-Bonnet.

Teorema 2.4.1. *Fie U, B, ca mai sus, $S = h(U)$, $C = h \circ \gamma$ şi K curbura totală a suprafeţei S. Atunci*

$$\int_{h(B)} K dA + \int_c k_g ds = 2\pi.$$

(Prima integrală este integrală de suprafaţă, iar a doua este integrală curbilinie. Ambele sunt bine definite în ipotezele teoremei.)

Demonstraţie. Fie frontiera $c : [0, L] \to \mathbb{R}$, închisă şi pozitiv orientată parametrizată prin lungimea de arc s, $e_1 = \dot{c}$ şi $k_g e_2 = (\ddot{c})^\top$. Aşadar (e_1, e_2) este un reper ortonormat în lungul curbei c.

Pe suprafaţa S considerăm şi reperul ortonormat $(X_1 = \frac{h_1}{\|h_1\|}, X_2, N)$ cu N versorul normalei la suprafaţă şi astfel ca reperele (e_1, e_2) şi (X_1, X_2) să fie la fel orientate. Vom nota cu (θ^1, θ^2) reperul dual lui (X_1, X_2) şi vom considera ecuaţiile de structură corespunzătoare.

Cele două repere sunt legate prin formulele:

$$e_1 = \cos\varphi X_1 + \sin\varphi X_2, \quad e_2 = -\sin\varphi X_1 + \cos\varphi X_2, \tag{2.4.4}$$

formule care se pot şi inversa, exprimând X_1, X_2 în funcţie de e_1, e_2, de exemplu $X_1 = \cos\varphi e_1 - \sin\varphi\varphi_2$. Funcţia $\varphi : [0, L] \to \mathbb{R}$, $s \to \varphi(s)$, are proprietatea remarcabilă

$$\varphi(L) - \varphi(0) = 2\pi. \tag{2.4.5}$$

Această proprietate esenţială în cele ce urmează, se demonstrează după o informare mai îndelungată cu privire la teoria globală a curbelor plane. Trimitem pentru demosntraţie la cărţile [5],[9]. Din (2.4.3) rezultă $g(e_1, X_1) = \cos\varphi$ şi deci $\frac{d}{ds}g(e_1, X_1) = \sin\varphi\frac{d\varphi}{ds}$. După (2.4.4) putem scrie:

$$\begin{aligned}
2\pi &= \int_0^L \frac{d\varphi}{ds}ds = -\int_0^L (\sin\varphi)^{-1}\frac{d}{ds}g(e_1, X_1)ds = \\
&= -\int_0^L (\sin\varphi)^{-1}[g(\nabla_{e_1}e_1, X_1) + g(e_1, \nabla_{e_1}X_1)]ds \\
&= -\int_0^L (\sin\varphi)^{-1}[(\cos\varphi)g(\nabla_{e_1}e_1, e_1) - (\sin\varphi)g(\nabla_{e_1}e_1, e_2)] + \\
&\quad +(\cos\varphi)g(X_1, \nabla_{e_1}X_1) + (\sin\varphi)g(X_2, \nabla_{e_1}X_1)]ds.
\end{aligned}$$

Factorii pe lângă $\cos\varphi$ sunt zero, iar cei de pe lângă $\sin\varphi$ sunt k_g şi respectiv $-\omega_2^1(e_1)$ cf. (2.3.10) Rezultă

$$2\pi = \int_0^L k_g(s)ds + \int_0^L \omega_2^1(e_1)(s)ds = \int_c k_g ds + \int_c \omega_2^1 ds$$

după formula de reducere a unei integrale curbilinii la o integrală Riemann. Dar $c = \partial u(B)$ şi teorema lui Stokes implică

$$\int_c \omega_2^1 = \int_{u(B)} d\omega_2^1 = \int_{u(B)} K\theta^1 \wedge \theta^2 = \int_{u(B)} KdA.$$

Asadar $2\pi = \int_c k_g ds + \int_{u(B)} KdA$.

□

Iată două situaţii simple în care se confirmă teorema Gauss-Bounet.

1. Fie un disc de rază r în $\mathbb{R}^2 \subset \mathbb{R}^3$. Avem $K = 0$ şi $k_g = \frac{1}{r}$ (cercul are $K = \frac{1}{r} = k_g$). Rămâne $2\pi = \frac{1}{r}\int_c dr = \frac{2\pi r}{r}$.

2. Fie emisfera închisă $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | x^2 + y^2 + z^2 = r^2,\ z \geq 0\}$. Frontiera este curba ecuator care fiind cerc "mare" al sferei este geodezică. Avem $K = 1/r^2$. Deci $2\pi = \int KdA + \int k_g ds = \frac{1}{r^2}\int dA = \frac{1}{r^2}A$, adică aria $2A = 4\pi R^2$ (aria sferei).

Teorema 4.1 se generalizează pentru B cu frontiera γ închisă, conexă şi diferenţiabilă pe "bucăti" adică de forma unui poligon cu n laturi, fiecare latură fiind un arc de curbă. Imaginea ei $c = u \circ \gamma$ va fi o curbă pe S care închide $h(B)$ şi are o formă similară, adică de poligon cu laturile arce de curbă. O vom numi pe scurt n-gon. Orientăm γ încât B să rămână mereu la stânga. Această orientare induce o orientare similară pentru c. În punctele de nediferenţiabilitate avem tangente la stânga şi la dreapta. Măsura unghiului format de versorii tangetelor într-un asemenea punct V_i numit şi vârf se va nota prin d_i. Unghiul acesta apare ca unghi "exterior" în V_i pentru n-gonul c. În această situaţie se poate arăta [9] că formula din Teorema 4.1 se modifică astfel:

$$\int_{h(B)} KdA + \int_c k_g ds + \sum \alpha_i = 2\pi, \tag{2.4.6}$$

unde sumarea se face după numărul vârfurilor n-gonului c, adică de la 1 la n.
Considerăm cazul în care frontiera lui $h(B)$ este un n-gon cu laturile geodezice. Atunci $k_g = 0$ pe c şi (2.4.6) se reduce la

$$\int_{h(B)} KdA + \int_{i=1}^{n} \alpha_i = 2\pi. \tag{2.4.7}$$

Fie β_i măsura unghului interior în vârful v_i. Aşadar $\alpha_i = \pi - \beta_i$. Pentru $n = 3$, adică pentru un triunghi geodezic (numit aşa pentru că laturile sunt geodezice) formula (2.4.7) devine

$$\int_{h(B)} KdA = \beta_1 + \beta_2 + \beta_2 - \pi, \tag{2.4.8}$$

iar pentru un n-gon geodezic avem

$$\int_{h(B)} KdA = \sum_{i=1}^{n} \beta_i - (n-2)\pi. \tag{(2.4.8')}$$

Din (2.4.8) rezultă

Teorema 2.4.2. *Suma unghiurilor inerioare ale unui triunghi geodezic este* $>, =, <$ *decat* π *după cum* $K > 0, K = 0, K < 0$.

Pentru $n = 2$, formula (2.4.8′) se reduce la $\int_{h(B)} KdA = \beta_1 + \beta_2$ şi dacă avem $K < 0$ peste tot, apare o contradicţie. Deci pe suprafeţe cu $K < 0$ nu este posibil ca într-un domeniu simplu conex două geodezice să se intersecteze în două puncte (nu există 2-gon geodesic).

Versiunea globală a teoremei Gauss-Bonnet este

Teorema 2.4.3. *Fie* $M \subset \mathbb{R}^3$ *suprafaţă compactă orientabilă. Atunci*

$$\int_M KdA = 2\pi\chi(M),$$

unde $\chi(M) \in Z$ *este caracteristica Euler-Poincaré.*

Schiţă a demonstraţiei. M fiind compactă, se poate descompune într-un număr finit de părţi $M_1, \ldots, M_m$ astfel ca

1. $M = \bigcup_{i=1}^m M_i$,
2. $M_i \cap M_j$ nu conţine pentru $i \neq j$ puncte interioare din M_i sau M_j ci numai puncte de pe frontiera acestor părţi.
3. Fiecare M_i este compactă cu frontiera netedă pe bucăţi.

   Se orientează fiecare parte cu interiorul spre stânga. Se aplică apoi fiecărei părţi formula (2.4.6):

$$\int_{M_i} KdA + \int_{\partial M_i} k_g = 2\pi - \sum_j \alpha_{ij}.$$

   Când luăm sumă după i, termenii legaţi de frontieră se reduc doi câte doi pentru că fiecare frontieră apare parcursă de două ori dar în sensuri opuse. Aşadar avem:

$$\begin{aligned}\int_M KdA &= 2\pi m - \sum_{i,j} \alpha_{ij} = 2\pi m - \sum_{i,j}(\pi - \beta_{ij}) = \\ &= 2\pi(\text{nr. vârfurilor} - \text{nr. laturilor} + m) = 2\pi\chi(M).\end{aligned}$$

Bibliografie

[1] Anastasiei M., Capitole speciale de geometrie , Univ. "Al.I.Cuza" Iasi , 2009 . Se poate incarca de pe pagina personala a autorului.

[2] Anastasiei M, Geometrie : Curbe si suprafete. Editura CERMI, 2003.

[3] Du Shenghua ş.a. , Maxwell electomagnetic theory from a view point of differential forms. arXiv : 0809.010, 2008

[4] Ivancevic G.V. ş.a. Lecture Notes on deRham -Hodge theory. arXiv :0807.4991, 2008

[5] Kuhnel W. Differential Geometry. Curves-Surfaces- Manifolds. AMS, 2002

[6] Nicolescu M., Analiză matematica, vol. II, Ed. Didactică şi Pedagogică, Bucureşti, 1980

[7] Oproiu V., Geometrie diferentiala, Ed. Universitatii "Al.I.Cuza" Iasi, 2002

[8] Spivak M., A Comprehensive Introduction to Differential Geometry. Vol. I-V. Publish or Perish, Berkley, 1979

[9] Vaisman I., A First Course in Differential Geometry.Pure and Applied Mathematics,80,Marcel Dekker, New York,1984