3. INTEGRALE CU PARAMETRU

Fie $a,b,c,d \in R, a<b, c<d$ şi $f:[a,b]\times[c,d]\to R$ o funcţie. Să presupunem că pentru orice $y\in[c,d]$, aplicaţia $x \mapsto f(x,y), x\in[a,b]$ este integrabilă Riemann pe [a,b]. Atunci funcţia $F:[c,d]\to R$, $F(y)=\int_a^b f(x,y)dx$ se numeşte *integrală cu parametru*.

Teorema 3.1. (Continuitatea integralei cu parametru). *Fie funcţia $f:[ab]\times[c,d]\to R$ continuă. Atunci funcţia $F:[c,d]\to R$, $F(y)=\int_a^b f(x,y)dx$ este continuă.*

Demonstraţie. Fie $\varepsilon>0$. Funcţia *f* este continuă pe compact, deci este uniform continuă. Rezultă că există $\delta(\varepsilon)>0$ astfel încât $\left|f(x_1,y_1)-f(x_2,y_2)\right|<\dfrac{\varepsilon}{b-a}$,

$\forall (x_1,y_1),(x_2,y_2)\in[a,b]\times[c,d], cu \left|x_1-x_2\right|<\delta(\varepsilon), \left|y_1-y_2\right|<\delta(\varepsilon)$. Fie $y_0\in[c,d]$. Atunci pentru orice $y\in[c,d]$ cu $\left|y-y_0\right|<\delta(\varepsilon)$ avem

$$\left|F(y)-F(y_0)\right|=\left|\int_a^b f(x,y)dx-\int_a^b f(x,y_0)dx\right|=$$

$$=\left|\int_a^b (f(x,y)-f(x,y_0))dx\right|\le\int_a^b\left|f(x,y)-f(x,y_0)\right|dx<\frac{\varepsilon}{b-a}\int_a^b dx=\varepsilon,$$

deci $\left|y-y_0\right|<\delta(\varepsilon)\Rightarrow\left|F(y)-F(y_0)\right|<\varepsilon$. Aceasta înseamnă că funcţia F este continuă.

Teorema 3.2. (derivarea integralei cu parametru). *Fie funcţia continuă $f:[a,b]\times[c,d]\to R$ pentru care există $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ şi este continuă. Atunci funcţia $F:(c,d)\to R, F(y)=\int_a^b f(x,y)dx$ este derivabilă şi $F'(y)=\int_a^b \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y)dx$.*

Demonstraţie. Fie $\varepsilon>0$. Funcţia $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ este uniform continuă, deci există $\delta(\varepsilon)>0$ astfel încât $\left|\dfrac{\partial f}{\partial y}(x_1,y_1)-\dfrac{\partial f}{\partial y}(x_2,y_2)\right|<\dfrac{\varepsilon}{b-a}$,

$\forall (x_1,y_1),(x_2,y_2)\in[a,b]\times[c,d], cu \left|x_1-x_2\right|<\delta(\varepsilon), \left|y_1-y_2\right|<\delta(\varepsilon)$.

Fie $y_0 \in (c,d)$ şi $y \in (c,d)$ astfel încât $|y - y_0| < \delta(\varepsilon)$. Conform teoremei creşterilor finite, pentru orice $x \in [a,b]$ există ξ_x între y şi y_0 astfel încât $\frac{f(x,y) - f(x,y_0)}{y - y_0} = \frac{\partial f}{\partial y}(x,\xi_x)$. Atunci

$\left|\frac{f(x,y) - f(x,y_0)}{y - y_0} - \frac{\partial f}{\partial x}(x,y_0)\right| = \left|\frac{\partial f}{\partial y}(x,\xi_x) - \frac{\partial f}{\partial x}(x,y)\right| < \frac{\varepsilon}{b-a}$, deci

$\left|\frac{f(x,y) - f(x,y_0)}{y - y_0} - \frac{\partial f}{\partial x}(x,y_0)\right| < \frac{\varepsilon}{b-a}, x \in [a,b], |y - y_0| < \delta(\varepsilon)$. Apoi

$$\left|\frac{F(x,y) - F(x,y_0)}{y - y_0} - \int_a^b \frac{\partial f}{\partial x}(x,y_0)dx\right| = = \left|\int_a^b \left(\frac{f(x,y) - f(x,y_0)}{y - y_0} - \frac{\partial f}{\partial x}(x,y_0)\right)dx\right| \le$$

$$\le \int_a^b \left|\frac{f(x,y) - f(x,y_0)}{y - y_0} - \frac{\partial f}{\partial x}(x,y_0)\right|dx < \frac{\varepsilon}{b-a}\int_a^b dx = \varepsilon.$$ Aşadar

$\left|\frac{F(x,y) - F(x,y_0)}{y - y_0} - \int_a^b \frac{\partial f}{\partial x}(x,y_0)dx\right| < \varepsilon, \forall |y - y_0| < \delta(\varepsilon)$, deci concluzia.

Teorema 3.3. *Fie funcţia* $f:[a,b]\times[c,d] \to R$ *continuă, cu* $\frac{\partial f}{\partial y}$ *continuă şi* $\varphi,\psi:[c,d] \to [a,b]$ *două funcţii de clasă* C^1*. Atunci funcţia* $G:(c,d) \to R$*,* $G(y) = \int_{\varphi(y)}^{\psi(y)} f(x,y)dx$ *este derivabilă şi are loc formula (***Newton – Leibniz***)*

$$G(y) = \int_{\varphi(y)}^{\psi(y)} \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)dx + f(\psi(y),y)\psi'(y) - f(\varphi(y),y)\varphi'(y).$$

Teorema 3.4. (Fubini). Fie funcţia $f:[a,b]\times[c,d] \to R$ continuă. Atunci are loc relaţia

$$\int_a^b\left(\int_c^d f(x,y)dy\right)dx = \int_c^d\left(\int_a^b f(x,y)dx\right)dy.$$

4. INTEGRALA CURBILINIE

4.1 Lungimea unui arc de curba

Fie AB o curbă plană definită de relația $AB: y = f(x), a \le x \le b$, unde $f:[a,b] \to R$ este o funcție de clasă C^1. Ne propunem să calculăm lungimea curbei AB. În acest sens, vom considera o diviziune d: A = M_0, …, M_n = B a arcului AB, cu $M_k(x_k, y_k), 1 \le k \le n$ şi vom aproxima lungimea sa cu lungimea liniei poligonale $M_0M_1 \dots M_n$, adică
$$L_n = \sum_{k=1}^{n} \sqrt{(x_k - x_{k-1})^2 + (y_k - y_{k-1})^2}\ .$$

Definiția 4.1. *Fie $f:[a,b] \to R$ o funcție al cărei grafic este o curbă AB. Fie $(d_n)_{n\ge1}$ un şir de diviziuni ale cercului AB cu $\|d_n\| \to 0$. Presupunem că următoarea limită*

$L_n = \lim\limits_{\|d_n\|\to0} \sum\limits_{k=1}^{n} \sqrt{(x_k - x_{k-1})^2 + (y_k - y_{k-1})^2}$ există, este finită şi este independentă de alegerea şirului de diviziuni care tinde în normă la 0.

În acest caz, spunem că arcul AB este rectificabil şi L este lungimea sa.

Dăm următoarea formulă pentru calculul lungimii unui arc rectificabil.

Propoziția 4.1. *Fie $f:[a,b] \to R$ o funcție de clasă C^1 al cărei grafic este o curbă AB. Atunci curba AB este rectificabilă şi lungimea sa este dată de formula*
$$L = \int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2}\, dx\ .$$

Demonstrație. Avem $\sqrt{(x_k - x_{k-1})^2 + (y_k - y_{k-1})^2} = \sqrt{1 + \left(\dfrac{y_k - y_{k-1}}{x_k - x_{k-1}}\right)^2} \cdot (x_k - x_{k-1})$.

Cu teorema lui Lagrange, obținem $y_k - y_{k-1} = f(x_k) - f(x_{k-1}) = (x_k - x_{k-1}) f'(\xi_k)$, unde $\xi_k \in [x_k, x_{k-1}], 1 \le k \le n$. Atunci L este limita următoarei sume Riemann

$\sigma_{d_n} = \sum\limits_{k=1}^{n} \sqrt{1 + [f'(\xi_k)]^2}\,(x_k - x_{k-1})$ asociată funcției continue $x \mapsto \sqrt{1 + [f'(x)]^2}$. Prin urmare, $\lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{k=1}^{n} \sqrt{1 + [f'(\xi_k)]^2}\,(x_k - x_{k-1}) = \int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2}\, dx$.

Definiția 4.2. *Forma diferențială $ds = \sqrt{1 + [f'(x)]^2}\, dx$ se numeşte elementul de arc al curbei y=f(x).*

Deoarece $f'(x)dx = dy$, elementul de arc se mai scrie $ds = \sqrt{dx^2 + dy^2}$.

Dacă arcul AB este dat parametric de relațiile $AB: \begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \psi(t) \end{cases}$, $a \le t \le b$, cu $\varphi, \psi : [a,b] \to R$ de clasă C^1, atunci $dx = \varphi'(t)dt, dy = \psi'(t)dt$ şi rezultă că $ds = \sqrt{[\varphi'(t)]^2 + [\psi'(t)]^2}\, dt$. În acest caz, lungimea arcului AB este dată de formula
$$L = \int_a^b \sqrt{[\varphi'(t)]^2 + [\psi'(t)]^2}\, dt .$$

Presupunem acum că AB este un arc în spațiu dat de relațiile $AB: \begin{cases} x = f(t) \\ y = g(t), a \le t \le b, \\ z = h(t) \end{cases}$

cu $f, g, h : [a,b] \to R$ de clasă C^1. O astfel de curbă se numeşte curbă netedeă.
Dacă $(d_n)_{n\ge 1}$ este un şir de diviziuni ale arcului AB cu $\|d_n\| \to 0$, atunci lungimea arcului AB este $L = \lim\limits_{\|d_n\| \to 0} \sum_{k=1}^{n} \sqrt{(x_k - x_{k-1})^2 + (y_k - y_{k-1})^2 + (z_k - z_{k-1})^2}$, unde $(x_k, y_k, z_k), 1 \le k \le n$, sunt coordonatele puncteor diviziunii d_n.
Avem $L = \int_a^b \sqrt{[f'(t)]^2 + [g'(t)]^2 + [h'(t)]^2}\, dt$, iar forma diferențială $ds = \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2} = \sqrt{[f'(t)]^2 + [g'(t)]^2 + [h'(t)]^2}\, dt$ este elementul de arc al curbei AB.

4.2. Integrala curbilinie de speța I

Integrala curbilinie de speța I a fost definită din considerente fizice.
Să presupunem că se dă în spațiu o curbă AB de-a lungul căreia este repartizată o masă, a cărei densitate liniară (de repartiție) $\rho(M)$ este cunoscută în fiecare punct M al curbei AB. Ne propunem să determinăm masa m a curbei. În acest scop, considerăm o diviziune d = (A = M_0, …, M_n = B) şi câte un punct de diviziune $N_k \in M_{k-1}M_k, 1 \le k \le n$.
Presupunem că densitatea este aceeaşi în toate punctele arcului $M_{k-1}M_k$. Atunci masa m_k a arcului $M_{k-1}M_k$ are expresia aproximativă $m_k \approx \rho(N_k)\sigma_k$, unde σ_k este lungimea arcului $M_{k-1}M_k$. În acest fel, masa arcului AB o vom aproxima cu expresia $m \approx \sum_{k=1}^{n} \rho(N_k)\sigma_k$.
Eroarea acestei aproximări tinde la zero, dacă lungimile σ_k ale tuturor segmentelor tind la zero.
Dacă notăm $\lambda = \max\limits_{1 \le k \le n} \sigma_k$, atunci masa arcului AB va fi $m = \lim\limits_{\lambda \to 0} \sum_{k=1}^{n} \rho(N_k)\sigma_k$.

Pornind de la această problemă, să considerăm un domeniu $D \subset R^3$ care conține curba AB şi $F : D \to R$ o funcție.

Considerăm diviziunea d = (A = M_0, …, M_n = B) a curbei AB şi fie $N_k(\xi_k, \eta_k, \zeta_k) \in M_{k-1}M_k, 1 \le k \le n$ un şir de puncte intermediare căruia îi asociem suma $\sum_{k=1}^{n} F(N_k)\sigma_k = \sum_{k=1}^{n} F(\xi_k, \eta_k, \zeta_k)\sigma_k$.

Definiția 4.3. *Dacă pentru* $\lambda = \max_{1 \le k \le n} \sigma_k$ *tinzând la zero, suma integrală* $\sum_{k=1}^{n} F(N_k)\sigma_k = \sum_{k=1}^{n} F(\xi_k, \eta_k, \zeta_k)\sigma_k$ *are o aceeaşi limită finită I, independentă de alegerea diviziunilor d şi a punctelor intermediare N_k, atunci spunem că funcția F este integrabila pe curba AB. Notăm* $I = \int_{AB} F(x, y, z)ds$ şi se numeşte integrala curbilinie de spețа I a funcției F pe curba AB.

Vom da acum o metodă pentru calculul integralelor curbilinii de spețа I.

Să presupunem că pe curba *AB* s-a stabilit un sens de parcurs, aşa încât poziția unui punct *M* de pe curbă poate fi definit prin lungimea arcului $s = AM$, care se măsoară de la punctul inițial *A*. Atunci curba se exprimă parametric $AB: \begin{cases} x = x(s) \\ y = y(s) \\ z = z(s) \end{cases}, \ 0 \le s \le S$, iar funcția $F(x, y, z)$ devine acum funcția compusă $F(x(s), y(s), z(s))$ de variabilă *s*.

Dacă notăm s_k, $1 \le k \le n$ valorile arcului corespunzătoare punctelor d diviziune M_k atunci $\sigma_k = s_k - s_{k-1} = \Delta s_k$.

Fie $\overline{s_k} \in [s_{k-1}, s_k]$ valorile lui *s* care definesc punctele intermediare N_k, pentru $1 \le k \le n$.

Atunci suma $\sum_{k=1}^{n} F(N_k)\sigma_k = \sum_{k=1}^{n} F(x(\overline{s}_k), y(\overline{s}_k), z(\overline{s}_k))\Delta_{\sigma_k}$ este de fapt suma Riemann asociată funcției $s \mapsto F(x(s), y(s), x(s))$. Prin urmare, dacă presupunem ca F este continuă, atunci $\int_{AB} F(x, y, z,)ds = \int_{0}^{S} F(x(s), y(s), z(s))ds$.

Fie acum reprezentarea parametrică $AB: \begin{cases} x = f(t) \\ y = g(t), a \le t \le b \\ z = h(t) \end{cases}$, unde $f, g, h: [a, b] \to R$ sunt de clasă C^1. Atunci curba AB este rectificabilă şi $ds = \sqrt{[f'(t)]^2 + [g'(t)]^2 + [h'(t)]^2}\,dt$. Efectuând schimbarea de variabilă, rezultă $\int_{AB} F(x, y, z,)ds = \int_{a}^{b} F(f(t), g(t), h(t))\sqrt{[f'(t)]^2 + [g'(t)]^2 + [h'(t)]^2}\,dt$, acesta fiind de fapt formula de calcul a integralei curbilinii de spețа I.

4.2. Integrala curbilinie de speța a doua

Se stie ca lucrul mecanic efectuat de o forță constantă $\vec{F}$ într-o deplasare rectilinie $\overrightarrow{AB}$ este egal cu $L = \vec{F} \cdot \overrightarrow{AB} = F \cdot AB \cdot \cos\varphi$, unde φ este unghiul pe care îl face forța $\vec{F}$ cu direcția $\overrightarrow{AB}$.

Dacă $\vec{F}$ are componentele X,Y,Z, iar A şi B au coordonatele (x_1, y_1, z_1), respectiv (x_2, y_2, z_2), atunci $L = (x_2 - x_1)X + (y_2 - y_1)Y + (z_2 - z_1)Z$ sau $L = \vec{F} \cdot (\vec{r_2} - \vec{r_1})$, unde $\vec{r_1}, \vec{r_2}$ sunt vectorii de poziție ai punctelor A, respectiv B.

Fie $C \subset R^3$ o curbă dată de ecuațiile parametrice $C: \begin{cases} x = f(t) \\ y = g(t), a \le t \le b \\ z = h(t) \end{cases}$,

unde $f, g, h : [a,b] \to R$ sunt funcții de clasă C^1.

Fie $\vec{F} : C \to R^3$, $\vec{F}(x,y,z) = (X(x,y,z), Y(x,y,z), Z(x,y,z))$ o *funcție vectorială*. Ne propunem să calculăm lucrul mecanic efectuat de forța $\vec{F}$ de-a lungul arcului *AB*.

Consideram o diviziune $\Delta = (A = M_0, M_1, \ldots, M_n = B)$ a arcului *AB*, de coordonate $M_k(x_k, y_k, z_k)$, $0 \le k \le n$. Notăm cu $\|\Delta\| = \max\limits_{1 \le k \le n} |M_{k-1}M_k|$ *norma* diviziunii Δ. Pe fiecare subarc $M_{k-1}M_k$ considerăm un punct oarecare $N_k(\xi_k, \eta_k, \zeta_k)$, $1 \le k \le n$. Valoarea funcției $\vec{F}$ în punctul N_k este $\vec{F}(N_k) = (X(\xi_k, \eta_k, \zeta_k), Y(\xi_k, \eta_k, \zeta_k), Z(\xi_k, \eta_k, \zeta_k))$.

Acum aproximăm lucrl mecanic *L* efectuat de forța variabilă $\vec{F}$ de-a lungul arcului *AB* cu expresia $L_n = \vec{F}(N_1) \cdot \overrightarrow{M_0 M_1} + \ldots + \vec{F}(N_n) \cdot \overrightarrow{M_{n-1} M_n}$, adică suma lucrului mecanic efectuat de forțele constante $\vec{F}(N_k)$ pe segmentele $M_{k-1}M_k$, $1 \le k \le n$, adica

$$L_n = \sum_{k=1}^{n} \left[X(\xi_k, \eta_k, \zeta_k)(x_k - x_{k-1}) + Y(\xi_k, \eta_k, \zeta_k)(y_k - y_{k-1}) + Z(\xi_k, \eta_k, \zeta_k)(z_k - z_{k-1}) \right].$$

Fie $(\Delta_n)_{n \ge 1}$ un şir de diviziuni ale arcului *AB* cu $\|\Delta_n\| \to 0$.

Definiția 4.4. *Se numeşte integrala curbilinie de speța a doua a funcției $\vec{F}$ de-a lungul arcului AB următoarea limită*

$$L = \lim_{n \to \infty} \sum_{k=1}^{n} \left[X(\xi_k, \eta_k, \zeta_k)(x_k - x_{k-1}) + Y(\xi_k, \eta_k, \zeta_k)(y_k - y_{k-1}) + Z(\xi_k, \eta_k, \zeta_k)(z_k - z_{k-1}) \right]$$

dacă ea există şi este finită, oricare ar fi alegerea punctelor intermediare $N_k(\xi_k, \eta_k, \zeta_k)$, $1 \le k \le n$ şi oricare ar fi şirul de diviziuni $(\Delta_n)_{n \ge 1}$ cu $\|\Delta_n\| \to 0$.

Această limită se notează $\int\limits_{AB} X(x,y,z)dx + Y(x,y,z)dy + Z(x,y,z)dz$ şi reprezintă din punct de vedere fizic lucrul mecanic efectuat de forța variabilă $\vec{F} = (X, Y, Z)$ de-a lungul arcului AB.

Dacă notăm cu $d\vec{r} = (dx, dy, dz)$, atunci integrala curbilinie se mai scrie $\int\limits_{AB} \vec{F} d\vec{r}$.

Dacă AB este o curbă închisă C, atunci se folosesc notațiile $\int\limits_{C\uparrow} \vec{F} d\vec{r}$ sau $\oint \vec{F} d\vec{r}$.

Teorema 4.1. (calcularea integralei curbilinii). *Fie o curbă netedă* $C \subset R^3$ *dată de* $C: \begin{cases} x = f(t) \\ y = g(t), a \le t \le b \\ z = h(t) \end{cases}$ *și* $\vec{F}: C \to R^3, \vec{F}(x,y,z,) = (X(x,y,z), Y(x,y,z), Z(x,y,z))$ *o funcție continuă. Arunci* $\vec{F}$ *este integrabilă pe C și are loc egalitatea*

$$\int\limits_C X(x,y,z)dx + Y(x,y,z)dy + Z(x,y,z)dz =$$

$$= \int_a^b [X(f(t),g(t),h(t))f'(t) + Y(f(t),g(t),h(t))g'(t) + Z(f(t),g(t),h(t))h'(t)]dt.$$

Demonstrație. Fie d = (a = t_0 < t_1 < … < t_n = b) o diviziune a intervalului [a,b] și diviziunea arcului C asociată $\Delta = (A = M_0, M_1, ..., M_n = B)$ unde $M_k(x_k, y_k, z_k)$, $x_k = f(t_k), y_k = g(t_k), z_k = h(t_k), 0 \le k \le n$. Vom arăta că următoarea sumă

$$\sum_{k=1}^n [X(\xi_k,\eta_k,\zeta_k)(x_k - x_{k-1}) + Y(\xi_k,\eta_k,\zeta_k)(y_k - y_{k-1}) + Z(\xi_k,\eta_k,\zeta_k)(z_k - z_{k-1})]$$

are aceeași limită pentru $\|\Delta_n\| \to 0$ și orice alegere a punctelor intermediare $N_k(\xi_k,\eta_k,\zeta_k) \in M_{k-1}M_k, 1 \le k \le n$. Funcția *f* este de clasă C^1, deci putem aplica teorema lui Lagrange. Pentru fiecare $1 \le k \le n$, există $\Theta_k \in [t_{k-1}, t_k]$ astfel încât $x_k - x_{k-1} = f(t_k) - f(x_{k-1}) = (t_k - t_{k-1})f'(\Theta_k)$.

Deoarece $\xi_k = f(\tau_k), \eta_k = g(\tau_k), \zeta_k = h(\tau_k), 1 \le k \le n$, cu $\tau_k \in [t_k, t_{k-1}]$, vom avea

$$\sum_{k=1}^n X(\xi_k,\eta_k,\zeta_k)(x_k - x_{k-1}) = \sum_{k=1}^n X(f(\tau_k), g(\tau_k), h(\tau_k))f'(\Theta_k)(x_k - x_{k-1}).$$

Funcția X este continuă pe compact, în particular este mărginită. Fie $M \ge 0$ astfel încât $|X(x,y,z)| \le M, \forall (x,y,z) \in C$.

Funcția f' este continuă pe compactul [a,b], deci este uniform continuă. Fie $\varepsilon > 0$. Atunci există $\delta(\varepsilon) > 0$ astfel încât $|f'(x) - f'(y)| < \frac{\varepsilon}{M(b-a)}, \forall x, y \in [a,b], |x - y| < \delta(\varepsilon)$.

Avem descompunerea $\sum_{k=1}^n X(\xi_k,\eta_k,\zeta_k)(x_k - x_{k-1}) = \sum_{k=1}^n X(\xi_k,\eta_k,\zeta_k)f'(\Theta_k)(t_k - t_{k-1}) =$

$$= \sum_{k=1}^n X(f(\tau_k), g(\tau_k), h(\tau_k))(f'(\Theta_k) - f'(\tau_k))(t_k - t_{k-1}) +$$

$$+ \sum_{k=1}^n X(f(\tau_k), g(\tau_k), h(\tau_k))f'(\tau_k))(t_k - t_{k-1}).$$

Expresia $\sum_{k=1}^{n} X(f(\tau_k),g(\tau_k),h(\tau_k))f'(\tau_k))(t_k - t_{k-1})$ este o sumă Riemann asociată funcției continue $t \mapsto X(f(t),g(t),h(t))f'(t)$, deci va avea limita

$\int_a^b X(f(t),g(t),h(t))f'(t)dt$, atunci când $\|\Delta\| \to 0$. Apoi, dacă $\|\Delta\| < \delta(\varepsilon)$, avem

$$\left|\sum_{k=1}^{n} X(f(\tau_k),g(\tau_k),h(\tau_k))(f'(\Theta_k) - f'(\tau_k))(t_k - t_{k-1})\right| \le$$

$$\le \sum_{k=1}^{n} \left|X(f(\tau_k),g(\tau_k),h(\tau_k))(f'(\Theta_k) - f'(\tau_k))(t_k - t_{k-1})\right| \le$$

$$\le M \sum_{k=1} \left|f'(\Theta_k) - f'(\tau_k)\right|(t_k - t_{k-1}) \le M \frac{\varepsilon}{M(b-a)} \sum_{k=1}^{n} (t_k - t_{k-1}) = \varepsilon .$$

Aşadar, calculul integralei curbilinii de speța a doua se reduce la calculul unei integrale *Riemann*. Pentru aceasta, este necesar să cunoaştem o reprezentere parametrică a arcului *AB*.

Dacă arcul *AB* se descompune într-un număr finit de subarce, formula de calcul se aplică fiecărui subarc şi astfel, integrala curbilinie de-a lungul arcului *AB* este suma integralelor curbilinii de-a lungul fiecărui subarc în parte

$$\int_{AB} = \int_{AC} + \int_{CD} + \int_{DB} .$$

Să considerăm acum o curbă în plan dată de $AB : \begin{cases} x = f(t) \\ y = g(t) \end{cases}, \ a \le t \le b$,

Formula de calcul al integralelor curbilinii de-a lungul unei curbe plane se deduce din teorema precedenta.

Teorema 4.2. *Fie AB un arc de curbă plană AB* : $\begin{cases} x = f(t) \\ y = g(t) \end{cases}, \ a \le t \le b$, *unde* $f, g : [a,b] \to R$ *sunt de clasa* C^1. *Fie* $\vec{F} : D \subset R^2 \to R^2$, $\vec{F}(x,y) = (X(x,y), Y(x,y))$ *este* o funcție vectorială continuă pe un domeniu D care conține arcul AB. Atunci

$$\int_{AB} X(x,y)dx + Y(x,y)dy = \int_a^b [X(f(t),g(t))f'(t) + Y(f(t),g(t))g'(t)]dt .$$

Observatie. Practic, integralele curbilinii re reduc la integrale Riemann.

Exercitii.

1. Să se calculeze $\int_C (x+y)ds$, unde

$$C = \begin{cases} x = t \\ y = \dfrac{3\sqrt{2}}{2} t^2, 0 \le t \le 1 \\ z = t^3 \end{cases}$$

2. Să se calculeze $\int_C \frac{ds}{x^2+y^2+z^2}$, unde

$$C=\begin{cases} x=a\cos t \\ y=a\sin t, 0\le t\le 2\pi \\ z=bt \end{cases}$$

3. Să se calculeze $\int_{AB}\left(x^2-2xy\right)dx+\left(2xy+y^2\right)dy$, unde AB este arcul de parabolă $y=x^2$ care uneşte punctele A(1,1) şi B(2,4).

4. Să se calculeze $\int_C (y-z)dx+(z-x)dy+(x-y)dz$, unde C este curba

$$C=\begin{cases} x=a\cos t \\ y=a\sin t, 0\le t\le 2\pi \\ z=bt \end{cases}$$

5. Să se calculeze $\oint_C ydx+zdy+xdz$, unde

$$C=\begin{cases} x=r\cos a\cos t \\ y=r\cos ta\sin t, 0\le t\le 2\pi \\ z=r\sin a \end{cases}$$

6. Să se calculeze $\oint_C \frac{xdy-ydx}{x^2+y^2}$, unde C={ (x,y)$\in R^2$ | $x^2+y^2=9$ }.

7. Să se calculeze $\oint_C \frac{(x+y)dx-(x-y)dy}{x^2+y^2}$, unde C este cercul unitate $x^2+y^2=1$.

5. INTEGRALA DUBLA

Notiunea de integrala dubla generalizeaza integrala simpla si permite integrarea functiilor de doua variabile.

Fie $D = [a,b] \times [c,d]$ un dreptunghi din R^2. Numim aria lui D, numarul $(b-a)(d-c)$, diametrul lui D, numarul $\delta(D) = \sqrt{(b-a)^2 + (d-c)^2}$. Orice multime Δ de forma: $\Delta = \{[x_i, x_{i+1}] \times [y_j, y_{j+1}] | a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b, c = y_0 < y_1 < \ldots < y_m = d\}$ se numeste diviziune a lui D. Notam cu D(D) multimea diviziunilor dreptunghiului D.

Norma unei diviziuni Δ a dreptunghiului D este numarul real notat prin $\|\Delta\|$ si definit prin $\|\Delta\| = \max\{\delta([x_i, x_{i+1}] \times [y_j, y_{j+1}]) | 0 \le i \le n-1, 0 \le j \le m-1\}$

O familie de puncte intermediare corespunzatoare diviziunii Δ este orice familie θ de foma $\theta = \{(\xi_i, \eta_j) | \xi_i \in [x_i, x_{i+1}], \eta_j \in [y_j, y_{j+1}], 0 \le i \le n-1, 0 \le j \le m-1\}$.

Notam cu $\theta(\Delta)$ multimea familiilor de puncte intermediare corespunzatoare diviziunii Δ.

Fie $f : D \to R$. Numim suma riemanniana asociata funtiei f, diviziunii Δ si familiei de puncte θ, numarul real $\sigma(\Delta, f, \theta)$, definit prin

$$\sigma(\Delta, f, \theta) = \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{j=0}^{m-1} f(\xi_i, \eta_j)(x_{i+1} - x_i)(y_{j+1} - y_j).$$

Definitia 5.1. Functia f este integrabila pe D daca exista un numar real I astfel incat, pentru orice $\Delta \in$ D(D) si $\theta \in \theta(\Delta), \|\Delta\| < \delta$, avem $|\sigma(\Delta, f, \theta) - I| < \varepsilon$.

Daca f este integrabila pe D, numarul I se numeste integrala dubla a functiei f pe D si de noteaza prin: $\iint_D f(x,y)dxdy$ sau $\iint_D f$

Proprietati ale integralei duble.

Fie f si g doua functii integrabile pe $D \subset R^2$. Atunci:

1) $\iint_D (\alpha f + \beta g) = \alpha \iint_D f + \beta \iint_D g, (\forall)\alpha, \beta \in R$

2) $\iint_D f \ge 0$ daca $f \ge 0$ pe D.

3) $\iint_D f \ge \iint_D g$ daca $f \ge g$ pe D.

4) Daca $D = \bigcup_{i=1}^{n} D_i$ si $D_i \cap D_j = \emptyset, 1 \le i \ne j \le n$, atunci:

$$\iint_D f = \sum_{i=1}^{n} \iint_{D_i} f$$

Teorema 5.1. Teorema de descompunere a integralei duble in integrale simple
Fie f o functie reala, definita si continua pe domeniul inchis (isi contine si frontiera) si marginit D, simplu in raport cu axa Oy, adica:
$$D = \{(x,y) | f_1(x) \le y \le f_2(x), x \in [a,b], f_2, f_2\_continue\_pe\_[a,b]\}$$
Atunci:
$$\iint_D f(x,y)dxdy = \int_a^b \left[\int_{f_1(x)}^{f_2(x)} f(x,y)dy\right]dx .$$
Observatie. Daca domeniul D este simplu in raport cu Ox, adiaca
$$D = \{(x,y) | g_1(y) \le x \le g_2(y), y \in [c,d], g_1, g_2\_continue\_pe\_[c,d]\}$$
atunci:
$$\iint_D f(x,y)dxdxy = \int_c^d \left[\int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x,y)dx\right]dy$$
Observatie. Practic, o integrala dublka se calculeaza parcurgandu-se urmatoarele etape:
a) se reprezinta in R^2 domeniul de integrare D.
b) se stabileste daca D este simplu in raport cu axa Ox sau Oy (in caz contrar, D se descompune in domenii simple si se aplica proprietatea 4) si, in raport de aceasta, se determina perechile de functii (f_1, f_2) si (g_1, g_2).
c) se calculeaza corespunzator una din integralele:
$$I(x) = \int_{f_1(x)}^{f_2(x)} f(x,y)dy, H(x) = \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x,y)dx .$$
d) se calculeaza integrala dubla:
$$I = \iint_D f(x,y)dxdy = \int_a^b I(x)dx = \int_c^d H(y)dy$$

Exemple. Sa se calculeze:
1) $\iint_D x^2y^3dxdy$, unde $D = [-1,1] \times [0,1]$
Functia este continua, conditiile teoremei precedente sunt satisfacute, rezulta ca integrala exista si
$$\iint_D xydxdy = \int_{-1}^{1}\left[\int_0^1 xydy\right]dx = \int_{-1}^{1}\left(\frac{x^2y^4}{4}\right)\Big|_0^1 dx = \int_{-1}^{1}\frac{x^2}{4}dx = \frac{1}{4}\frac{x^3}{3}\Big|_{-1}^{1} = \frac{1}{6}$$
2) $\iint_D (2x+3y)$, unde $D = \{(x,y) \in R^2 | 0 \le x \le 1, 0 \le y \le 1-x\}$.
Conform teoremei precedente:
$$\iint_D (2x+3y)dxdy = \int_0^1\left(\int_0^{1-x}(2x+3y)dy\right)dx = \int_0^1\left(\left(2xy + \frac{3y^2}{2}\right)\Big|_0^{1-x}\right)dx =$$
$$= \int_0^1\left(2x(1-x) + \frac{3(1-x)^2}{2}\right)dx = \left(x^2 - \frac{2x^3}{3} - \frac{(1-x)^3}{2}\right)\Big|_0^1 = \frac{5}{6}$$

Schimbarea de variabila in integrala dubla.
Rolul schimbarilor de variabile este simplificarea calculelor. In cazul integralei duble, se urmareste transformarea domeniului de integrare intr-un domeniu convenabil in raport cu calcularea integralei.
Fie domeniul inchis D in planul xOy. Cu ajutorul relatiilor $x = x(u,v)$ si $y = y(u,v)$ realizam transformarea unui domeniu D', punctul (x,y) obtinut prin relatiile de mai sus va fi in D si reciproc.
Sa presupunem ca x(u,v) si y(u,v) au derivate partiale continue in D' si ca determinantul (numit jacobianul transformarii) $J(u,v) = \begin{vmatrix} x'_u x'_v \\ y'_u y'_v \end{vmatrix} \neq 0$

Teorema 5.1. Fie f(x,y) o functie integrabila pe D: daca se efectueaza o transformare a lui D in D' cu proprietatile de mai sus, atunci:
$\iint_D f(x,y)dxdy = \iint_D f(x(u,v), y(u,v)) \cdot J(u,v)dudv$.

Observatie. Una din cele mai uzuale transformari este trecerea de la coordonate carteziene la coordonate polare:
$x = \rho\cos\theta$ si $y = \rho\sin\theta, \rho \geq 0, \theta \in [0,2\pi]$, pentru care:
$$J(\rho,\theta) = \begin{vmatrix} \cos\theta - \rho\sin\theta \\ \sin\theta....\rho\cos\theta \end{vmatrix} = \rho\cos^2\theta + \rho\sin^2\theta = \rho .$$

Exemplu. Sa se calculeze:
$I = \iint_D \sqrt{x^2 + y^2} e^{\sqrt{x^2+y^2}} dxdy$ unde $D = \{(x,y) | 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4, x \geq 0, y \geq 0\}$.
Facem schimbarea de variabila:
$\begin{matrix} x = \rho\cos\theta \\ y = \rho\sin\theta \end{matrix}$, unde $1 \leq \rho \leq 2$ si $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$. Atunci:
$$I = \iint_D \rho^2 e^p dpd\theta = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\int_1^2 \rho^2 e^p dp \right) d\theta = \frac{\pi}{2}(\rho^2 - 2p + 2)e^p \Big|_1^2 = \frac{\pi}{2}(2e^2 - e).$$