Educaţia Matematică Vol. 1, Nr. 1 (2004), 137–140

O demonstraţie pentru formula lui Stirling

Ioan Ţincu

Abstract

In this paper using Γ-function, we give a proof of Stirling′s formula for $n!$.

2000 Mathematical Subject Classification: 33B15

Stirling a demonstrat următoarea formulă

$$n! = \sqrt{2\pi n} \cdot n^n \cdot e^{-n} + \frac{\theta_n}{12n},\ \theta_n \in (0,1), \tag{1}$$

foarte importantă în teoria aproximării.

În această lucrare vom utiliza proprietăţile funcţiei speciale Γ pentru a demonstra formula lui Stirling.

Arătăm că:

$$(\forall)x > 0,\ (\exists)\theta_x \in (0,1) \text{ astfel încât}$$
$$\Gamma(x+1) = \sqrt{2\pi} \cdot x^{x+\frac{1}{2}} \cdot e^{-x+\frac{\theta_x}{12x}}$$

Din dubla inegalitate cunoscută

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n < e < \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}$$

se obţine

$$\frac{n^n \cdot e^{-n+1}}{n!} < 1 < \frac{n^{n+1} \cdot e^{-n+1}}{n!}$$

Considerăm funcţia

$$F : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}, \quad F(x+1) = \frac{x^{x+\frac{1}{2}} \cdot e^{-x}}{\Gamma(x+1)}. \tag{2}$$

Are loc relaţia

$$\frac{F(x+2)}{F(x+1)} = \frac{1}{e} \cdot \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{x + \frac{1}{2}}. \tag{3}$$

Pentru $t \in (-1, 1)$ au loc următoarele egalităţi:
$\ln(1+t) = t - \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{3} + ... + (-1)^{m-1} \cdot \frac{t^m}{m} + ...$
$\ln(1-t) = -t - \frac{t^2}{2} - \frac{t^3}{3} - ... - \frac{t^m}{m} - ...$
de unde obţinem

$$\ln \frac{1+t}{1-t} = 2t\left(1 + \frac{1}{3}t^3 + ... + \frac{1}{2m+1}t^{2m} + ...\right). \tag{4}$$

Pentru $t = \frac{1}{2x+1}$, din (4) se obţine
$\left(x + \frac{1}{2}\right) \ln \frac{x+1}{x} = 1 + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{(2x+1)^2} + ... + \frac{1}{2m+1} \cdot \frac{1}{(2x+1)^{2m}} + ...$
de unde avem

$$\left(x + \frac{1}{2}\right) \ln \frac{x+1}{x} < 1 + \frac{1}{3}\left[\frac{1}{(2x+1)^2} + ... + \frac{1}{(2x+1)^{2m}} + ...\right] =$$

$$= 1 + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{(2x+1)^2} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{(2x+1)^2}} = 1 + \frac{1}{12x(x+1)}.$$

Prin urmare

$$1 < (x + \frac{1}{2}) \ln \frac{x+1}{x} < 1 + \frac{1}{12x(x+1)}. \tag{5}$$

Din (3) şi (5) rezultă

$$1 < \frac{F(x+2)}{F(x+1)} < e^{\frac{1}{12x} - \frac{1}{12(x+1)}},$$

$$F(x+2) \cdot e^{\frac{1}{12(x+1)}} < F(x+1) \cdot e^{\frac{1}{12x}}.$$

Fie $A = \lim\limits_{x\to\infty} F(x+1)$.

Cum $F(x+1)$ este crescătoare rezultă $F(x+1) < A < F(x+1) \cdot e^{\frac{1}{12x}}$, adică $(\exists)\theta_x \in (0,1)$ astfel încât

$$A = F(x+1) \cdot e^{\frac{\theta_x}{12x}} \tag{6}$$

Din (2)şi (6) se obţine

$$\Gamma(x+1) = \frac{1}{A} x^{x+\frac{1}{2}} \cdot e^{-x+\frac{\theta_x}{12x}}. \tag{7}$$

Pentru $x \in \left\{n+\frac{1}{2}, n+1, 2n+1\right\}$ avem

$$\frac{(2n)!}{4^n \cdot n!}\sqrt{\pi} = \frac{1}{A}(1-\frac{1}{2})^n \cdot e^{-n+\frac{1}{2}+\frac{\theta}{12(n-\frac{1}{2})}}, \quad \theta \in (0,1),$$

$$(2n)! = \frac{1}{A} \cdot (2n)^{2n+\frac{1}{2}} \cdot e^{-2n+\frac{\theta'}{24n}}, \quad \theta' \in (0,1),$$

$$n! = \frac{1}{A} \cdot n + \frac{1}{2} \cdot e^{-n+\frac{\theta''}{12n}}, \quad \theta'' \in (0,1).$$

Prin urmare, putem scrie

$$A\sqrt{2\pi} = \left(1 - \frac{1}{2n}\right)^n \cdot e^{\frac{1}{2} + \frac{\theta}{12(n - \frac{1}{2})} + \frac{\theta'}{24n} + \frac{\theta''}{12n}}.$$

Când $n \to \infty$ se oţine

(8) $$A = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}.$$

Egalităţile (7) şi (8) implică

$$\Gamma(x+1) = \sqrt{2\pi} \cdot x^{x + \frac{1}{2}} \cdot e^{-x + \frac{\theta_x}{12x}}, \ (\forall) x > 0$$

şi, pentru $x = n$, se obţine,

$$n! = \Gamma(n+1) = \sqrt{2\pi n} \cdot n^n \cdot e^{-n + \frac{\theta}{12n}},$$

adică (1).

Bibliografie

[1] G. M. Fihtenholt, *Curs de calcul diferenţial şi integral*, Editura Tehnică, 1963;

[2] N. N. Lebedev, *Funcţii speciale şi aplicaţiile lor*, Editura Tehnică, 1957.

Department of Mathematics
University "Lucian Blaga" of Sibiu,
Str. Dr. I. Ratiu Nr.7,
550012 Sibiu, Romania
E-mail address: