Cuprins

Capitolul 7

Ecuaţii cu derivate parţiale. Capitol introductiv

7.1 Itinerar de analiză matematică în $\mathbb{R}^n$

Notăm cu $\mathbb{R}^n$ spaţiul euclidian n-dimensional. Un punct din $\mathbb{R}^n$ are n coordonate $x_1, x_2, ..., x_n$ iar vectorul său de poziţie va fi notat cu x. Astfel, $x = (x_1, x_2, ..., x_n)$. Pentru $n \in \{2, 3, 4\}$ putem folosi şi alte litere pentru coordonate; de exemplu (x, y) pentru $n = 2$, (x, y, z) pentru $n = 3$ etc.

Distanţa (euclidiană) dintre două puncte $x = (x_1, ..., x_n)$ şi $y = (y_1, ..., y_n)$ este dată de

$$d(x, y) = \left(\sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^2\right)^{1/2}.$$

Discul (sau *bila*) *deschis* de centru $x^0 \in \mathbb{R}^n$ şi rază $\rho > 0$ este dat de mulţimea punctelor x din $\mathbb{R}^n$ aflate faţă de x^0 la distanţă mai mică decât ρ

$$B(x^0, \rho) = \{x : \ x \in \mathbb{R}^n, \ d(x, x^0) < \rho\}.$$

Corespunzător, *bila închisă* este

$$\overline{B}(x^0, \rho) = \{x : \ x \in \mathbb{R}^n, \ d(x, x^0) \leq \rho\}.$$

Suprafaţa discului din $\mathbb{R}^n$ se numeşte *sfera* din $\mathbb{R}^n$ şi este dată de

$$S(x^0, r) = \{x; \ x \in \mathbb{R}^n, \ d(x, x^0) = \rho\}.$$

Spunem că mulţimea $A \subset \mathbb{R}^n$ este *deschisă* dacă pentru orice element x din A există o bilă cu centrul în x conţinută în A. Mulţimea $A \subset \mathbb{R}^n$ se numeşte *închisă* dacă complementara sa este deschisă.

Spunem că punctul x este *punct frontieră* al mulţimii A dacă orice bilă cu centrul în x conţine atât puncte din A cât şi din complementara lui A. Mulţimea punctelor frontieră ale mulţimii A poartă denumirea de *frontiera* lui A şi se notează cu ∂A.

Este simplu de observat că $\partial B(x^0,\rho) = \partial \overline{B}(x^0,\rho) = S(x^0,\rho)$.

Vom spune că frontiera ∂A a mulţimii A este de clasă C^1 dacă în fiecare punct al frontierei există spaţiul tangent la A şi acesta variază continuu în raport cu punctul. În acest caz vom mai spune că frontiera este *netedă*.

Mulţimea deschisă $A \subset \mathbb{R}^n$ se numeşte *conexă* dacă oricare două puncte din A pot fi unite printr-o linie poligonală inclusă în A. O mulţime deschisă şi conexă din $\mathbb{R}^n$ se numeşte *domeniu*. În mod obişnuit (exceptând cazurile când se fac precizări speciale) pentru desemnarea unui domeniu vom folosi litera Ω.

Dacă Ω este un domeniu din $\mathbb{R}^n$ iar $u : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ este o funcţie din clasa $C^1(\Omega)$, definim *gradientul* funcţiei u, notat şi $\operatorname{grad} u$ sau ∇u, funcţia cu valori vectoriale dată de

$$\operatorname{grad} u = \nabla u = \left(\frac{\partial u}{\partial x_1}, \frac{\partial u}{\partial x_2}, \cdots, \frac{\partial u}{\partial x_n}\right).$$

Valoarea gradientului funcţiei u în punctul $x = (x_1, ..., x_n) \in \Omega$ este un vector care are drept componente valorile derivatelor parţiale ale lui u în acest punct. Ne putem imagina $\operatorname{grad} u$ ca un *câmp de vectori* ce are ca elemente vectorii, $\operatorname{grad} u(x)$, $x \in \Omega$. Câmpul vectorial ∇u este orientat în direcţia celei mai mari creşteri a lui u. Dacă $\vec{v} = -\nabla u$, atunci u se numeşte *potenţialul* lui $\vec{v}$.

Fie $\vec{v} = (v_1, v_2, ..., v_n)$ un câmp de vectori definit pe domeniul Ω, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ cu $v_i \in C^1(\Omega)$, $i = \overline{1,n}$. Se numeşte *divergenţa* câmpului $\vec{v}$, notat $\operatorname{div} \vec{v}$, funcţia

$$\operatorname{div} \vec{v} = \frac{\partial v_1}{\partial x_1} + \frac{\partial v_2}{\partial x_2} + \cdots + \frac{\partial v_n}{\partial x_n}\cdot$$

Spunem că $\vec{v}$ este câmp vectorial *solenoidal* în Ω dacă

$$\operatorname{div} \vec{v} = 0 \quad \text{în } \Omega.$$

Dacă $n = 3$ iar $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$ este un câmp vectorial de clasă C^1, *rotorul* lui $\vec{v}$, notat $\operatorname{rot} \vec{v}$ este câmpul vectorial definit prin

$$\operatorname{rot} \vec{v} = \left(\frac{\partial v_3}{\partial x_2} - \frac{\partial v_2}{\partial x_3}, \frac{\partial v_1}{\partial x_3} - \frac{\partial v_3}{\partial x_1}, \frac{\partial v_2}{\partial x_1} - \frac{\partial v_1}{\partial x_2}\right).$$

Observaţie.

(i) Noţiunile de divergenţă şi rotor au fost introduse de Maxwell.

(ii) Pe viitor vom renunţa să punem săgeata ($\vec{}$) deasupra literei ce desemnează câmpul vectorial, afară de cazul când este pericol de confuzie.

Dacă $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n)$ este un n-uplu de funcţii continue în domeniul Ω iar $u : \Omega \to \mathbb{R}$ este o funcţie diferenţiabilă, definim derivata *direcţională* $\partial_\lambda u$ sau $\dfrac{\partial u}{\partial \lambda}$ prin

$$\frac{\partial u}{\partial \lambda}(x) = \lambda(x) \cdot \nabla u(x) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i(x) \cdot \frac{\partial u}{\partial x_i}(x) = (\nabla u(x), \lambda(x)).$$

Dacă $\lambda = \nu$, ν fiind versorul normalei exterioare la Ω, de componente $(\nu_1, ..., \nu_n)$, atunci

$$\frac{\partial u}{\partial \nu} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial u}{\partial x_i} - \nu_i = (\nabla u, \nu)$$

se numeşte *derivata normală* sau *derivata după direcţia normalei exterioare* la Ω.

7.2 Teorema divergenţei şi formulele lui Green

Rezultatele următoare sunt foarte utile în studiul ecuaţiilor cu derivate parţiale. Deoarece ele sunt cunoscute de la cursurile de analiză matematică noi vom prezenta doar enunţurile şi câteva consecinţe importante. Pentru început prezentăm *teorema lui Gauss–Ostrogradski* (F. Gauss (1777–1855), M. Ostrogradski (1801)–1861)) cunoscută şi sub numele de *teorema divergenţei*, din care vom deduce identităţile lui Green.

Teorema lui Gauss–Ostrogradski (teorema divergenţei). *Fie Ω o mulţime deschisă şi mărginită din $\mathbb{R}^n$ cu frontiera $\partial\Omega$ de clasă C^1. Fie $f : \overline{\Omega} \longrightarrow \mathbb{R}^n$ astfel încât $f \in C(\bar{\Omega}) \cap C^1(\Omega)$. Atunci are loc egalitatea*

$$\int_\Omega \mathrm{div}\, f\, dx = \int_{\partial\Omega} f \cdot \nu\, d\sigma = \int_{\partial\Omega} (f, \nu) d\sigma.$$

Am notat cu $f \cdot \nu$ (respectiv (f, ν)) produsul scalar al vectorilor f şi ν unde $\nu(x) = (\nu_1(x), ..., \nu_n(x))$ este versorul normalei exterioare în punctul $x \in \partial\Omega$.

Două aplicaţii imediate ale teoremei divergenţei sunt cunoscute sub numele de *formulele lui Green.*

Aceste formule se deduc uşor considerând două funcţii $u, v : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}$, suficient de netede şi aplicând teorema divergenţei funcţiei $f = \mathrm{div}(u\nabla v)$ împreună cu egalitatea evidentă

$$\mathrm{div}(u\nabla v) = u\Delta v + \nabla u \cdot \nabla v \text{ în } \Omega,$$

unde operatorul Δ este definit prin

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \cdots + \frac{\partial^2 u}{\partial x_n^2}$$

şi este cunoscut sub numele de *operatorul lui Laplace*. Obţinem astfel

Prima formulă a lui Green. Dacă u şi v sunt două funcţii astfel încât $u, v \in C^1(\bar{\Omega})$, $\Delta v \in C(\bar{\Omega})$, atunci

$$\int_\Omega u \Delta v \, dx = -\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v \, dx + \int_{\partial\Omega} u \frac{\partial v}{\partial \nu} d\sigma.$$

Inversând rolurile lui u şi v şi scăzând relaţiile obţinute deducem

A doua formulă a lui Green. Fie $u, v \in C^1(\bar{\Omega})$ astfel încât $\Delta u, \Delta v \in C(\bar{\Omega})$. Atunci

$$\int_\Omega (u\Delta v - v\Delta u) dx = \int_{\partial\Omega} \left(u\frac{\partial v}{\partial \nu} - v\frac{\partial u}{\partial \nu} \right) d\sigma.$$

Funcţia $u \in C^2(\Omega)$ se numeşte *armonică* pe Ω dacă

$$\Delta u(x) = 0, \ \forall \, x \in \Omega.$$

Din prima formulă a lui Green rezultă

Corolar (teorema lui Gauss). *Dacă funcţia $u \in C^2(\Omega) \cap C^1(\bar{\Omega})$ este armonică pe Ω, atunci*

$$\int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial \nu} d\sigma = 0.$$

7.3 Definiţii şi exemple

O relaţie de forma

$$F\left(x_1, x_2, ..., x_n, u, \frac{\partial u}{\partial x_1}, ..., \frac{\partial u}{\partial x_n}, \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}, ..., \frac{\partial^k u}{\partial x_i^k}, ... \right) = 0 \tag{3.1}$$

unde $x = (x_1, x_2, ..., x_n) \in \Omega \subseteq \mathbb{R}^n$, reprezintă variabila independentă, iar $u = u(x) = u(x_1, x_2, ..., x_n)$ reprezintă funcţia necunoscută, se numeşte *ecuaţie cu derivate parţiale*. Ordinul maxim de derivare al funcţiei u se numeşte *ordinul* ecuaţiei cu derivate parţiale.

Spunem că ecuaţia cu derivate parţiale (3.1) este *liniară* dacă F este liniară în raport cu funcţia necunoscută şi toate derivatele acesteia.

Dacă F este liniară numai în raport cu derivatele de ordin maxim ale funcţiei necunoscute spunem că ecuaţia (3.1) este *cvasiliniară*. În celelalte cazuri ecuaţia se numeşte *neliniară*. În cele ce urmează ne vom ocupa mai ales de ecuaţii cu derivate parţiale de ordinul al doilea liniare. Justificarea acestei opţiuni este dată de faptul că, pe de o parte aceste ecuaţii sunt mai uşor de abordat cu instrumente matematice aflate la îndemâna studenţilor, iar pe de altă parte ele constituie modele matematice acceptate pentru fenomene fizice clasice precum fenomenul difuziei, propagarea căldurii, propagarea undelor etc.

Prin *soluţie clasică* pentru (3.1) înţelegem o funcţie $u : \Omega \to \mathbb{R}$ care este continuă împreună cu toate derivatele sale parţiale care apar în ecuaţie şi, în plus, satisface relaţia (3.1) în orice punct x din Ω.

Spunem că ecuaţia (3.1) este *ecuaţie liniară omogenă* dacă se poate scrie sub forma $Lu = 0$ unde L este un operator liniar, adică

$$L(u + v) = Lu + Lv \text{ şi } L(\alpha u) = \alpha Lu, \ \forall \alpha \in \mathbb{R}.$$

În cazul în care ecuaţia (3.1) se scrie sub forma $Lu = f$ unde L este operator liniar iar $f : \Omega \to \mathbb{R}$ este o funcţie dată neidentic nulă, ecuaţia se numeşte *neomogenă*.

Ca şi în cazul ecuaţiilor diferenţiale în cazul liniar omogen are loc *principiul superpoziţiei*: dacă u şi v sunt soluţii atunci $u+v$ şi αu sunt, de asemenea, soluţii ale aceleiaşi ecuaţii. Soluţia generală a unei ecuaţii liniare neomogene se obţine ca sumă dintre soluţia generală a ecuaţiei omogene asociate şi o soluţie particulară a ecuaţiei neomogene.

Prin exemplele care urmează ilustrăm cele trei tipuri de ecuaţii cu derivate parţiale: liniare, cvasiliniare şi neliniare.

Ecuaţii cu derivate parţiale liniare

1. Ecuaţia lui Laplace: $\Delta u = 0$
2. Ecuaţia lui Poisson: $\Delta u = f$
3. Ecuaţia căldurii: $\dfrac{\partial u}{\partial t} - \Delta u = f$
4. Ecuaţia undelor: $\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \Delta u = f.$

Aceste ecuaţii vor apare frecvent în cursul de faţă.

Ecuaţiile lui Navier–Stokes (cvasiliniare)

$$\begin{cases} \dfrac{\partial v}{\partial t} - \nu \Delta v + \displaystyle\sum_{i=1}^{3} v_i \dfrac{\partial v}{\partial x_i} + \dfrac{1}{\rho} \nabla p = f(x,t) \\ \dfrac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho v) = 0. \end{cases}$$

Ele descriu mişcarea unui lichid sau gaz. Aici v (de coordonate v_1, v_2, v_3) este vectorul viteză al particulei de lichid care la momentul t se găseşte în punctul $x(x_1, x_2, x_3)$; p este presiunea; ρ – densitatea lichidului; ν – coeficientul de vâscozitate, iar f – vectorul forţelor masice care acţionează asupra mediului.

Ecuaţiile Monge–Ampere (neliniare)

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \right)^2 = f(x,y).$$

Aceste ecuaţii joacă un rol important în probleme de geometrie.

Încheiem această prezentare cu ecuaţiile lui Maxwell care reprezintă un corolar al celor prezentate anterior.

Ecuaţiile lui Maxwell

Bazându-se pe experimentele realizate de Faraday şi Oersted, J.C. Maxwell a formulat sistemul de ecuaţii ce descriu câmpul electromagnetic dintr-un mediu material. Din acest motiv, acest set de ecuaţii este cunoscut sub numele de *ecuaţiile câmpului electromagnetic* sau *ecuaţiile lui Maxwell*. Acest sistem are forma

$$\begin{cases} \operatorname{div}(\varepsilon \overrightarrow{E}) = 4\pi\rho \\ \operatorname{div}(\mu \overrightarrow{H}) = 0 \\ \operatorname{rot} \overrightarrow{E} = \dfrac{1}{c} \dfrac{\partial}{\partial t}(\mu \overrightarrow{H}) \\ \operatorname{rot} \overrightarrow{H} = \dfrac{1}{c} \dfrac{\partial}{\partial t}(\varepsilon \overrightarrow{E}) + \dfrac{4\pi}{c} \overrightarrow{I} \end{cases} \tag{3.2}$$

unde vectorul $\overrightarrow{E}(x,y,z,t)$ reprezintă intensitatea câmpului electric (cu componentele scalare E_1, E_2, E_3), $\overrightarrow{H}(x,y,z,t)$ este intensitatea câmpului magnetic (cu componentele scalare H_1, H_2, H_3), $\overrightarrow{I}(x,y,z,t)$ este densitatea curentului de conducţie, $\rho(x,y,z)$ este densitatea sarcină, ε este constanta dielectrică a mediului, μ este permeabilitatea magnetică a mediului iar $c = 3 \cdot 10^5$ Km/s reprezintă viteza de propagare a luminii în vid.

Menţionăm faptul că în unele cazuri particulare ecuaţiile câmpului electromagnetic devin ecuaţii cu derivate parţiale de ordinul al doilea. Prezentăm două astfel de cazuri.

i) Presupunem că: $\rho = 0$, $\varepsilon =$ constant, $\mu =$ constant şi $\overline{I} = \lambda \overrightarrow{E}$ (legea lui Ohm, unde λ este o constantă).

În acest caz, sistemul (3.2) devine

$$\begin{cases} \operatorname{div} \overrightarrow{E} = 0 \\ \operatorname{div} \overrightarrow{H} = 0 \\ \operatorname{rot} \overrightarrow{E} = \dfrac{-\mu}{c} \dfrac{\partial \overline{H}}{\partial t} \\ \operatorname{rot} \overrightarrow{H} = \dfrac{\varepsilon}{c} \dfrac{\partial \overline{E}}{\partial t} + \dfrac{4\pi\lambda}{c} \overrightarrow{E}. \end{cases}$$

De aici rezultă că

$$\begin{aligned} \operatorname{rot}(\operatorname{rot} \overrightarrow{E}) &= -\frac{\mu}{c} \operatorname{rot} \left(\frac{\partial \overrightarrow{H}}{\partial t} \right) = \frac{-\mu}{c} \frac{\partial}{\partial t} (\operatorname{rot} \overrightarrow{H}) = \\ &= \frac{-\mu}{c} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\varepsilon}{c} \frac{\partial \overrightarrow{E}}{\partial t} + \frac{4\pi\lambda}{c} \overrightarrow{E} \right) = \frac{-\mu\varepsilon}{c^2} \frac{\partial^2 \overrightarrow{E}}{\partial t^2} - \frac{4\pi\lambda\mu}{c^2} \frac{\partial \overrightarrow{E}}{\partial t}. \end{aligned}$$

Însă $\operatorname{rot}(\operatorname{rot} \overrightarrow{E}) = \nabla(\operatorname{div} \overrightarrow{E}) - \Delta \overrightarrow{E} = -\Delta \overrightarrow{E}$. Rezultă că

$$\Delta \overrightarrow{E} = \frac{\mu\varepsilon}{c^2} \frac{\partial^2 \overrightarrow{E}}{\partial t^2} + \frac{4\pi\lambda\mu}{c^2} \frac{\partial \overrightarrow{E}}{\partial t}$$

deci, pe componente E_i verifică o ecuaţie cu derivate parţiale de ordinul doi cunoscută sub numele de *ecuaţia telegrafiştilor*.

Acelaşi lucru (şi în acelaşi mod) se demonstrează despre $\overrightarrow{H}$.

ii) În cazul electrostatic ($\overrightarrow{H} = 0$ şi $\overrightarrow{E}$ nu depinde de timp), ecuaţiile lui Maxwell devin

$$\operatorname{div}(\varepsilon \overrightarrow{E}) = 4\pi\rho, \ \operatorname{rot} \overrightarrow{E} = 0.$$

În acest caz $\overrightarrow{E} = -\nabla w_0$ şi, presupunând ε constant, potenţialul w_0 verifică ecuaţia lui Poisson $\Delta w_0 = -4\pi \dfrac{\rho}{\varepsilon}\cdot$

7.4 Probleme ale teoriei ecuaţiilor cu derivate parţiale. Condiţii iniţiale şi la limită. Corectitudinea problemei

O ecuaţie cu derivate parţiale poate avea mai multe soluţii. Mulţimea lor formează *soluţia generală*. Pentru a individualiza o soluţie din mulţimea soluţiilor unei ecuaţii cu derivate parţiale trebuie să introducem condiţii suplimentare, condiţii care depind de tipul ecuaţiei studiate. Deoarece avem în vedere ecuaţiile fizicii matematice, ne vom referi la condiţiile impuse acestor ecuaţii.

S-au conturat două tipuri de condiţii:

- *condiţii iniţiale* (ce vizează variabila timp)
- *condiţii la limită* (ce vizează variabilele spaţiale).

Condiţiile iniţiale ne sunt familiare de la ecuaţii diferenţiale iar problemele ce constau în rezolvarea unei ecuaţii cu derivate parţiale cu condiţii iniţiale se numesc (ca şi în cazul ecuaţiilor diferenţiale) *probleme Cauchy*. Însă condiţiile iniţiale nu sunt suficiente pentru a asigura unicitatea soluţiei unei ecuaţii cu derivate parţiale deoarece aceasta depinde de mai multe variabile. De aceea este nevoie să introducem condiţii şi asupra variabilelor spaţiale. Acestea se mai numesc şi *condiţii la limită*, deoarece se referă la comportarea soluţiei pe frontiera domeniului. Următoarele trei tipuri de condiţii la limită sunt cele mai importante:

(i) *condiţii la limită de tip Dirichlet*

(ii) *condiţii la limită de tip Neumann*

(iii) *condiţii la limită de tip Robin.*

Problema Dirichlet (Neumann sau Robin) constă în rezolvarea unei ecuaţii cu derivate parţiale cu condiţii la limită de tip Dirichlet (Neumann sau Robin). Exemplificăm aceste tipuri de probleme pentru ecuaţia Poisson.

Aceste probleme se formulează pentru ecuaţii ce descriu fenomene staţionare, independente de timp.

Problema Dirichlet. Fie Ω un domeniu mărginit cu frontiera $\partial\Omega$. Să se determine $u \in C^2(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$ astfel încât

$$\begin{cases} \Delta u(x) = f(x), & \forall\, x \in \Omega \\ u(x) = \varphi(x), & \forall\, x \in \partial\Omega \end{cases}$$

unde $f \in C(\bar{\Omega}),\ \varphi \in C(\partial\Omega)$ sunt funcţii date.

Problema Neumann. Să se determine $u \in C^2(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$ astfel încât

$$\begin{cases} \Delta u(x) = f(x), & \forall\, x \in \Omega \\ \dfrac{\partial u}{\partial \nu}(x) = g(x), & \forall\, x \in \partial\Omega \end{cases}$$

unde $f \in C(\bar{\Omega})$, $g \in C(\partial\Omega)$ sunt funcţii date, $\dfrac{\partial u}{\partial \nu}$ fiind derivata funcţiei u după direcţia normalei exterioare în punctul x la frontiera $(\partial\Omega)$.

Problema Robin. Să se determine $u \in C^2(\Omega) \cap C^2(\bar{\Omega})$ astfel încât

$$\begin{cases} \Delta u(x) = f(x), & \forall\, x \in \Omega \\ \alpha \dfrac{\partial u}{\partial \nu}(x) + \beta u(x) = h(x), & \forall\, x \in \partial\Omega \end{cases}$$

$\alpha, \beta \in \mathbb{R},\ \alpha, \beta \geq 0,\ \alpha + \beta \neq 0$ iar $f \in C(\bar{\Omega})$ şi $h \in C(\partial\Omega)$.

Problemele mixte se formulează pentru ecuaţii cu derivate parţiale de tip parabolic sau hiperbolic. Problema mixtă de tip Cauchy–Dirichlet constă în rezolvarea unei ecuaţii cu derivate parţiale cu condiţii iniţiale referitoare la variabila timp şi condiţii de tip Dirichlet referitoare la variabilele spaţiale. Analog se formulează şi alte tipuri de probleme mixte. Precizăm că se pot formula şi alte tipuri de probleme referitoare la ecuaţii cu derivate parţiale, însă doar cele prezentate aici vor fi tratate în capitolele următoare.

Spunem că o problemă matematică este *corect pusă* dacă satisface următoarele cerinţe

(j) *Existenţa:* există cel puţin o soluţie a problemei.

(jj) *Unicitatea:* există cel mult o soluţie a problemei.

(jjj) *Continuitatea:* soluţia depinde continuu de datele problemei.

Prima cerinţă este o condiţie logică – problema matematică are o soluţie deoarece ea trebuie să reflecte realitatea fizică.

Dacă o problemă nu e bine pusă, spunem că este *incorect pusă.* Astfel de probleme, fie nu au soluţii, fie au mai multe soluţii, fie nu depind continuu de date. Ecuaţiile cu derivate parţiale oferă cele mai sugestive exemple de probleme incorect puse. Aceasta deoarece ele modelează fenomene fizice şi o neconcordanţă între natura fizică a fenomenului şi condiţiile impuse asupra soluţiei ecuaţiei conduc la probleme incorect puse.

Un exemplu standard (datorat lui J. Hadamard (1865–1963)) de problemă incorect pusă este dată de ecuaţia lui Laplace în semiplanul superior cu date iniţiale

$$(\mathrm{P_n}) \qquad \begin{cases} \Delta u = 0, & y > 0 \\ u(x,0) = 0, & \dfrac{\partial u}{\partial y}(x,0) = \dfrac{\sin nx}{n}, \quad x \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

Fie şi problema

$$(\mathrm{P_0}) \qquad \begin{cases} \Delta u = 0, & y > 0 \\ u(x,0) = 0, & \dfrac{\partial u}{\partial y}(x,0) = 0, \; x \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

Observăm că $u_n(x,y) = \dfrac{\sin nx(e^{ny} - e^{-ny})}{2n^2}$ şi $u_0(x,y) = 0$ sunt soluţii ale problemelor $(\mathrm{P_n})$ şi, respectiv, $(\mathrm{P_0})$. Observăm că pentru $n \to \infty$ datele problemei $(\mathrm{P_n})$ converg uniform la datele problemei $(\mathrm{P_0})$. În schimb

$$\limsup_{n\to\infty} |u_n(x,y) - u_0(x,y)| = +\infty, \; \forall\,(x,y), \; x \neq 0, \; y > 0.$$

Prin urmare, soluţia nu depinde continuu de datele problemei, deoarece schimbări minore în datele problemei conduc la "explozii" ale soluţiei.

7.5 Clasificarea ecuaţiilor cu derivate parţiale liniare de ordinul al doilea

7.5.1 Definiţii. Noţiuni generale

Există diverse modalităţi de "clasificare" a ecuaţiilor cu derivate parţiale: liniare sau neliniare; staţionare sau de evoluţie etc. Cea mai uzitată clasificare este cea a ecuaţiilor cu derivate parţiale liniare de ordinul al doilea după "tipul" ecuaţiei. Conform acestei clasificări, majoritatea ecuaţiilor cu derivate parţiale de ordinul al doilea liniare aparţine unuia din cele trei tipuri de bază: eliptic, parabolic, hiperbolic.

Considerăm următoarea ecuaţie cu derivate parţiale liniară de ordinul al doilea

$$(5.1) \qquad \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x) \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}(x) + \sum_{i=1}^{n} b_i(x) \frac{\partial u}{\partial x_i}(x) + c(x)u(x) = f(x)$$

unde $a_{ij} = a_{ji}$, $1 \leq i, \; j \leq n$, b_i, c şi f sunt funcţii definite pe un domeniu $\Omega \subset \mathbb{R}^n$.

Fie $\bar{x} \in \Omega$ un punct oarecare fixat. Polinomul:

$$P(\bar{x}, \xi) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(\bar{x})\xi_i\xi_j,$$

unde $\xi = (\xi_1, ..., \xi_n) \in \mathbb{R}^n$, se numeşte *polinomul caracteristic*, în punctul $\bar{x}$, al ecuaţiei (5.1). Ecuaţia (5.1) se numeşte *eliptică* în $\bar{x}$, dacă $P(\bar{x}, \xi) > 0$, $\forall \xi \in \mathbb{R}^n \backslash \{0\}$ sau $P(\bar{x}, \xi) < 0$, $\forall \xi \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$.

Ecuaţia (5.1) se numeşte *parabolică* în punctul $\bar{x}$, dacă $P(\bar{x}, \xi) \geq 0$, $\forall \xi \in \mathbb{R}^n$ sau dacă $P(\bar{x}, \xi) \leq 0$, $\forall \xi \in \mathbb{R}^n$ şi există cel puţin un vector $\xi_0 \neq 0$ astfel încât să avem $P(\bar{x}, \xi_0) = 0$.

Ecuaţia (5.1) se numeşte *hiperbolică* în punctul $\bar{x}$, dacă există cel puţin doi vectori nenuli, ξ şi η, astfel că $P(\bar{x}, \xi) > 0$ şi $P(\bar{x}, \eta) < 0$. Vom spune că ecuaţia (5.1) este eliptică, parabolică sau hiperbolică în Ω, dacă păstrează acest atribut în toate punctele domeniului Ω.

Ţinând cont de aceste definiţii, se verifică uşor că: ecuaţia lui Laplace este eliptică, ecuaţia propagării căldurii este parabolică, iar ecuaţia propagării undelor este hiperbolică.

Dacă $a_{ij} \in \{-1, 0, 1\}$ pentru $\forall i, j \in \{1, 2, ..., n\}$, spunem că ecuaţia (5.1) este de formă *canonică*. În acest caz, stabilirea tipului ecuaţiei este un lucru simplu.

Ne punem întrebarea dacă nu se poate face o transformare asupra ecuaţiei (5.1) încât aceasta să capete forma canonică. Acest lucru este posibil prin schimbarea variabilelor independente în două cazuri: i) când $n = 2$ şi ii) când coeficienţii a_{ij} sunt constanţi.

În al doilea caz se face apel la rezultate de algebră liniară care permit aducerea unei forme pătratice la forma canonică (vezi [27]). Ne vom ocupa mai pe larg de primul caz. În acest caz, ecuaţia (5.1) are forma

$$\begin{gathered} A(x, y)u_{xx} + B(x, y)u_{xy} + C(x, y)u_{yy} + \\ +D(x, y)u_x + E(x, y)u_y + F(x, y)u = G(x, y) \end{gathered} \tag{5.2}$$

cu A, B, C, D, E, F, G funcţii continue în domeniul $\Omega \subset \mathbb{R}^2$. În acest caz, tipul ecuaţiei (5.1) în (x_0, y_0) este dat de semnul expresiei

$$B^2(x_0, y_0) - 4A(x_0, y_0)C(x_0, y_0).$$

Să facem schimbarea de variabile independente

$$\xi = \xi(x, y), \;\; \eta = \eta(x, y) \tag{5.3}$$

cu ξ, η de clasă C^2 în Ω şi iacobianul

$$J = \begin{vmatrix} \xi_x & \xi_y \\ \eta_x & \eta_y \end{vmatrix}$$

diferit de zero în orice punct din Ω.

Trecând la noile coordonate avem

$$\begin{aligned}
u_x &= u_\xi \xi_x + u_\eta \eta_x \\
u_y &= u_\xi \xi_y + u_\eta \eta_y \\
u_{xx} &= u_{\xi\xi}\xi_x^2 + 2u_{\xi\eta}\xi_x\eta_x + u_{\eta\eta}\eta_x^2 + u_\xi \xi_{xx} + u_\eta \eta_{xx} \\
u_{xy} &= u_{\xi\xi}\xi_x\xi_y + u_{\xi\eta}(\xi_x\eta_y + \xi_y\eta_x) + u_{\eta\eta}\eta_x\eta_y + u_\xi \xi_{xy} + u_\eta \eta_{xy} \\
u_{yy} &= u_{\xi\xi}\xi_y^2 + 2u_{\xi\eta}\xi_x\eta_y + u_{\eta\eta}\eta_y^2 + u_\xi \xi_{yy} + u_\eta \eta_{yy}.
\end{aligned}$$

Substituind aceste cantităţi în (2) obţinem

$$A^* u_{\xi\xi} + B^* u_{\xi\eta} + C^* u_{\eta\eta} + D^* u_\xi + E^* u_\eta + F^* u = G^* \tag{5.4}$$

unde

$$\begin{aligned}
A^* &= A\xi_x^2 + B\xi_x\xi_y + C\xi_y^2 \\
B^* &= 2A\xi_x\eta_x + B(\xi_x\eta_y + \xi_y\eta_x) + 2C\xi_y\eta_y \\
C^* &= A\eta_x^2 + B\eta_x\eta_y + C\eta_y^2 \\
D^* &= A\xi_{xx} + B\xi_{xy} + C\xi_{yy} + D\xi_x + E\xi_y \\
E^* &= A\eta_{xx} + B\eta_{xy} + C\eta_{yy} + D\eta_x + E\eta_y \\
F^* &= F \\
G^* &= G.
\end{aligned}$$

Observăm că ecuaţia (5.4) are aceeaşi formă ca (5.2) iar natura sa a rămas invariantă în urma transformării (5.3) de iacobian nenul, deoarece

$$B^{*2} - 4A^*C^* = J^2(B^2 - 4AC).$$

Întrucât pentru stabilirea tipului ecuaţiei (5.2) am folosit doar coeficienţii A, B, C, vom rescrie (5.2) ca

$$Au_{xx} + Bu_{xy} + Cu_{yy} = H \text{ unde } H = H(x, y, u, u_x, u_y), \tag{5.5}$$

iar ecuaţia (5.4) ca

$$A^* u_{\xi\xi} + B^* u_{\xi\eta} + C^* u_{\eta\eta} = H^* \text{ unde } H^* = H(\xi, \eta, u, u_\xi, u_\eta). \tag{5.6}$$

7.5.2 Curbe caracteristice. Forme canonice

Vom considera problema aducerii ecuaţiei (5.5) la forma canonică. Pentru aceasta, să observăm că A^* şi C^* se obţin din expresia

$$A\varphi_x^2 + B\varphi_x\varphi_y + C\varphi_y^2$$

înlocuind pe $\varphi(x, y)$ prin $\xi(x, y)$ şi $\eta(x, y)$. Să vedem dacă nu e posibil ca, pentru anumite funcţii φ, expresia de mai sus să se anuleze, adică

$$A\varphi_x^2 + B\varphi_x\varphi_y + C\varphi_y^2 = 0. \tag{5.7}$$

Curbele integrale

$$\varphi(x, y) = \text{constant} \tag{5.8}$$

ale acestei ecuaţii neliniare cu derivate parţiale de ordinul întâi se numesc *curbe caracteristice* ale ecuaţiei (5.5).

Din (5.8) deducem

$$d\varphi = \varphi_x dx + \varphi_y dy = 0 \ \text{ sau } \ \frac{\varphi_x}{\varphi_y} = -\frac{dy}{dx}\cdot$$

Înlocuind ultimul raport în relaţia (5.7), obţinem că aceste caracteristici sunt soluţii ale ecuaţiei diferenţiale ordinare

$$A\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 - B\frac{dy}{dx} + C = 0. \tag{5.9}$$

Interpretând aceasta ca o ecuaţie algebrică de gradul al doilea, găsim

$$\frac{dy}{dx} = \left(B + \sqrt{B^2 - 4AC}\right)/2A \tag{5.10}$$

$$\frac{dy}{dx} = \left(B - \sqrt{B^2 - 4AC}\right)/2A. \tag{5.11}$$

Aceste ecuaţii se numesc *ecuaţii caracteristice* pentru familia de curbe din planul xOy unde ξ = constant, η = constant. Integrând cele două ecuaţii se obţin curbele caracteristice ce pot fi scrise sub forma

$$\varphi_1(x, y) = c_1,\ \varphi_2(x, y) = c_2,\ \ c_1, c_2 = \text{constant}.$$

Deci transformarea

$$\xi = \varphi(x, y), \ \ \eta = \varphi_2(x, y)$$

va aduce ecuaţia (5.5) la forma canonică.

a. Ecuaţiile de tip eliptic. Dacă $B^2 - 4AC < 0$, ecuaţia (5.9) interpretată ca ecuaţie algebrică în dy/dx nu are soluţii reale, dar are două soluţii complex conjugate care sunt funcţii complexe, continue ce depind de variabilele reale x şi y.

Astfel, în acest caz, nu avem curbe caracteristice reale. Dacă presupunem coeficienţii A, B, C funcţii analitice de argumentele lor (adică dezvoltabile în serie Taylor în jurul fiecărui punct din domeniul lor de definiţie), atunci putem considera ecuaţia (5.9) pentru x şi y variabile complexe.

Deoarece ξ şi η sunt complexe, introducem noile variabile reale

$$\alpha = (\xi + \eta)/2, \quad \beta = (\xi - \eta)/2i$$

astfel că

$$\xi = \alpha + i\beta, \quad \eta = \alpha - i\beta. \tag{5.12}$$

Pentru început transformăm ecuaţia (5.5). Obţinem

$$A^{**}(\alpha, \beta)u_{\alpha\alpha} + B^{**}(\alpha, \beta)u_{\alpha\beta} + C^{**}(\alpha, \beta)u_{\beta\beta} = H_1(\alpha, \beta, u, u_\alpha, u_\beta) \tag{5.13}$$

în care coeficienţii au aceeaşi formă precum cei din ecuaţia (5.6). Folosind transformarea (5.12), ecuaţiile $A^* = 0$, $C^* = 0$ devin

$$\begin{aligned}(A\alpha_x^2 + B\alpha_x\alpha_y + C\alpha_y^2) - (A\beta_x^2 + B\beta_x\beta_y + C\beta_y^2) + \\ + i[2A\alpha_x\beta_x + B(\alpha_x\beta_y + \alpha_y\beta_x) + 2C\alpha_y\beta_y] = 0\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(A\alpha_x^2 + B\alpha_x\alpha_y + C\alpha_y^2) - (A\beta_x^2 + B\beta_x\beta_y + C\beta_y^2) - \\ - i[2A\alpha_x\beta_x + B(\alpha_x\beta_y + \alpha_y\beta_x) + 2C\alpha_y\beta_y] = 0\end{aligned}$$

sau

$$\begin{aligned}(A^{**} - C^{**}) + iB^{**} = 0 \\ (A^{**} - C^{**}) - iB^{**} = 0.\end{aligned}$$

Aceste ecuaţii sunt satisfăcute dacă

$$A^{**} = C^{**} \text{ şi } B^{**} = 0.$$

Prin urmare, ecuaţia (5.13) se transformă în

$$u_{\alpha\alpha} + u_{\beta\beta} = H_2(\alpha, \beta, u, u_\alpha, u_\beta)$$

unde $H_2 = H_1/A^{**}$. Aceasta este cunoscută sub numele de *forma canonică a ecuaţiei eliptice*.

Exemplu. Ecuaţia
$$u_{xx} + x^2 u_{yy} = 0$$
este eliptică în planul xOy cu excepţia axei $x = 0$ deoarece
$$B^2 - 4AC = -4x^2 < 0,\ \ x \neq 0.$$
Ecuaţiile caracteristice sunt
$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dx} = ix \\ \dfrac{dy}{dx} = -ix \end{cases}$$
care, prin integrare, dau: $2y - ix^2 = c_1,\ \ 2y + ix^2 = c_2$. Astfel, dacă luăm
$$\begin{cases} \xi = 2y - ix^2 \\ \eta = 2y + ix^2 \end{cases}$$
şi, deci,
$$\begin{cases} \alpha = \dfrac{1}{2}(\xi + \eta) = 2y \\ \beta = \dfrac{1}{2i}(\xi - \eta) = -x^2 \end{cases}$$
obţinem forma canonică
$$u_{\alpha\alpha} + u_{\beta\beta} = -\frac{1}{2\beta} u_\beta.$$

Observaţie. Menţionăm faptul că o ecuaţie poate să fie de tipuri diferite în porţiuni diferite ale domeniului. Astfel *ecuaţia lui Tricomi*
$$u_{xx} + x u_{yy} = 0$$
este eliptică pentru $x>0$ şi hiperbolică pentru $x<0$, deoarece $B^2 - 4AC = -\,4x$. Ecuaţia lui Tricomi apare în aerodinamică: domeniul eliptic corespunde mişcării supersonice iar domeniul hiperbolic mişcării subsonice.

b. Ecuaţiile de tip parabolic. În acest caz $B^2 - 4AC = 0$ şi ecuaţiile (5.10), (5.11) coincid. Astfel, există o singură familie de caracteristici, obţinând o singură integrală $\xi =$ constant sau $\eta =$ constant. Deoarece $B^2 - 4AC = 0$ şi $A^* = 0$, avem că:
$$A^* = A\xi_x^2 + B\xi_x\xi_y + C\xi_y^2 = \left(\sqrt{A}\xi_x + \sqrt{C}\xi_y\right)^2 = 0$$

de unde rezultă că

$$\begin{aligned} B^* &= 2A\xi_x\eta_x + B(\xi_x\xi_y + \xi_y\eta_x) + 2C\xi_y\eta_y = \\ &= 2\left(\sqrt{A}\xi_x + \sqrt{C}\xi_y\right)\left(\sqrt{A}\eta_x + \sqrt{C}\eta_y\right) = 0. \end{aligned}$$

Luând valori arbitrare pentru funcţiile $\eta(x, y)$ care sunt funcţional independente de $\xi(x, y)$ (de exemplu, $\eta = y$), iacobianul nu se anulează în domeniul de parabolicitate.

Împărţind (5.6) prin C^*, găsim

$$u_{\eta\eta} = H_3(\xi, \eta, u, u_\xi, u_\eta),\ \ C^* \neq 0$$

sau, dacă alegem $\eta =$ constant ca integrală primă în sistemul (5.10)–(5.11)

$$u_{\xi\xi} = H_3^*(\xi, \eta, u, u_\xi, u_\eta).$$

Una din aceste forme poartă denumirea de *forma canonică a ecuaţiei parabolice.*

Exemplu. Ecuaţia

$$x^2u_{xx} + 2xyu_{xy} + y^2u_{yy} = 0$$

are discriminantul $\Delta = B^2 - 4AC = 4x^2y^2 - 4x^2y^2 = 0$. Deci ecuaţia este parabolică în tot planul. Ecuaţia caracteristică este

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x}$$

şi curba caracteristică corespunzătoare $\dfrac{y}{x} =$ constant.

Luând transformarea de coordonate

$$\begin{cases} \xi = \dfrac{y}{x} \\ \eta = y \end{cases}$$

obţinem

$$u_{\eta\eta} = 0, \quad \text{pentru } y \neq 0.$$

c. Ecuaţiile de tip hiperbolice. Dacă $B^2 - 4AC > 0$, ecuaţiile (5.10) şi (5.11) dau două familii reale şi distincte de caracteristici. Ecuaţia (5.6) se reduce la

$$u_{\xi\eta} = H_1 \tag{5.14}$$

unde $H_1 = H^*/B^*$. Deoarece iacobianul transformării este nenul, se arată simplu că $B^* \neq 0$. Această formă se mai numeşte *prima formă canonică a ecuaţiei hiperbolice.*

Dacă introducem noile variabile independente

$$\begin{cases} \alpha = \xi + \eta \\ \beta = \xi - \eta \end{cases}$$

atunci ecuaţia (5.14) se transformă în

$$u_{\alpha\alpha} - u_{\beta\beta} = H_2(\alpha, \beta, u, u_\alpha, u_\beta)$$

care se numeşte *a doua formă canonică a ecuaţiei hiperbolice.*

Exemplu. Să se stabilească tipul şi să se aducă la forma canonică ecuaţia

$$y^2 u_{xx} - x^2 u_{yy} = 0.$$

Rezolvare. În acest caz, $A{=}y^2$, $B{=}0$, $C = -x^2$, deci $B^2{-}4AC{=}4x^2y^2{>}0$. Prin urmare, ecuaţia este hiperbolică în tot planul xOy, cu excepţia axelor de coordonate $x = 0$ şi $y = 0$. Din ecuaţiile caracteristice (5.10), (5.11) obţinem

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{x}{y} \\ \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{-x}{y} \end{cases}$$

care, prin integrare, conduc la

$$\begin{cases} \dfrac{1}{2}y^2 - \dfrac{1}{2}x^2 = c_1 \\ \dfrac{1}{2}y^2 + \dfrac{1}{2}x^2 = c_2. \end{cases}$$

Pentru a aduce ecuaţia iniţială la forma canonică, facem transformarea de variabile

$$\begin{cases} \xi = \dfrac{1}{2}y^2 - \dfrac{1}{2}x^2 \\ \eta = \dfrac{1}{2}y^2 + \dfrac{1}{2}x^2. \end{cases}$$

Astfel

$$\begin{aligned} u_x &= u_\xi \xi_x + u_\eta \eta_x = -xu_\xi + xu_\eta \\ u_y &= u_\xi \xi_y + u_\eta \eta_y = yu_\xi + yu_\eta \\ u_{xx} &= x^2 u_{\xi\xi} - 2x^2 u_{\xi\eta} + x^2 u_{\eta\eta} - u_\xi + u_\eta \\ u_{yy} &= y^2 u_{\xi\xi} + 2y^2 u_{\xi\eta} + y^2 u_{\eta\eta} + u_\xi + u_\eta \end{aligned}$$

iar ecuaţia iniţială capătă forma canonică

$$u_{\xi\eta} = \frac{\eta}{2(\xi^2 - \eta^2)} u_\xi - \frac{\xi}{2(\xi^2 - \eta^2)} u_\eta.$$

7.5.3 Ecuaţii cu coeficienţi constanţi

Dacă în ecuaţia

$$Au_{xx} + Bu_{xy} + Cu_{yy} + Du_x + Eu_y + Fu = G(x, y) \tag{5.15}$$

coeficienţii A, B, C, D, E, F sunt constante reale, ecuaţia îşi păstrează tipul în tot domeniul deoarece discriminantul $B^2 - 4AC$ este o constantă.

Din ecuaţiile caracteristice

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dx} = \left(B + \sqrt{B^2 - 4AC}\right)/2A \\ \dfrac{dy}{dx} = \left(B - \sqrt{B^2 - 4AC}\right)/2A \end{cases}$$

rezultă curbele caracteristice

$$\begin{cases} y = \left(\dfrac{B + \sqrt{B^2 - 4AC}}{2A}\right) x + c_1 \\ y = \left(\dfrac{B - \sqrt{B^2 - 4AC}}{2A}\right) x + c_2 \end{cases}$$

care sunt două familii de drepte.

În consecinţă, transformările de coordonate se vor face cu formulele

$$\begin{cases} \xi = y - \lambda_1 x \\ \eta = y - \lambda_2 x \end{cases}$$

unde

$$\lambda_{1,2} = \frac{B \pm \sqrt{B^2 - 4AC}}{2A}.$$

a. Cazul eliptic. Acesta este cazul când $B^2 - 4AC < 0$, iar caracteristicile sunt complex conjugate. Transformarea de coordonate e dată de

$$\begin{cases} \xi = y - (a + ib)x \\ \eta = y - (a - ib)x \end{cases}$$

unde $a = B/2A$ şi $b = \sqrt{4AC - B^2}/2A$ sunt numere reale. Se introduc noile variabile

$$\begin{cases} \alpha = \dfrac{1}{2}(\xi + \eta) = y - ax \\ \beta = \dfrac{1}{2i}(\xi - \eta) = -bx \end{cases}$$

care vor aduce ecuaţia (5.15) la forma canonică.

Exemplu. Ecuaţia

$$u_{xx} + u_{xy} + u_{yy} + u_x = 0$$

este eliptică în plan deoarece $B^2 - 4AC = -3 < 0$. Schimbările succesive de variabile

$$\begin{cases} \xi = y - \left(\dfrac{1}{2} + i\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)x \\ \eta = y - \left(\dfrac{1}{2} - i\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)x \end{cases} \qquad \begin{cases} \alpha = \dfrac{1}{2}(\xi + \eta) = y - \dfrac{1}{2}x \\ \beta = \dfrac{1}{2i}(\xi - \eta) = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}x \end{cases}$$

conduc la forma canonică

$$u_{\alpha\alpha} + u_{\beta\beta} - \frac{2}{3}u_\alpha + \frac{2}{\sqrt{3}}u_\beta = 0.$$

b. Cazul parabolic. Când $B^2 - 4AC = 0$, ecuaţia este de tip parabolic, caz în care există o singură familie de curbe caracteristice dată de

$$y = (B/2A)x + c_1.$$

Aceasta ne permite să trecem la noile variabile

$$\begin{cases} \xi = y - (B/2A)x \\ \eta = hy + \kappa x \end{cases}$$

unde h şi κ sunt constante astfel ca iacobianul transformării să fie nenul. Cu aceste transformări de variabile ecuaţia devine

$$u_{\eta\eta} = D_1 u_\xi + E_1 u_\eta + F_1 u + G_1(\xi, \eta)$$

uinde D_1, E_1, F_1 sunt constante.

Dacă $B = 0$, din relaţia $B^2 - 4AC = 0$ se vede că $A = 0$ sau $C = 0$, deci ecuaţia este în formă canonică.

Exemplu. Ecuaţia

$$u_{xx} - 4u_{xy} + 4u_{yy} = e^y$$

este parabolică deoarece $A = 1$, $B = -4$, $C = 4$ şi $B^2 - 4AC = 0$. Astfel, schimbarea de variabile

$$\begin{cases} \xi = y + 2x \\ \eta = y \end{cases}$$

aduce ecuaţia la forma $u_{\eta\eta} = \dfrac{1}{4}e^n$.

c. Cazul hiperbolic. Dacă $B^2 - 4AC > 0$, ecuaţia este de tip hiperbolic. Folosind transformarea de coordonate

$$\begin{cases} \xi = y - \lambda_1 x \\ \eta = y - \lambda_2 x \end{cases} \quad \text{cu } \lambda_{1,2} = \frac{B \pm \sqrt{B^2 - 4AC}}{2A}$$

obţinem forma canonică a ecuaţiei date.

Dacă $A = 0$, se va considera transformarea

$$\begin{cases} \xi = x \\ \eta = -x - (B/C)y \end{cases}$$

care aduce ecuaţia (5.15) la forma canonică.

Exemplu. Ecuaţia

$$4u_{xx} + 5u_{xy} + u_{yy} + u_x + u_y = 2$$

este de tip hiperbolic deoarece $B^2 - 4AC = 9 > 0$. Ecuaţiile caracteristice sunt

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dx} = 1 \\ \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{1}{4} \end{cases}$$

şi furnizează transformarea

$$\begin{cases} \xi = y - x \\ \eta = y - (x/4) \end{cases}$$

care reduce ecuaţia la forma: $u_{\xi\eta} = \dfrac{1}{3}u_\eta - \dfrac{8}{9}$.

7.5.4 Rezolvarea unor ecuaţii cu derivate parţiale liniare de ordinul al doilea

Problema găsirii soluţiei generale pentru o ecuaţie cu derivate parţiale este dificilă. Vom arăta că forma canonică a unei ecuaţii cu derivate parţiale liniare de ordinul al doilea facilitează în anumite situaţii – mai ales în cazul hiperbolic – obţinerea soluţiei generale.

Exemplul 1. Ecuaţia

$$x^2 u_{xx} + 2xyu_{xy} + y^2 u_{yy} = 0$$

este hiperbolică. Prin transformarea $\xi = y/x$, $\eta = y$, această ecuaţie capătă forma

$$u_{\eta\eta} = 0 \ \text{ pentru } y \neq 0$$

care, prin integrare de două ori în raport cu η, dă

$$u(\xi, \eta) = \eta f(\xi) + g(\xi)$$

unde $f(\xi)$ şi $g(\xi)$ sunt funcţii arbitrare. Revenind la variabilele x şi y obţinem

$$u(x, y) = yf\left(\frac{y}{x}\right) + g\left(\frac{y}{x}\right)\cdot$$

Exemplul 2. Ecuaţia

$$2u_{xx} - 3u_{xy} - 2u_{yy} = 0$$

este hiperbolică şi prin transformarea: $\xi = y - \dfrac{1}{2}x$, $\eta = y + 2x$ conduce la $u_{\xi\eta} = 0$ cu soluţia generală $u(\xi, \eta) = f(\xi) + g(\eta)$, unde f şi g sunt funcţii arbitrare.

Revenind la variabilele x şi y, obţinem $u(x, y) = \varphi(x - 2y) + \psi(2x + y)$, cu φ şi ψ funcţii arbitrare.

Exemplul 3. Ecuaţia

$$4u_{xx} + 5u_{xy} + u_{yy} + u_x + u_y = 2$$

este adusă prin transformarea: $\xi = y - x$, $\eta = y - (x/4)$ la forma canonică

$$u_{\xi\eta} = \frac{1}{3}u_\xi - \frac{8}{9}\cdot$$

Dacă notăm $\vartheta = u_\eta$, ecuaţia precedentă devine

$$\vartheta_\xi = \frac{1}{3}\vartheta - \frac{8}{9}$$

care este o ecuaţie cu variabile separabile şi are soluţia:

$$\vartheta = \frac{8}{3} + \frac{1}{3}e^{(\xi/3)}g(\eta).$$

Integrând acum această relaţie în raport cu η, obţinem

$$u(\xi,\eta) = \frac{8}{3}\eta + \frac{1}{3}g(\eta)e^{\xi/3} + f(\xi)$$

unde $f(\xi)$ şi $g(\eta)$ sunt funcţii arbitrare. Soluţia generală a ecuaţiei iniţiale este

$$u(x,y) = \frac{8}{3}\left(y - \frac{x}{4}\right) + \frac{1}{3}g\left(y - \frac{x}{4}\right)e^{\frac{1}{3}(y-x)} + f(y-x).$$

Exemplul 4. Ecuaţia

$$u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0$$

devine, prin schimbarea de variabile: $\xi = x + ct,\ \eta = x - ct$ de forma $u_{\xi\eta} = 0$ care are soluţia generală

$$u(\xi,\eta) = \varphi(\xi) + \psi(\eta)$$

şi, revenind la variabilele x şi t,

$$u(x,t) = \varphi(x+ct) + \psi(x-ct),$$

unde φ şi ψ sunt funcţii arbitrare.

Capitolul 8

Probleme eliptice. Ecuaţia lui Laplace

8.1 Luncţii armonice. Exemple

Fie Ω un domeniu din R^n. Ecuaţia lui Laplace

$$\Delta u(x) = 0, \quad \forall\, x = (x_1, ..., x_n) \in \Omega \tag{1.1}$$

este, după cum am văzut, cea mai simplă şi în acelaşi timp cea mai importantă ecuaţie cu derivate parţiale de ordinul al doilea de tip eliptic. Prin definiţie, spunem că funcţia $u \in C^2(\Omega)$ este *armonică* în Ω dacă satisface ecuaţia lui Laplace în Ω.

Este cunoscut din fizică faptul că potenţialul electrostatic în fiecare punct $(x, y, z) \neq (0, 0, 0)$ datorat unei sarcini electrice unitare situate în originea lui $\mathbb{R}^3$ este proporţional cu $\frac{1}{r}$ unde r este distanţa de la punct la origine, $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$. Un calcul simplu arată că funcţia

$$u = \frac{1}{r}, \;\; r \neq 0 \tag{1.2}$$

este armonică în $\mathbb{R}^3 \backslash \{0\}$.

Funcţia u definită prin relaţia (1.2) se distinge prin aceea că prezintă o simetrie faţă de origine; cu alte cuvinte, depinde numai de distanţa radială r faţă de origine fără a depinde şi de unghiurile θ şi φ (Fig.1.1).

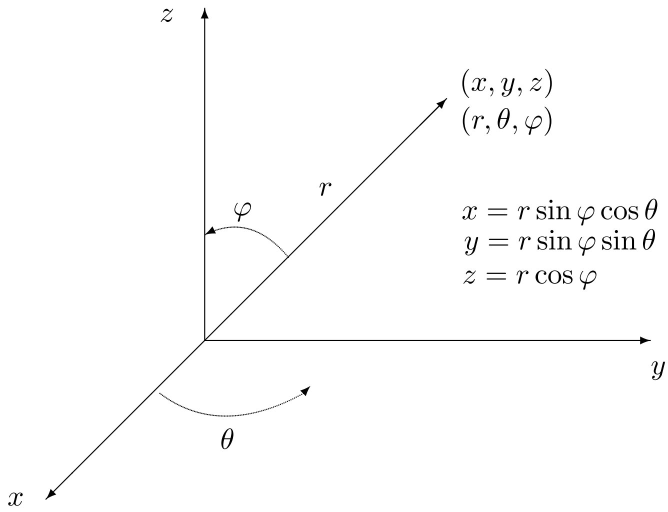

Fig.1.1. Coordonate sferice în $\mathbb{R}^3$

Acest fapt ne sugerează să căutăm, pentru $n \geq 2$, funcţii care depind doar de r $(r = (x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2)^{1/2})$.

Pentru aceasta avem nevoie de expresia laplaceanului în coordonate sferice (polare în $\mathbb{R}^2$).

Ţinând cont de definiţia lui Δ şi de transformarea coordonatelor din carteziene în coordonate sferice (polare) rezultă (vezi [2], p.6)

$$\Delta u = \frac{1}{r^{n-1}} \frac{\partial}{\partial r}\left(r^{n-1} \frac{\partial u}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\Lambda_n u$$

unde Λ_n este un operator diferenţial de ordinul al doilea ce conţine doar derivate în raport cu coordonatele unghiulare.

De exemplu, în $\mathbb{R}^2$

$$\Lambda_2 u = \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2}$$

iar în $\mathbb{R}^3$

$$\Lambda_3 u = \frac{1}{\sin\varphi} \frac{\partial}{\partial \varphi}\left(\sin\varphi \frac{\partial u}{\partial \varphi}\right) + \frac{1}{\sin^2\varphi} \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2}.$$

Având în vedere că funcţia u depinde doar de r şi este armonică, rezultă

$$\frac{\partial}{\partial r}\left(r^{n-1} \frac{\partial u}{\partial r}\right) = 0$$

care este o ecuaţie diferenţială elementară cu soluţia

$$u(r) = \begin{cases} C_1 \ln r + C_2, & \forall\, r > 0 \text{ (dacă } n = 2) \\ \dfrac{C_1}{r^{n-2}} + C_2, & \forall\, r > 0 \text{ (dacă } n \geq 3). \end{cases} \tag{1.3}$$

Observaţie. La acelaşi rezultat ajungem dacă luăm din start

$$u(x) = v(r),\ r = (x_1^2 + \cdots + x_n^2)^{1/2}$$

unde $v : [0, \infty) \to \mathbb{R}$.

Obţinem

$$u_{x_i} = v'(r)\frac{x_i}{r}$$

care implică

$$u_{x_i x_i} = v''(r)\frac{x_i^2}{r^2} + v'(r)\ \frac{r^2 - x_i^2}{r^3}$$

de unde

$$\Delta u(x) = v''(r) + \frac{n-1}{r}\ v'(r).$$

Aşadar, faptul că funcţia u este armonică revine la

$$v''(r) + \frac{n-1}{r}\ v'(r) = 0.$$

Rezolvând această ecuaţie, găsim din nou relaţia (1.3). Menţionăm că această relaţie dă forma funcţiilor armonice cu simetrie radială definite în tot spaţiul (exceptând originea).

Transformarea lui Kelvin. Problema lui Dirichlet exterioară

În $\mathbb{R}^n$ $(n \geq 2)$ fixăm punctul A de coordonate $(a_1, a_2, ..., a_n)$. Se numeşte *transformare prin inversiune* de putere R^2, în raport cu punctul A, operaţia care face ca punctului $M(x_1, x_2, ..., x_n)$ să-i corespundă punctul $P(\xi_1, \xi_2, ..., \xi_n)$ (coliniar cu A şi M) astfel ca

$$\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{AP} = R^2. \tag{1.4}$$

(În relaţia (1.4) membrul stâng reprezintă produsul scalar al vectorilor $\overrightarrow{AM}$ şi $\overrightarrow{AP}$.)

Din coliniaritatea punctelor A, M, P şi relaţia (1.4) rezultă

$$\xi_k - a_k = (x_k - a_k)R^2 / \sum_{i=1}^{n} (x_i - a_i)^2,\ k = 1, 2, ..., n. \tag{1.5}$$

Dacă punem $r^2 = \overrightarrow{AM}^{\,2} = \sum_{i=1}^{n}(x_k - a_k)^2$ din relaţia (1.5) deducem că transformarea punctuală căutată este dată de

$$\xi_k = a_k + R^2\ \frac{x_k - a_k}{r^2},\ \ k = 1, 2, .., n.$$

Se pune următoarea problemă:

Presupunând că funcţia $u : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ este armonică, în argumentele $\xi_1, \xi_2, ..., \xi_n$, în ce caz funcţia $v : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ definită prin

$$v(x_1, ..., x_n) = r^\lambda u\left(u_1 + R^2\ \frac{x_1 - a_1}{r^2}, \cdots, a_n + R^2\ \frac{x_n - a_n}{r^2}\right)$$

$\left(\text{unde } r = \left(\sum_{k=1}^{n}(x_k - a_k)^2\right)^{1/2}\right)$ este şi ea armonică.

Calculând laplaceanul funcţiei v găsim

$$\begin{aligned}\Delta v\ &= u\Delta(r^\lambda) + 2\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial r^\lambda}{\partial x_k}\ \frac{\partial u}{\partial x_k} + r^\lambda\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial^2 u}{\partial x_k^2} = \\ &= 2(\lambda - 2 + n)r^{\lambda-2}\left[\frac{\lambda}{2}u - \sum_{k=1}^{n}(\xi_k - a_k)\frac{\partial u}{\partial \xi_k}\right]\end{aligned}$$

şi, cum vrem ca $\Delta v = 0$, pentru orice u rezultă că trebuie să luăm $\lambda = 2 - n$.

În acest fel am demonstrat

Teorema 1.1. (teorema lui Kelvin) *Dacă funcţia $u(\xi_1, \xi_2, ..., \xi_n)$ este armonică în $\xi_1, \xi_2, ..., (x)_n$ atunci şi funcţia*

$$v(x_1, x_2, ..., x_n) = \frac{1}{r^{n-2}}u\left(a_1 + R^2\ \frac{x_1 - a_1}{r^2}, \cdots, a_n + R^2\ \frac{x_n - a_n}{r^2}\right)$$

$\left(\textit{unde } r = \left(\sum_{k=1}^{n}(x_k - a_k)^2\right)^{1/2}\right)$ *este armonică în $x_1, x_2, .., x_n$.*

În particular, dacă A este originea, $R = 1$, şi notăm cu $\|x\|$ norma vectorului $(x_1, ..., x_n)$, din teorema de mai sus deducem că dacă funcţia $u(x_1, x_2, ..., x_n)$ este armonică, atunci şi funcţia

$$\frac{1}{\|x\|^{n-2}}u\left(\frac{x_1}{\|x\|^2}, \frac{x_2}{\|x\|^2}, \cdots, \frac{x_n}{\|x\|^2}\right)$$

este armonică.

Observaţii. Cu ajutorul aceste transformări punctuale, care transformă o funcţie armonică într-o altă funcţie armonică, putem să rezolvăm problema lui Dirichlet (sau Neumann) *exterioară.*

Prin problemă Dirichlet (sau Neumann) exterioară (asociată operatorului Δ) se înţelege determinarea funcţiei armonice u în domeniul infinit *exterior* unui domeniu finit Ω cu frontiera $\partial\Omega$, cunoscând valorile lui u (sau ale derivatei sale normale) pe $\partial\Omega$. Pentru a rezolva (de exemplu) problema lui Dirichlet exterioară, vom lua un punct A în interiorul domeniului Ω, pentru exteriorul căruia vrem să rezolvăm problema şi fie o sferă de centru A şi de rază R aleasă în aşa fel încât să fie în întregime situată în Ω.

Transformând tot spaţiul prin inversiunea de centru A şi de putere R^2, exteriorul lui Ω se va transforma în interiorul unui domeniu Ω^* situat în interiorul sferei de mai sus. Vom rezolva apoi problema lui Dirichlet pentru domeniul finit Ω^* cu valorile lui u date pe $\partial\Omega$ şi transformate pe frontiera $\partial\Omega^*$ a lui Ω^*.

Dacă $n = 3$ şi $u^*(r, \theta, \varphi)$ este soluţia problemei lui Dirichlet pentru Ω^*, cu valoarea pe frontieră $u^*|_{\partial\Omega^*} = u|_{\partial\Omega} - b$, atunci soluţia problemei exterioare relative la domeniul exterior lui Ω va fi

$$u(r, \theta, \varphi) = \frac{R^2}{r}\, u^*\left(\frac{R^2}{r}, \theta, \varphi\right) + b$$

unde b este valoarea (dată) pe care o ia u la infinit. În mod analog se va reduce şi problema lui Neumann exterioară la o problemă interioară.

8.2 Soluţia fundamentală a operatorului Laplace

Un rol esenţial în studiul operatorului Δ al lui Laplace îl joacă soluţia fundamentală.

Definiţia 2.1. Funcţia $E : \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \longrightarrow \mathbb{R}$ definită prin

$$E(x) = \begin{cases} -\dfrac{1}{(n-2)\omega_n \|x\|^{n-2}}, & \text{dacă } n \geq 3 \\ \dfrac{1}{2\pi} \ln \|x\|, & \text{dacă } n = 2 \end{cases} \tag{2.1}$$

se numeşte *soluţia fundamentală* a operatorului Laplace.

În formula (2.1) ω_n desemnează aria sferei unitate din $\mathbb{R}^n$, care se calculează cu formula $\omega_n = 2\pi^{n/2}\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)$ unde Γ este funcţia lui Euler dată prin

$$\Gamma(s) = \int_0^\infty t^{s-1}e^{-t}dt, \ \forall\, s > 0.$$

Din punct de vedere fizic, E reprezintă potenţialul electrostatic generat de o sarcină unitate negativă fixată în origine.

În propoziţia următoare dăm câteva proprietăţi ale soluţiei fundamentale pentru operatorul lui Laplace.

Propoziţia 2.1. *Funcţia E definită de* (2.1) *are următoarele proprietăţi:*

(i) $E \in C^\infty(\mathbb{R}\backslash\{0\})$,

(ii) $E, E_{x_i} \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n)$,

(iii) $\Delta E(x) = 0, \ \forall\, x \neq 0.$

Demonstraţie. Proprietăţile (i) şi (iii) sunt imediate. În ce priveşte proprietatea (ii) aceasta rezultă din faptul că:

$$\int_{\|x\|\leq r} \|x\|^{-\alpha}dx < \infty \text{ dacă şi numai dacă } \alpha < n.$$

Rezultatul următor va fi utilizat la demonstrarea existenţei soluţiei pentru problema Dirichlet prin metoda lui Perron.

Propoziţia 2.2. *Fie $f \in C_0^2(\mathbb{R}^n)$ şi $u(x) = \int_{\mathbb{R}^n} E(x-y)f(y)dy$, $x \in \mathbb{R}^n$. Atunci*

(j) $u \in C^2(\mathbb{R}^n)$.

(jj) $\Delta u = f$ *în* $\mathbb{R}^n$.

Demonstraţie. (j) Făcând schimbarea de variabilă $x - y \to z$ obţinem

$$u(x) = \int_{\mathbb{R}^n} E(z)f(x-z)dz. \tag{2.2}$$

Din această scriere, folosind faptul că funcţia f este de clasă C^2 şi are suportul compact în $\mathbb{R}^n$, rezultă că $u \in C^2(\mathbb{R}^n)$.

(jj) Vom face demonstraţia pentru $n \geq 3$, cazul $n = 2$ tratându-se în mod analog.

Fie $\varepsilon > 0$ şi $x \in \mathbb{R}^n$. Din (2.2) rezultă

$$\Delta u(x) = \int_{B(0,\varepsilon)} E(z)\Delta_x f(x-z)dz + \int_{\mathbb{R}^n \setminus B(0,\varepsilon)} E(z)\Delta_x f(x-z)dz. \tag{2.3}$$

Vom arăta că putem trece la limită cu $\varepsilon \to 0$ în relaţia (2.3) pentru a obţine (jj). Avem

$$\begin{aligned} &\left| \int_{B(0,\varepsilon)} E(z)\Delta_x f(x-z)dz \right| \leq \\ &\leq C\|D^2 f\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \int_{B(0,\varepsilon)} |E(z)|dz \leq C\varepsilon^2. \end{aligned} \tag{2.4}$$

Ultima inegalitate se obţine trecând (eventual) la coordonate polare (vezi P_{10}, [2]).

Apoi din formula lui Green

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n \setminus B(0,\varepsilon)} E(z)\Delta_x f(x-z)dz = -\int_{\mathbb{R}^n \setminus B(0,\varepsilon)} \nabla E(z) \cdot \nabla_x f(x-z)dz + \\ + \int_{\partial B(0,\varepsilon)} E(z) \frac{\partial f}{\partial \nu_z}(x-z)d\sigma_x. \end{aligned}$$

La fel ca în cazul precedent, obţinem

$$\begin{aligned} &\left| \int_{\partial B(0,\varepsilon)} E(z) \frac{\partial f}{\partial \nu_z}(x-z)d\sigma_z \right| \leq \\ &\leq C\|Df\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \int_{\partial B(0,\varepsilon)} |E(z)|d\sigma \leq C\varepsilon. \end{aligned} \tag{2.5}$$

Vom arăta că

$$-\int_{\mathbb{R}^n \setminus B(0,\varepsilon)} \nabla E(z) \cdot \nabla_x f(x-z)dz \longrightarrow f(x) \text{ pentru } \varepsilon \to 0.$$

Aplicând prima formulă a lui Green, obţinem

$$\begin{aligned} -\int_{\mathbb{R}^n \setminus B(0,\varepsilon)} \nabla E(z) \cdot \nabla_x f(x-z)dz = -\int_{\partial B(0,\varepsilon)} \frac{\partial E(z)}{\partial \nu} f(x-z)d\sigma_z + \\ + \int_{\mathbb{R}^n \setminus B(0,\varepsilon)} \Delta E(z) f(x-z)dz = -\int_{\partial B(0,\varepsilon)} \frac{\partial E(z)}{\partial \nu} f(x-z)d\sigma_z, \end{aligned}$$

deoarece funcţia E este armonică în $\mathbb{R}^n \setminus B(0,\varepsilon)$. Apoi

$$\frac{\partial E(z)}{\partial \nu} = \nabla E(z) \cdot \nu(z) = -\frac{1}{\omega_n \varepsilon^{n-1}},\ \forall\, z \in \partial B(0,\varepsilon),$$

deoarece $\nu(z) = -\frac{z}{|z|} = -\frac{z}{\varepsilon}$, $\forall\, z \in \partial B(0,\varepsilon)$. De aici rezultă

$$-\int_{\mathbb{R}^n\setminus B(0,\varepsilon)} \nabla E(z)\cdot\nabla_x f(x-z)dz = \frac{1}{\omega_n\varepsilon^{n-1}}\int_{\partial B(0,\varepsilon)} f(x-z)d\sigma_z.$$

Teorema de medie şi continuitatea funcţiei f implică

$$\frac{1}{\omega_n\varepsilon^{n-1}}\int_{\partial B(0,\varepsilon)} f(x-z)d\sigma_z \to f(x) \text{ pentru } \varepsilon\to 0. \tag{2.6}$$

Rezumând, relaţiile (2.4), (2.5), (2.6) demonstrează afirmaţia (jj).

Teorema care urmează dă o reprezentare a unei funcţii u de clasă C^2 în Ω în funcţie de valorile laplaceanului Δu în Ω şi de valorile lui u şi $\frac{\partial u}{\partial\nu}$ pe frontiera $\partial\Omega$.

Teorema 2.1. (Teorema Riemann–Green) *Dacă Ω este o mulţime deschisă şi mărginită din $\mathbb{R}^n$ cu frontiera netedă iar $u\in C^2(\Omega)\cap C^1(\bar\Omega)$ cu proprietatea $\Delta u\in C(\bar\Omega)$, atunci are loc relaţia:*

$$\begin{aligned}\int_\Omega \Delta u(y)E(x-y)dy - \int_{\partial\Omega}\frac{\partial u(y)}{\partial\nu}E(x-y)d\sigma_y +&\\ +\int_{\partial\Omega}u(y)\frac{\partial}{\partial\nu_y}E(x-y)d\sigma_y =& \begin{cases} u(x), & x\in\Omega \quad (\alpha)\\ \frac{1}{2}u(x), & x\in\partial\Omega \quad (\beta)\\ 0, & x\in\mathbb{R}^n\setminus\overline{\Omega} \quad (\gamma)\end{cases}\end{aligned} \tag{2.7}$$

Demonstraţie. (α) Fie $x\in\Omega$ şi $\varepsilon>0$ astfel încât $\overline{B(x,\varepsilon)}\subset\Omega$. Aplicând formula a doua a lui Green domeniului $\Omega\setminus\overline{B(x,\varepsilon)}$ şi ţinând cont că $\partial(\Omega\setminus\overline{B(x,\varepsilon)}) = \partial\Omega\cup\partial B(x,\varepsilon)$, obţinem

$$\begin{aligned}&\int_{\Omega\setminus\overline{B(x,\varepsilon)}}(u(y)\Delta_y E(x-y) - E(x-y)\Delta u(y))dy =\\ &=\int_{\partial\Omega}\left(u(y)\frac{\partial}{\partial\nu_y}E(x-y) - \frac{\partial u(y)}{\partial\nu}E(x-y)\right)d\sigma_y +\\ &+\int_{\partial B(x,\varepsilon)}\left(u(y)\frac{\partial E(x-y)}{\partial\nu_y} - \frac{\partial u(y)}{\partial\nu}E(x-y)\right)d\sigma_y.\end{aligned} \tag{2.8}$$

Însă $\Delta_y E(x-y) = 0$ în $\Omega\setminus\overline{B(x,\varepsilon)}$ şi

$$\int_{\partial B(x,\varepsilon)}\frac{\partial u}{\partial\nu}(y)E(x-y)d\sigma_y \to 0,\ \int_{\partial B(x,\varepsilon)}u(y)\frac{\partial}{\partial\nu_y}E(x-y)d\sigma_y \to -u(x)$$

deoarece ν_y este normala la $\partial B(x,\varepsilon)$ în punctul y îndreptată spre interiorul lui $B(x,\varepsilon)$.

Trecând la limită cu $\varepsilon \to 0$ în formula (2.8), obţinem rezultatul dorit.

(β) Pentru $x \in \partial\Omega$ şi $\varepsilon > 0$ (suficient de mic) notăm:

$$\Omega_\varepsilon = \Omega \backslash \overline{B(x,\varepsilon)},\ \Gamma_\varepsilon = \partial\Omega \cap B(x,\varepsilon),\ \Sigma_\varepsilon = \Omega \cap \partial B(x,\varepsilon).$$

Aplicând formula a doua a lui Green perechii de funcţii u şi E pe domeniul Ω_ε, obţinem

$$\begin{aligned} &\int_{\Omega_\varepsilon} (E(x-y)\Delta u(y) - u(y)\Delta_y E(x-y))dy = \\ &= \int_{\partial\Omega \backslash \Gamma_\varepsilon} \left(E(x-y)\frac{\partial u(y)}{\partial \nu} - u(y)\frac{\partial E(x-y)}{\partial \nu_y} \right) d\sigma_y + \\ &+ \int_{\Sigma_\varepsilon} \left(E(x-y)\frac{\partial u(y)}{\partial \nu} - u(y)\frac{\partial E(x-y)}{\partial \nu_y} \right) d\sigma_y. \end{aligned} \tag{2.9}$$

Din cauză că E este armonică în Ω_ε şi pentru $\varepsilon \to 0$ avem:

$$\begin{array}{lcl} \displaystyle\int_{\Omega_\varepsilon} E(x-y)\Delta u(y)dy & \longrightarrow & \displaystyle\int_{\Omega} E(x-y)\Delta u(y)dy \\ \displaystyle\int_{\partial\Omega\backslash\Gamma_\varepsilon} \frac{\partial u(y)}{\partial \nu} E(x-y)d\sigma_y & \longrightarrow & \displaystyle\int_{\partial\Omega} \frac{\partial u(y)}{\partial \nu} E(x-y)d\sigma_y \\ \displaystyle\int_{\partial\Omega\backslash\Gamma_\varepsilon} u(y)\frac{\partial E(x-y)}{\partial \nu_y} d\sigma_y & \longrightarrow & \displaystyle\int_{\partial\Omega} u(y)\frac{\partial E(x-y)}{\partial \nu_y} d\sigma_y \\ \displaystyle\int_{\Sigma_\varepsilon} E(x-y)\frac{\partial u(y)}{\partial \nu} d\sigma_y & \longrightarrow & 0 \\ \displaystyle\int_{\Sigma_\varepsilon} u(y)\frac{\partial E(x-y)}{\partial \nu_y} d\sigma_y & \longrightarrow & -\dfrac{1}{2}u(x) \end{array}$$

din formula (2.9) rezultă, prin trecere la limită, afirmaţia (β).

(γ) Luând $x \in \mathbb{R}^n \backslash \overline{\Omega}$ şi aplicând formula lui Green pe domeniul Ω, obţinem

$$\begin{aligned} &\int_{\Omega} (E(x-y)\Delta u(y) - u(y)\Delta_y E(x-y))dy = \\ &= \int_{\partial\Omega} \left(E(x-y)\frac{\partial u(y)}{\partial \nu} - u(y)\frac{\partial E(x-y)}{\partial \nu_y} \right) d\sigma_y \end{aligned}$$

şi ţinând cont că $\Delta_y E(x-y) = 0$, pentru $y \in \Omega$ obţinem rezultatul dorit.

Cu aceasta teorema este demonstrată. ∎

Corolarul 2.1. *Dacă Ω este o submulţime deschisă a lui $\mathbb{R}^n$ şi $u \in C^2(\Omega)$ este o funcţie armonică, atunci $u \in C^\infty(\Omega)$.*

Demonstraţie. Fie $x_0 \in \Omega$ şi $\varepsilon > 0$ astfel ca $\overline{B(x_0,\varepsilon)} \subset \Omega$. Aplicând formula (2.7) pentru bila $B(x_0,\varepsilon)$, rezultă

$$u(x) = -\int_{\partial B(x_0,\varepsilon)} E(x-y)\frac{\partial u(y)}{\partial \nu} d\sigma_y + \int_{\partial B(x_0,\varepsilon)} u(y)\frac{\partial E(x-y}{\partial \nu_y} d\sigma_y,$$

pentru orice $x \in B(x_0,\varepsilon)$. Deoarece $x \neq y$ ($x \in B(0,\varepsilon)$ şi $y \in \partial B(0,\varepsilon)$) cei doi termeni din membrul drept sunt funcţii de clasă C^∞ în raport cu $x \in B(x_0,\varepsilon)$. Punctul x fiind arbitrar în Ω, rezultă $u \in C^\infty(\Omega)$. ∎

Corolarul 2.2. *Fie $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$. Atunci*

$$\int_{\mathbb{R}^n} E(x)\Delta\varphi(x)dx = \varphi(0). \tag{2.10}$$

Demonstraţie. Deoarece $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ există $r > 0$ suficient de mare astfel ca $\operatorname{supp}\varphi \subset B(0,r)$. Aplicând formula de reprezentare (2.7) pe această bilă şi ţinând cont că $\varphi(x) = \dfrac{\partial \varphi(x)}{\partial \nu} = 0$, pentru $x \in \partial B(0,r)$ rezultă

$$\int_{B(0,r)} E(x-y)\Delta\varphi(y)dy = \varphi(x), \quad \forall\, x \in B(0,R)$$

de unde, luând $x = 0$ şi ţinând cont că $E(-y) = E(y)$ rezultă (2.10). ∎

În limbajul teoriei distribuţiilor, acest rezultat se scrie sub forma

$$\Delta E = \delta_0 \text{ în } \mathbb{R}^n$$

unde δ_0 este distribuţia lui Dirac concetrată în origine.

Corolarul 2.3. (Formula de medie) *Dacă funcţia u este armonică în Ω, atunci pentru orice bilă $B(x,r)$ cu $\overline{B(x,r)} \subset \Omega$ are loc formula*

$$u(x) = \frac{1}{\omega_n r^{n-1}} \int_{\partial B(x,r)} u(y)d\sigma_y, \quad \forall\, x \in \Omega. \tag{2.11}$$

Demonstraţie. Se aplică formula (2.7) pentru $\Omega \mapsto B(x,r)$ şi se obţine

$$u(x) = \frac{1}{\omega_n r^{n-1}} \int_{\partial B(x,r)} u(y)d\sigma_y + \frac{1}{(n-2)\omega_n r^{n-2}} \int_{\partial B(x,r)} \frac{\partial u(y)}{\partial \nu} d\sigma_y.$$

Demonstraţia se încheie ţinând cont că ultimul termen din membrul drept al egalităţii de mai sus este nul (teorema lui Gauss, pentru funcţii armonice).

Din (2.11) deducem că valoarea unei funcţii armonice într-un punct este egală cu media valorilor sale pe orice sferă centrată în acel punct dacă sfera respectivă este inclusă în domeniul de armonicitate al funcţiei.

8.3 Funcţia Green. Soluţia problemei Dirichlet

Funcţia Green. O metodă de rezolvare a problemelor la limită pentru ecuaţia lui Laplace, care conduce la o reprezentare analitică a soluţiilor, este metoda funcţiei Green. De altminteri, analizând formula de reprezentare a funcţiilor de clasă C^2 în domeniul Ω constatăm că dacă funcţia u este armonică, atunci valorile sale în Ω pot fi scrise în funcţie de valorile sale şi ale derivatei sale normale pe frontiera $\partial\Omega$. Pentru rezolvarea problemei Dirichlet (în care sunt prescrise doar valorile lui u pe $\partial\Omega$) avem nevoie ca în formula de reprezentare să nu mai apară derivata normală a funcţiei u. Acest lucru îl vom realiza prin introducerea funcţiei Green.

Definiţia 3.1. Fie Ω o mulţime deschisă din $\mathbb{R}^n$ cu frontiera de clasă C^1 pe porţiuni. O funcţie $G : \Omega \times \overline{\Omega} \to \mathbb{R}$ se numeşte *funcţie Green* pentru problema Dirichlet pe Ω dacă satisface următoarele două proprietăţi:

(i) G este de forma
$$G(x,y) = g(x,y) - E(x-y),$$
unde $g : \Omega \times \overline{\Omega} \to \mathbb{R}$ satisface condiţiile: pentru orice $x \in \Omega$ funcţia $y \to g(x,y)$ este armonică în Ω şi continuă în $\overline{\Omega}$ iar $y \to \dfrac{\partial g}{\partial \nu_y}(x,y)$ este continuă pe $\partial\Omega$.

(ii) $G(x,y) = 0, \ \forall\, x \in \Omega, \ \forall\, y \in \partial\Omega.$

Utilizând formula lui Green deducem cu uşurinţă faptul că dacă există o funcţie Green pentru problema Dirichlet pe Ω, atunci aceasta este unică. Se arată că existenţa funcţiei Green este asigurată pentru domenii suficient de regulate. Noi vom evidenţia acest lucru în paragrafele următoare.

Propoziţia 3.1. *Fie $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ o mulţime deschisă din $\mathbb{R}^n$ cu frontiera suficient de netedă iar G funcţia Green corespunzătoare problemei Dirichlet pe Ω. Atunci*

a) $G(x,y) > 0, \forall\, x,y \in \Omega, \ x \neq y.$

b) *Pentru orice* $x \in \Omega$ *şi* $f \in C(\Omega)$

$$\lim_{\varepsilon \searrow 0} \int_{\partial B(x,\varepsilon)} f(y) G(x,y) d\sigma_y = 0,$$

$$\lim_{\varepsilon \searrow 0} \int_{\partial B(x,\varepsilon)} \frac{\partial}{\partial \nu_y} G(x,y) f(y) d\sigma_y = -f(x).$$

c) $G(x,y) = G(y,x), \ \forall\, x, y \in \Omega, \ x \neq y.$

Demonstraţie. a) Fie $x \in \Omega$ fixat şi $\Omega_\varepsilon = \Omega \backslash B(x,\varepsilon)$ unde $\varepsilon > 0$ este ales suficient de mic astfel încât $\overline{B(x,\varepsilon)} \subset \Omega$. Funcţia $y \to G(x,y)$ fiind armonică în Ω_ε, rezultă că atât maximul cât şi minimul ei vor fi atinse doar pe $\partial \Omega_\varepsilon = \partial B(x,\varepsilon) \cup \partial \Omega$. Deoarece $\lim\limits_{y \to x} G(x,y) = +\infty$ şi $G(x,y) = 0, \forall\, y \in \partial \Omega$ va rezulta că $G(x,y) > 0, \ \forall\, y \in \Omega_\varepsilon$ (pentru ε suficient de mic) ceea ce demonstrează afirmaţia.

b) Avem

$$\lim_{\varepsilon \searrow 0} \int_{\partial B(x,\varepsilon)} f(y) G(x,y) d\sigma_y = \lim_{\varepsilon \searrow 0} \int_{\partial B(x,\varepsilon)} f(y) g(x,y) d\sigma_y - $$
$$- \lim_{\varepsilon \searrow 0} \int_{\partial B(x,\varepsilon)} f(y) E(x-y) d\sigma_y = 0$$

şi

$$\lim_{\varepsilon \searrow 0} \int_{\partial B(x,\varepsilon)} f(y) \frac{\partial}{\partial \nu_y} G(x,y) d\sigma_y = \lim_{\varepsilon \searrow 0} \int_{\partial B(x,\varepsilon)} f(y) g(x,y) d\sigma_y -$$
$$- \lim_{\varepsilon \searrow 0} \int_{\partial B(x,\varepsilon)} f(y) \frac{\partial}{\partial \nu_y} E(x-y) d\sigma_y = 0 - f(x) = -f(x).$$

În ambele cazuri folosim teorema de medie pentru integrale de funcţii continue. În plus,

$$\frac{\partial}{\partial \nu_y} E(x-y) = \frac{1}{\omega_n \varepsilon^{n-1}} \quad \text{pentru } y \in \partial B(x,\varepsilon).$$

c) Fie $x, y \in \Omega$, $x \neq y$ şi $\varepsilon > 0$ suficient de mic încât $\overline{B(x,\varepsilon)} \cup \overline{B(y,\varepsilon)} \subset \Omega$ şi $\overline{B(x,\varepsilon)} \cap \overline{B(y,\varepsilon)} = \emptyset$. Notăm cu $\Omega_\varepsilon = \Omega \backslash (\overline{B(x,\varepsilon)} \cup \overline{B(y,\varepsilon)})$ şi definim funcţiile $u, v : \Omega_\varepsilon \to \mathbb{R}$ prin $u(z) = G(x,z)$, $v(z) = G(y,z)$. Aplicând formula a doua a lui Green funcţiilor armonice u, v în Ω_ε şi ţinând cont că $\partial \Omega_\varepsilon =$

$\partial\Omega \cup \partial B(x,\varepsilon) \cup \partial B(y,\varepsilon)$ obţinem

$$0 = \int_{\partial\Omega} \left[G(x,z)\frac{\partial}{\partial\nu_z}G(y,z) - G(y,z)\frac{\partial}{\partial\nu_y}G(x,z) \right] d\sigma_z +$$

$$\int_{\partial B(x,\varepsilon)} G(x,z)\frac{\partial}{\partial\nu_z}G(y,z)d\sigma_z - \int_{\partial B(x,\varepsilon)} G(y,z)\frac{\partial}{\partial\nu_z}G(x,z)d\sigma_z +$$

$$\int_{\partial B(y,\varepsilon)} G(x,z)\frac{\partial}{\partial\nu_z}G(y,z)d\sigma_z - \int_{\partial B(y,\varepsilon)} G(y,z)\frac{\partial}{\partial\nu_z}G(x,z)d\sigma_z.$$

Din condiţia (ii) rezultă că prima integrală este nulă. Apoi, ţinând cont că $y \to \dfrac{\partial g}{\partial\nu_y}(x,y)$ este o funcţie continuă, rezultă

$$\lim_{\varepsilon\searrow 0}\int_{\partial B(x,\varepsilon)} G(x,z)\frac{\partial}{\partial\nu_z}G(y,z)d\sigma_z = \lim_{\varepsilon\searrow 0}\int_{\partial B(y,\varepsilon)} G(y,z)\frac{\partial}{\partial\nu_z}G(x,z)d\sigma_z = 0.$$

În final, făcând $\varepsilon \to 0$ şi utilizând relaţia b) pentru integralele rămase, obţinem $G(x,y) = G(y,x)$. ∎

Propoziţia 3.2. *Fie $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ o mulţime deschisă, conexă, mărginită cu frontiera $\partial\Omega$ netedă. Dacă $f \in C(\overline{\Omega})$, $\varphi \in C(\partial\Omega)$ şi $u \in C^2(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$ este o soluţie a problemei Dirichlet*

$$\begin{cases} \Delta u = f & \text{în } \Omega \\ u = \varphi & \text{pe } \partial\Omega \end{cases} \tag{3.1}$$

atunci, presupunând că u are derivata normală continuă pe $\partial\Omega$,

$$u(x) = -\int_\Omega f(y)G(x,y)dy - \int_{\partial\Omega} \varphi(y)\frac{\partial}{\partial\nu_y}G(x,y)d\sigma_y,\ \forall\, x \in \Omega, \tag{3.2}$$

unde G este funcţia Green a problemei Dirichlet relativ la Ω.

Demonstraţie. Deoarece u este soluţie a problemei (3.1), ţinând cont de formula Riemann–Green (2.7), avem

$$\begin{aligned} u(x) = \int_\Omega f(y)E(x-y)dy - \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u(y)}{\partial\nu_y}E(x-y)d\sigma_y + \\ + \int_{\partial\Omega} \varphi(y)\frac{\partial}{\partial\nu_y}E(x-y)d\sigma_y. \end{aligned} \tag{3.3}$$

Apoi, din formula lui Green

$$\int_\Omega (g(x,y)\Delta u(y) - u(y)\Delta_y g(x,y))dy =$$

$$= \int_{\partial\Omega} \left(g(x,y)\frac{\partial u(y)}{\partial \nu} - u(y)\frac{\partial g(x,y)}{\partial \nu_y} \right) d\sigma_y$$

care se scrie sub forma

$$0 = \int_\Omega g(x,y)f(y)dy + \int_{\partial\Omega} \left(\varphi(y)\frac{\partial g(x,y)}{\partial \nu_y} - g(x,y)\frac{\partial u(y)}{\partial \nu} \right) d\sigma_y. \tag{3.4}$$

Scăzând termen cu termen relaţiile (3.3) şi (3.4) se obţine (3.2). ■

8.4 Funcţia Green pe sferă. Formula lui Poisson

Exprimarea simplă a soluţiei problemei Dirichlet pentru ecuaţia lui Laplace cu ajutorul funcţiei Green justifică efortul de determinare a acesteia din urmă. De altfel, rezolvarea problemei Dirichlet este transferată în cea a determinării funcţiei g care satisface (în raport cu y) ecuaţia lui Laplace pe Ω, iar pe frontieră o condiţie Dirichlet specială ($g(x,y) = E(x-y)$, $\forall\, x \in \Omega$, $\forall\, y \in \partial\Omega$).

Acest lucru se dovedeşte mai simplu după cum vom vedea într-o serie de exemple.

În cazul domeniului $\Omega = B(0,R)$, $R > 0$, funcţia Green se caută de forma

$$G(x,y) = \alpha E(x^* - y) - E(x-y)$$

unde $x^* = \dfrac{R^2}{\|x\|^2}x$ iar α este o constantă ce se determină din condiţia (ii) pe frontieră. Se obţine următorul rezultat:

Propoziţia 4.1. *Funcţia Green pentru domeniul $\Omega = B(0,R) \subset \mathbb{R}^n$ este:*

$$G(x,y) = \begin{cases} \dfrac{R^{n-2}}{\|x\|^{n-2}} E(x^* - y) - E(x-y), & \textit{pentru } x \neq 0 \\ -E(y) - \dfrac{1}{(n-2)\omega_n R^{n-2}}, & \textit{pentru } x = 0. \end{cases}$$

Demonstraţie. Din definiţia lui G deducem

$$g(x,y) = \begin{cases} \left(\dfrac{R}{\|x\|}\right)^{n-2} E(x^* - y), & n \geq 3 \\ E(x^* - y) - \dfrac{1}{2\pi}\ln\left(\dfrac{\|x\|}{R}\right), & n = 2. \end{cases} \tag{4.1}$$

Din (4.1) rezultă că $y \to g(x,y)$ este armonică în $B(0,R)$ deoarece $x \in B(0,R) \Longrightarrow x^* \notin B(0,R)$.

Apoi, pentru a verifica condiţia $G(x,y) = 0$ pentru $x \in B(0,R)$ şi $y \in \partial B(0,R)$ este suficient să observăm că egalitatea

$$\|x - y\| = \left\| \frac{R}{\|x\|} x - \frac{\|x\|}{R} y \right\|,$$

are loc pentru orice pereche (x,y) cu $0 < \|x\| < R$, $\|y\| = R$. ■

În cazul $\Omega = B(0,R)$, soluţia problemei Dirichlet pentru ecuaţia lui Laplace are o reprezentare simplă. Observăm că

$$\frac{\partial G(x,y)}{\partial \nu_y} = \frac{1}{R}(\nabla_y G(x,y), y) = \frac{R^{n-3}}{\|x\|^{n-2}\omega_n} \frac{(y - x^*, y)}{\|x^* - y\|^n} -$$
$$-\frac{1}{R\omega_n} \frac{(y - x, y)}{\|x - y\|^n} = -\frac{R^2 - \|x\|^2}{R\omega_n \|x - y\|^n}, \quad y \in \partial B(0,R).$$

Din Propoziţia 4.1, luând $f \equiv 0$ şi $\Omega = B(0,R)$, rezultă formula

$$u(x) = \frac{R^2 - \|x\|^2}{R\omega_n} \int_{\partial B(0,R)} \frac{\varphi(y)}{\|x - y\|^n} d\sigma_y, \ \forall\, x \in B(0,R), \tag{4.2}$$

cunoscută sub numele de *formula integrală a lui Poisson*.

Această formulă sugerează faptul că dacă $\varphi \in C(\partial B(0,R))$, atunci funcţia dată de (4.2) este soluţie a problemei (3.1) cu $f \equiv 0$. Într-adevăr are loc:

Teorema 4.1. *Dacă $\varphi \in C(\partial B(0,R))$ atunci funcţia u definită prin:*

$$u(x) = \begin{cases} \dfrac{R^2 - \|x\|^2}{R\omega_n} \displaystyle\int_{\partial B(0,R)} \frac{\varphi(y)}{\|x - y\|^n} d\sigma_y, & x \in B(0,R), \\ \varphi(x), & x \in \partial B(0,R), \end{cases} \tag{4.3}$$

aparţine spaţiului $C^2(B(0,R)) \cap C(\partial B(0,R))$ şi este soluţie a problemei

$$\Delta u(x) = 0, \ \forall\, x \in B(0,R); \ u(x) = \varphi(x), \ \forall\, x \in \partial B(0,R). \tag{4.4}$$

Demonstraţie. (schiţă) Faptul că $u \in C^2(B(0,R))$ rezultă din expresia lui u, iar $\Delta_x G(x,y) = 0$ implică, ţinând cont că, de fapt,

$$u(x) = -\int_{\partial B(0,R)} \varphi(y) \frac{\partial G(x,y)}{\partial \nu_y} d\sigma_y, \ \Delta u(x) = 0, \ \forall\, x \in B(0,R.$$

Demonstraţia continuităţii lui u la frontieră foloseşte esenţial trei elemente: continuitatea lui φ, expresia derivatei normale a lui G şi continuitatea integralei Riemann în raport cu domeniul. ∎

Câteva remarci în legătură cu Teorema 4.1.

- Teorema 4.1 poate fi interpretată ca un rezultat de extensie a unei funcţii continue pe $\partial B(0,R)$ la o funcţie armonică pe $B(0,R)$.
- Teorema 4.1 este un rezultat de existenţă pentru problema Dirichlet pe un domeniu sferic.

Rezultatul obţinut va fi folosit la demonstrarea existenţei soluţiei problemei Dirichlet pe un domeniu general, în care scop demonstrăm şi rezultatul următor.

Propoziţia 4.2. (inegalitatea lui Harnack) *Dacă funcţia u este armonică şi nenegativă în $B(x_0,R)$, atunci satisface inegalitatea*

$$\frac{(R-\|x-x_0\|R^{n-2}}{(R+\|x-x_0\|)^{n-1}}u(x_0) \le u(x) \le$$
$$\le \frac{(R+\|x-x_0\|R^{n-2}}{(R-\|x-x_0\|)^{n-1}}u(x_0),\ \forall\, x\in B(x_0,R).$$

Demonstraţie. Pentru început vom demonstra inegalitatea pentru $x_0 \equiv 0$. Din formula de reprezentare a lui Poisson avem că

$$u(x) = \frac{R^2-\|x\|^2}{R\omega_n}\int_{\partial B(0,R)}\frac{u(y)}{\|x-y\|^n}d\sigma_y, \tag{4.5}$$

care, pentru $x=0$, dă (formula de medie)

$$u(0) = \frac{1}{R^{n-1}\omega_n}\int_{\partial B(0,R)}u(y)d\sigma. \tag{4.6}$$

Apoi, din (4.5) obţinem

$$u(x) \le \frac{(R+\|x\|)(R-\|x\|)}{R\omega_n(R-\|x\|)^n}\int_{\partial B(0,R)}u(y)d\sigma =$$
$$= \frac{R+\|x\|}{R\omega_n(R-\|x\|)^{n-1}}R^{n-1}\omega_n u(0)$$

care demonstrează partea a doua a inegalităţii (pentru $x_0 \equiv 0$).

Apoi, din (4.5) rezultă inegalitatea

$$u(x) \geq \frac{(R + \|x\|)(R - \|x\|)}{R\omega_n (R + \|x\|)^n} \int_{\partial B(0,R)} u(y) d\sigma$$

care, împreună cu (4.6) demonstrează prima parte a inegalităţii.

Cazul general se obţine făcând o translaţie $x \mapsto x - x_0$ care conservă armonicitatea şi duce sfera $B(x_0; R)$ în $B(0; R)$. În $B(x_0, R)$ formula lui Poisson are forma

$$u(x) = \frac{R^2 - \|x - x_0\|^2}{R\omega_n} \int_{\partial B(0,R)} \frac{u(y)}{\|x - y\|^n} d\sigma_y.$$

8.5 Construcţia funcţiei Green folosind metoda imaginilor electrostatice

Cea mai cunoscută metodă de construcţie a funcţiei Green este *metoda imaginilor electrostatice*. Pentru ca intuiţia să funcţioneze mai bine, vom explica în ce constă această metodă în cazul unui domeniu Ω din $\mathbb{R}^3$. Fie $r = (x, y, z)$ un punct din Ω. Funcţia Green pentru problema Dirichlet are forma

$$G(r', r) = g(r', r) + \frac{1}{4\pi} \frac{1}{\|r' - r\|};\ r', r \in \overline{\Omega},\ r' \neq r. \tag{5.1}$$

Metoda constă în interpretarea lui $G(r', r)$ ca potenţialul electrostatic generat de o sarcină unitară plasată în punctul r a domeniului Ω a cărui frontieră $\partial\Omega$ este conectată la masă. (Potenţialul este nul pe o suprafaţă aflată la masă.) Al doilea termen al formulei (5.1) reprezintă potenţialul datorat unei sarcini unitare aflate în punctul r. Această sarcină unitară induce o distribuţie a sarcinilor pe suprafaţa conectată $\partial\Omega$, iar termenul $g(r', r)$ reprezintă potenţialul datorat sarcinilor induse distribuite pe $\partial\Omega$.

Astfel, determinarea lui $g(r', r)$ depinde în primul rând de găsirea sarcinilor induse distribuite pe $\partial\Omega$, care este o problemă destul de dificilă. Metoda sarcinilor electrostatice permite depăşirea acestui inconvenient.

În loc să vedem $g(r', r)$ ca potenţialul sarcinilor induse distribuite pe $\partial\Omega$, considerăm $g(r', r)$ ca fiind potenţialul datorat *sarcinilor imaginare* aflate în complementara lui Ω. Aceste sarcini, care sunt numite *imagini electrostatice* ale sarcinii unitare aflată în punctul $r \in \Omega$ trebuie alese în complementara lui Ω de aşa manieră încât potenţialul $g(r', r)$ datorat lor să satisfacă condiţia

$$g(r', r) = -\frac{1}{4\pi} \frac{1}{\|r' - r\|},\ r' \in \partial\Omega.$$

În multe situaţii, forma suprafeţei $\partial\Omega$ este suficient de simplă încât permite alegerea *imaginilor electrostatice*.

Exemplul 5.1. Fie $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ dat prin:

$$\Omega = \{(x, y, z);\ z > 0\}$$

şi fie o sarcină unitară aflată în punctul $r = (x, y, z) \in \Omega$ (Fig. 5.1). Dacă introducem o sarcină unitate negativă în punctul $r^* = (x, y, -z)$, potenţialul rezultat datorită celor două sarcini va fi nul pe frontiera $z = 0$ a lui Ω.

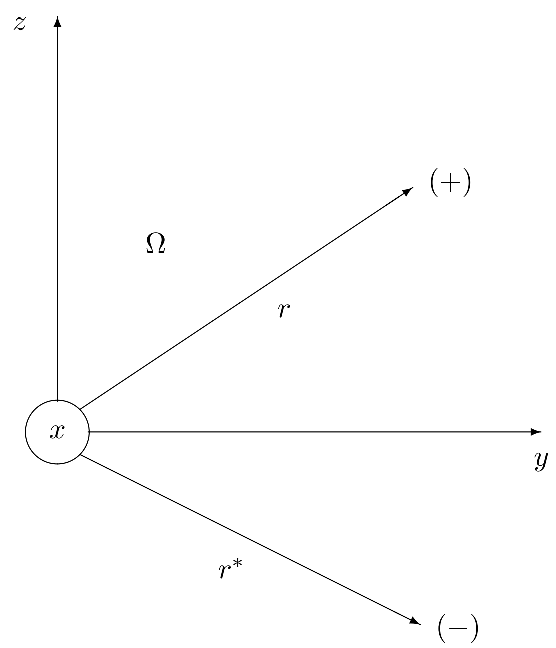

Fig. 5.1.

Astfel, imaginea electrostatică necesară a sarcinii unitate din punctul r va fi sarcina unitate negativă situată în punctul r^*, care este simetricul lui r faţă de frontiera lui Ω. Funcţia Green rezultată va fi:

$$G(r', r) = \frac{1}{4\pi} \frac{1}{\|r' - r\|} - \frac{1}{4\pi} \frac{1}{\|r' - r^*\|}.$$

Într-adevăr, dacă $r' \in \partial\Omega$, atunci $\|r' - r\| = \|r' - r^*\|$ şi $G(r', r) = 0$. Trecând la coordonate carteziene

$$G(r', r) = \frac{1}{4\pi}\left(\frac{1}{[(x'-x)^2 + (y'-y)^2 + (z'-z)^2]^{1/2}} - \right.$$
$$\left. - \frac{1}{[(x'-x)^2 + (y'-y)^2 + (z'+z)^2]^{1/2}}\right).$$

În cazul general, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$; $\Omega = \{(x_1, x_2, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n;\ x_n > 0\}$ funcţia G este dată prin formula

$$G(x, y) = E(x - y) - E(x^* - y)$$

unde $x^* = (x_1, ..., x_{n-1}, -x_n)$ dacă $x = (x_1, ..., x_n) \in \Omega$, adică x^* este simetricul lui x în raport cu hiperplanul $H = \{(x_1, ..., x_n\} \in \mathbb{R}^n,\ x_n = 0\}$, E fiind soluţia fundamentală a laplaceanului.

Exemplul 5.2. Fie

$$\Omega = \{(x, y, z);\ y > 0,\ z > 0\}.$$

Considerăm o sarcină unitate în punctul $r = (x, y, z) \in \Omega$ (Fig. 5.2). Imaginile electrostatice necesare în acest caz sunt: o sarcină unitate negativă în $r_1^* = (x, -y, z)$, o sarcină unitate pozitivă în $r_2^* = (x, -y, -z)$ şi o sarcină unitate negativă în $r_3^* = (x, y, -z)$.

Este clar că potenţialul rezultat din cele patru sarcini se anulează pe frontiera lui Ω şi funcţia Green căutată este

$$G(r', r) = \frac{1}{4\pi}\left(\frac{1}{\|r' - r\|} - \frac{1}{\|r' - r_1^*\|} + \frac{1}{\|r' - r_2^*\|} - \frac{1}{\|r' - r_3^*\|}\right).$$

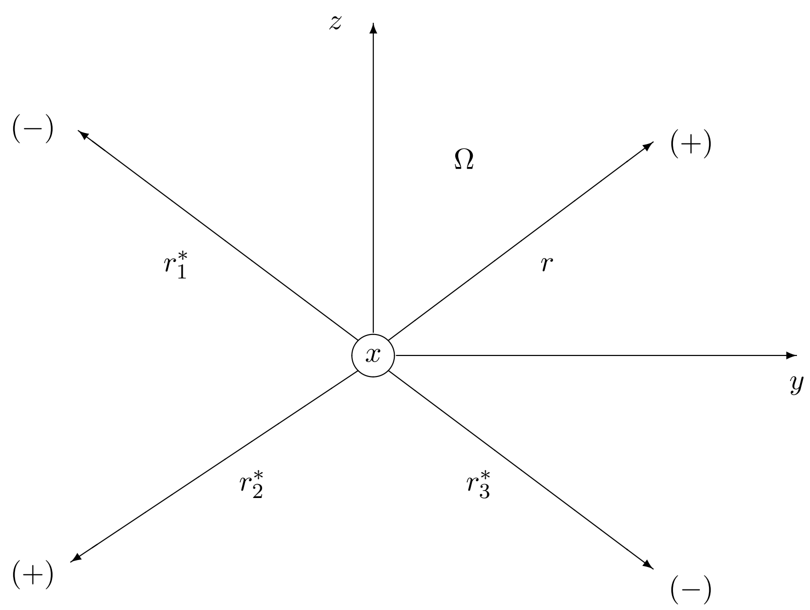

Fig. 5.2.

8.6 Principii de maxim pentru operatorul Laplace

Teorema 6.1. (Principiul de maxim) *Fie* Ω *o mulţime deschisă, conexă şi mărginită din* $\mathbb{R}^n$*. Dacă* $u \in C^2(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$ *este astfel încât* $\Delta u \geq 0$ *pe* Ω*, atunci* u *are una (şi numai una) din următoarele două proprietăţi:*

(i) u *îşi atinge valoarea maximă pe* $\overline{\Omega}$ *numai pe* $\partial\Omega$,

(ii) u *este constantă pe* Ω.

Demonstraţie. Deoarece $u \in C(\bar{\Omega})$ şi $\overline{\Omega}$ este o mulţime compactă în $\mathbb{R}^n$, există $x_0 \in \overline{\Omega}$ (teorema lui Weierstrass) astfel încât $M = u(x_0) = \max\limits_{\overline{\Omega}} u$.

Presupunem că $x_0 \in \Omega$, prin urmare proprietatea (i) nu ar fi adevărată. Fie

$$A = \{x \in \Omega;\ u(x) = M\}.$$

Deoarece $x_0 \in A$ şi u este o funcţie continuă, rezultă că mulţimea A este nevidă şi închisă. Vom demonstra că A este şi deschisă. Întrucât Ω este mulţime deschisă şi $x_0 \in \Omega$, există o bilă B de rază $r > 0$ centrată în x_0 astfel încât $\overline{B(x_0, r)} \subset \Omega$. Aplicând formula (2.7) pentru domeniul $B(x_0, r)$, obţinem

$$\begin{aligned} u(x_0) = & -\frac{1}{(n-2)\omega_n}\int_{B(x_0,r)}\frac{\Delta u(y)}{\|x_0-y\|^{n-2}}dy+ \\ & +\frac{1}{(n-2)\omega_n r^{n-2}}\int_{\partial B(x_0,r)}\frac{\partial u(y)}{\partial \nu}d\sigma+\frac{1}{\omega_n r^{n-1}}\int_{\partial B(x_0,r)}u(y)d\sigma \leq \\ & \leq \frac{1}{\omega_n r^{n-1}}\int_{\partial B(x_0,r)}u(y)d\sigma, \end{aligned} \tag{6.1}$$

deoarece $\Delta u \geq 0$ în Ω şi din formula lui Green

$$\int_{B(x_0,r)}\Delta u(y)dy = \int_{\partial B(x_0,r)}\frac{\partial u(y)}{\partial \nu}d\sigma.$$

Din (6.1) rezultă că $u(x_0) = u(y)$, $\forall\, y \in \partial B(x_0, r)$. Cum r a fost ales arbitrar, rezultă că $u(x_0) = u(y)$, $\forall\, y \in B(x_0, r)$, fapt care implică $B(x_0, r) \subset A$, deci mulţimea A este deschisă.

Acum, mulţimea A, $A \subset \Omega$, fiind nevidă, închisă şi deschisă, iar Ω fiind conexă, rezultă $A \equiv \Omega$. Cu aceasta, demonstraţia teoremei este încheiată. ■

Observaţie. În aceleaşi condiţii ca în Teorema 6.1, putem formula "principiul de minim" relativ la funcţia $u : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}$. Dacă $u \in C^2(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$ satisface inegalitatea $\Delta u \leq 0$ pe Ω, atunci ea are una (şi numai una) din proprietăţile:

(i)$'$ u îşi atinge valoarea minimă pe $\overline{\Omega}$ numai pe $\partial\Omega$

(ii)$''$ u este constantă pe Ω.

Teorema 6.1, combinată cu observaţia de mai sus, conduc la

Propoziţia 6.1. *Dacă Ω este o mulţime deschisă, conexă şi mărginită din $\mathbb{R}^n$, iar $u \in C^2(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$ este o funcţie armonică în Ω, atunci*

$$\min_{\partial\Omega} u \leq u(x) \leq \max_{\partial\Omega} u, \quad \forall\, x \in \Omega.$$

Teorema 6.2. *Fie $u \in C^2(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$ o funcţie care verifică inegalitatea $\Delta u + a(x)u \geq 0$ în Ω, unde $a \in C(\bar{\Omega})$ şi $a(x) \leq 0$, $\forall\, x \in \overline{\Omega}$. Dacă $u(x_0) = M = \max\limits_{\overline{\Omega}} u > 0$, atunci $x_0 \in \partial\Omega$ sau $u \equiv$ constant în Ω.*

Demonstraţie. Presupunem că $x_0 \in \Omega$ şi $u \not\equiv$ constant şi arătăm că ajungem la o contradicţie. Deoarece $u(x_0) > 0$, rezultă că există o sferă $B(x_0, \varepsilon) \subset \Omega$ astfel încât $\Delta u \geq 0$ pe $B(x_0, \varepsilon)$. Conform Teoremei 6.1, va rezulta că $u(x) = M$, $\forall\, x \in B(x_0, \varepsilon)$, deci mulţimea $A = \{x \in \Omega;\ u(x) = M\}$ este deschisă. Pe de altă parte, din continuitatea funcţiei u, A este închisă şi, prin urmare, având în vedere conexitatea mulţimii Ω, rezultă $A = \Omega$. ■

Analizând demonstraţia principiului de maxim constatăm că principalul ingredient folosit este inegalitatea (6.1). Acest fapt ne sugerează o relaxare a condiţiilor impuse funcţiei u.

Fie $u \in C(\Omega)$ o funcţie astfel încât pentru orice $x \in \Omega$ există $\delta(x) > 0$ cu proprietatea

$$u(x) \leq \frac{1}{\omega_n r^{n-1}} \int_{\partial B(x,r)} u(y)d\sigma, \tag{6.2}$$

pentru orice sferă $B(x, r) = \{y \in \Omega,\ \|x - y\| < r\}$ cu $0 < r < \delta(x)$.

Definiţia 6.1. Spunem că funcţia u este *subarmonică* în Ω dacă este continuă în Ω şi satisface relaţia (6.2) în orice punct $x \in \Omega$ şi pentru orice sferă centrată în x şi inclusă în Ω.

Propoziţia 6.2. *Fie u o funcţie subarmonică în Ω. Dacă există $x_0 \in \Omega$ astfel încât $u(x_0) = \sup\limits_{\Omega} u$, atunci $u \equiv$ constant. Dacă, în plus, $u \in C(\bar{\Omega})$, u îşi atinge valoarea maximă numai pe $\partial\Omega$ (afară de cazul când u este constantă).*

Demonstraţia urmăreşte pas cu pas pe cea a Teoremei 6.1.

Propoziţia 6.3. *Dacă funcţiile $u_1, u_2, ..., u_n$ sunt funcţii subarmonice în Ω şi $c_1, c_2, ..., c_n$ sunt constante nenegative, atunci funcţiile $c_1u_1 + c_2u_2 + \cdots + c_nu_n$ şi $u = \max(u_1, u_2, ..., u_n)$ sunt de asemenea subarmonice în Ω.*

Demonstraţie. Prima parte a propoziţiei este evidentă. Cea de-a doua parte se demonstrează prin inducţie. Pentru $n = 2$ se ţine cont de reprezentarea

$$u = \max(u_1, u_2) = \frac{1}{2}(u_1 + u_2 + |u_1 - u_2|).$$

Folosind principiul de maxim pentru a demonstra o reciprocă a teoremei de medie.

Propoziţia 6.4. *Dacă funcţia* $u \in C(\Omega)$ *are proprietatea că pentru orice* $x \in \Omega$ *există* $\delta = \delta(x)$ *astfel încât*

$$u(x) = \frac{1}{\omega_n r^{n-1}} \int_{\partial B(x,r)} u(y) d\sigma, \quad \forall\, r \in (0, \delta),$$

atunci u *este armonică în* Ω*.*

Demonstraţie. Fie bila $B = \overline{B} \subset \Omega$ şi $u \in C(\Omega)$ satisfăcând condiţia din enunţ. Fie v extensia armonică a lui u la bila $\overline{B}$ (dată de Teorema 4.1).

Deoarece $w = v - u$ satisface condiţiile Propoziţiei 6.2 pe $\overset{\circ}{B}$, rezultă $\sup\limits_{B}(v - u) = \inf\limits_{B}(v - u) = 0$, de unde rezultă că $u \equiv v$ pe $\overset{\circ}{B}$. Deoarece B este arbitrară în Ω, rezultă că u este armonică în Ω. ∎

O consecinţă a Propoziţiei 6.4 este că limita uniformă pe compacte a unui şir de funcţii armonice pe Ω este o funcţie armonică.

Are loc, de asemenea, următorul rezultat interesant de convergenţă a unui şir monoton de funcţii armonice.

Propoziţia 6.5. *Fie şirul* $\{u_n\}$ *de funcţii armonice în* Ω*, cu proprietatea că* $\{u_n(x)\}$ *este un şir monoton nedescrescător pentru orice* x *din* Ω*. Dacă şirul* $\{u_n\}$ *este convergent într-un punct* $x_0 \in \Omega$*, atunci el este convergent pe o întreagă vecinătate a lui* x_0*, iar funcţia limită este armonică în acea vecinătate.*

Demonstraţie. Fie $R > 0$ distanţa de la x_0 la frontiera lui Ω şi $x \in B(x_0, R)$. Din monotonia lui $\{u_n(x)\}$ şi inegalitatea lui Harnack rezultă că pentru $n \geq m$ are loc inegalitatea

$$0 \leq u_n(x) - u_m(x) \leq \frac{(R + \|x - x_0\|)R^{n-2}}{(R - \|x - x_0\|)^{n-1}} (u_n(x_0) - u_m(x_0)), \quad \forall\, x \in B(x_0, R). \tag{6.3}$$

Luând acum $\|x - x_0\| \leq R/2$, din inegalitatea (6.3) rezultă că şirul $\{u_n(x)\}$ este uniform Cauchy pentru $x \in \overline{B\,(x_0, R/2)}$, prin urmare este uniform convergent iar limita sa va fi o funcţie armonică în $B\,(x_0, R/2)$. ∎

Cea mai importantă aplicaţie a principiului de maxim o constituie demonstrarea unicităţii soluţiei problemei Dirichlet.

Teorema 6.3. *Fie Ω o mulţime deschisă conexă şi mărginită din $\mathbb{R}^n$ şi $a \in C(\bar{\Omega})$ astfel încât $a(x) \leq 0$, $\forall\, x \in \overline{\Omega}$. Dacă $f \in C(\bar{\Omega})$ şi $\varphi \in C(\partial\Omega)$, atunci problema Dirichlet*

$$\begin{cases} \Delta u + a(x)u = f & \text{în } \Omega; \\ u = \varphi & \text{în } \partial\Omega \end{cases} \tag{6.4}$$

admite cel mult o soluţie $u \in C^2(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$.

În plus, soluţia acestei probleme (dacă exită) verifică inegalitatea

$$\max_{\overline{\Omega}} |u| \leq \max_{\partial\Omega} |\varphi| + \alpha \max_{\overline{\Omega}} |f|, \tag{6.5}$$

unde α este o constantă care nu depinde de f şi φ.

Demonstraţie. Vom aplica Teorema 6.2 funcţiei $w := u - v$ unde funcţia $v \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ este aleasă astfel încât

$$\Delta w + a(x)w \geq 0 \text{ în } \Omega \text{ şi } w \leq 0 \text{ pe } \partial\Omega. \tag{6.6}$$

În acest scop, având în vedere relaţia (6.5), vom lua funcţia v sub forma:

$$v(x) = \max_{\partial\Omega} |\varphi| + g(x) \max_{\overline{\Omega}} |f|, \ x \in \mathbb{R}^n$$

unde funcţia g va fi aleasă astfel încât să fie satisfăcută condiţia (6.6). Deoarece Ω este mărginită, făcând eventual o translaţie, putem presupune că există $d > 0$ astfel încât $\Omega \subset \{x \in \mathbb{R}^n,\ 0 < x_1 < d\}$, ($x_1$ fiind prima componentă a vectorului x). Vom lua prin definiţie $g(x) = e^{\rho d} - e^{\rho x_1}$ unde $\rho > 1$. Se vede că $0 < g(x) < e^{\rho d} - 1$, $\forall\, x \in \Omega$. Apoi

$$\Delta w + aw = \Delta u + au - (\Delta v + av) =$$
$$= f - (\rho^2 e^{x_1} - ag) \max_{\overline{\Omega}} |f| - a \max_{\partial\Omega} |\varphi| \leq f - (\rho^2 e^{x_1} - ag) \max |f| \leq 0.$$

De asemenea, din definiţia lui v se vede că $w \leq 0$ pe $\partial\Omega$ şi, din Teorema 6.2, rezultă $w \leq 0$ pe Ω. De aici rezultă

$$u(x) \leq \max_{\partial\Omega} |\varphi| + \alpha \max_{\overline{\Omega}} |f|,$$

unde $\alpha = \max_{\overline{\Omega}} g$. Înlocuind apoi u cu $-u$ şi refăcând raţionamentul anterior, găsim în final inegalitatea (6.5) care implică între altele şi unicitatea soluţiei pentru problema (6.4). ∎

Mai mult, dacă u_{f_1,φ_1} şi u_{f_2,φ_2} sunt soluţii ale problemei (6.4) corespunzătoare datelor (f_1,φ_1) şi, respectiv, (f_2,φ_2), din (6.5) obţinem

$$\max_{\overline{\Omega}} |u_{f_1,\varphi_1} - u_{f_2,\varphi_2}| \leq \max_{\partial\Omega} |\varphi_1 - \varphi_2| + \alpha \max_{\overline{\Omega}} |f_1 - f_2|,$$

ceea ce arată că soluţia problemei Dirichlet depinde continuu de datele problemei, adică problema este corect pusă (în sens Hadamard).

8.7 Existenţa soluţiei pentru problema Dirichlet. Metoda lui Perron

Fie $\Omega \in \mathbb{R}^n$ o mulţime deschisă, mărginită, cu frontiera $\partial\Omega$ netedă şi $g \in C(\partial\Omega)$ o funcţie dată.

Obiectivul acestui paragraf este demonstrarea existenţei unei soluţii $u \in C^2(\Omega) \cap C(\partial\Omega)$ pentru problema

$$\begin{cases} \Delta u = f & \text{în } \Omega \\ u = g & \text{pe } \partial\Omega, \end{cases}$$

unde $f \in C^1(\Omega)$ este o funcţie dată. Am demonstrat (vezi Propoziţia 2.2) că funcţia

$$u_0(x) = \int_\Omega E(x-y) f(y) dy$$

satisface relaţia

$$\Delta u_0 = f \text{ în } \Omega.$$

Ţinând cont de acest fapt şi de liniaritatea operatorului Laplace, este suficient să demonstrăm existenţa soluţiei pentru problema

$$\begin{cases} \Delta u = 0 & \text{în } \Omega \\ u = g & \text{pe } \partial\Omega. \end{cases} \tag{7.1}$$

Metoda pe care o prezentăm aici, cunoscută sub numele de *metoda lui Perron*, constă în găsirea soluţiei pentru problema (7.1) ca limită de funcţii subarmonice pe Ω, majorate pe frontieră de funcţia g. Introducem mulţimea

$$S_g = \{w \in C^2(\Omega) \cap C(\bar{\Omega}),\ w = \text{ subarmonică în } \Omega \text{ şi } w \leq g \text{ pe } \partial\Omega\}.$$

Din principiul de maxim pentru funcţii subarmonice pe Ω rezultă că această mulţime nu este vidă şi, în plus, pentru orice $w \in S_g$ are loc inegalitatea

$$w(x) \leq \max_{\partial\Omega} g, \quad \forall\, x \in \Omega. \tag{7.2}$$

Această relaţie ne permite să construim funcţia $u : \Omega \to \mathbb{R}$ dată prin

$$u(x) = \sup_{w \in S_g} w(x), \quad \forall\, x \in \Omega. \tag{7.3}$$

Este simplu de observat faptul că u verifică relaţia (7.2). Vom arăta că funcţia u definită de relaţia (7.3) este soluţia problemei (7.1). Demonstraţia acestei afirmaţii se face în două etape.

Propoziţia 7.1. *Funcţia u este armonică în Ω.*

Demonstraţie. Fie D un disc ce satisface condiţia $D \subset \overline{D} \subset \Omega$. Din relaţia (7.3) rezultă că pentru orice $x_0 \in D$ există un şir $\{u_n\}$, $u_n \in S_g$ astfel încât

$$u_n(x_0) \longrightarrow u(x_0). \tag{7.4}$$

Dar, din Propoziţia 6.3 rezultă că funcţia $U_n : \Omega \to \mathbb{R}$, definită prin

$$U_n(x) = \max\{u_1(x), ..., u_n(x)\}, \quad x \in \Omega,$$

este element al mulţimii S_g şi satisface inegalitatea

$$U_{n+1} \geq U_n, \quad \text{în } \Omega.$$

Prin urmare, şirul $\{U_n\}$ este un şir monoton crescător şi, deoarece

$$U_n(x) \geq u_n(x), \quad \forall\, x \in \Omega,$$

relaţia (7.4) are loc cu U_n în locul lui u_n. Din Propoziţia 6.3 şi principiul de minim pentru funcţii armonice, rezultă că şirul de funcţii $\{U_n^D\}$ obţinut prin extensia armonică a lui U_n relativ la discul D reprezintă un şir monoton crescător de elemente din S_g. Repetând argumentul precedent, rezultă că

$$U_n^D(x_0) \longrightarrow u(x_0).$$

Din Propoziţia 6.5 rezultă că limita şirului $\{U_n^D\}$ notată cu U^D este armonică în D. Ştim că $U^D(x_0) = u(x_0)$. Dacă reuşim să arătăm că $U^D \equiv u$ în D, va rezulta armonicitatea lui u în D şi apoi, în mod natural, în Ω. Deoarece $U_n^D \in S_g$, pentru orice $n \in \mathbb{N}$ rezultă că $U^D \in S_g$ şi $U^D(x) \leq u(x)$, $\forall\, x \in \Omega$, chiar dacă u poate să nu fie un element al mulţimii S_g.

Astfel, pentru a demonstra armonicitatea lui u este suficient să demonstrăm că

$$U^D \geq u \;\text{ în } D.$$

Presupunem, prin reducere la absurd, că există $y_0 \in D$ astfel încât

$$U^D(y_0) < u(y_0).$$

La fel ca în cazul punctului $x_0 \in D$ există şirul de funcţii $\{v_n\}$, $v_n \in S_g$, astfel încât

$$v_n(y_0) \longrightarrow u(y_0).$$

Definim şirul de funcţii $\{V_n\}$, $V_n : \Omega \to \mathbb{R}$, prin

$$V_n(x) = \max\{u_1(x), v_1(x), u_2(x), v_2(x), ..., u_n(x), v_n(x)\},\ \ x \in \Omega.$$

Este clar că

$$V_n(x_0) \longrightarrow u(x_0) \ \text{ şi } \ V_n(y_0) \longrightarrow u(y_0).$$

Trecem apoi, ca şi în cazul precedent, de la şirul $\{V_n\}$ la şirul $\{V_n^D\}$.

În aceeaşi manieră, rezultă că şirul $\{V_n^D\}$ este monoton crescător şi converge la funcţia V^D care este armonică în D. Rezumând, am obţinut următoarele trei relaţii

(i) $V^D \geq U^D$ în Ω.

(ii) $V^D(x_0) = U^D(x_0) = u(x_0)$.

(iii) $V^D(y_0) = u(y_0) > U^D(y_0)$.

Din (i) şi (ii) deducem că $V^D - U^D$ este o funcţie armonică şi nenegativă în D dar se anulează în punctul $x_0 \in D$. Din principiul de minim pentru funcţii armonice rezultă că $U^D \equiv V^D$ pe D, ceea ce contrazice (iii). Rezultă că $U^D \equiv u$ în D, ceea ce încheie demonstraţia propoziţiei. Rămâne să demonstrăm comportarea lui u la frontiera lui Ω. Înainte de aceasta, vom introduce o noţiune utilă în cele ce urmează.

Definiţia 7.1. Spunem că funcţia $\omega : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}$ este o funcţie "barieră" pentru Ω în punctul $\bar{x} \in \partial\Omega$ dacă satisface condiţiile:

(j) ω este continuă în $\overline{\Omega}$,

(jj) ω este armonică în Ω,

(jjj) $\omega(\bar{x}) = 0$,

(jv) $\omega(x) > 0,\ \forall\, x \in \overline{\Omega} \setminus \{\bar{x}\}$.

Observvăm faptul că dacă există o bilă $B(y,r)$ astfel încât $B(y,r)\cap\overline{\Omega}=\emptyset$ şi $\overline{B(y,r)}\cap\overline{\Omega}=\bar{x}$, atunci funcţia $\omega:\overline{\Omega}\to\mathbb{R}$, dată prin:

$$\omega(x)=\begin{cases} r^{n-2}-\|x-y\|^{2-n}, & \text{pentru } u\geq 3\\ \ln\dfrac{\|x-y\|}{r}, & \text{pentru } n=2\end{cases}$$

satisface condiţiile (j)–(jv).

Punctele de pe frontieră care admit o barieră se numesc *regulate*. Dacă frontiera $\partial\Omega$ este de clasă C^2, atunci toate punctele sale sunt regulate.

Propoziţia 7.2. *Dacă $\bar{x}\in\partial\Omega$ este un punct regulat, atunci*

$$\lim_{x_n\to\bar{x}} u(x_n)=g(\bar{x}). \tag{7.5}$$

Demonstraţie. Fie ω o funcţie barieră în $\bar{x}$. Pentru $\varepsilon>0$ luăm bila $B(\bar{x},\varepsilon)$ astfel încât

$$|g(x)-g(\bar{x})|<\varepsilon,\ \forall\, x\in B(\bar{x},\varepsilon)\cap\partial\Omega.$$

Fie $\omega_0=\min\limits_{x\notin B(\bar{x},\varepsilon)}>0$ şi $M=\max\limits_{\partial\Omega} g$. Funcţia $W:\overline{\Omega}\to\mathbb{R}$ dată prin

$$W(x)=g(\bar{x})+\varepsilon+\frac{\omega(x)}{\omega_0}[M-g(\bar{x})]$$

este armonică şi satisface condiţiile

$$\begin{array}{ll} W(x)\geq g(\bar{x})+\varepsilon, & \forall\, x\in\overline{\Omega}\\ W(y)>g(y), & \forall\, y\in\partial\Omega\cap B(\bar{x},\varepsilon).\end{array}$$

Apoi, din definiţia lui ω_0 rezultă

$$W(z)\geq g(\bar{x})+\varepsilon+[M-g(\bar{x})]=M+\varepsilon>g(z),\ \forall\, z\in\partial\Omega\backslash B(\bar{x},\varepsilon),$$

de unde obţinem $W-g>0$ pe $\partial\Omega$.

Pentru orice $w\in S_g$, funcţia $w-W$ este continuă în $\overline{\Omega}$, subarmonică în Ω şi strict negativă pe $\partial\Omega$. Din principiul de maxim rezultă

$$w(x)<W(x),\ \forall\, x\in\Omega$$

şi din definiţia lui u avem

$$u(x)\leq W(x),\ \forall\, x\in\Omega.$$

Prin urmare,

$$\limsup_{x_n \to \bar{x}} u(x_n) \leq \limsup_{x_n \to \bar{x}} W(x_n) = g(\bar{x}) + \varepsilon$$

şi, întrucât ε este arbitrar

$$\limsup_{x_n \to \bar{x}} u(x_n) \leq g(\bar{x}). \tag{7.6}$$

Considerăm acum funcţia armonică

$$V(x) = g(\bar{x}) - \varepsilon - \frac{\omega(x)}{\omega_0}[M + g(\bar{x})], \ \forall\, x \in \overline{\Omega}.$$

Procedând ca mai înainte, găsim că $V < g$ pe $\partial\Omega$, prin urmare $V \in S_g$, deci

$$V(x) \leq u(x), \ \forall\, x \in \Omega,$$

relaţii care conduc la

$$\liminf_{x_n \to \bar{x}} u(x_n) \geq \liminf_{x_n \to \bar{x}} V(x_n) = \lim_{x_n \to \bar{x}} V(x_n) = g(\bar{x}) - \varepsilon,$$

şi ε fiind arbitrar,

$$\liminf_{x_n \to \bar{x}} u(x_n) \geq g(\bar{x}). \tag{7.7}$$

Din (7.6) şi (7.7) deducem (7.5). ■

8.8 Ecuaţia lui Laplace. Metoda separării variabilelor

Problemele la limită pentru ecuaţia lui Laplace pentru anumite domenii simple pot fi rezolvate cu ajutorul metodei separării variabilelor. Această metodă este, din punct de vedere istoric, cea mai veche metodă utilizată sistematic pentru rezolvarea ecuaţiilor cu derivate parţiale.

Se pare că metoda a fost utilizată pentru prima dată de D. Bernoulli în 1750 pentru rezolvarea ecuaţiei undelor, dar a fost fundamentată ulterior de Fourier şi folosită pentru tratarea ecuaţiei căldurii. Esenţa metodei constă în înlocuirea ecuaţiei cu derivate parţiale cu un set de ecuaţii diferenţiale ordinare şi reprezentarea soluţiei sub forma unei serii trigonometrice.

Trebuie să precizăm faptul că metoda separării variabilelor pentru determinarea efectivă a soluţiei impune anumite cerinţe problemei considerate.

În primul rând, problema trebuie să fie liniară şi anumite părţi ale sale (ecuaţia cu derivate parţiale sau o parte dintre condiţii – iniţiale sau la frontieră) să fie omogene. Aceasta pentru a putea aplica principiul superpoziţiei în construcţia soluţiei generale, sub formă de combinaţii liniare ale soluţiilor fundamentale.

Apoi, domeniul în care este formulată problema trebuie să satisfacă nişte restricţii pentru ca, folosind un sistem de coordonate convenabil ales, variabilele să poată fi separate iar ecuaţia cu derivate parţiale să se transforme într-un set echivalent de ecuaţii diferenţiale ordinare.

În cazul ecuaţiei lui Laplace, cele mai cunoscute sisteme de coordonate în care se poate face separarea variabilelor (în cazurile $n = 2, 3$) sunt coordonatele: rectangulare, polare, cilindrice şi sferice. Rezolvarea ecuaţiei lui Laplace utilizând separarea variabilelor conduce la ecuaţii diferenţiale (Bessel – în cazul coordonatelor cilindrice, Legendre – în cazul coordonatelor sferice, respectiv problema Sturm–Liouville) care au fost tratate de noi în capitolele precedente.

În continuare vom aplica metoda separării variabilelor ecuaţiei lui Laplace pentru câteva domenii simple. Mai exact, vom rezolva problema Dirichlet corespunzătoare ecuaţiei lui Laplace în cazul $n = 2$ pentru dreptunghi şi cerc – aceste cazuri sugerând calea ce trebuie urmată în situaţii mai generale privind dimensiunea şi forma domeniului.

Problema lui Dirichlet pentru dreptunghi

Să considerăm problema determinării soluţiei u a ecuaţiei lui Laplace

$$u_{xx} + u_{yy} = 0 \tag{8.1}$$

în domeniul dreptunghiular $0 < x < a$, $0 < y < b$ şi care satisface condiţiile la frontieră (de tip Dirichlet)

$$\begin{aligned} u(x,0) &= h(x), \quad u(x,b) = g(x), \quad 0 < x < a, \\ u(0,y) &= \varphi(y), \quad u(a,y) = f(y), \quad 0 < y < b. \end{aligned}$$

Discuţie. Dorim să determinăm funcţia $u(x, y)$ ce satisface ecuaţia lui Laplace în domeniul dreptunghiular (vezi Fig. 8.1) $0 < x < a$, $0 < y < b$ şi care ia pe frontiera domeniului valorile prescrise, date prin funcţiile f, g, h, φ.

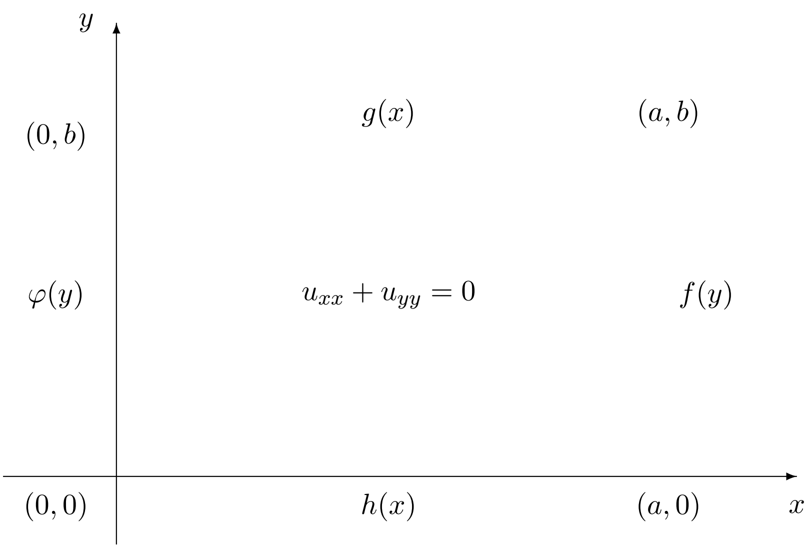

Fig. 8.1

Această problemă se poate simplifica dacă observăm faptul că soluţia u a problemei iniţiale poate fi obţinută ca suma soluţiilor a patru probleme mai simple (principiul superpoziţiei) $u = u_1 + u_2 + u_3 + u_4$ care satisfac ecuaţia (8.1) şi, respectiv, condiţiile la frontieră

$$
\begin{aligned}
&\text{(a)} \quad u_1(0,y) = \varphi(y), \quad u_1(a,y) = u_1(x,0) = u_1(x,b) = 0,\\
&\text{(b)} \quad u_2(a,y) = f(y), \quad u_2(0,y) = u_2(x,0) = u_2(x,b) = 0,\\
&\text{(c)} \quad u_3(x,0) = h(x), \quad u_3(0,y) = u_3(a,y) = u_3(x,b) = 0,\\
&\text{(d)} \quad u_4(x,b) = g(x), \quad u_4(0,y) = u_4(a,y) = u_4(x,0) = 0.
\end{aligned}
$$

Cele patru probleme sunt similare, de aceea ne oprim asupra unui singur caz.

Exemplu. Să se determine soluţia ecuaţiei

$$u_{xx} + u_{yy} = 0 \tag{8.2}$$

în dreptunghiul $0 < x < a,\ 0 < y < b$ care satisface condiţiile la frontieră

$$
\begin{aligned}
&u(x,0) = u(x,b) = 0, && 0 < x < a,\\
&u(0,y) = 0,\ u(a,y) = f(y), && 0 \le y \le b
\end{aligned}
\tag{8.3}
$$

unde f este o funcţie dată pe intervalul închis $[0, b]$.

Soluţie. Căutăm soluţia problemei (8.2)–(8.3) sub forma unui produs de funcţii, fiecare depinzând de câte o singură variabilă. Mai exact, luăm

$$u(x, y) = X(x)Y(y)$$

şi, înlocuind în ecuaţia (8.1), obţinem

$$X''Y + XY'' = 0,$$

care conduce la relaţia

$$\frac{X''}{X} = -\frac{Y''}{Y} \tag{8.4}$$

în care variabilele sunt separate.

Deoarece cei doi membri ai relaţiei (8.3) depind de variabile diferite, egalitatea are loc doar dacă ambii membri sunt constanţi. Notăm valoarea comună cu C. Dacă $C = 0$, atunci $X'' = 0$, $Y'' = 0$ şi

$$u(x, y) = (\alpha_1 x + \alpha_2)(\beta_1 y + \beta_2).$$

Din condiţiile (8.3) luate în $y = 0$, $y = b$, rezultă $\beta_1 = \beta_2 = 0$, deci $u \equiv 0$.

Analog, dacă constanta de separare este negativă (fie aceasta $-\lambda^2$ cu $\lambda > 0$), găsim

$$X'' + \lambda^2 X = 0, \quad Y'' - \lambda^2 Y = 0 \text{ şi}$$
$$u(x, y) = (\alpha_1 \sinh \lambda x + \alpha_2 \cosh \lambda x)(\beta_1 \sin \lambda y + \beta_2 \cos \lambda y).$$

Impunând condiţiile la frontieră în $x = 0$ şi $y = 0$, obţinem $\alpha_2 = \beta_2 = 0$. Atunci condiţia în $y = b$ devine

$$\alpha_1 \beta_1 \sinh \lambda x \sin \lambda b = 0,$$

care implică $\sin \lambda b = 0$, de unde

$$\lambda b = n\pi, \quad n = 1, 2, ...$$

Astfel, soluţiile ecuaţiei (8.2) care satisfac condiţiile omogene sunt de forma

$$u_n(x, y) = c_n \sinh \frac{n\pi x}{b} \sin \frac{n\pi y}{b}, \quad n = 1, 2, 3, ...$$

Aceste funcţii servesc ca un sistem fundamental de soluţii pentru problema de faţă. Vom presupune că putem reprezenta soluţia $u(x, y)$ sub forma

$$u(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \sinh \frac{n\pi x}{b} \sin \frac{n\pi y}{b}. \tag{8.5}$$

Coeficienţii c_n sunt determinaţi de condiţia la frontieră

$$u(a,y) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \sinh\frac{n\pi a}{b}\sin\frac{n\pi y}{b} = f(y).$$

Prin urmare, în scrierea de mai sus, cantităţile $c_n \sinh(n\pi a/b)$ sunt coeficienţii seriei Fourier asociată funcţiei f şi sunt daţi de

$$c_n \sin\frac{n\pi a}{b} = \frac{2}{b}\int_0^b f(y)\sin\frac{n\pi y}{b}dy. \tag{8.6}$$

Astfel, soluţia problemei (8.2)–(8.3) este dată de formula (8.5) cu coeficienţii c_n daţi de (8.6).

În cazul domeniilor circulare, cilindrice, sferice este convenabil (din punctul de vedere al metodei separării variabilelor) să trecem de la coordonatele carteziene la coordonate polare, cilindrice, sferice – deoarece în acest caz exprimarea condiţiilor la frontieră este mai simplă. Vom prezenta în continuare expresia laplaceanului în coordonate polare şi vom rezolva problema lui Dirichlet în cazul discului.

Ecuaţia laplaceanului în coordonate polare

Relaţiile dintre coordonatele carteziene (x,y) ale unui punct din plan şi coordonatele sale polare (r,θ) sunt date de formulele (vezi Fig. 8.2)

$$x = r\cos\theta,\ y = r\sin\theta;\quad r\in[0,\infty),\ \theta\in[0,2\pi). \tag{8.7}$$

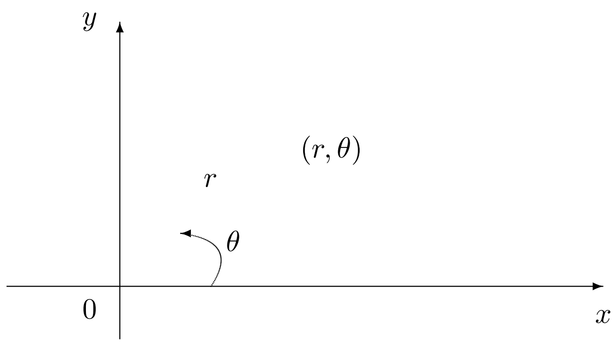

Fig.8.2. Coordonate polare

Laplaceanul funcţiei u în coordonate carteziene este dat de formula

$$\Delta u(x,y) = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}.$$

Dorim să vedem ce formă capătă laplaceanul atunci când facem schimbarea de variabile (8.7). Pentru simplitate, vom nota derivatele parţiale cu indici scrişi în dreapta jos, iar pentru $u(x, y)$ ca funcţie de r, θ vom folosi tot litera u.

Din (8.7) deducem relaţia

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \theta = \operatorname{arctg} \frac{y}{x}\cdot \tag{8.8}$$

Aplicând regula derivării funcţiilor compuse, găsim

$$u_x = u_r r_x + u_\theta \theta_x.$$

Apoi

$$u_{xx} + (u_r r_x)_x + (u_\theta \theta_x)_x = (u_r)_x r_x + u_r r_{xx} + (u_\theta)_x \theta_x + u_\theta \theta_{xx}. \tag{8.9}$$

Aplicând din nou regula derivării funcţiilor compuse, obţinem

$$(u_r)_x = u_{rr} r_x + u_{r\theta} \theta_x \text{ şi } (u_\theta)_x = u_{\theta r} r_x + u_{\theta\theta} \theta_x.$$

În acelaşi mod, ţinând cont de (8.8), obţinem

$$r_x = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \frac{x}{r}, \; \theta_x = \frac{1}{1 + (y/x)^2} \left(-\frac{y}{x^2} \right) = -\frac{y}{r^2};$$

$$r_{xx} = \frac{r - x r_x}{r^2} = \frac{1}{r} - \frac{x^2}{r^3} = \frac{y^2}{r^3}, \; \theta_{xx} = -y \left(-\frac{2}{r^3} \right) r_x = \frac{2xy}{r^4}.$$

Înlocuind aceste expresii în relaţia (8.9) şi presupunând că $u_{r\theta} = u_{\theta r}$, obţinem

$$u_{xx} = \frac{x^2}{r^2} u_{rr} - 2\frac{xy}{r^3} u_{r\theta} + \frac{y^2}{r^4} u_{\theta\theta} + \frac{y^2}{r^3} u_r + 2\frac{xy}{r^4} u_\theta.$$

Analog, obţinem

$$u_{yy} = \frac{y^2}{r^2} u_{rr} + 2\frac{xy}{r^3} u_{r\theta} + \frac{x^2}{r^4} u_{\theta\theta} + \frac{x^2}{r^3} u_r - 2\frac{xy}{r^4} u_\theta.$$

Adunând ultimele două relaţii, obţinem

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2}\cdot \tag{8.10}$$

În aceeaşi manieră se determină expresia laplaceanului în coordonate cilindrice şi sferice.

• În coordonate cilindrice r, θ, z definite prin (vezi Fig. 8.3)

$$x = r\cos\theta,\ y = r\sin\theta,\ z = z,\ r \in [0, \infty),\ \theta \in [0, 2\pi),\ z \in \mathbb{R},$$

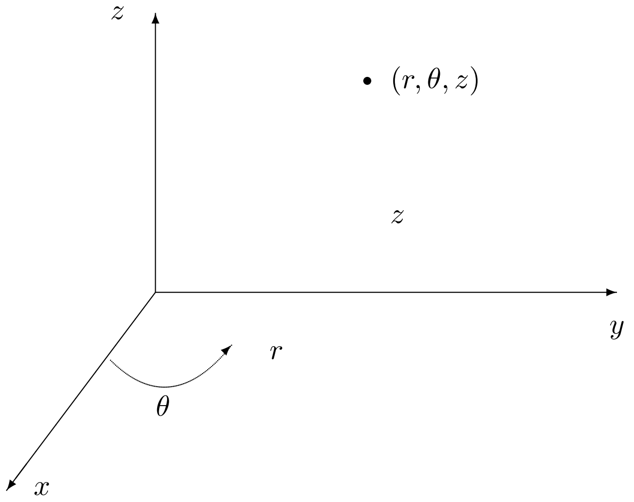

Fig. 8.3. Coordonate cilindrice

laplaceanul are forma

$$\Delta u = u_{rr} + \frac{1}{r}\ u_r + \frac{1}{r^2}\ u_{\theta\theta} + u_{zz}.$$

• În coordonate sferice cu centrul în origine r, θ, φ

$$x = r\cos\theta\sin\varphi,\ y = r\sin\theta\sin\varphi,\ z = r\cos\varphi$$

unde $r \in [0, \infty),\ \theta \in [0, \pi)$ iar $\varphi \in [0, 2\pi)$. operatorul lui Laplace are forma

$$\Delta u = \frac{1}{r^2}\left[(r^2 u_r)_r + \frac{1}{\sin\varphi}(\sin\varphi u_\varphi)_\varphi + \frac{1}{\sin^2\varphi} u_{\theta\theta}\right]$$

care mai poate fi scris în forma echivalentă

$$\Delta u = u_{rr} + \frac{2}{r}\ u_r + \frac{1}{r^2}\ u_{\varphi\varphi} + \frac{\operatorname{ctg}\varphi}{r^2}\ u_\varphi + \frac{1}{r^2\sin^2\varphi}\ u_{\theta\theta}.$$

Problema lui Dirichlet pentru disc

Ne propunem să determinăm funcţia u care satisface ecuaţia lui Laplace într-un disc D de rază a $(a > 0)$ când se cunosc valorile lui u pe frontiera discului.

Cu aceeaşi metodă se rezolvă problema similară în exteriorul discului de rază a. În acest caz vom cere în plus ca funcţia u să fie mărginită la infinit.

În coordonate polare, problema se scrie sub forma

$$(8.11) \qquad \begin{cases} \Delta u = \dfrac{1}{r}\,\dfrac{\partial}{\partial r}\left(r\,\dfrac{\partial u}{\partial r}\right) + \dfrac{1}{r^2}\,\dfrac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} = 0, & \text{în } D \\ u(a,\theta) = f(\theta), & \theta \in \mathbb{R} \end{cases}$$

unde f este o funcţie dată de perioadă 2π.

Folosim metoda separării variabilelor şi căutăm soluţia ecuaţiei $(8.11)_1$ sub forma

$$(8.12) \qquad u(r,\theta) = R(r)\Theta(\theta).$$

Substituind relaţia (8.12) în $(8.11)_1$ şi separând variabilele, obţinem

$$\frac{r}{R}\,\frac{d}{dr}\left(\frac{dR}{dr}\right) = -\frac{1}{\Theta}\,\frac{d^2\Theta}{d\theta^2}.$$

Cum membrul întâi este funcţie numai de r şi membrul al doilea funcţie numai de θ, pentru a avea egalitatea pentru orice r şi θ, rezultă că ambii membri sunt egali cu o constantă. Deci

$$(8.13) \qquad \frac{R}{r}\,\frac{d}{dr}\left(r\,\frac{dR}{dr}\right) = -\frac{1}{\Theta}\,\frac{d^2\Theta}{d\theta^2} = \lambda$$

unde λ este o constantă reală (acest fapt se arată folosind condiţiile la limită).

Relaţia (8.13) conduce la sistemul

$$(8.14) \qquad \frac{d^2\Theta}{d\theta^2} + \lambda\Theta = 0,$$

$$(8.15) \qquad r^2\,\frac{d^2R}{dr^2} + r\,\frac{dR}{dr} - \lambda R = 0.$$

Funcţia Θ trebuie să fie o funcţie periodică de perioadă 2π, deoarece, atunci când unghiul θ variază cu 2π, funcţia $u(r,\theta)$ trebuie să revină la valoarea iniţială

$$u(r,\theta+2\pi) = u(r,\theta).$$

Dacă $\lambda = 0$, atunci relaţiile (8.14)–(8.15) conduc la

$$(8.16) \qquad \Theta'' = 0,\ r^2R'' + rR' = 0$$

care conduc la soluţia

$$u(r,\theta) = (c_1 + c_2\theta)(d_1 + d_2 \ln r). \tag{8.17}$$

Deoarece funcţia u este periodică în θ, rezultă că $c_2 = 0$. Apoi, deoarece u trebuie să fie o funcţie continuă în disc, iar $|\ln r| \longrightarrow \infty$ pentru $r \longrightarrow 0$, rezultă că $d_2 = 0$. Aşadar, pentru $\lambda = 0$, singura soluţie admisibilă este o constantă.

Se arată (folosind periodicitatea lui Θ) că λ nu poate fi o constantă strict negativă.

Acum, deoarece ecuaţia (8.14) are soluţii cu perioada 2π, va trebui ca $\lambda = n^2$, unde n este un număr întreg pozitiv. Prin urmare, valorile proprii ale lui λ vor fi

$$\lambda_n = n^2$$

iar soluţiile proprii corespunzătoare

$$\Theta_n(\theta) = a_n \cos n\theta + b_n \sin n\theta.$$

Pentru $\lambda_n = n^2$, ecuaţia (8.15), care este o ecuaţie de tip Euler, are soluţiile

$$R_n(r) = c_n r^n + d_n r^{-n}.$$

Cazul problemei interioare ($r \leq a$). În acest caz, luăm $d_n = 0$ deoarece $r^{-n} \longrightarrow \infty$ pentru $r \longrightarrow 0$. Deci, $R_n(r) = c_n r^n$ şi soluţia ecuaţiei lui Laplace este

$$u(r,\theta) = r^n(A_n \cos n\theta + B_n \sin n\theta)$$

unde A_n şi B_n sunt constante arbitrare.

Aplicând principiul superpoziţiei vom căuta pentru problema (8.11) o soluţie de forma

$$u(r,\theta) = \sum_{n=0}^{\infty} r^n(A_n \cos n\theta + B_n \sin n\theta). \tag{8.18}$$

Pentru determinarea coeficienţilor A_n şi B_n folosim condiţia la limită $(8.11)_2$ şi obţinem

$$u(a,\theta) = \sum_{n=0}^{\infty} a^n(A_n \cos n\theta + B_n \sin n\theta) = f(\theta). \tag{8.19}$$

Ultima egalitate a relaţiei (8.19) arată că, presupunând că funcţia f este dezvoltabilă în serie Fourier cu perioada 2π, $a^n A_n$, $a^n B_n$ sunt tocmai coeficienţii

Fourier ai funcţiei f. Ţinând cont de forma coeficienţilor Fourier ai funcţiei f, rezultă

$$A_0 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(\theta)d\theta$$

$$A_n = \frac{1}{a^n\pi}\int_0^{2\pi} f(\theta)\cos n\theta d\theta,\ B_n = \frac{1}{a^n\pi}\int_0^{2\pi} f(\theta)\sin n\theta d\theta,\ n = 1, 2, ...$$

Cazul problemei exterioare $(r \geq a)$. Deoarece $r^n \longrightarrow \infty$ pentru $r \longrightarrow \infty$, iar soluţia trebuie să rămână mărginită, va trebui să luăm $c_n = 0$. În acest caz, vom avea

$$u(r,\theta) = \sum_{n=0}^{\infty} r^{-n}(\overline{A}_n \cos n\theta + \overline{B}_n \sin n\theta)$$

unde $\overline{A}_n, \overline{B}_n$ sunt constante care se determină, ca şi în cazul precedent, din condiţia impusă asupra soluţiei pe frontiera discului.

Obţinem:

$$\overline{A}_0 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(\theta)d\theta$$

$$\overline{A}_n = \frac{a^n}{\pi}\int_0^{2\pi} f(\theta)\cos n\theta d\theta,\ \overline{B}_n = \frac{a^n}{\pi}\int_0^{2\pi} f(\theta)\sin n\theta d\theta,\ n = 1, 2, ...$$

Observaţie. Problema lui Dirichlet exterioară, pentru ecuaţia lui Laplace, în cazul discului se poate reduce la problema lui Dirichlet interioară utilizând transformarea lui Kelvin.

Problema lui Neumann pentru disc

Ecuaţia lui Laplace, în discul D de rază a, cu condiţii Neumann pe frontieră, are forma

$$\begin{cases} \Delta u = 0, & \text{în } D \\ \dfrac{\partial u}{\partial \nu}(a,\theta) = \dfrac{\partial u}{\partial r}(a,\theta) = f(\theta), & \theta \in \mathbb{R} \end{cases} \tag{8.20}$$

unde, din aceleaşi motive ca în cazul anterior, f este o funcţie de perioadă 2π.

Se observă că, dacă u este o soluţie a problemei (8.20), atunci şi $u + k$ ($k =$ const.) este o soluţie a problemei, prin urmare soluţia problemei (8.20) nu este unică.

Din formula a doua a lui Green pentru perechea $(u, 1)$ pe D, găsim relaţia

$$\int_D \Delta u\, dx = \int_{\partial D} \frac{\partial u}{\partial \nu} d\sigma$$

de unde, ţinând cont de (8.20), obţinem

$$\int_{\partial D} f\, d\sigma = 0$$

care se mai scrie sub forma

$$\int_0^{2\pi} f(\theta) d\theta = 0. \tag{8.21}$$

Ca şi în cazul problemei Dirichlet, soluţia ecuaţiei Laplace pentru disc este (v. (8.18))

$$u(r,\theta) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} r^n (A_n \cos n\theta + B_n \sin n\theta). \tag{8.22}$$

Diferenţiind această relaţie în raport cu r şi ţinând cont de condiţia (8.20_2), rezultă

$$\sum_{n=1}^{1} n a^{n-1} (A_n \cos n\theta + B_n \sin n\theta) = f(\theta)$$

de unde se obţin coeficienţii A_n, B_n cu ajutorul formulelor

$$A_n = \frac{1}{n\pi a^{n-1}} \int_0^{2\pi} f(\tau) \cos n\tau\, d\tau, \quad n = 1, 2, ...$$
$$B_n = \frac{1}{n\pi a^{n-1}} \int_0^{2\pi} f(\tau) \sin n\tau\, d\tau, \quad n = 1, 2, ...$$

şi din condiţia de compatibilitate (8.21)

$$A_0 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(\theta) d\theta = 0.$$

Introducând expresiile coeficienţilor A_n, B_n în formula (8.22), obţinem soluţia problemei (8.20)

$$u(r,\theta) = \frac{a}{\pi} \int_0^{2\pi} \left[\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{r}{a} \right)^n \cos n(\theta - \tau) \right] f(\tau) d\tau.$$

Folosind identitatea

$$-\frac{1}{2} \ln[1 + \rho^2 - 2\rho \cos(\theta - \tau)] = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \rho^n \cos n(\theta - \tau)$$

cu $\rho = \dfrac{r}{a}$ şi, ţinând cont de relaţia (8.21), obţinem soluţia problemei Neumann interioare

$$u(r,\theta) = -\frac{a}{2\pi}\int_0^{2\pi} \ln(a^2 - 2ra\cos(\theta-\tau) + r^2) f(\tau) d\tau.$$

Într-o manieră asemănătoare, obţinem soluţia problemei Neumann exterioare

$$u(r,\theta) = \frac{a}{2\pi}\int_0^{2\pi} \ln(a^2 - 2ar\cos(\theta-\tau) + r^2) f(\tau) d\tau.$$

Capitolul 9

Elemente de analiză funcţională

9.1 Elemente de analiză funcţională

Cadrul natural de prezentare a teoriei ecuaţiilor cu derivate parţiale este cel al spaţiilor normate. Acest lucru motivează introducerea acestui paragraf.

Pentru a nu lungi expunerea ne vom mărgini doar la noţiuni şi rezultate fundamentale.

Pentru detalii trimitem la monografiile [12], [19], [41].

Fie U un spaţiu liniar real. Spunem că aplicaţia $\|\cdot\| : U \to \mathbb{R}$ defineşte o normă pe U dacă satisface următoarele proprietăţi (sau axiome):

N_1. $\|u\| \geq 0,\ \forall\, u \in U$ şi $\|u\| = 0$ dacă şi numai dacă $u = 0$

N_2. $\|\alpha u\| = |\alpha| \|u\|,\ \forall\, \alpha \in \mathbb{R},\ \forall\, u \in U$

N_3. $\|u + v\| \leq \|u\| + \|v\|,\ \forall\, u, v \in U.$

Axioma N_3 se numeşte *inegalitatea triunghiului* iar elementele lui U se mai numesc *vectori*.

Spaţiul liniar U, dotat cu norma $\|\cdot\|$ se numeşte *spaţiu normat.*

Spunem că aplicaţia $(\cdot, \cdot) : U \times U \to \mathbb{R}$ defineşte un produs scalar pe U dacă satisface axiomele:

PS_1. $(u, v) = (v, u),\ \forall\, u, v \in U$

PS_2. $(\alpha u + \beta v, w) = \alpha(u, w) + \beta(v, w),\ \forall\, a, \beta \in R,\ \forall\, u, v, w \in U$

PS_3. $(u, u) \geq 0,\ \forall\, u \in U$ şi $(u, u) = 0$ dacă şi numai dacă $u = 0$.

O consecinţă imediată a proprietăţii PS_3 este inegalitatea lui Cauchy-Schwartz

$$|(u,v)| \leq (u,u)^{1/2}(v,v)^{1/2}, \ \forall\, u,v \in U.$$

Este uşor de constatat că orice spaţiu liniar dotat cu un produs scalar este spaţiu normat prin norma dată de

$$\|u\| = (u,u)^{1/2}.$$

În acest caz inegalitatea lui Cauchy–Schwartz se mai scrie sub forma

$$|(u,v)| \leq \|u\|\|v\|, \ \forall\, u,v \in U.$$

Prin intermediul normei putem introduce pe U noţiunea de convergenţă.

Spunem că şirul $\{u_n\}_{n\in \mathbb{N}^*}$ este *convergent* dacă există un element $u \in U$ astfel încât

$$\|u_n - u\| \longrightarrow 0 \text{ pentru } n \to \infty.$$

În acest caz se mai notează $u_n \to u$ (u_n converge la u) sau $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = u$. Spunem că şirul $\{u_n\}$ din U este *şir Cauchy* dacă pentru orice număr real $\varepsilon > 0$ există un număr natural $N(\varepsilon)$ astfel încât

$$\|u_n - u_m\| < \varepsilon, \ \forall\, m,n > N(\varepsilon).$$

Evident că orice şir convergent este şir Cauchy, reciproca acestei afirmaţii nefiind în general adevărată. Dacă, însă, în spaţiul normat U orice şir Cauchy este şir convergent, atunci spaţiul U se numeşte *spaţiu Banach* sau *complet* în raport cu norma dată.

Dacă spaţiul vectorial U este dotat cu un produs scalar iar faţă de norma indusă este complet, el se mai numeşte *spaţiu Hilbert*.

Prin urmare orice spaţiu Hilbert este spaţiu Banach. Într-un spaţiu Hilbert se verifică cu uşurinţă identitatea

$$\|u+v\|^2 + \|u-v\|^2 = 2(\|u\|^2 + \|v\|^2), \ \forall\, u,v \in H$$

cunoscută sub numele de *identitatea paralelogramului*.

Mulţimea $B(x_0,\varepsilon) = \{u : u \in U, \ \|u - u_0\| < \varepsilon\}, \ \varepsilon > 0$ se numeşte *bila deschisă centrată în* u_0 *şi de rază* ε.

Spunem că mulţimea A a spaţiului normat U este *deschisă* dacă pentru orice punct $a \in A$ există o bilă deschisă centrată în a şi inclusă în A. Mulţimea A se numeşte *închisă* dacă complementara sa este deschisă. Închiderea unei mulţimi se poate caracteriza şi cu ajutorul şirurilor.

Adăugând la A mulţimea limitelor şirurilor convergente din A se obţine o mulţime închisă numită *închiderea* lui A. Se mai notează cu $\overline{A}$. Mulţimea A a spaţiului normat U se numeşte *relativ compactă* dacă orice şir de elemente din A are subşiruri convergente. Mulţimea A se numeşte *compactă* dacă este relativ compactă şi închisă. Spunem că mulţimea A este *mărginită* dacă există un număr real K astfel că $\|x\| \leq M$, $\forall\, x \in A$.

Submulţimea A a spaţiului U se numeşte *densă în* U dacă $\overline{A} = U$.

Spaţiul normat U se numeşte *separabil* dacă conţine o submulţime A care este densă în U.

Funcţionale şi operatori liniari pe spaţii normate

Dacă U şi V sunt două spaţii normate, cu normele $\|\cdot\|_U$ (respectiv $\|\cdot\|_V$), spunem că aplicaţia $T : U \to V$ este *operator liniar* dacă

$$T(\alpha u + \beta v) = \alpha T u + \beta T v,\ \ \forall\, u, v \in U,\ \ \forall\, \alpha, \beta \in \mathbb{R}.$$

Dacă în plus există un număr real M astfel ca

$$\|Tu\|_V \leq M \|u\|_U,\ \ \forall\, u \in U \tag{1.1}$$

spunem că operatorul liniar T este *mărginit.* În continuare vom folosi pentru ambele norme, din U şi V, aceeaşi notaţie. În cazul în care este pericol de confuzie vom ataşa la semnul de normă un indice. Noţiunea de mărginire a operatorilor liniari este strâns legată de continuitate. Mai exact, se demonstrează faptul că un operator liniar între două spaţii normate este *continuu* dacă şi numai dacă este mărginit.

Cea mai mică constantă M pentru care are loc (1.1) se numeşte *norma* lui T şi se notează $\|T\|$. Prin urmare

$$\|T\| = \sup\{\|Tu\|/\|u\|,\ u \neq 0\}$$

şi avem

$$\|Tu\| \leq \|T\|\|u\|.$$

Se verifică uşor că această "normă" (numită şi normă operatorială) definită pe mulţimea operatorilor liniari şi continui de la U în V satisface proprietăţile $N_1 - N_3$. În acest fel mulţimea operatorilor liniari şi continui de la U în V, notată cu $L(U, V)$ devine un spaţiu normat. Dacă V este, în plus, un spaţiu Banach atunci rezultă că şi $L(U, V)$ dotat cu norma operatorială este spaţiu Banach. O clasă specială de operatori liniari o formează *funcţionalele liniare* care sunt aplicaţii liniare definite pe spaţii liniare cu valori reale.

Mulţimea funcţionalelor liniare şi continue definite pe U cu valori în $\mathbb{R}$ (deci $L(U, \mathbb{R})$) se mai notează cu U^* şi se numeşte *dualul* spaţiului U. O problemă interesantă este cea a determinării formei funcţionalelor liniare continue pe un spaţiu normat. Prezentăm aici doar cazul spaţiilor Hilbert.

Teorema 1.1. (Teorema lui Riesz de reprezentare) *Fie H un spaţiu Hilbert şi f o funcţională liniară şi continuă pe H. Atunci există un element unic $u \in H$ astfel încât*

$$f(v) = (u, v), \ \forall\, v \in H.$$

Mai mult, $\|f\| = \|u\|$.

Dacă U este spaţiu normat iar U^* este dualul său ca spaţiu Banach, atunci dualul lui U^* se notează cu U^{**} şi se numeşte *bidualul* lui U.

Fie $u \in U$ un element fixat şi aplicaţia $F_u : U^* \to \mathbb{R}$ dată prin $F_u(u^*) = u^*(u)$. Se verifică uşor că F_u este o funcţională liniară şi continuă pe U^* şi $\|F_u\| = \|u\|$, deci F_u este element al lui U^{**}. Notăm cu U_0^{**} mulţimea elementelor din U^* de această formă. Se arată imediat că aplicaţia $\phi : U \to U_0^{**}$ dată prin $\phi(u) = F_u$ este un izomorfism de spaţii normate numit şi *izomorfismul natural*.

Spaţiul normat U se numeşte *reflexiv* dacă U şi U^{**} sunt izomorfe prin izomorfismul natural. Cu ajutorul dualităţii dintre U şi U^* introducem noţiunea de *convergenţă slabă*. Spunem că şirul $\{u_n\}$ din U este slab convergent la $u_0 \in U$ dacă pentru orice $u^* \in U^*$ avem $u^*(u_n) \to u^*(u_0)$. Se mai notează $u_n \rightharpoonup u_0$.

Dacă U şi V sunt două spaţii normate iar $T \in L(U, V)$ spunem că T este *operator compact* dacă imaginea prin T a oricărei mulţimi mărginite din U este o mulţime relativ compactă din V. Având în vedere caracterizarea mulţimilor relativ compacte cu ajutorul şirurilor rezultă:

Propoziţia 1.1. *Condiţia necesară şi suficientă pentru ca T să fie compact, este ca pentru orice şir mărginit (u_n) din U, şirul (Tu_n) să aibă subşiruri convergente.*

Este folosită, de asemenea, următoarea definiţie (echivalentă) a compacităţii unui operator.

Operatorul liniar $T : U \to V$ este compact dacă este slab–tare continuu, cu alte cuvinte dacă $u_n \rightharpoonup u$ implică $Tu_n \to Tu$ pentru $n \to \infty$.

Fie U şi V două spaţii normate, U^* şi V^* dualele lor luate ca spaţii normate iar $T \in L(U, V)$. Prin operaţia adjunctă lui T, sau *adjunctul lui* T (ca operator) se înţelege operaţia $T^*: V^* \to U^*$ definită prin

$$T^* v^* = v^* T, \quad \forall\, v^* \in V^*$$

unde $v^* T$ este dat de

$$(v^* T)(u) = v^*(Tu), \quad \forall\, u \in U.$$

Dacă $T \in L(U, V)$ atunci rezultă imediat că $T^* \in L(V^*, U^*)$ şi $\|T^*\| = \|T\|$.

Dacă $U = V = H$ (spaţiu Hilbert) spunem că T este operator *autoadjunct* în $L(H)$ dacă $T^* = T$.

9.2 Spaţii Hilbert. Serii Fourier generalizate

În acest paragraf prezentăm o serie de rezultate şi aplicaţii semnificative care utilizează în mod esenţial produsul scalar şi proprietăţile operatorilor liniari sau aplicaţiilor liniare pe spaţii Hilbert.

Am arătat că noţiunea de spaţiu Hilbert se introduce prin intermediul produsului scalar, fapt care permite analogii cu spaţiile vectoriale finit dimensionale R^2, R^3 etc. Exemplul tipic de spaţiu Hilbert finit dimensional îl constituie $\mathbb{R}^n$ $(n \geq 1)$, cu produsul scalar (euclidian) $(x, y) = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i y_i$, pentru orice $x = (x_1, x_2, ..., x_n)$, $y = (y_1, y_2, ..., y_n)$. Generalizarea directă, infinit dimensională, o constituie spaţiul ℓ_2 al şirurilor $x = (x_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ de numere reale astfel încât seria $\sum\limits_{n \geq 1} |x_n|^2$ să fie convergentă.

Două şiruri $x = (x_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$, $y = (y_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ sunt egale dacă $x_n = y_n$, $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$. Se definesc suma $x + y = (x_n + y_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ şi produsul $\lambda x = (\lambda x_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ unde λ este un scalar. Din inegalitatea $|x_n y_n| \leq \frac{1}{2}(|x_n|^2 + |y_n|^2)$, rezultă că dacă $x, y \in \ell_2$, atunci seria $\sum\limits_{n \geq 1} x_n y_n$ este absolut convergentă (deci şi convergentă); în plus, rezultă că $x + y \in \ell_2$. Este clar că ℓ_2 este spaţiu vectorial peste $\mathbb{R}$ şi, definind $(x, y) = \sum\limits_{n \geq 1} x_n y_n$, se obţine un produs scalar. Se arată că faţă de norma indusă de acest produs scalar ℓ_2 este spaţiu complet, prin urmare este spaţiu Hilbert. Alte exemple importante sunt date de spaţiile $L^2(\Omega), H^k(\Omega)$, $k \in \mathbb{N}^*$.

Două elemente u, v din H se numesc *ortogonale* dacă $(u, v) = 0$. Ortogonalitatea acestor elemente se mai notează cu $u \perp v$ şi are o semnificaţie clară în cazul spaţiilor $\mathbb{R}^2$ şi $\mathbb{R}^3$.

Dacă $u_1, u_2, ..., u_n$ sunt ortogonale două câte două, atunci are loc egalitatea

$$\|u_1 + u_2 + \cdots + u_n\|^2 = \|u_1\|^2 + \|u_2\|^2 + \cdots + \|u_n\|^2$$

cunoscută şi sub numele de *teorema lui Pitagora.*

Dacă A şi B sunt două submulţimi nevide ale lui H, spunem că $A \perp B$ (A este *ortogonală* cu B) dacă şi numai dacă $u \perp v$, $\forall\, u \in A$, $\forall\, v \in B$.

Se demonstrează uşor

Propoziţia 2.1. *Dacă A este o mulţime nevidă şi $\overline{A}$ este închiderea sa, atunci*

$$u \in \overline{A} \ \ \textit{şi} \ \ u \perp A \Longrightarrow u = 0.$$

Consecinţă. *Dacă o mulţime A din H este densă în H şi $u \perp A$, atunci $u = 0$.*

Teorema 2.1. *Dacă A este o mulţime convexă şi închisă din spaţiul Hilbert H, atunci există în A un element de cea mai mică normă. Cu alte cuvinte există $x_0 \in A$ astfel încât*

$$d = \inf\{\|x\| : x \in A\} = \|x_0\|.$$

Demonstraţie. (schiţă) Fie $x_n \in A$, astfel încât $\|x_n\| \longrightarrow d$. Deoarece A este convexă rezultă $1/2(x_n + x_m) \in A$ şi din identitatea paralelogramului rezultă că $\{x_n\}$ este şir Cauchy, deci convergent, a cărui limită va fi elementul căutat.

Teorema 2.2. (Teorema de proiecţie) *Dacă H_0 este un subspaţiu vectorial închis din spaţiul Hilbert H, atunci pentru orice element $u \in H$, există cel puţin un element $u_0 \in H_0$ astfel încât $\|u - u_0\| \leq \|u - p\|$, $\forall\, p \in H_0$.*

Elementul u_0 este unic şi satisface condiţia $u - u_0 \in H_0^{\perp}$ (ortogonalul lui H_0 format din elementele lui H ortogonale pe H_0). El se mai numeşte *proiecţia* lui u pe H_0.

Trecem în continuare la prezentarea seriilor Fourier în spaţii Hilbert. Dacă $\{e_1, e_2, ..., e_n\}$ este baza canonică a spaţiului $\mathbb{R}^n$, înzestrat cu produsul scalar euclidian, atunci $(e_i, e_j) = \delta_{ij}$, $1 \leq i, j \leq n$. Aşadar $e_i \perp e_j$, pentru $i \neq j$ şi pentru $\forall\, x \in \mathbb{R}^n$, $x = (x_1, x_2, ..., x_n)$ avem $x = \sum_{k=1}^{n} x_k e_k$ unde $x_k = (x, e_k)$, $1 \leq k \leq n$. Aceste rezultate pot fi generalizate la spaţii Hilbert.

Definiţia 2.1. Fie H un spaţiu Hilbert fixat. Se numeşte *bază ortonormată* în H (sau *sistem ortonormat total* sau *complet*) orice şir $\mathcal{B} = \{e_1, e_2, ..., e_n, ...\}$ de vectori din H astfel încât $(e_i, e_j) = \delta_{ij}$, $\forall\, i, j \geq 1$, iar spaţiul liniar generat de $\mathcal{B}$ este dens în H.

Exemple.

1. Baza canonică a lui $\mathbb{R}^n$ este ortonormată.
2. În ℓ_2 elementele $e_1 = (1, 0, 0, ...)$, $e_2 = (0, 1, 0, ...)$, $e_3 = (0, 0, 1, ...)$ etc. formează o bază ortonormală.

Definiţia 2.2. Fie H un spaţiu Hilbert real (sau complex) având o bază ortonormală $\mathcal{B} = (e_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ şi $u \in H$ un element oarecare. Se numesc *coeficienţi Fourier generalizaţi ai lui u relativ la baza $\mathcal{B}$*, numerele reale (sau complexe)

$$c_n = (u, e_n),\ \ n \in \mathbb{N}^*.$$

Seria $\sum\limits_{n \geq 1} c_n e_n$ se numeşte *seria Fourier generalizată* a lui u relativ la $\mathcal{B}$.

Teorema 2.3. *Fie $\mathcal{B} = (e_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ o bază ortonormată din spaţiul Hilbert H. Pentru orice $u \in H$, seria sa Fourier generalizată relativ la $\mathcal{B}$ este convergentă în H şi are suma egală cu u. În plus, seria numerică $\sum\limits_{n \geq 1} |c_n|^2$ este convergentă, cu suma egală cu $\|u\|^2$.*

Demonstraţie. Avem de demonstrat că $\sum\limits_{n \geq 1} c_n e_n = u$ şi $\sum\limits_{n \geq 1} |c_n|^2 = \|u\|^2$, mai exact

$$\lim_{n \to \infty} \left\| u - \sum_{k=1}^{n} c_k e_k \right\| = 0 \ \text{ şi } \ \lim_{n \to \infty} \left(\|u\|^2 - \sum_{k=1}^{n} |c_k|^2 \right) = 0.$$

Fie $u_n = \sum\limits_{k=1}^{n} c_k e_k$, $n \geq 1$, unde $c_k = (u, e_k)$ sunt coeficienţii Fourier ai lui u relativ la $\mathcal{B}$.

Pentru orice k, $1 \leq k \leq n$, avem

$$(u_n, e_k) = \sum_{p=1}^{n} c_p (e_p, e_k) = \sum_{p=1}^{n} c_p \delta_{pk} = c_k = (u, e_k),$$

adică $(u_n - u, e_k) = 0$.

Pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$ fixat, notăm cu H_n subspaţiul vectorial al lui H generat de vectorii $e_1, e_2, ..., e_n$. Rezultă că $u_n - u \in H_n^{\perp}$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$. Fiind un spaţiu finit dimentional, H_n este mulţime închisă în H şi, conform teoremei proiecţiei, rezultă că u_n este proiecţia lui u pe H_n. (Deoarece, conform teoremei lui Pitagora, $\|u - u_n\|^2 + \|u_n - v\|^2 = \|u - v\|^2$, $\forall v \in H_n$, rezultă $\|u - u_n\| \leq \|u - v\|$.)

Fie acum $\varepsilon > 0$ arbitrar fixat. Întrucât spaţiul liniar generat de $\mathcal{B}$ este dens în H există un element $v \in H$, combinaţie liniară finită de elemente din $\mathcal{B}$, astfel încât $\|u - v\| < \varepsilon$. Aşadar, există un număr natural $N(\varepsilon)$ astfel încât $v \in H_n$, $\forall n \geq N(\varepsilon)$ şi, conform teoremei proiecţiei, $\|u - u_n\| \leq \|u - v\|$, deci $\|u - u_n\| < \varepsilon$, $\forall n \geq N(\varepsilon)$. De aici rezultă că $u_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} u$ în H şi deci $\sum\limits_{k=1}^{\infty} c_k e_k = u$.

Pe de altă parte, avem

$$\|u_n\|^2 = (u_n, u_n) = \left(\sum_{k=1}^{n} c_k e_k, \sum_{k=1}^{n} c_k e_k\right) = \sum_{k=1}^{n} |c_k|^2, \ \forall n \geq 1.$$

Ţinând cont că $u_n \to u \Longrightarrow \|u_n\| \to \|u\|$ şi făcând $n \to \infty$ în relaţia de mai sus, obţinem

$$\sum_{k=1}^{\infty} |c_k|^2 = \|u\|^2$$

adică exact ceea ce trebuia demonstrat. ■

Observaţii.

1. Relaţia $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |(u, u_n)|^2 = \|u\|^2$ este cunoscută sub numele de *egalitatea lui Parseval.*

2. Din relaţia de mai sus rezultă $\lim\limits_{n\to\infty} (u, u_n) = 0$ şi

$$\sum_{k=1}^{n} |(u, u_k)|^2 \leq \|u\|^2, \ \forall n \geq 1$$

   relaţie cunoscută sub numele de *inegalitatea lui Bessel.*

3. Dacă baza $\mathcal{B}$ este fixată şi $u \in H$, atunci dezvoltarea Fourier a lui u este unică.

În adevăr, dacă $u = \sum_{n=1}^{\infty} c_n e_n$ şi $u = \sum_{n=1}^{\infty} d_n e_n$, notând $v_n = \sum_{k=1}^{n} d_k e_k$, rezultă $(v_n, e_k) = d_k$, $\forall\, k \leq n$. Făcând $n \to \infty$, deoarece $v_n \to u$, rezultă $(u, e_k) = d_k$, deci $c_k = d_k$, $\forall\, k \geq 1$.

Din Teorema 2.3 se vede că pentru orice $u \in H$ şi $\forall\, n \geq 1$, dintre toate combinaţiile liniare $\sum_{k=1}^{n} c_k e_k$, cea mai apropiată de u este cea pentru care $c_k = (u, e_k)$, deci cea pentru care coeficienţii c_k sunt coeficienţii Fourier ai lui u relativ la $\mathcal{B}$.

Rezultatul care urmează arată că spaţiul ℓ_2 este prototipul spaţiilor Hilbert cu bază ortonormală.

Teorema 2.4. *Fie H un spaţiu Hilbert real sau complex având o bază ortonormată $\mathcal{B}$ şi aplicaţia $\phi : H \to \ell_2$ dată prin*

$$\phi(u) = \{c_1, c_2, ..., c_n, ...\},$$

unde cu $\{c_i\}_{i\geq 1}$ am notat coeficienţii Fourier ai lui u relativ la $\mathcal{B}$. Aplicaţia ϕ este un izomorfism liniar şi conservă produsele scalare.

Demonstraţie. Şirul $(c_n)_{n\geq 1}$ este din ℓ_2 deoarece $\sum_{n=1}^{\infty} |c_n|^2 = \|u\|^2 < \infty$. Injectivitatea lui ϕ rezultă din unicitatea dezvoltării în serie Fourier generalizată. Pentru surjectivitate fie $\gamma = (c_n)_{n\geq 1} \in \ell_2$ şi $u_n = \sum_{k=1}^{n} c_k e_k$; deoarece şirul $(u_n)_{n\geq 1}$ este Cauchy deci convergent, fie $u_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} u$.

Dar $(u_n, e_k) = c_k$, $1 \leq k \leq n$, de unde rezultă pentru $n \to \infty$ $(u, e_k) = e_k$, $k \geq 1$, adică $\phi(u) = \gamma$.

Liniaritatea lui ϕ este evidentă. Apoi pentru $u, v \in H$ avem $(u, v) = (\phi(u), \phi(v))$, fapt care arată că ϕ pastrează produsul scalar. ∎

Exemplu. Cel mai important exemplu este dat de spaţiul Hilbert real $L_2([-\pi, \pi])$ dotat cu produsul scalar $(f, g) = \int_{-\pi}^{\pi} f(x)g(x)dx$.

Şirul

$$e_1 = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \;\; e_2 = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos x, \;\;\; e_3 = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin x, \;\;\; e_4 = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos 2x, ...$$

constituie o bază ortonormată în H.

În adevăr, $(e_i, e_j) = \delta_{ij}$, $\forall\, i, j \geq 1$. Apoi faptul că subspaţiul generat de $\{e_n\}_{n\geq 1}$ este dens în H este un rezultat cunoscut de analiză matematică.

Fie acum o funcţie $u : [-\pi, \pi] \longrightarrow \mathbb{R}$ din $H = L^2([-\pi, \pi])$. Coeficienţii Fourier ai lui u relativ la baza ortonormată $\mathcal{B} = \{e_n\}_{n\geq 1}$ sunt

$$\begin{aligned}
c_1 &= (u, e_1) = \int_{-\pi}^{\pi} u(x) \frac{1}{\sqrt{2\pi}} dx = \sqrt{\frac{\pi}{2}} a_0, \\
c_2 &= (u, e_2) = \int_{-\pi}^{\pi} u(x) \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cos x \, dx = a_1 \sqrt{\pi}, \\
c_3 &= (u, e_3) = \int_{-\pi}^{\pi} u(x) \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sin x \, dx = b_1 \sqrt{\pi}, \\
&\vdots \\
c_{2n} &= a_n \sqrt{\pi}, \\
c_{2n+1} &= b_n \sqrt{\pi}, \\
&\vdots
\end{aligned}$$

unde $a_n = \dfrac{1}{\pi} \displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} u(x) \cos nx \, dx$, $b_n = \dfrac{1}{\pi} \displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} u(x) \sin nx \, dx$, $n \geq 0$ sunt coeficienţii Fourier clasici ai lui u.

Aşadar există o strânsă legătură între coeficienţii Fourier clasici şi cei generalizaţi.

9.3 Valori proprii şi vectori proprii

Acest paragraf este consacrat valorilor şi vectorilor proprii corespunzătoare unui operator liniar, continuu. Cadrul folosit este cel al spaţiilor Hilbert, întrucât şi dezvoltările ulterioare se fac tot într-un astfel de cadru. Ne restrângem la prezentarea acelor rezultate care vor fi folosite la fundamentarea metodei separării variabilelor pentru ecuaţii cu derivate parţiale. Fie H un spaţiu Hilbert real şi $T \in L(H)$.

Numărul $\lambda \in \mathbb{R}$ se numeşte *valoare proprie* (sau autovaloare) pentru operatorul T dacă există un element $u \neq 0$ din H care verifică ecuaţia

$$Tu = \lambda u. \tag{3.1}$$

Elementul u (care nu este numaidecât unic) se numeşte *vector prorpiu* corespunzător lui λ.

În cazul în care H este un spaţiu de funcţii, vectorii proprii se mai numesc *funcţii proprii* (sau *autofuncţii*). Interesul nostru se restrânge la valorile proprii şi vectorii proprii corespunzători operatorilor autoadjuncţi şi compacţi în H.

Ştim (vezi [23]) că dacă $T \in L(H)$ este autoadjunct, atunci:

$$\|T\| = \sup_{\|u\|=1} \|Tu\| = \sup_{\|u\|=1} |(Tu,u)|. \tag{3.2}$$

Teorema 3.1. *Dacă $T \in L(H)$ este un operator compact şi autoadjunct, atunci el admite cel puţin o valoare proprie nenulă.*

Demonstraţie. Din relaţia (3.2), având în vedere definiţia supremului, rezultă că pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$ există $u_n \in H$, astfel încât $\|u_n\| = 1$ şi

$$\|T\| - \frac{1}{n} \le |(Tu_n, u_n)| \le \|Tu_n\| \|u_n\| = \|Tu_n\| \le \|T\|.$$

De aici rezultă că $\lim\limits_{n\to\infty} |(Tu_n,u_n)| = \|T\|$ şi $\lim\limits_{n\to\infty} \|Tu_n\| = \|T\|$. Şirul $\{u_n\}$ fiind mărginit ($\|u_n\| = 1,\ \forall\, n$), rezultă că are un subşir $\{u_{n_k}\}$ slab convergent $u_{n_k} \underset{n_k\to\infty}{\rightharpoonup} u$. Pe de altă parte, deoarece $\lim\limits_{n_k\to\infty} |(Tu_{n_k}, u_{n_k})| = \|T\|$, rezultă că din şirul $\{u_{n_k}\}$ putem extrage un subşir notat $\{u_k\}$ astfel încât$(Tu_k,u_k) \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} \lambda$ unde $\lambda = \|T\|$ sau $\lambda = -\|T\|$. Deci

$$(Tu_k,u_k) \longrightarrow \lambda \ \text{ şi } \ u_k \rightharpoonup u, \ \text{ pentru } k \to \infty.$$

Vom arăta că

$$u_k \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} u \ \text{ şi } \ Tu = \lambda u.$$

Deoarece T este operator compact şi $u_k \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} u$, rezultă $Tu_k \underset{k\rightharpoonup\infty}{\longrightarrow} Tu$. Apoi

$$\begin{aligned} \|Tu_k - \lambda u_k\|^2 &= (Tu_k - \lambda u_k, Tu_k - \lambda u_k) = \\ &= \|Tu_k\|^2 - 2\lambda(Tu_k,u_k) + \lambda^2 \|u_k\|^2, \ \forall\, k \in \mathbb{N}^*. \end{aligned} \tag{3.3}$$

Întrucât $\|Tu_k\| \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} \|Tu\|$, $(Tu_k,u_k) \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} \lambda$ ($\lambda^2 = \|T\|^2$) şi $\|u_k\| = 1$, din (3.3) rezultă

$$\lim_{k\to\infty} \|Tu_k - \lambda u_k\|^2 = 0$$

care arată că şirurile $\{Tu_k\}$ şi $\{\lambda u_k\}$ au aceeaşi limită. Dar $Tu_k \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} Tu$, deci $\lambda u_k \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} \lambda u$. Pe de altă parte, ştim deja că $u_k \underset{k\to\infty}{\rightharpoonup} u$, prin urmare $\lambda u_k \underset{k\to\infty}{\rightharpoonup} \lambda u$ şi limita slabă fiind unică (exerciţiu!), rezultă

$$Tu = \lambda u. \tag{3.4}$$

Dar $\|u_k\| = 1$ şi $u_k \underset{k\to\infty}{\rightharpoonup} u$ implică $\|u\| = 1$, care împreună cu (3.4) arată că λ este valoare proprie a lui T, încheind astfel demonstraţia teoremei. ∎

Se verifică imediat, pornind de la definiţie, că la valori proprii distincte corespund vectori proprii ortogonali.

Teorema 3.2. *Dacă $T \in L(H)$ este un operator compact şi autoadjunct, atunci la orice valoare proprie diferită de zero îi corespunde un număr finit de vectori proprii liniar independenţi.*

Demonstraţie. Presupunem, prin reducere la absurd, că există o valoare proprie $\lambda \neq 0$ a lui T căreia să-i corespundă un şir infinit de vectori proprii liniar independenţi.

Folosind procedeul de ortonormalizare a lui Schmidt, şirul $\{u_n\}$ poate fi înlocuit cu un şir ortonormat $\{v_n\}$.

Deoarece v_n este o combinaţie liniară a vectorilor $u_1, u_2, ..., u_n$, rezultă că

$$Tv_n = T\left(\sum_{k=1}^{n}\alpha_k u_k\right) = \sum_{k=1}^{n}\alpha_k Tu_k = \sum_{k=1}^{n}\alpha_k \lambda u_k = \lambda\sum_{k=1}^{n}\alpha_k u_k = \lambda v_n,$$

care arată că şi v_n este vector propriu corespunzător lui λ. Deoarece şirul $\{v_n\}$ este mărginit ($\|v_n\| = 1$) rezultă că el are un subşir $\{v_k\}$ slab convergent $v_k \underset{k\to\infty}{\rightharpoonup} v$ şi T fiind operator compact rezultă $Tv_k \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} Tv$.

Însă

$$\|Tv_p - Tv_q\|^2 = \|Tv_p\|^2 - 2(Tv_p, Tv_q) + \|Tv_q\|^2 =$$
$$= \lambda^2\|v_p\|^2 - 2\lambda^2(v_p, v_q) + \lambda^2\|v_q\|^2 = 2\lambda^2 > 0,\ \forall p, q \in N$$

care contrazice faptul că $Tv_k \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} Tv$.

Contradicţia a provenit din presupunerea că şirul $\{u_n\}$ este infinit. ∎

Teorema 3.3. *Fie $T \in L(H)$ un operator compact şi autoadjunct. Atunci mulţimea valorilor proprii corespunzătoare operatorului T este cel mult numărabilă, al cărei singur punct de acumulare posibil este* 0.

Demonstraţie. Introducem notaţia

$$\mathbb{R}_\varepsilon = \{\lambda \in \mathbb{R} \mid |\lambda| > \varepsilon > 0\}.$$

Pentru demonstraţia teoremei este suficient să arătăm că pentru orice $\varepsilon > 0$ mulţimea $\mathbb{R}_\varepsilon$ conţine cel mult un număr finit de valori proprii ale operatorului

T. Presupunem, prin reducere la absurd, că nu este adevărat şi că există $\varepsilon_0 > 0$ astfel încât $\mathbb{R}_{\varepsilon_0}$ să conţină un şir infinit de valori proprii: $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n, ...$ ale operatorului T.

Fie u_n un vector propriu corespunzător lui λ_n. Putem presupune că $\|u_n\|$=1 căci altfel înlocuim pe u_n cu $u_n/\|u_n\|$.

Prin urmare, procedând în acest fel, găsim un şir infinit de vectori proprii $\{u_n\}$ de normă 1. Şirul $\{u_n\}$ fiind mărginit se poate extrage un subşir $\{u_k\}$ slab convergent la un element u din H. Deoarece $u_k \underset{k\to\infty}{\rightharpoonup} u$ şi T este compact, rezultă $Tu_k \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} Tu$. Pe de altă parte, pentru orice $k \neq j$, are loc egalitatea

$$\|Tu_k - Tu_j\|^2 = \|Tu_k\|^2 - 2(Tu_k, Tu_j) + \|Tu_j\|^2 = \lambda_k^2 + \lambda_j^2, \tag{3.5}$$

deoarece $(Tu_k, Tu_j) = \lambda_k \lambda_j (u_k, u_j) = 0$.

Deoarece λ_k şi λ_j aparţin mulţimii $\mathbb{R}_{\varepsilon_0}$, $|\lambda_k| > \varepsilon_0$ şi $|\lambda_j| > \varepsilon_0$, iar relaţia (3.5) conduce la

$$\|Tu_k - Tu_j\|^2 \geq 2\varepsilon_0^2 > 0,$$

care contrazice convergenţa şirului $\{Tu_k\}$.

Aceasta arată că ipoteza făcută asupra mulţimii $\mathbb{R}_{\varepsilon_0}$ este absurdă, ceea ce încheie demonstraţia teoremei. ∎

În concluzie, operatorul T admite o mulţime nevidă cel mult numărabilă de valori proprii $\{\lambda_n\}_{n\in\mathbb{N}^*}$.

În Teorema 3.2 am arătat că fiecărei valori proprii λ_n îi corespunde un spaţiu finit dimensional U_n. Alegând în U_n o bază ortonormată şi repetând pe λ_n de un număr de ori egal cu multiplicitatea sa, obţinem un şir $\{\lambda_n\}$ de valori proprii şi, corespunzător, un şir ortonormat $\{u_n\}$ de vectori proprii astfel încât $Tu_n = \lambda_n u_n$, $n \in \mathbb{N}^*$.

Teorema 3.4. *Sistemul $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}^*}$ este ortonormat şi complet în H.*

Demonstraţie. Faptul că sistemul este ortonormat a fost deja demonstrat. Pentru completitudine, vom arăta că spaţiul liniar generat de sistemul $\{u_n\}$, pe care-l notăm cu U este dens în H. Fie $U^\top$, spaţiul liniar ortogonal pe U. Este uşor de observat că $T(U) \subset U$ şi $T(U^\perp) \subset U^\perp$.

Fie T_0 restricţia operatorului T la $U^\perp$. Deoarece $U^\perp$ este subspaţiu liniar închis al lui H, T_0 va fi compact şi autoadjunct. Atunci, conform Teoremei 3.1, operatorul T_0 ar trebui să aibă măcar un vector propriu.

Arătăm că acest lucru nu este adevărat. Într-adevăr, dacă λ este o valoare proprie pentru operatorul T_0 şi u_0 vectorul propriu corespunzător, din $T_0 u_0 = \lambda u_0$ rezultă că u_0 este vector propriu şi pentru T, deci $u_0 \in U \cap U^\perp$, adică

$u_0 = 0$. Deci T_0 nu are valori proprii pe $U^\perp$. Rezultă că $T_0 \equiv 0$, deci $U^\perp = \{0\}$ şi U este dens în H. ∎

9.4 Soluţii slabe pentru probleme eliptice la limită. Metoda variaţională

Multe din ecuaţiile cu derivate parţiale de tip eliptic ce modelează fenomene fizice apar ca urmare a aplicării unui principiu variaţional. Mai exact, fenomenului fizic îi este ataşată o funcţională ce măsoară energia sistemului – numită şi *funcţională energetică* – a cărei minimizare conduce la soluţia ecuaţiei. Metoda de abordare a problemelor, pe această cale, poată denumirea de *metoda variaţională*.

Vom prezenta un rezultat cunoscut sub numele de *Lema lui Max–Milgram*, care constituie cheia formulării variaţionale a problemelor la limită.

Fie H un spaţiu Hilbert real dotat cu norma $\|\cdot\|$ indusă de produsul scalar notat $(\cdot,\cdot)$. Funcţionala $a : H\times H \to \mathbb{R}$ se numeşte *biliniară* dacă pentru orice $v \in H$, funcţionala $u \mapsto a(u,v)$ este liniară şi pentru orice $u \in H$, funcţionala $v \mapsto a(u,v)$ este liniară pe H.

Spunem, de asemenea, că funcţionala $a(\cdot,\cdot)$ este:

– *continuă* dacă există $M > 0$ astfel încât

$$|a(u,v)| \le M\|u\|\|v\|, \ \forall\, u,v \in H \tag{4.1}$$

– *coercivă* dacă există $\omega > 0$ astfel încât

$$a(u,v) \ge \omega\|u\|^2, \ \forall\, u \in H \tag{4.2}$$

– *simetrică* dacă

$$a(u,v) = a(v,u), \ \forall\, u,v \in H. \tag{4.3}$$

Teorema 4.1. (Lema lui Lax–Milgram) *Fie H un spaţiu Hilbert real şi $a : H\times H \to \mathbb{R}$ o funcţională biliniară, continuă şi coercivă definită pe H. Fie, de asemenea, o funcţională liniară şi continuă $f : H \to \mathbb{R}$. Atunci există şi este unic un element $u_0 \in H$ astfel încât*

$$a(u_0,v) = f(v), \ \forall\, v \in H, \tag{4.4}$$

care, în plus, satisface relaţia

$$\|u_0\| \le \omega^{-1}\|f\|. \tag{4.5}$$

Dacă a este simetrică, atunci u_0 este unicul punct de minim al funcţionalei $J : H \to \mathbb{R}$

$$J(u) = \frac{1}{2}\, a(u, u) - f(u). \tag{4.6}$$

Demonstraţie. Pentru fiecare $u \in H$, $a(u, \cdot)$ este o aplicaţie liniară şi continuă pe H, deoarece $a(u, v) \leq M'\|v\|$, unde $M' = M\|u\|$, prin urmare, conform teoremei de reprezentare a lui Riesz, există un unic element $w \in H$, astfel încât $a(u, v) = (w, v)$. Notăm cu A operatorul $A : H \to H$, $Au = w$, deci

$$a(u, v) = (Au, v),\ \forall\, v \in H. \tag{4.7}$$

În continuare vom pune în evidenţă proprietăţile operatorului A, esenţiale pentru demonstrarea teoremei.

I. *Operatorul A este liniar şi continuu.*
Liniaritatea lui A este imediată şi rezultă din definiţie. Apoi, luând în relaţia (4.7) $v = Au$ şi folosind continuitatea lui $a(\cdot, \cdot)$, obţinem

$$M\|u\|\|Au\| \geq a(u, Au) = \|A\|^2 \Longrightarrow \|Au\| \leq M\|u\|,\ \forall\, u \in H.$$

II. *A este injectiv şi inversul său A^{-1} este mărginit.*
Fie $R(A) \subset H$ codomeniul operatorului A. Din relaţiile (4.2) şi (4.7), rezultă

$$(Au, u) = a(u, u) \geq \omega\|u\|^2,\ \forall\, u \in H$$

care implică injectivitatea lui A. Prin urmare, există $A^{-1} : R(A) \to H$ care este liniar din cauză că A este liniar. Apoi, din $Au = w$ rezultă $u = A^{-1}w$ şi din coercivitatea lui $a(\cdot, \cdot)$ şi inegalitatea lui Cauchy–Schwartz

$$\omega\|u\|^2 \leq a(u, u) = (w, u) \leq \|w\| \cdot \|u\|$$

rezultă

$$\|u\| = \left\|A^{-1}w\right\| \leq \omega^{-1}\|w\|.$$

III. *R(A) este subspaţiu liniar închis.*
Fie $\{w_k\}$ un şir Cauchy în $R(A)$. Deoarece $R(A) \subset H$, $\{w_k\}$ este şir Cauchy în H, deci convergent

$$\lim_{k\to\infty} \|w_k - w\| = 0 \ \text{ în } H.$$

Este suficient să arătăm că $w \in R(A)$. Fie $u_k = Aw_k$. Are loc inegalitatea

$$\|u_k - u_j\| = \left\|A^{-1}w_k - A^{-1}w_j\right\| = \left\|A^{-1}(w_k - w_j)\right\| \leq \left\|A^{-1}\right\| \|w_k - w_j\|,$$

care implică faptul că şirul $\{u_k\}$ este şir Cauchy, prin urmare convergent. Fie $u = \lim\limits_{k\to\infty} u_k$. Rezultă (deoarece $Au_k = w_k$)

$$\lim_{k\to\infty} Au_k = \lim_{k\to\infty} w_k = w \quad \text{sau} \quad w = A\left(\lim_{k\to\infty} u_k\right) = Au,$$

care implică $w \in R(A)$.

IV. $R(A) = H$, *deci* A *este operator bijectiv.*
Presupunem, prin reducere la absurd, că $R(A)$ este subspaţiu propriu al lui H. Rezultă că există $u_0 \in R(A)^\perp$, $u_0 \neq 0$, astfel încât

$$(u_0, y) = 0, \ \forall\, y \in R(A).$$

Deoarece A este inversabil, există $w_0 \in R(A)$ astfel ca $Au_0 = w_0$ şi (din (4.7))

$$a(u_0, v) = (w_0, v), \ \forall\, v \in H. \tag{4.8}$$

Luând în (4.8) $v = u_0$, rezultă

$$\omega\|u_0\|^2 \leq a(u_0, u_0) = (w_0, u_0) = 0,$$

deoarece

$$w_0 \in R(A), \ u_0 \in R(A)^\perp.$$

De aici rezultă $u_0 = 0$, care contravine alegerii iniţiale. Prin urmare, $R(A)^\perp = \{0\}$ şi $R(A) = H$.

V. *Demonstrarea lemei lui Lax–Milgram.*
Am arătat aşadar că pentru orice $u \in H$ există $w \in H$, unic, care satisface (4.7). În etapele II, III, IV am demonstrat că operatorul A, definit în relaţia (4.7) este bijectiv, deci pentru orice $w \in H$ există un element unic $u \in H$ astfel încât

$$a(u, v) = (w, v), \ \forall\, v \in H. \tag{4.9}$$

Din teorema de reprezentare a lui Riesz, orice funcţională liniară şi continuă în H poate fi reprezentată sub forma

$$f(v) = (w, v), \ \forall\, v \in H \tag{4.10}$$

cu $\|f\| = \|w\|$. Din (4.2), (4.9) şi (4.10) rezultă (4.5).

Trecând acum la ultima afirmaţie a teoremei, să observăm că dacă u_0 este punct de minim pentru funcţionala J (dată de (4.6)), avem inegalitatea

$$J(u_0 + \lambda v) \geq J(u_0), \ \forall \lambda > 0, \ \forall v \in H,$$

care este echivalentă cu

$$\frac{1}{2}(a(u_0 + \lambda v, u_0 + \lambda v) - a(u_0, u_0)) \geq \lambda(f, v), \ \forall \lambda > 0, \ \forall v \in H.$$

Împărţind această inegalitate cu λ şi făcând $\lambda \to 0$, obţinem relaţia

$$a(u_0, v) \geq (f, v), \ \forall v \in H$$

echivalentă cu (4.4).

Pentru a demonstra că u_0 dat de (4.4) realizează minimul lui J, se observă că proprietăţile (4.1), (4.2) implică faptul că $< u, v >= a(u, v)$ este un produs scalar pe H echivalent cu cel iniţial.

Utilizând teorema lui Riesz de reprezentare şi inegalitatea Cauchy–Schwartz, se obţine rezultatul dorit.

Cu aceasta demonstraţia Teoremei 4.1 este încheiată. ∎

În continuare vom prezenta câteva aplicaţii.

Fie $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ o mulţime deschisă, mărginită cu frontiera netedă. Se consideră următoarea problemă Dirichlet omogenă pentru operatorul $-\Delta$:

$$\begin{cases} -\Delta u = f & \text{în } \Omega \\ u = 0 & \text{pe } \partial\Omega, \end{cases} \tag{4.11}$$

unde $f \in L^2(\Omega)$ este o funcţie dată.

Definiţia 4.1. Se numeşte *soluţie slabă* sau *variaţională* a problemei (4.11) o funcţie $u \in H_0^1(\Omega)$ care verifică egalitatea

$$\int_\Omega \nabla v(x) \cdot \nabla v(x) dx = \int_\Omega f(x) v(x) dx \tag{4.12}$$

pentru orice $v \in H_0^1(\Omega)$.

După cum se observă, condiţia la limită în (4.11) este cuprinsă în ipoteza $u \in H_0^1(\Omega)$.

Apoi, dacă $u \in C^2(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$ este soluţie clasică a problemei (4.11), atunci rezultă, conform formulei lui Green, că pentru orice $v \in H_0^1(\Omega)$ are loc (4.12), deci u este şi soluţie slabă.

Teorema 4.2. (Principiul lui Dirichlet) *Fie* $f \in L^2(\Omega)$*. Atunci problema* (4.11) *are o soluţie slabă unică* $u \in H_0^1(\Omega)$*. În plus, această funcţie minimizează funcţionala*

$$J(v) = \frac{1}{2}\int_\Omega \|\nabla v(x)\|^2 dx - \int_\Omega f(x)v(x)dx$$

pe spaţiul $H_0^1(\Omega)$.

Demonstraţie. Se aplică lema lui Lax–Milgram pe spaţiul $H = H_0^1(\Omega)$ funcţionalei $a : H_0^1(\Omega)\times H_0^1(\Omega) \to \mathbb{R}$ definită prin

$$a(u,v) = \int_\Omega \nabla u(x) \cdot \nabla v(x)\, dx.$$

Este evident faptul că funcţionala $a(\cdot,\cdot)$ este biliniară şi simetrică. Apoi, din inegalitatea Cauchy–Schwartz

$$|a(u,v)| = \left| \int_\Omega \nabla u(x) \cdot \nabla v(x)\, dx \right| \leq$$

$$\leq \left(\int_\Omega \|\nabla u(x)\|^2 dx \right)^{1/2} \left(\int_\Omega \|\nabla v(x)\|^2 dx \right)^{1/2} = \|u\|_{H_0^1(\Omega)} \|v\|_{H_0^1(\Omega)},$$

rezultă continuitatea lui $a(\cdot,\cdot)$. Pe de altă parte,

$$a(u,u) = \int_\Omega \|\nabla u(x)\|^2 dx \geq \omega \|u\|^2_{H_0^1(\Omega)},\ \forall\, u \in H_0^1(\Omega),$$

conform inegalităţii lui Poincaré, deci $a(\cdot,\cdot)$ este coercivă pe $H_0^1(\Omega)$.

Apoi funcţionala

$$u \mapsto \int_\Omega f(x)u(x)\, dx,$$

este liniară şi continuă pe $H_0^1(\Omega)$.

Aplicând lema Lax–Milgram obţinem rezultatele cerute în enunţul teoremei. ∎

Prezentăm, în mod succint şi alte probleme la limită care se rezolvă în aceeaşi manieră. Schema generală de rezolvare constă în alegerea unui cadru funcţional adecvat în care se verifică condiţiile aplicabilităţii lemei Lax–Milgram.

În exemplele care urmează $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ este o mulţime deschisă, mărginită cu frontiera netedă.

Exemplul 1. Considerăm problema

$$\left\{\begin{array}{ll} -\displaystyle\sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{ij}(x)\frac{\partial u}{\partial x_j}\right) + a_0(x)u = f & \text{în } \Omega \\ u = 0 & \text{pe } \partial\Omega \end{array}\right. \tag{4.13}$$

unde $a_{ij} \in C^1(\bar{\Omega})$, pentru $1 \le i, j \le n$, $a_0 \in C(\bar{\Omega})$, $f \in L^2(\Omega)$. Presupunem că funcţiile a_{ij} verifică condiţia de elipticitate

$$\sum_{i,j=1}^{u} a_{ij}(x)\xi_i\xi_j \ge \omega\|\xi\|^2,\ \forall \xi \in \mathbb{R}^n,\ x \in \Omega,$$

cu $\omega > 0$. Ecuaţia (4.13) se mai numeşte *ecuaţie de tip divergenţă.* Spunem că funcţia $u \in H_0^1(\Omega)$ este soluţie slabă pentru problema (4.13) dacă

$$\int_\Omega \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)\frac{\partial u(x)}{\partial x_j}\ \frac{\partial v(x)}{\partial x_i}\, dx + \int_\Omega a_0(x)u(x)v(x)dx = \int_\Omega f(x)v(x)dx,$$

$$\forall\, v \in H_0^1(\Omega).$$

Dacă $a_0(x) \ge 0,\ \forall\, x \in \overline{\Omega}$, atunci funcţionala biliniară

$$a(u, v) = \int_\Omega \left(\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)\frac{\partial u(x)}{\partial x_j}\ \frac{\partial v(x)}{\partial x_i}\right) dx + \int_\Omega a_0(x)u(x)v(x)dx$$

este continuă şi coercivă.

Aplicând lema Lax–Milgram rezultă că problema (4.13) are o unică soluţie slabă $u \in H_0^1(\Omega)$. Dacă,în plus, $a(\cdot,\cdot)$ este simetrică (adică $a_{ij}(x) = a_{ji}(x)$, $\forall\, i, j \in \{1, 2, ..., n\}$, $\forall\, x \in \Omega$), atunci această soluţie minimizează funcţionala

$$J(v) = \frac{1}{2}\int_\Omega\left(\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)\frac{\partial v(x)}{\partial x_j}\ \frac{\partial v(x)}{\partial x_i}\right)dx + \frac{1}{2}\int_\Omega a_0(x)v^2(x)dx - \int_\Omega f(x)v(x)dx$$

pe $H_0^1(\Omega)$.

Exemplul 2. Fie problema Neumann omogenă

$$\left\{\begin{array}{ll} -\Delta u + u = f & \text{în } \Omega \\ \dfrac{\partial u}{\partial \nu} = 0 & \text{pe } \partial\Omega \end{array}\right., \tag{4.14}$$

unde $f \in L^2(\Omega)$.

Spunem că $u \in H^1(\Omega)$ este soluţie slabă a problemei (4.14) dacă verifică identitatea

$$\int_\Omega \nabla u(x) \cdot \nabla v(x) dx + \int_\Omega u(x)v(x)dx = \int_\Omega f(x)v(x)dx, \ \forall\, v \in H^1(\Omega).$$

Se verifică uşor că funcţionala $a(\cdot,\cdot) : H^1(\Omega)\times H^1(\Omega) \to \mathbb{R}$,

$$a(u,v) = \int_\Omega \nabla u(x) \cdot \nabla v(x) dx + \int_\Omega u(x)v(x)dx$$

este biliniară, continuă, coercivă şi simetrică.

Aplicând lema Lax–Milgram rezultă că problema (4.14) are o soluţie slabă unică în $H^1(\Omega)$ care, în plus, minimizează funcţionala

$$J(v) = \frac{1}{2}\int_\Omega \|\nabla v(x)\|^2 dx + \frac{1}{2}\int_\Omega v^2(x)dx - \int_\Omega f(x)v(x)dx$$

pe $H^1(\Omega)$. ■

Într-o manieră asemănătoare pot fi tratate şi alte probleme eliptice la limită. Pentru mai multe exemple recomandăm lucrările [6], [27], [28], [41].

Vectori şi valori proprii pentru laplacean

Fie $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ o mulţime deschisă şi mărginită cu frontiera $\partial\Omega$ de clasă C^1. Ne ocupăm de următoarea problemă de valori proprii

$$\begin{cases} -\Delta u = \lambda u & \text{în } \Omega \\ u = 0 & \text{pe } \partial\Omega \end{cases}. \tag{4.15}$$

Spunem că λ este *valoare proprie* pentru $-\Delta$ cu condiţii Dirichlet la frontieră dacă există $u \in H_0^1(\Omega)$, $u \neq 0$, astfel ca

$$\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v \, dx = \lambda \int_\Omega uv \, dx, \ \forall\, v \in H_0^1(\Omega). \tag{4.16}$$

Aşadar, λ este valoare proprie pentru $-\Delta$ cu condiţii Dirichlet dacă problema (4.15) are soluţii generalizate (în sensul relaţiei (4.16)) nenule. Funcţia u se numeşte *funcţie proprie* corespunzătoare valorii proprii λ.

Teorema 4.3. *Există o bază ortonormată* $\{u_n\}$ *a lui* $L^2(\Omega)$ *şi un şir de numere reale pozitive* $\{\lambda_n\}$ *cu* $\lambda_n \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} \infty$, *astfel că*

$$0 < \lambda_1 \le \lambda_2 \le \cdots \le \lambda_n \le \cdots,$$

$$\left\{ \begin{array}{rcl} -\Delta u_n & = & \lambda_n u_n \ \text{ în } \Omega \\ u_n & \in & H_0^1(\Omega) \end{array} \right. \tag{4.17}$$

Demonstraţie. Definim funcţionala biliniară, continuă, simetrică şi coercivă $a : H_0^1(\Omega)\times H_0^1(\Omega) \to \mathbb{R}$ prin

$$a(u,v) = \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v \, dx.$$

Atunci, pentru orice $f \in L^2(\Omega)$ există, conform lemei Lax–Milgram, o unică funcţie $u \in H_0^1(\Omega) \subset L^2(\Omega)$, astfel încât

$$a(u,v) = (f,v), \ \forall\, v \in H_0^1(\Omega). \tag{4.18}$$

În acest fel, am definit un operator $G : L^2(\Omega) \to L^2(\Omega)$ care face ca fiecărui $f \in L^2(\Omega)$ să-i corespundă elementul $u \in H_0^1(\Omega) \subset L^2(\Omega)$, dat de relaţia (4.18). Prin urmare, pentru $f \in L^2(\Omega)$, $Gf \in H_0^1(\Omega)$ este soluţia slabă a problemei $-\Delta u = f$ în Ω, $u = 0$ pe $\partial\Omega$. Astfel

$$\int_\Omega \nabla(Gf) \cdot \nabla v \, dx = \int_\Omega f v \, dx, \ \forall\, v \in H_0^1(\Omega). \tag{4.19}$$

Din definiţie, rezultă imediat liniaritatea lui G.

Deoarece incluziunea $H_0^1(\Omega) \subset L^2(\Omega)$ este compactă, operatorul G definit de la $L^2(\Omega)$ la $L^2(\Omega)$ este compact. G este autoadjunct, deoarece

$$\int_\Omega Gf \cdot g \, dx = \int_\Omega \nabla(Gf) \cdot \nabla(Gg) dx = \int_\Omega f \cdot Gg \, dx, \ \forall\, f, g \in L^2(\Omega).$$

Apoi inegalitatea

$$\int_\Omega (Gf) \cdot f \, dx = \int_\Omega (\nabla Gf) \cdot (\nabla Gf) dx = \|Gf\|^2_{H_0^1(\Omega)} > 0, \quad \text{dacă } f \ne 0 \tag{4.20}$$

implică continuitatea lui G de la $L^2(\Omega)$ la $L^2(\Omega)$. Aceasta se obţine din (4.20), folosind inegalitatea lui Poincaré $\left(\|u\|_{L^2(\Omega)} \le C\|u\|_{H_0^1(\Omega)}\right)$ şi Cauchy–Schwartz. Aşadar, am arătat că $G : L^2(\Omega) \to L^2(\Omega)$ este un operator liniar, compact, autoadjunct şi pozitiv definit (din (4.19)). Prin urmare, conform Teoremei

3.3, există o bază ortonormată $\{u_n\}_{n=1}^{\infty}$ de autofuncţii în $L^2(\Omega)$ şi un şir de autovalori (valori proprii) $\{\mu_n\}$ descrescător la zero astfel încât

$$Gu_n = \mu_n u_n, \ \forall\, n = 1, 2, ...$$

Dacă punem $\lambda_n = \mu_n^{-1}$, atunci

$$\mu_n = G(\lambda_n u_n). \tag{4.21}$$

Cum $\{\mu_n\}$ este un şir de numere pozitive descrescător la zero, rezultă că $\{\lambda_n\}$, $\lambda_n = \mu_n^{-1}$, $n \in \mathbb{N}^*$, este un şir de numere pozitive crescător la $+\infty$.

Deoarece imaginea lui G este inclusă în $H_0^1(\Omega)$, din (4.21) rezultă că $u_n \in H_0^1(\Omega)$, iar din (4.19) şi (4.21) obţinem

$$\int_\Omega \nabla u_n \nabla v\, dx = \lambda_n \int_\Omega u_n v\, dx, \ \forall\, v \in H_0^1(\Omega).$$

Deci u_n satisface (4.17) în sensul distribuţiilor. ∎

Corolarul 4.1. *Dacă $\{u_n\}$ este o bază ortonormată a lui $L^2(\Omega)$ formată din funcţiile proprii ale laplaceanului corespunzătoare valorilor proprii λ_n, atunci sistemul $\{{\lambda_n}^{-1/2} u_n\}_{n\in\mathbb{N}^*}$ este o bază ortonormată în $H_0^1(\Omega)$.*

Demonstraţie. Dotăm pe $H_0^1(\Omega)$ cu produsul scalar

$$(u, v)_{H_0^1(\Omega)} = \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v\, dx.$$

Atunci

$$({\lambda_k}^{-1/2} u_k, {\lambda_j}^{-1/2} u_j)_{H_0^1(\Omega)} = {\lambda_k}^{-1/2} {\lambda_j}^{-1/2} \int_\Omega \nabla u_k \nabla u_j dx =$$

$$= {\lambda_k}^{1/2} {\lambda_j}^{-1/2} \int_\Omega u_k u_j dx = \delta_{kj} = \begin{cases} 1, & \text{pentru } k = j, \\ 0, & \text{în rest.} \end{cases}$$

prin urmare sistemul $\{{\lambda_n}^{-1/2} u_n\}$ este ortonormat în $H_0^1(\Omega)$. De asemenea, dacă $u \in H_0^1(\Omega)$ satisface condiţia că $(u, {\lambda_k}^{-1/2} u_k)_{H_0^1(\Omega)} = 0$, $\forall\, k \in \mathbb{N}^*$, atunci

$$0 = \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla u_k\, dx = \lambda_k \int_\Omega u\, u_k\, dx.$$

În acest fel am obţinut că $\int_\Omega u\, u_k\, dx = 0$, $\forall\, k \in \mathbb{N}^*$, şi, deoarece $u \in L^2(\Omega)$ ($H_0^1(\Omega) \subset L^2(\Omega)$), iar sistemul $\{u_k\}$ este complet în $L^2(\Omega)$, rezultă $u = 0$. Rezultă că sistemul $\{{\lambda_k}^{-1/2} u_k\}$ este complet în $H_0^1(\Omega)$. ∎

Să menţionăm faptul că în aceeaşi manieră se studiază problema valorilor şi vectorilor proprii pe laplacean cu condiţii la frontieră de tip Neumann sau Robin.

Exemplu. Considerăm cazul $\Omega = (a, b)$, $a, b \in \mathbb{R}$. În acest caz, problema Dirichlet (4.15) are forma

$$\begin{cases} -u''(x) = \lambda u(x), \quad \forall\, x \in (a, b) \\ u(a) = u(b) = 0. \end{cases} \tag{4.22}$$

Să determinăm valorile proprii şi funcţiile proprii ale acestei probleme.

Ştim că valorile proprii sunt pozitive. Ecuaţia diferenţială $u'' + \lambda u = 0$ cu $\lambda > 0$ are soluţia generală

$$u(x) = \alpha \cos\sqrt{\lambda}x + \beta \sin\sqrt{\lambda}x.$$

Condiţiile la limită conduc la sistemul liniar şi omogen (în necunoscutele α şi β)

$$\begin{cases} \alpha \cos\sqrt{\lambda}a + \beta \sin\sqrt{\lambda}a = 0 \\ \alpha \cos\sqrt{\lambda}b + \beta \sin\sqrt{\lambda}b = 0 \end{cases} \tag{4.23}$$

care trebuie să admită o soluţie nebanală (α, β) fiindcă altfel $u \equiv 0$. Sistemul (4.23) admite soluţii nebanale dacă

$$\begin{vmatrix} \cos\sqrt{\lambda}a & \sin\sqrt{\lambda}a \\ \cos\sqrt{\lambda}b & \sin\sqrt{\lambda}b \end{vmatrix} = \sin\sqrt{\lambda}(b-a) = 0.$$

De aici rezultă valorile proprii ale problemei Dirichlet (4.22)

$$\lambda_k = \left(\frac{k\pi}{b-a}\right)^2, \ k = 1, 2, ...$$

şi funcţiile proprii corespunzătoare

$$u_k(x) = \sin\frac{k\pi}{b-a}(x-a), \ k = 1, 2, ... \tag{4.24}$$

Şirul $\{u_k\}$ este ortogonal în $L^2(a,b)$, dar nu este normat. Se constată că şirul

$$u_k(x) = \sqrt{\frac{2}{b-a}} \sin \frac{k\pi}{b-a} (x-a), \ k = 1, 2, ... \tag{4.25}$$

este ortonormat în $L^2(a,b)$. Din Teorema 4.3 rezultă că şirul (4.25) formează o bază ortonormată a lui $L^2(a,b)$.

Capitolul 10

Probleme parabolice

10.1 Ecuaţia propagării căldurii. Modele matematice

În această secţiune vom determina o ecuaţie cu derivate parţiale care, într-o primă aproximaţie, descrie fenomenul propagării căldurii într-un corp.

Vom analiza mai multe situaţii şi anume: propagarea căldurii într-o bară, propagarea căldurii în spaţiu, ecuaţia difuziei.

Propagarea căldurii într-o bară

Pentru fixarea ideilor să presupunem că este vorba de propagarea căldurii de-a lungul unei bare omogene de lungime ℓ, suficient de subţire pentru a fi asimilată cu un segment de pe axa Ox, a sistemului de coordonate xOu şi izolată termic pe feţele laterale.

Fie $u(x,t)$ funcţia care măsoară temperatura în bară la momentul t, în punctul de abscisă x. Având în vedere faptul că suprafaţa laterală a barei este izolată termic, schimbul de căldură între bară şi mediul înconjurător se face prin cele două capete ale barei.

Dacă extremităţile barei se menţin la temperaturi constante u_1 şi u_2, atunci, de-a lungul barei, temperatura are o distribuţie liniară

$$u(x) = u_1 + \frac{u_2 - u_1}{\ell} x; \quad 0 \leq x \leq \ell.$$

Conform legii lui Fourier difuzia căldurii de-a lungul barei se face de la partea mai caldă către cea mai rece.

Cantitatea de căldură care trece printr-o secţiune transversală de arie S a barei este dată de formula exprimentală

$$Q = -k\frac{\partial u}{\partial x}S,$$

unde k este coeficientul de conductibilitate termică.

Presupunând acum că bara este neomogenă (deci k depinde de x) iar S este de măsură 1, cantitatea de căldură ΔQ ce trece prin secţiunea x a barei în intervalul de timp $(t, t + \Delta t)$ este

$$\Delta Q = -k(x)\frac{\partial u}{\partial x}\Delta t.$$

Să considerăm porţiunea M_1M_2 din bară, delimitată de abscisele x_1 şi x_2. Conform legii lui Fourier, cantitatea de căldură care intră în porţiunea M_1M_2 prin capătul x_1 este

$$q(x_1, t) = -k(x)\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=x_1},$$

iar prin capătul x_2,

$$q(x_2, t) = k(x)\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=x_2}.$$

Cantitatea de căldură Q ce trece prin segmentul de bară M_1M_2 în intervalul de timp (t_1, t_2) este:

$$Q = -\int_{t_1}^{t_2}\left\{\left[k(x)\frac{\partial u}{\partial x}\right]_{x=x_2} - \left[k(x)\frac{\partial u}{\partial x}\right]_{x=x_1}\right\}dt,$$

relaţie care (utilizând formula de medie) conduce la

$$Q = -\frac{\partial}{\partial x}\left[k(x)\frac{\partial u}{\partial x}\right]_{\substack{x=\xi\\ t=\tau}}(x_2 - x_1)(t_2 - t_1)$$

unde $\xi \in (x_1, x_2),\ \tau = (t_1, t_2)$.

Pe de altă parte, în virtutea aceleiaşi legi a lui Fourier, cantitatea de căldură ΔQ^* necesară pentru a ridica cu Δu temperatura segmentului de bară Δx este egală cu

$$\Delta Q^* = c\rho\Delta u\Delta x,$$

unde c este căldura specifică iar $\rho(x)$ este masa specifică a segmentului Δx.

În cazul segmentului de bară M_1M_2, cantitatea de căldură Q^* necesară pentru ca în intervalul de timp (t_1, t_2) să-i ridice temperatura cu:

$$\Delta u = u(x, t_2) - u(x, t_1)$$

are expresia

$$Q^* = \int_{x_1}^{x_2} c\rho(x)\,[u(x,t_2) - u(x,t_1)]\,dx$$

de unde prin aplicarea consecutivă a formulelor de medie (în raport cu t şi x) obţinem

$$Q^* = \left[c\rho(x)\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)\right]_{\substack{x=\xi_1\\ t=\tau_1}} (t_2 - t_1)(x_2 - x_1)$$

unde $\xi_1 \in (x_1, x_2),\ \tau_1 \in (t_1, t_2)$.

În fine, dacă notăm cu $f(x,t)$ densitatea surselor generatoare de căldură din bară (de exemplu căldură degajată în urma trecerii unui curent electric), cantitatea de căldură transmisă de aceste surse în intervalul de timp (t_1, t_2) este

$$\widetilde{Q} = \int_{t_1}^{t_2}\int_{x_1}^{x_2} F(x,t)dx\,dt$$

sau

$$\widetilde{Q} = [F(x,t)]_{\substack{x=\xi_2\\ t=c_2}} (t_2 - t_1)(x_2 - x_1).$$

Aplicând legea conservării energiei obţinem

$$\widetilde{Q} = Q + Q^*,$$

care, după înlocuiri şi simplificări conduce la:

$$-\frac{\partial}{\partial x}\left[k(x)\frac{\partial u}{\partial x}\right]_{\substack{x=\xi\\ t=\tau}} + \left[c\rho(x)\frac{\partial u}{\partial x}\right]_{\substack{x=\xi_1\\ t=\tau_1}} = [F(t,x)]_{\substack{x=x_2\\ t=\tau_2}}.$$

Raţionamentul pe care l-am făcut până în prezent se referă la intervalele (x_1, x_2) şi (t_1, t_2) arbitrare.

Trecând la limită cu $x_1, x_2 \to x$ şi $t_1, t_2 \to t$, obţinem ecuaţia

$$-\frac{\partial}{\partial x}\left[k(x)\frac{\partial u}{\partial x}\right] + c\rho(x)\frac{\partial u}{\partial t} = F(x,t),$$

numită *ecuaţia propagării căldurii.*

Dacă bara este omogenă, atunci k şi ρ pot fi consideraţi constanţi şi notând

$$a^2 = \frac{k}{c\rho},\quad f(x,t) = \frac{F(x,t)}{c\rho}$$

ecuaţia propagării căldurii se scrie sub forma

$$u_t - a^2 u_{xx} = f(x,t).$$

Propagarea căldurii în spaţiu

Propagarea căldurii în spaţiu este măsurată prin intermediul temperaturii $u(x,y,z,t)$, care este o funcţie ce depinde de timpul t şi poziţia (x,y,z) a punctului din spaţiu. Dacă temperatura nu este constantă, apar fluxuri de căldură dinspre zonele cu temperatură mai înaltă către cele cu temperatură mai joasă.

Cantitatea de căldură ΔQ care trece prin elementul de suprafaţă $\Delta\sigma$ ce conţine punctul $M(x,y,z)$ în intervalul de timp $(t, t+\Delta t)$ este dată de formula

$$\Delta Q = -k(M)\frac{\partial u}{\partial n}\Delta\sigma\Delta t,$$

unde k este coeficientul de conductibilitate termică a corpului, iar n este normala la elementul de suprafaţă $\Delta\sigma$ orientată în direcţia fluxului de căldură.

De aici rezultă că în intervalul (t_1,t_2) prin suprafaţa σ trece cantitatea de căldură

$$Q = -\int_{t_1}^{t_2}\left[\iint\limits_{\sigma} k(M)\frac{\partial u}{\partial n}d\sigma\right]dt = -(t_2-t_1)\left[\iint\limits_{\sigma} k(M)\frac{\partial u}{\partial n}d\sigma\right]_{t=\tau}$$

Cu ajutorul formulei lui Gauss–Ostrogradski ultima integrală devine

$$\begin{aligned}
&\iint\limits_{\sigma} k(M)\frac{\partial u}{\partial n}d\sigma = \\
&= \iint\limits_{\sigma} k\left[\frac{\partial u}{\partial x}\cos(n,x) + \frac{\partial u}{\partial y}\cos(n,y) + \frac{\partial u}{\partial z}\cos(n,z)\right]d\sigma = \\
&= \iiint\limits_{V}\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(k\frac{\partial u}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(k\frac{\partial u}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(k\frac{\partial u}{\partial z}\right)\right]dV = \\
&= \iiint\limits_{V} \operatorname{div}[k(M)\operatorname{grad} u]dV,
\end{aligned}$$

prin urmare

$$Q = -(t_2-t_1)\iiint\limits_{V} \operatorname{div}\,[k(M)\operatorname{grad} u]dV|_{t=\tau},\ \tau\in(t_1,t_2).$$

La fel ca în cazul barei

$$\begin{aligned}
Q^* &= \iiint\limits_{V} c\rho(M)[u(x,y,z,t_2) - u(x,y,z,t_1)]dV = \\
&= (t_2-t_1)\left[\iiint\limits_{V} c\rho(x,y,z)\frac{\partial u}{\partial t}dV\right]_{t=\tau_1},\ \tau_1\in(t_1,t_2)
\end{aligned}$$

în timp ce cantitatea de căldură produsă de surse din interiorul corpului este

$$\widetilde{Q} = \int_{t_1}^{t_2} \left[\iiint\limits_V f(x,y,z,t)dV \right] dt = (t_2 - t_1) \left[\iiint\limits_V f(x,y,z,t)dV \right]_{t=\tau_2},$$
$$\tau_2 \in (t_1, t_2).$$

Având în vedere că volumul V este arbitrar, la fel ca în cazul barei, prin simplificări şi treceri la limită obţinem:

$$c\rho(x,y,z)\frac{\partial u}{\partial t} - \operatorname{div}[k(x,y,z)\operatorname{grad} u] = f(x,y,z,t). \tag{1.1}$$

Dacă ρ şi k sunt constante (deci corpul este omogen) cu notaţiile deja menţionate ecuaţia (1.1) capătă forma

$$\frac{\partial u}{\partial t} - a^2 \Delta u = f(x,y,z,t) \tag{1.2}$$

unde Δ este operatorul lui Laplace.

Cazuri particulare. Dacă distribuţia temperaturii în corp nu depinde de timp (cazul staţionar) ecuaţia (1.2) capătă forma

$$\Delta u = f(x,y,z)$$

numită şi *ecuaţia lui Poisson.*

Dacă în plus lipsesc şi sursele interioare de căldură se obţine ecuaţia

$$\Delta u = 0$$

numită şi *ecuaţia lui Laplace.*

Ecuaţia difuziei

Difuzia este un proces de egalizare a concentraţiilor sau de amestecare spontană (pentru corpuri în stare gazoasă sau lichidă). Dacă analizăm un tub umplut cu un gaz, atunci constatăm că are loc difuzia acestuia din zonele cu concentraţie mai mare în zonele cu concentraţie mai mică.

Fenomenul este asemănător şi în cazul unei soluţii, dacă concentraţia substanţei dizolvate nu este constantă în tot volumul. Analizând fenomenul difuziei unui gaz într-un tub, să notăm cu $u(x,t)$ concentraţia în secţiunea x şi la momentul t.

Din *legea lui Nernst,* cantitatea de gaz care trece prin secţiunea x în intervalul de timp $(t, t + dt)$ este

$$dQ = -D\frac{\partial u}{\partial x}(x,t)S\,dt,$$

unde D este coeficientul de difuzie sau difuzivitatea substanţei, iar S este aria secţiunii tubului.

Dar variaţia masei gazului pe porţiunea (x_1, x_2) a tubului, datorită variaţiei du a concentraţiei, este

$$dQ = \int_{x_1}^{x_2} c\,du\,S\,dx,$$

unde c este coeficientul de porozitate, egal cu raportul dintre volumul porilor şi volumul total (în cazul nostru $S\,dx$). Procedând ca în cazurile anteriore, ecuaţia bilanţului de masă de gaz în porţiunea (x_1, x_2) şi intervalul de timp (t_1, t_2) conduce la

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(D\frac{\partial u}{\partial x}\right) = c\frac{\partial u}{\partial t},$$

numită şi *ecuaţia difuziei.*

Dacă coeficientul de difuzie este constant, aceasta devine

$$u_t = a^2 u_{xx}$$

unde $a^2 = D/c$.

Probleme la limită pentru ecuaţia propagării căldurii

Pentru a determina legea de propagare a căldurii într-un corp limitat de o suprafaţă S, trebuie să adăugăm la ecuaţie condiţii iniţiale şi la limită. Condiţia iniţială presupune cunoaşterea temperaturii $u(x, t)$ la momentul iniţial t_0.

În ce priveşte condiţiile la limită acestea pot fi diferite în funcţie de regimul de temperatură de la frontieră.

Se consideră trei tipuri fundamentale de condiţii la limită

- Se dă distribuţia de temperatură $u(x, t)$ la suprafaţa corpului:

$$u(x,t) = \varphi(x,t),\ x \in S,\ t \geq t_0$$

- Se dă expresia fluxului de căldură ce trece în fiecare moment prin suprafaţa ce limitează corpul

$$\frac{\partial u}{\partial \nu}(x,t) = \psi(x,t),\ x \in S,\ t \geq t_0$$

- În fine, ultima condiţie la limită este o combinaţie a primelor două

$$\alpha\frac{\partial u}{\partial \nu}(x,t) + \beta u(x,t) = \theta(x,t),\ x \in S,\ t \geq t_0,\ \alpha,\beta \in \mathbb{R}_+.$$

Evident că funcţiile φ, ψ, θ sunt presupuse cunoscute.

10.2 Integrala Lebesgue şi spaţiile Sobolev

O generalizare imediată a integralei Riemann o constituie integrala Lebesgue. Aceasta permite introducerea spaţiilor Sobolev necesare (mai ales) în abordarea variaţională a ecuaţiilor cu derivate parţiale. În cele ce urmează vom face o foarte scurtă prezentare a integralei Lebesgue şi a spaţiilor L^p. Pentru a nu lungi expunerea, rezultatele pe care le prezentăm nu conţin demonstraţii.

Spunem că mulţimea de numere reale E este de *măsură nulă* dacă pentru orice $\varepsilon > 0$ există un şir finit sau infinit de intervale (a_i, b_i) astfel încât $E \subset U(a_k, b_k)$ iar $\Sigma(b_k - a_k) < \varepsilon$.

Fie acum (a, b) un interval finit sau infinit al axei reale. Prin funcţie *scară* definită pe (a, b) înţelegem o funcţie s ce are ca valori numerele reale $c_1, c_2, ..., c_n$ pe intervalele $(a =)x_0 < x < x_1, x_1 < x < x_2, ..., x_{n-1} < x < x_n(= b)$ respectiv, iar prin "integrala" $\int_a^b s(x)dx$ înţelegem suma $\sum\limits_{i=1}^{n} c_k(x_k - x_{k-1})$. (În cazul în care $a = -\infty$ sau $b = \infty$ constantele c_1, respectiv c_n se iau zero). Dacă $\{s_n(\cdot)\}_{n\in\mathbb{N}^*}$ este un şir crescător de funcţii–scară (adică $s_n(x) \leq s_{n+1}(x)$, pentru orice x şi $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$) atunci şirul integralelor formează un şir crescător de numere reale care converge către o limită finită sau tinde la $+\infty$.

Spunem că funcţia (cu valori pozitive) $f(\cdot)$ este *măsurabilă* dacă există un şir crescător $s_n(\cdot)$ de funcţii scară care converge *aproape peste tot* la funcţia $f(\cdot)$ pe intervalul specificat. (Prin convergentă aproape peste tot înţelegem convergenta pe tot intervalul exceptând eventual o mulţime de măsură nulă.) De altfel, vom spune că o relaţie are loc aproape peste tot, pe scurt a.p.t., dacă are loc cu excepţia unei mulţimi de măsură nulă. Se arată că limita şirului $\left\{\int_a^b s_n(x)dx\right\}_{n\in\mathbb{N}^*}$ nu depinde de şirul de funcţii scară folosit la aproximarea funcţiei f, prin urmare această limită este o proprietate a acesteia. Dacă limita este finită spunem că funcţia f este *integrabilă Lebesgue* iar $\int_a^b f(x)dx$ este definită ca fiind limita integralelor şirului de funcţii scară. În particular, dacă intervalul (a, b) este finit, orice funcţie măsurabilă şi mărginită este integrabilă deoarece termenii şirului $\int_a^b s_n(x)dx$ sunt majoraţi de $(b-a)\sup f$. Dacă funcţia f are atât valori pozitive cât şi negative putem scrie f ca fiind diferenţa a două funcţii cu valori pozitive şi anume: $f = f_+ - f_-$, unde $f_+ = \frac{1}{2}(|f|+f)$ şi $f_- = \frac{1}{2}(|f|-f)$. Spunem că f este integrabilă dacă f_+ şi f_- sunt integrabile şi $\int_a^b f(x)dx$ este definită ca fiind diferenţa $\int_a^b f_+(x)dx - \int_a^b f_-(x)dx$. Toate proprietăţile referitoare la integrala Riemann sunt valabile şi în cazul integralei Lebesgue. Orice funcţie care are modulul integrabil în sens Riemann (absolut integrabilă) este integrabilă şi în sens Lebesgue şi $\int_a^b f(x)dx$ au aceeaşi valoare în ambele cazuri.

Noţiunea de funcţie măsurabilă (respectiv integrabilă) definită pe o mulţime deschisă Ω din $\mathbb{R}^n$ $(n \geq 1)$ şi cu valori în $\mathbb{R}$ se introduce în mod asemănător.

O prezentare mai detaliată a acestor chestiuni se găseşte în [1], [19].

Notăm cu $L^p(\Omega)$, $p \in \mathbb{N}^*$, $p < \infty$, spaţiul funcţiilor cu valori reale definite pe mulţimea Ω, măsurabile şi pentru care $\int_\Omega |f(x)|^p dx < \infty$. Am notat cu dx măsura Lebesgue. Aceasta este un spaţiu normat cu norma dată de

$$\|f\|_{L^p(\Omega)} = \left(\int_\Omega |f(x)|^p dx\right)^{1/p}.$$

În cazul în care $p = 2$ spaţiul devine spaţiu Hilbert cu produsul scalar dat de $(f,g) = \int_\Omega f(x)g(x)dx$.

În cazul $p = \infty$, definim $L^\infty(\Omega)$ ca fiind mulţimea funcţiilor $f : \Omega \to \mathbb{R}$ măsurabile şi pentru care există o constantă C astfel încât $|f(x)| \leq C$, a.p.t. $x \in \Omega$. Notăm

$$\|f\|_{L^\infty(\Omega)} = \mathrm{Inf}\{C; |f(x)| \leq C \text{ a.p.t. } x \in \Omega\}.$$

Se arată că $\|\cdot\|_{L^\infty}$ este o normă pe $L^\infty(\Omega)$ care determină pe acesta structură de spaţiu Banach.

Fie $1 \leq p \leq \infty$; notăm cu q conjugatul lui p adică $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

Teorema 2.1. (Inegalitatea lui Hölder) *Fie $f \in L^p(\Omega)$ şi $g \in L^q(\Omega)$, p şi q fiind numere conjugate. Atunci $f \cdot g \in L^1(\Omega)$ şi*

$$\int_\Omega |f(x)g(x)|dx \leq \|f\|_{L^p(\Omega)} \|g\|_{L^q(\Omega)}.$$

Teorema 2.2. *$L^p(\Omega)$ este spaţiu Banach pentru $1 \le p \le \infty$. Pentru $1<p<\infty$, $L^p(\Omega)$ este spaţiu Banach reflexiv.*

Teorema 2.3. (Teorema de reprezentare a lui Riesz) *Fie $1 < p < \infty$ şi $\varphi \in (L^p(\Omega))'$. Atunci există o funcţie unică $u \in L^q(\Omega)$ astfel că*

$$(\varphi, f) = \int_\Omega u(x)f(x)dx, \ \forall f \in L^p(\Omega).$$

În plus, $\|u\|_{L^q(\Omega)} = \|\varphi\|_{(L^p(\Omega))'}$.

Observaţie. Această teoremă permite identificarea dualului spaţiului $L^p(\Omega)$ cu spaţiul $L^q(\Omega)$.

Teorema 2.4. *Dacă $\varphi \in (L^1(\Omega))'$, atunci există o funcţie unică $u \in L^\infty(\Omega)$ astfel încât*

$$(\varphi, f) = \int_\Omega u(x)f(x)dx, \ \forall f \in L^1(\Omega)$$

şi, în plus, $\|u\|_{L^\infty(\Omega)} = \|\varphi\|_{(L^1(\Omega))'}$.

Acest fapt ne permite să afirmăm că dualul spaţiului $L^1(\Omega)$ este $L^\infty(\Omega)$.

Un cadru natural de tratare a problemelor la limită îl constituie spaţiile Sobolev. Dar, pentru definirea spaţiilor Sobolev avem nevoie de distribuţii, pe care le introducem în continuare.

Fie $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n)$ un n-uplu ale cărui componente α_i sunt numere întregi nenegative. Notăm cu $|\alpha|$ suma $|\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n$ iar prin D^α, derivata parţială

$$D^\alpha u = \frac{\partial^{|\alpha|} u}{\partial x_1^{\alpha_1} \partial x_2^{\alpha_2} ... \partial x_n^{\alpha_n}}.$$

Fie Ω este o mulţime deschisă şi mărginită din $\mathbb{R}^n$ şi $u : \Omega \to \mathbb{R}$ o funcţie dată. Mulţimea $\overline{K} = \overline{\{x \in \Omega, \ u(x) \neq 0\}}$ se numeşte *suportul* funcţiei u.

Spunem că funcţia u este cu suport compact dacă $\overline{K}$ este o submulţime închisă şi mărginită (deci compactă) a lui Ω. $\mathcal{D}(\Omega)$ (sau $C_0^\infty(\Omega)$) desemnează spaţiul funcţiilor infinit diferenţiabile care împreună cu toate derivatele lor au suportul compact, inclus în Ω, Ω fiind o submulţime deschisă şi mărginită a lui $\mathbb{R}^n$.

Un exemplu clasic de funcţie cu suport compact este funcţia $\phi : (-a, a) \to \mathbb{R}$

$$\phi(x) = \begin{cases} 0, & |x| \ge \varepsilon \\ e^{\frac{1}{x^2 - \varepsilon^2}}, & |x| < \varepsilon \end{cases} \quad \text{unde } a > \varepsilon > 0.$$

Pe $\mathcal{D}(\Omega)$ se introduce o topologie prin definirea unei "convergenţe". Spunem că şirul de funcţii $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ din $C_0^\infty(\Omega)$ este convergent în sensul lui $\mathcal{D}(\Omega)$ la funcţia $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$ dacă sunt îndeplinite condiţiile

(i) Există o mulţime compactă $K \subset \Omega$ astfel încât $\mathrm{supp}(\varphi_n - \varphi) \subset K$, $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$,

(ii) $\lim\limits_{n\to\infty} D^\alpha \varphi_n(x) = D^\alpha \varphi(x)$ uniform pe K pentru orice multiindice α.

În acest fel, spaţiul liniar $C_0^\infty(\Omega)$ devine un spaţiu liniar topologic local convex, fapt care ne permite definirea dualului.

Spunem că funcţionala liniară $T : C_0^\infty(\Omega) \longrightarrow \mathbb{R}$ este continuă dacă

$$\lim_{n\to\infty} T(\varphi_n) = T(\varphi)$$

pentru orice şir (φ_n) convergent la φ în sensul topologiei lui $\mathcal{D}(\Omega)$.

Mulţimea funcţionalelor liniare şi continue pe $\mathcal{D}(\Omega)$ se notează cu $\mathcal{D}'(\Omega)$ şi se numeşte *spaţiul distribuţiilor scalare* definite pe Ω. Acesta la rândul său este spaţiu liniar topologic.

Spunem că şirul $(T_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ din $\mathcal{D}'(\Omega)$ converge la $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ şi vom nota $T_n \to T$ dacă

$$T_n(\varphi) \longrightarrow T(\varphi), \ \forall\, \varphi \in \mathcal{D}(\Omega).$$

Astfel, cu topologia definită prin această dualitate, $\mathcal{D}'(\Omega)$ devine la rândul său un spaţiu liniar topologic, local convex.

Elementele lui $\mathcal{D}'(\Omega)$ se numesc *distribuţii* pe Ω.

Menţionăm că cel mai cunoscut exemplu de distribuţie este "funcţia" δ a lui Dirac dată prin

$$\delta : C_0^\infty(-a,a) \to \mathbb{R}, \ \delta(\varphi) = \varphi(0), \ \forall\, \varphi \in C_0^\infty(-a,a), \ a > 0.$$

Această distribuţie este foarte depărtată de conceptul clasic de funcţie. Însă există o clasă de distribuţii, numite şi *distribuţii generate*, apropiate de noţiunea de funcţie.

Spunem că funcţia $f : \Omega \to \mathbb{R}$ este *local integrabilă* dacă $\displaystyle\int_K |f(x)|dx$ este un număr finit pentru orice submulţime închisă K a lui Ω.

Pornind de aici putem defini distribuţia F asociată cu f prin

$$F : C_0^\infty(\Omega) \to \mathbb{R}, \ F(\varphi) = \int_\Omega f(x)\varphi(x)dx, \ \forall\, \varphi \in C_0^\infty(\Omega).$$

Dacă suportul lui φ este K atunci

$$|F(\varphi)| = \left|\int_\Omega f(x)\varphi(x)dx\right| = \left|\int_K f(x)\varphi(x)dx\right| \le \sup_{x\in K} |\varphi(x)| \int_K |f(x)|dx < \infty.$$

Distribuţia F se numeşte distribuţie *generată* de f. Ea se mai numeşte şi *distribuţie regulată* sau *de tip funcţie.*

Având în vedere modul cum se defineşte distribuţia F prin intermediul lui f pentru a simplifica lucrurile vom folosi aceeaşi notaţie (f) pentru ambele cantităţi, semnificaţia urmând să rezulte din context. Dacă f este o distribuţie pe $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ şi $\mu : \Omega \to \mathbb{R}$ este o funcţie continuă, atunci putem defini uf ca o distribuţie prin

$$uf(\varphi) = f(u\varphi),\ \forall\, \varphi \in C_0^\infty(\Omega).$$

Exemple.

1° Funcţia scară $H : [-1, 1] \longrightarrow \mathbb{R}$

$$H(x) = \begin{cases} 0, & -1 \le x < 0 \\ 1, & 0 \le x \le 1, \end{cases}$$

este local integrabilă şi generează distribuţia (notată tot cu H)

$$H(\varphi) = \int_{-1}^{1} H(x)\varphi(x)dx = \int_0^1 \varphi(x)dx.$$

2° Distribuţia $u\delta$ pe $(-a, a)$, $a > 0$, unde $u(x) = x$ iar δ este distribuţia lui Dirac satisface

$$x\delta(\varphi) = \delta(x\varphi) = (x\varphi)(0) = 0,\ \forall\, \varphi \in C_0^\infty(-a, a),$$

deci $x\delta$ este distribuţia nulă.

Derivarea distribuţiilor este o extensie a derivării funcţiilor. Prin definiţie, dacă f este o distribuţie pe $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ iar α un n-uplu de numere nenegative

$$D^\alpha f(\varphi) = (-1)^{|\alpha|} f(D^\alpha \varphi),\ \forall\, \varphi \in C_0^\infty(\Omega).$$

Este imediat faptul că dacă o funcţie este de clasă C^m atunci derivata sa în sensul distribuţiilor de un anumit ordin $|\alpha| \le m$ coincide cu derivata sa parţială de ordin α luată în sens clasic.

Există funcţii care nu sunt derivabile în sensul clasic dar care sunt derivabile în sensul distribuţiilor, deci derivata în sensul distribuţiilor este o generalizare efectivă a derivării clasice.

Se numeşte *spaţiu de distribuţii* pe Ω orice subspaţiu liniar topologic X al lui $\mathcal{D}'(\Omega)$ care este continuu inclus în $\mathcal{D}'(\Omega)$ (adică injecţia $X \subset \mathcal{D}'(\Omega)$ este continuă).

Dintre spaţiile de distribuţie definite pe Ω, spaţiile Sobolev constituie clasa cea mai importantă din punctul de vedere al aplicaţiilor.

În continuare, definim aceste spaţii şi prezentăm fără demonstraţie câteva proprietăţi pe care le vom utiliza.

Pentru k un număr întreg pozitiv, notăm cu $W^{k,p}(\Omega)$, $(1 \leq p < \infty)$ *spaţiul Sobolev* definit prin

$$W^{k,p}(\Omega) = \{u \in L^p(\Omega);\ D^\alpha u \in L^p(\Omega),\ \forall\, |\alpha| \leq k\}$$

unde $D^\alpha = \dfrac{\partial^{|\alpha|} u}{\partial x_1^{\alpha_1} \partial x_2^{\alpha_2} ... \partial x_n^{\alpha_n}}$ desemnează derivata lui u în sensul distribuţiilor.

Se demonstrează (vezi [1], [12]) că $W^{k,p}(\Omega)$ este spaţiu Banach, cu norma dată prin

$$\|u\|_{W^{k,p}(\Omega)} = \begin{cases} \left(\sum\limits_{|\alpha| \leq k} \|D^\alpha\|_{L^p(\Omega)} \right)^{1/p} & \text{dacă } 1 \leq p < \infty \\ \max\limits_{0 \leq |\alpha| \leq k} \|D^\alpha\|_{L^\infty(\Omega)} & \text{dacă } p = \infty. \end{cases}$$

Notăm cu $W_0^{k,p}(\Omega)$, închiderea lui $\mathcal{D}(\Omega) \subset W^{k,p}(\Omega)$ în raport cu topologia lui $W^{k,p}(\Omega)$.

Dacă $p = 2$, pentru spaţiile $W^{k,2}(\Omega)$ (respectiv $W_0^{k,2}(\Omega)$) folosim notaţia mai sugestivă $H^k(\Omega)$ (respectiv $H_0^k(\Omega)$), despre care se arată că sunt spaţii Hilbert cu produsul scalar dat de

$$(u, v) = \sum_{|\alpha| \leq k} \int_\Omega D^a u(x) D^\alpha v(x) dx.$$

Dacă $u \in C(\bar{\Omega})$, restricţia sa $u|_{\partial\Omega}$ se obţine simplu luând valorile lui u pe frontieră. Acest lucru poate fi formalizat introducând un operator liniar $\gamma : C(\bar{\Omega}) \to C(\partial\Omega)$ numit şi *operator de urmă* dat prin $\gamma(u) = u|_{\partial\Omega}$. Ne interesează cum se defineşte $u|_{\partial\Omega}$ atunci când u aparţine unui spaţiu Sobolev. Acest lucru e lămurit de teorema care urmează.

Teoremă. *Dacă $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ este o mulţime deschisă şi mărginită cu frontieră de clasă C^1 atunci aplicaţia*

$$u \longrightarrow \gamma u$$

este liniară şi continuă de la $H^1(\Omega)$ la $L^2(\partial\Omega)$ (γu este "urma" lui u pe $\partial\Omega$; vezi [1], [12]). *Dacă $u \in C^1(\bar{\Omega})$, γu reprezintă urma funcţiei u pe $\partial\Omega$.*

Se arată, de asemenea, că

$$H_0^k(\Omega) = \left\{ u \in H^k(\Omega);\ \frac{\partial^j u}{\partial \nu^j} = 0,\ j = \overline{0, k-1} \right\},$$

unde cu $\dfrac{\partial^j u}{\partial \nu^j}$ am notat derivata normală de ordin j pe $\partial\Omega$ orientată spre interiorul domeniului Ω.

În aceleaşi condiţii asupra domeniului Ω are loc relaţia

$$\int_\Omega |u(x)|^2 dx \leq C \int_\Omega \sum_{i=1}^n \left| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right|^2 dx,\ \forall\, u \in H_0^1(\Omega),$$

cunoscută sub numele de *inegalitatea lui Poincaré.*

Aceasta permite definirea normei pe $H_0^1(\Omega)$ numai cu ajutorul gradientului. Încheiem acest paragraf cu câteva elemente referitoare la funcţii cu valori într-un spaţiu Banach.

Fie X un spaţiu Banach real înzestrat cu norma $\|\cdot\|_X$ şi fie $[0, T]$ un interval fixat de pe axa reală. Notăm cu $L^p(0, T; X)$ spaţiul tuturor funcţiilor măsurabile $y : [0, T] \to X$, aşa încât

$$\|y\|_{L^p(0,T;X)} = \left(\int_0^T \|y(t)\|_X^p dt \right)^{1/p} < \infty,$$

pentru $1 \leq p < \infty$ şi

$$\|y\|_{L^\infty(0,T;X)} = \operatorname*{ess\,sup}_{t \in [0,T]} \|y(t)\|_X.$$

Se arată că acestea sunt spaţii Banach.

$\mathcal{D}(0, T)$ fiind spaţiul funcţiilor reale infinit diferenţiabile, cu suport compact în $[0, T]$, notăm cu $\mathcal{D}'(0, T; X)$ spaţiul funcţiilor liniare şi continue de la $\mathcal{D}(0, T)$ în X şi vom numi un element $y \in \mathcal{D}'(0, T; X)$ distribuţia pe $(0, T)$ cu valori în X.

Dacă $y \in \mathcal{D}'(0, T; X)$, atunci derivata sa $\dfrac{d^k y}{dt^k} \in \mathcal{D}'(0, T; X)$ este definită prin formula

$$D^k y(\varphi) = \frac{dy^k}{dt^k}(\varphi) = (-1) y \left(\frac{d^k \varphi}{dt^k} \right),\ \forall\, \varphi \in \mathcal{D}(0, T).$$

Notăm cu $W^{k,p}(0, T; X)$ spaţiul tuturor distribuţiilor cu valori în X, $y \in \mathcal{D}'(0, T; X)$, cu derivatele (în sensul distribuţiilor) $D^j y \in L^p(0, T; X)$, $j = \overline{0, k}$.

Cu $C([a,b];X)$, notăm spaţiul funcţiilor continue $u:[a,b]\to X$, înzestrat cu norma

$$\|u\|_{C([a,b];X)=\sup\{\|u(t)\|_X;\ a\le t\le b\}}.$$

Derivata funcţieiu $u:[a,b]\to X$ în punctul $t_0\in(a,b)$ se defineşte prin

$$u'(t_0)=\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{u(t_0+\varepsilon)-u(t_0)}{\varepsilon},$$

unde limita este luată în sensul topologiei lui X, adică

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\left\|u'(t_0)-\frac{u(t_0+\varepsilon)-u(t_0)}{\varepsilon}\right\|_X=0.$$

Dacă $t_0=a$ sau b, semnificaţia derivatei este clară. $C^k([a,b];X)$ desemnează spaţiul funcţiilor $u:[a,b]\to X$ derivabile până la ordinul k inclusiv, cu derivata de ordinul k, continuă pe $[a,b]$. Spunem că seria de funcţii $\sum\limits_{k=1}^{\infty}c_k(\cdot)$, unde $c_k\in C([a,b];X)$ este *uniform convergentă* la funcţia $c:[a,b]\to X$ dacă are loc $\lim\limits_{n\to\infty}\left\|\sum\limits_{k=1}^{n}c_k(t)-c(t)\right\|_X=0$ uniform în raport cu t. Se observă (ca şi în cazul funcţiilor reale) că seria $\sum\limits_{k=1}^{\infty}c_k(\cdot)$ este uniform convergentă dacă şi numai dacă pentru orice $\varepsilon>0$ există $N(\varepsilon)$ astfel încât

$$\left\|\sum_{k=m}^{p}c_k(t)\right\|_X\le\varepsilon,\ \forall\, p>m>N(\varepsilon),\ \forall\, t\in[a,b].$$

Este clar că, dacă seria de funcţii continue $\sum\limits_{k=1}^{\infty}c_k(\cdot)$ este uniform convergentă la funcţia $c(\cdot)$, atunci $c\in C([a,b];X)$.

10.3 Soluţii slabe pentru ecuaţia propagării căldurii

Fie $\Omega\subset\mathbb{R}^n$ o mulţime deschisă şi mărginită cu frontiera $\partial\Omega$, iar $T>0$ fixat.

Facem notaţiile: $Q_T=\Omega\times(0,T)$ şi $\Sigma_T=\partial\Omega\times(0,T)$. In acest cadru considerăm problema la limită

(3.1) $$\frac{\partial u}{\partial t}-\Delta u=f \quad \text{în } Q_T$$

(3.2) $$u(x,0)=u_0(x) \quad \text{în } \Omega$$

(3.3) $$u=0 \quad \text{pe } \Sigma_T,$$

unde $f : Q_T \to \mathbb{R}$ şi $u_0 : \Omega \to \mathbb{R}$ sunt funcţii date.

Introducem spaţiul de funcţii

$$C^{2,1}(Q_T) = \left\{ u, \frac{\partial u}{\partial x_i} \in C(\overline{Q}_T),\ \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} \in C(Q_T),\ \frac{\partial u}{\partial t} \in C(\overline{\Omega} \times (0,T]) \right\}.$$

Funcţia $u(\cdot,\cdot) : \overline{Q}_T \to \mathbb{R}$ se numeşte *soluţie clasică* pentru problema (3.1) – (3.3) dacă $u \in C^{2,1}(Q_T)$ şi u satisface ecuaţia (3.1) pe Q_T şi condiţiile: iniţială (3.2) şi la limită (3.3). Păstrăm aceeaşi terminologie de soluţie clasică şi în cazul când ne referim doar la soluţia ecuaţiei (3.1).

Întrucât demonstrarea existenţei soluţiei clasice pentru problema mixtă (3.1)-(3.3) este dificilă, ne vom ocupa de un nou concept de soluţie pentru această problemă şi anume conceptul de soluţie slabă (sau generalizată).

Definiţia 3.1. Fie $f \in C([0,T]; L^2(\Omega))$ şi $u_0 \in L^2(\Omega)$. Funcţia $u : Q_T \to \mathbb{R}$ se numeşte *soluţie slabă* (sau *generalizată*) a problemei (3.1)-(3.3) dacă îndeplineşte următoarele condiţii:

a) $u \in C([0,T]; L^2(\Omega)) \cap C^1((0,T]; L^2(\Omega)) \cap C((0,T]; H_0^1(\Omega))$

b) Pentru orice $\varphi \in H_0^1(\Omega)$ şi orice $t \in (0,T]$ are loc egalitatea

$$\int_\Omega \frac{\partial u(x,t)}{\partial t} \varphi(x)dx + \int_\Omega \nabla_x u(x,t) \cdot \nabla \varphi(x)dx = \int_\Omega f(x,t)\varphi(x)dx \tag{3.4}$$

c) $u(x,0) = u_0(x)$, a.p.t. $x \in \Omega$.

Am notat cu $\dfrac{\partial u}{\partial t}$ derivata funcţiei $u : [0,T] \to L^2(\Omega)$. Utilizând formula lui Green rezultă cu uşurinţă faptul că dacă $u \in C^{2,1}(Q_T)$ este soluţie clasică a problemei (3.1)-(3.3) atunci ea este şi soluţie slabă a acestei probleme. Pe de altă parte, din condiţia (b) rezultă, luând $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$,

$$\frac{\partial u(t)}{\partial t} - \Delta u(t) = f(t),\ \forall\, t \in (0,T]$$

unde $\Delta u(t)$ este considerat în sensul distribuţiilor pe Ω.

Apoi, deoarece condiţia la limită (3.3) este conţinută în (a) ($u(t) \in H_0^1(\Omega)$, $\forall\, t \in [0,T]$) iar condiţia iniţială (3.2) este identică cu (c), rezultă că Definiţia 3.1 oferă o generalizare naturală a conceptului de soluţie pentru problema (3.1)-(3.3). Teorema care urmează dă un rezultat de existenţă şi unicitate a soluţiei slabe pentru problema (3.1)-(3.3).

Teorema 3.1. *Fie* $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ *o mulţime deschisă, mărginită, cu frontiera* $\partial\Omega$ *de clasă* C^1 *şi* $0<T\leq\infty$. *Fie* $f \in C^1([0,T];L^2(\Omega))$ *şi* $u_0 \in L^2(\Omega)$ *funcţii date. Atunci problema mixtă* (3.1)-(3.3) *admite o unică soluţie slabă. Mai mult,* $u \in L^2(0,T;H_0^1(\Omega))$ *şi are loc egalitatea*

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2}\|u(t)\|^2_{L^2(\Omega)} + \int_0^t \|\nabla u(s)\|^2_{L^2(\Omega)} ds = \\ &= \frac{1}{2}\|u_0\|^2_{L^2(\Omega)} + \int_0^t \int_\Omega f(x,s)u(x,s)dx\,ds,\ \forall\, t \in [0,T].\end{aligned} \tag{3.5}$$

Dacă presupunem, în plus, că $u_0 \in H_0^1(\Omega)$ *atunci*

$$u \in C([0,T];H_0^1(\Omega)) \ \text{şi}\ \frac{\partial u}{\partial t} \in L^2(0,T;L^2(\Omega)).$$

Demonstraţie. *Unicitatea.* Să presupunem că u_1 şi u_2 sunt două soluţii slabe ale problemei (3.1)-(3.3). Atunci $u := u_1 - u_2$ satisface o problemă de tipul (3.1)-(3.3), dar cu $f = 0$ şi $u_0 = 0$. Ţinând cont de egalitatea (3.4) rezultă $u(t) = 0$, pentru orice $t \in [0,T]$, adică $u_1 = u_2$.
Existenţa. Pentru demonstrarea existenţei vom folosi metoda lui Fourier de separare a variabilelor. Vom construi efectiv soluţia, ca suma unei serii Fourier în $L^2(\Omega)$ în care luăm ca bază hilbertiană sistemul ortonormat complet format din vectorii proprii în H_0^1 ai operatorului $-\Delta$. După cum se ştie, există în $L^2(\Omega)$ un sistem ortonormat complet $\{\varphi_k\}$ şi un şir de numere pozitive $\{\lambda_k\}$ cu $\lambda_k \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} \infty$ astfel încât

$$-\Delta\varphi k = \lambda_k\varphi_k \text{ în } \Omega;\ \varphi_k = 0 \text{ pe } \partial\Omega. \tag{3.6}$$

Căutăm soluţia problemei (3.1)-(3.3) sub forma seriei Fourier

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} u_k(t)\varphi_k(t),\ t \in [0,T],\ x \in \Omega. \tag{3.7}$$

Înlocuind formal funcţia u dată de (3.7) în (3.4) şi ţinând cont de condiţia (c) a Definiţiei 3.1, precum şi de (3.6), obţinem ecuaţiile diferenţiale ordinare

$$\begin{cases} u_k'(t) + \lambda_k u_k(t) = f_k(t),\ t \in [0,T],\ k = 1,2,... \\ u_k(0) = u_0^k \end{cases} \tag{3.8}$$

unde $f_k(t)$ şi u_0^k sunt coeficienţii Fourier ai lui $f(t)$ şi, respectiv, u_0, adică

$$\begin{aligned} f_k(t) &= (f(t),\varphi_k)_{L^2(\Omega)} := \int_\Omega f(x,t)\varphi_k(x)dx,\ t \in [0,T] \\ u_0^k &= (u_0,\varphi_k)_{L^2(\Omega)} := \int_\Omega u_0(x)\varphi_k(x)dx. \end{aligned}$$

În continuare, vom nota cu $(\cdot,\cdot)$ produsul scalar din $L^2(\Omega)$ (deci vom omite indicele pentru a simplifica scrierea).

Rezolvând problema Cauchy (3.8) obţinem

$$u_k(t) = e^{-\lambda_k t}u_0^k + \int_0^t e^{-\lambda_k(t-s)} f_k(s)ds, \ t \in [0,T]. \tag{3.9}$$

Înlocuind această expresie a lui u_k în (3.7) obţinem

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} \left[e^{-\lambda_k t}u_0^k + \int_0^t e^{-\lambda_k(t-s)} f_k(s)ds \right] \varphi_k(x). \tag{3.10}$$

Arătăm că funcţia u dată de (3.10) este soluţie slabă a problemei (3.1)-(3.3), în care scop verificăm condiţiile Definiţiei 3.1. Pentru a simplifica expunerea vom face această verificare în mai multe etape.

I. $u \in C([0,T] : L^2(\Omega))$.
Identitatea lui Parseval

$$\sum_{k=n}^{n+p} \|u_k(t)\varphi_k\|^2_{L^2(\Omega)} = \sum_{k=n}^{n+p} u_k^2(t), \ t \in [0,T] \tag{3.11}$$

ne sugerează faptul că este suficient să demonstrăm că seria $\sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k^2(t)$ este uniform convergentă pe $[0,T]$. Într-adevăr, din (3.11), rezultă în acest caz că seria de funcţii $\sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k(t)\varphi_k$ converge uniform pe intervalul $[0,T]$ cu valori în $L^2(\Omega)$ adică, pentru orice $\varepsilon > 0$ există $N(\varepsilon)$ astfel încât

$$\left\| u(t) - \sum_{k=1}^{n} u_k(t)\varphi_k \right\|_{L^2(\Omega)} < \varepsilon, \ \forall\, t \in [0,T], \ n \geq N(\varepsilon).$$

De aici rezultă că funcţia $u : [0,T] \to L^2(\Omega)$ este continuă, adică $u \in C([0,T]; L^2(\Omega))$.

Din (3.9) rezultă

$$\begin{aligned} u_k^2(t) &= \left(e^{-\lambda_k t}(u_0,\varphi_k) + \int_0^t e^{-\lambda_k(t-s)} (f(s),\varphi_k)ds \right)^2 \leq \\ &\leq 2\left(e^{-2\lambda_k t}(u_0,\varphi_k)^2 + \int_0^t e^{-2\lambda_k(t-s)}ds \int_0^t (f(s),\varphi_k)^2 ds \right) \leq \\ &\leq 2e^{-2\lambda_k t}(u_0,\varphi_k)^2 + \frac{1}{\lambda_k}\int_0^t (f(s),\varphi_k)^2 ds, \ \forall\, t \in [0,T]. \end{aligned} \tag{3.12}$$

Conform identităţii lui Parseval, avem

$$\|u_0\|^2_{L^2(\Omega)} = \sum_{k=1}^{\infty}(u_0, \varphi_k)^2$$

şi

$$\|f(s)\|^2_{L^2(\Omega)} = \sum_{k=1}^{\infty}(f(s), \varphi_k)^2, \ s \in [0, T].$$

Convergenta ultimei serii este uniformă pe $[0, T]$ deoarece $f \in C([0, T]; L^2(\Omega))$ implică continuitatea funcţiilor $s \to (f(s), \varphi_k)$ şi $s \to \|f(s)\|^2_{L^2(\Omega)}$ pe $[0, T]$. Mai mult, rezultă că şi seria

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{\lambda_k}\int_0^t (f(s), \varphi_k)^2 ds = \int_0^t \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{\lambda_k}(f(s), \varphi_k)^2 ds$$

este uniform convergentă pe $[0, T]$, iar din (3.12) obţinem că seria $\sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k^2(t)$ este, de asemenea, uniform convergentă, adică $u \in C([0, T]; L^2(\Omega))$.

II. $u \in C([0, T]; H_0^1(\Omega)) \cap L^2(0, T; H_0^1(\Omega))$.
Ştim că sistemul $\left\{\dfrac{\varphi_k}{\sqrt{\lambda_k}}\right\}$ este ortonormat şi complet în $H_0^1(\Omega)$. Ţinând cont de (3.7) şi notând $\psi_k := \dfrac{\varphi_k}{\sqrt{\lambda_k}}$ obţinem dezvoltarea în serie Fourier a lui u în raport cu acest sistem

$$u(t) = \sum_{k=1}^{\infty}\nu_k(t)\psi_k$$

unde

$$\nu_k^2(t) = \lambda_k\left(e^{-\lambda_k t}u_0^k + \int_0^t e^{-\lambda_k(t-s)}f_k(s)ds\right)^2 \leq$$
$$\leq 2\lambda_k e^{-2\lambda_k t}(u_0^k)^2 + 2\int_0^t f_k^2(s)ds, \ \forall\, t \in [0, T].$$

De aici rezultă (folosind din nou identitatea lui Parseval)

$$\left\|\sum_{k=n}^{n+p}\nu_k(t)\psi_k\right\|^2_{H_0^1(\Omega)} = \sum_{k=n}^{n+p}\nu_k^2(t) \leq$$
$$\leq 2\sum_{k=n}^{n+p}\lambda_k e^{-2\lambda_k t}(u_0^k)^2 + 2\sum_{k=n}^{n+p}\int_0^t f_k^2(s)ds, \ \forall\, t \in [0, T].$$

Această relaţie împreună cu inegalitatea

$$2\lambda_k e^{-2\lambda_k t} \le t^{-1}e^{-1},\ \forall\, t > 0,$$

implică convergenta uniformă a seriilor $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\nu_k^2(t)$ şi $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\nu_k(t)\psi_k$ pe orice interval $[\delta, T]$ cu $0 < \delta \le T$.

Prin urmare, $u \in C(([0,T]; H_0^1(\Omega))$. Apoi

$$\|u(t)\|^2_{H_0^1(\Omega)} = \sum_{k=1}^{\infty}\nu_k^2(t) \le 2\sum_{k=1}^{\infty}\lambda_k e^{-2\lambda_k t}(u_0^k)^2 + 2\sum_{k=1}^{\infty}\int_0^t f_k^2(s)ds =$$

$$= 2\sum_{k=1}^{\infty}\lambda_k e^{-2\lambda_k t}(u_0^k)^2 + 2\int_0^t \|f(s)\|^2_{L^2(\Omega)}ds,\ \forall\, t \in [0,T].$$

De aici rezultă

$$\int_0^T \|u(t)\|^2_{H_0^1(\Omega)}dt \le \sum_{k=1}^{\infty}(u_0^k)^2 + 2T\int_0^T \|f(s)\|^2_{L^2(\Omega)}ds =$$

$$= \|u_0\|^2_{L^2(\Omega)} + 2T\int_0^T \|f(s)\|^2_{L^2(\Omega)}ds,$$

deci $u \in L^2(0,T; H_0^1(\Omega))$.

III. $u \in C^1((0,T]; L^2(\Omega))$.
Pentru a dovedi acest fapt folosim din nou relaţia (3.7) şi considerăm seria derivată

$$v(t) = \sum_{k=1}^{\infty}u_k'(t)\varphi_k,\ t \in (0,T].$$

Este suficient să demonstrăm că $v \in C((0,T]; H_0^1(\Omega))$ şi $\dfrac{\partial u}{\partial t}(t) = v(t)$, $\forall\, t \in (0,T]$. Din (3.9) se obţine prin derivare

$$u_k'(t) = -\lambda_k e^{-\lambda_k t}u_0^k + f_k(0)e^{-\lambda_k t} + \int_0^t e^{-\lambda_k(t-s)}f_k(s)ds,\ \forall\, t\in[0,T].$$

Deci, pentru $t \in [0,T]$,

$$\left\|\sum_{k=n}^{n+p}u_k'(t)\varphi_k\right\|^2_{L^2(\Omega)} = \sum_{k=n}^{n+p}(u_k'(t))^2 \le$$

$$\le \|f(\cdot,0)\|^2_{L^2(\Omega)} + 2\sum_{k=n}^{n+p}\lambda_k^2 e^{-\lambda_k t}(u_0^k)^2 + \sum_{k=n}^{n+p}\frac{1}{\lambda_k}\int_0^t \left(\frac{\partial f(s)}{\partial t},\varphi_k\right)^2_{L^2(\Omega)}ds.$$

Deoarece $\dfrac{\partial f}{\partial t} \in C([0,T];L^2(\Omega))$ (din ipoteză) şi există o constantă $C > 0$ astfel încât $\lambda_k^2 e^{-2\lambda_k t} \leq C$, pentru orice k şi orice $t > 0$, din evaluarea (3.13) rezultă că seria $\sum\limits_{k=1}^{\infty}(u_k'(t))^2$ este uniform convergentă pe orice compact $[\delta, T]$ cu $0 < \delta \leq T$, deci $v \in C((0,T];L^2(\Omega))$. În continuare, arătăm că $\dfrac{du}{dt} = v$. Observăm că

$$\left\|\frac{u(t+\varepsilon)-u(t)}{\varepsilon} - v(t)\right\|_{L^2(\Omega)}^2 = \left\|\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{u_k(t+\varepsilon)-u_k(t)}{\varepsilon} - u_k'(t)\right), \varphi_k\right\|_{L^2(\Omega)}^2 =$$
$$= \sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{u_k(t+\varepsilon)-u_k(t)}{\varepsilon} - u_k'(t)\right)^2, \ \forall\, t \in (0,T).$$

Folosind inegalitatea lui Cauchy–Schwartz pe $(t, t+\varepsilon) \subset (0,T)$ obţinem

$$\begin{aligned}\left(\frac{u_k(t+\varepsilon)-u_k(t)}{\varepsilon} - u_k'(t)\right)^2 &= \varepsilon^{-2}\left(\int_t^{t+\varepsilon}(u_k'(s)-u_k'(t))ds\right)^2 \leq \\ &\leq \varepsilon^{-1}\int_t^{t+\varepsilon}(u_k'(s)-u_k'(t))^2 ds.\end{aligned} \tag{3.14}$$

Apoi, relaţia (3.14) şi identitatea lui Parseval

$$\frac{1}{\varepsilon}\int_t^{t+\varepsilon}\sum_{k=1}^{\infty}(u_k'(s)-u_k'(t))^2 ds = \frac{1}{\varepsilon}\int_t^{t+\varepsilon}\|v(s)-v(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 ds$$

conduc la

$$\begin{aligned}\left\|\frac{u(t+\varepsilon)-u(t)}{\varepsilon} - v(t)\right\|_{L^2(\Omega)}^2 &= \sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{u_k(t+\varepsilon)-u_k(t)}{\varepsilon} - u_k'(t)\right)^2 = \\ &= \frac{1}{\varepsilon}\int_t^{t+\varepsilon}\|v(s)-v(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 ds, \ \forall\, t > 0.\end{aligned} \tag{3.15}$$

Dar, $v \in C((0,T];L^2(\Omega))$ implică relaţia

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{\varepsilon}\int_t^{t+\varepsilon}\|v(s)-v(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 ds = 0, \ \forall\, t > 0.$$

care, împreună cu (3.15), permite obţinerea relaţiei

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{u(t+\varepsilon)-u(t)}{\varepsilon} = v(t), \ \forall\, t \in (0,T]$$

adică $\dfrac{du}{dt} = v$.

IV. *Funcţia u verifică relaţia* (3.4) *şi condiţia* (c).
Folosim relaţiile

$$u(t) = \sum_{k=1}^{\infty} u_k(t)\varphi_k, \;\; f(t) = \sum_{k=1}^{\infty} f_k(t)\varphi_k,$$

$$(u(t), \varphi) = \int_{\Omega} \nabla_x(x,t)\cdot\nabla\varphi(x)dx = \sum_{k=1}^{\infty} u_k(t)(\varphi_k, \varphi),$$
$$\forall\, t \in (0,T],\; \forall\, \varphi \in H_0^1(\Omega)$$

şi

$$(f(t), \varphi) = \sum_{k=1}^{\infty} f_k(t)(\varphi_k, \varphi), \;\; \forall\, t \in [0,T], \;\; \forall\, \varphi \in H_0^1(\Omega).$$

Deoarece

$$\frac{\partial u(t)}{\partial t} = \sum_{k=1}^{\infty} u_k'(t)\varphi_k, \;\; \forall\, t \in (0,T]$$

rezultă

$$\int_{\Omega} \frac{\partial u}{\partial t}(x,t)\varphi(x)dx = \sum_{k=1}^{\infty} u_k'(t)\int_{\Omega}\varphi_k(x)\varphi(x)dx =$$
$$= -\sum_{k=1}^{\infty}\lambda_k u_k(t)\int_{\Omega}\varphi_k(x)\varphi(x)dx + \sum_{k=1}^{\infty}(f(t),\varphi_k)(\varphi,\varphi_k) =$$
$$= -\sum_{k=1}^{\infty} u_k(t)\int_{\Omega}\nabla\varphi_k(x)\cdot\nabla\varphi(x)dx + \sum_{k=1}^{\infty}(f(t),\varphi_k)(\varphi,\varphi_k) =$$
$$= -\int_{\Omega}\nabla_x u(x,t)\cdot\nabla\varphi(x)dx + \int_{\Omega} f(x,t)\varphi(x)dx, \;\; \forall\, t \in (0,T],\; \forall\, \varphi \in H_0^1(\Omega)$$

care este tocmai relaţia (3.4). Relaţia (c) rezultă din inegalitatea

$$u_0 = \sum_{k=1}^{\infty}(u_0, \varphi_k)\varphi_k = \sum_{k=1}^{\infty} u_0^k\varphi_k \text{ în } L^2(\Omega).$$

V. *Demonstrarea egalităţii* (3.5).
Înmulţind relaţia (3.5) cu $u_k(t)$, obţinem

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}u_k^2(t) + \lambda_k u_k^2(t) = f_k(t)u_k(t), \;\; \forall\, t \in [0,T],\; \forall\, k = 1, 2, ...$$

care prin integrare pe $[0,t]$ şi sumare după k, conduce la

$$\tag{3.16} \begin{aligned} &\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{\infty} u_k^2(t) + \sum_{k=1}^{\infty}\int_0^t \lambda_k u_k^2(s)ds = \\ &= \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{\infty}(u_0^k)^2 + \sum_{k=1}^{\infty}\int_0^t f_k(s)u_k(s)ds. \end{aligned}$$

Acum egalitatea (3.5) rezultă cu uşurinţă din (3.16) dacă ţinem cont de relaţiile următoare (deja demonstrate)

$$\sum_{k=1}^{\infty} u_k^2(t) = \|u(t)\|^2_{L^2(\Omega)}, \ \forall\, t \in [0,T],$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k u_k^2(s) = \|u(s)\|^2_{H_0^1(\Omega)}, \ \forall\, s \in (0,T],$$

$$\sum_{k=1}^{\infty}(u_0^k)^2 = \|u_0\|^2_{L^2(\Omega)}$$

şi

$$(f(s), u(s)) = \sum_{k=1}^{\infty} f_k(s)u_k(s), \ \forall\, s \in [0,T].$$

VI. *Demonstrarea relaţiilor $u \in C([0,T]; H_0^1(\Omega))$ şi $\dfrac{\partial u}{\partial t} \in L^2(0,T; L^2(\Omega))$ în ipoteza $u_0 \in H_0^1(\Omega)$.*

Deoarece sistemul $\{\psi_k\}$ $\left(\psi_k = \dfrac{\varphi_k}{\sqrt{\lambda_k}}\right)$ este ortonormat şi complet în $H_0^1(\Omega)$, iar $u_0 = \sum\limits_{k=1}^{\infty}\sqrt{\lambda_k}\, u_0^k \psi_k$ are loc identitatea lui Parseval

$$\|u_0\|^2_{H_0^1(\Omega)} = \sum_{k=1}^{\infty}\lambda_k (u_0^k)^2.$$

Seria $u(t) = \sum\limits_{k=1}^{\infty}\nu_k(t)\psi_k$ este uniform convergentă pe $[0,T]$ în $H_0^1(\Omega)$, deci $u \in C([0,T]; H_0^1(\Omega))$. Apoi, din (3.13) avem

$$\begin{aligned} \left\|\frac{du(t)}{dt}\right\|^2_{L^2(\Omega)} &= \sum_{k=1}^{\infty}(u_k'(t))^2 \le 2\sum_{k=1}^{\infty}\lambda_k^2 e^{-2\lambda_k t}(u_0^k)^2 + \\ &+ \|f(\cdot,0)\|^2_{L^2(\Omega)} + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{\lambda_k}\int_0^t f_k'(s)^2 ds, \end{aligned}$$

de unde rezultă $\dfrac{du}{dt} \in L^2(0,T;L^2(\Omega))$ şi, în plus,

$$\int_0^T \left\| \frac{du}{dt} \right\|^2_{L^2(\Omega)} dt \le \|u_0\|^2_{H_0^1(\Omega)} + \int_0^t \left\| \frac{\partial f(s)}{\partial t} \right\|^2_{L^2(\Omega)} ds,$$

care încheie demonstraţia teoremei. ∎

Din Teorema 3.1 se obţine cu uşurinţă următorul rezultat de comportare asimptotică.

Corolarul 3.1. *Dacă* $u_0 \in L^2(\Omega)$, *atunci soluţia slabă* u *a problemei* (3.1)-(3.3) *cu* $f \equiv 0$ *verifică evaluarea*

$$\|u(t)\|_{L^2(\Omega)} \le e^{-\lambda_1 t}\|u_0\|_{L^2(\Omega)}, \ \forall\, t \ge 0$$

unde λ_1 *este prima autovaloare a operatorului* $-\Delta$ *în* $H_0^1(\Omega)$.

Demonstraţie. Deoarece $f \equiv 0$, din (3.10) rezultă

$$u(t) = \sum_{k=1}^{\infty} e^{-\lambda_k t}(u_0,\varphi_k)\varphi_k.$$

Apoi, identitatea lui Parseval şi inegalitatea $0 < \lambda_1 \le \lambda_2 \le \cdots$ conduc la

$$\|u(t)\|^2_{L^2(\Omega)} = \sum_{k=1}^{\infty} e^{-2\lambda_k t}(u_0,\varphi_k)^2 \le e^{-2\lambda_1 t}\sum_{k=1}^{\infty}(u_0^k)^2 =$$
$$= e^{-2\lambda_1 t}\|u_0\|^2_{L^2(\Omega)}, \ \forall\, t \ge 0.$$

Ultima relaţie implică, în particular, relaţia $\|u(t)\|_{L^2(\Omega)} \underset{t\to\infty}{\longrightarrow} 0$. ∎

Soluţia fundamentală a operatorului căldurii

La fel ca în cazul eliptic, vom pune în evidenţă o funcţie care joacă un rol deosebit în demonstrarea existenţei soluţiei problemei Cauchy pentru ecuaţia căldurii în tot spaţiul. Se numeşte *soluţie fundamentală* pentru operatorul căldurii $\dfrac{\partial}{\partial t} - \Delta$ funcţia

$$E(x,t) = \begin{cases} \dfrac{1}{(2\sqrt{\pi t})^n} e^{-\|x\|^2/4t}, & t > 0 \\ & \\ 0, & t \le 0. \end{cases} \quad x \in \mathbb{R}^n \tag{3.17}$$

Proprietăţile acestei funcţii sunt reunite în teorema care urmează.

Teorema 3.2. *Următoarele afirmaţii sunt adevărate:*

(i) $E \in C^\infty(\mathbb{R}^n \times (0,\infty))$ *şi* $\dfrac{\partial E}{\partial t} - \Delta_x E = 0$ *în* $\mathbb{R}^n \times (0,\infty)$,

(ii) $E(x,t) > 0,\ \forall\,(x,t) \in \mathbb{R}^n \times (0,\infty)$,

(iii) $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^n} E(x,t)dx = 1,\ t > 0$,

(iv) $\dfrac{\partial E}{\partial t} - \Delta_x E = \delta_0$ *în* $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^{n+1})$,
unde δ_0 *este distribuţia lui Dirac concentrată în origine în* $\mathbb{R}^{n+1}$.

Demonstraţie. (i) Afirmaţia $E \in C^\infty(\mathbb{R}^n \times (0,\infty))$ este evidentă. Apoi

$$\frac{\partial E(x,t)}{\partial t} = \Delta_x E(x,t) = E\left(\frac{\|x\|^2}{4t^2} - \frac{n}{2t}\right),\ \text{în } \mathbb{R}^n \times (0,\infty).$$

(ii) Avem

$$\int_{\mathbb{R}^n} E(x,t)dx = \frac{1}{(2\sqrt{\pi t})^n}\int_{\mathbb{R}^n} e^{-(x_1^2+\cdots+x_n^2)/4t}dx_1...dx_n =$$

$$= \frac{1}{(2\sqrt{\pi t})^n}\prod_{i=1}^n \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x_i^2/4t}dx_i = \frac{1}{(\sqrt{\pi})^n}\prod_{i=1}^n \int_{-\infty}^{\infty} e^{-y^2}dy = 1.$$

Am făcut schimbarea de variabilă $x_i = 2y\sqrt{t}$ şi am folosit rezultatul cunoscut $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} e^{-y^2}dy = \sqrt{\pi}$.

Afirmaţia (iii) este evidentă, ţinând cont de forma lui E. Ultima afirmaţie justifică denumirea de soluţie fundamentală a funcţiei E. ∎

Pentru demonstraţie se poate consulta [42].

10.4 Principii de maxim pentru operatorul căldurii

Fie $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ o mulţime deschisă şi mărginită cu frontiera $\partial\Omega$. Fie $Q_T = \Omega \times (0,T)$, $\Sigma_T = \partial\Omega \times (0,T)$ şi $B_T = (\overline{\Omega} \times \{0\}) \cup (\partial\Omega \times [0,T))$, unde $T > 0$ este fixat.

Teorema 4.1. (Principiul de maxim) *Fie* $u \in C(\overline{\Omega}\times[0,T])$ *astfel încât* u *este de clasă* C^2 *în raport cu cu* x *şi de clasă* C^1 *în raport cu* t *pe* $\Omega\times(0,T)$.

Dacă

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x,t) - \Delta u(x,t) \leq 0, \ \forall (x,t) \in Q_T \tag{4.1}$$

atunci

$$\max_{\overline{Q}_T} u = \max_{B_T} u. \tag{4.2}$$

Demonstraţie. Deoarece Ω este un domeniu mărginit, rezultă că $\overline{Q}_T$ este o mulţime compactă, iar funcţia u fiind continuă pe $\overline{Q}_T$ îşi atinge marginile pe această mulţime. În acest fel se justifică existenţa primului termen al egalităţii (4.2). Fie $\varepsilon > 0$ şi $v_\varepsilon(x,t) = u(x,t) - \varepsilon t$. Din (4.1) rezultă

$$\frac{\partial v_\varepsilon}{\partial t} - \Delta v_\varepsilon = \frac{\partial u}{\partial t} - \Delta u - \varepsilon \leq -\varepsilon < 0 \text{ pe } Q_T. \tag{4.3}$$

Presupunem că maximul lui v_ε este atins în (x_0,t_0), $x_0 \in \Omega$, $0 < t_0 \leq T$ (deci în $\overline{Q}_T \backslash B_T$). Atunci $\Delta v_\varepsilon(x_0,t_0) \leq 0$ şi $\dfrac{\partial v_\varepsilon}{\partial t}(x_0,t_0) \geq 0$ (sau 0, dacă $t < T$).

De aici rezultă, $\dfrac{\partial v_\varepsilon}{\partial t}(x_0,t_0) - \Delta v_\varepsilon(x_0,t_0) \geq 0$ care contrazice relaţia (4.3). Aceasta implică $\max\limits_{\overline{Q}_T} v_\varepsilon = \max\limits_{B_T} v_\varepsilon$. Astfel

$$\begin{aligned} \max_{\overline{Q}_T} u &= \max_{\overline{Q}_T} (v_\varepsilon + \varepsilon t) \leq \max_{\overline{Q}_T} v_\varepsilon + \varepsilon T = \\ &= \max_{B_T} v_\varepsilon + \varepsilon T \leq \max_{B_T} u + \varepsilon T, \end{aligned}$$

deoarece $v_\varepsilon \leq u$. Dar $\varepsilon > 0$ fiind arbitrar, ultima relaţie implică (4.2). ∎

Din Teorema 4.1 rezultă că dacă u este soluţie clasică a ecuaţiei $\dfrac{\partial u}{\partial t} - \Delta u = 0$ pe $\overline{Q}_T$, atunci maximul şi minimul funcţiei u pe $\overline{Q}_T$ sunt atinse şi pe mulţimea B_T.

Utilizând Teorema 4.1 putem demonstra următorul rezultat de dependenţă a soluţiei clasice a problemei (3.1)-(3.3) în raport cu datele.

Corolarul 4.1. *Fie* $f \in C(\overline{Q}_T)$ *şi* $u_0 \in C(\bar{\Omega})$. *Atunci problema mixtă* (3.1)-(3.3) *are cel mult o soluţie clasică. În plus, aceasta* (*dacă există!*) *verifică inegalitatea*

$$\begin{aligned} &\min\left\{\min_{\overline{\Omega}} u_0, 0\right\} + t \min_{\overline{Q}_T} f \le u(x,t) \le \\ &\le \max\left\{\max_{\overline{\Omega}} u_0, 0\right\} + t \max_{\overline{Q}_T} f,\ \forall\,(x,t) \in \overline{Q}_T. \end{aligned} \tag{4.4}$$

Demonstraţie. Presupunem că u_1 şi u_2 sunt soluţii clasice pentru problema (3.1)-(3.3). Rezultă că $v := u_1 - u_2$ verifică problema (3.1)-(3.3) cu datele nule, iar din Teorema 4.1 obţinem

$$\max_{\overline{Q}_T} v = \min_{\overline{Q}_T} v = 0,$$

adică $u_1 \equiv u_2$. Pentru demonstrarea inegalităţii (4.4) considerăm funcţia $w = u - Mt$, unde $M = \max\limits_{\overline{Q}_T} f$.

Aceasta satisface sistemul

$$\begin{cases} \dfrac{\partial w}{\partial t} - \Delta w \le 0 & \text{în } Q_T \\ w(x,0) = u_0(x) & \text{în } \Omega \\ w = -Mt & \text{pe } \Sigma_T, \end{cases}$$

iar din principiul de maxim rezultă

$$\max_{\overline{Q}_T} w = \max\left\{\max_{\overline{\Omega}} u_0, 0\right\}$$

care implică

$$u(x,t) \le \max\{\max u_0, 0\} + Mt,\ \forall\,(x,t) \in \overline{Q}_T. \tag{4.5}$$

Trecând (în (1)-(3)) f în $-f$, u_0 în $-u_0$, u în $-u$ şi aplicând principiul de maxim, obţinem (cf. (4.5)) relaţia

$$u(x,t) \ge \min\left\{\min_{\overline{\Omega}} u_0, 0\right\} + mt,\ \forall\,(x,t) \in \overline{Q}_T, \tag{4.6}$$

unde $m = \min\limits_{\overline{Q}_T} f$. Din (4.5) şi (4.6) obţinem (4.4). ∎

Din (4.4) rezultă dependenţa continuă a soluţiei clasice de datele u_0 şi f. Mai exact, u satisface relaţia

$$\max_{\overline{Q}_T} |u| \leq \max_{\overline{\Omega}} |u_0| + T \max_{\overline{Q}_T} |f|.$$

Un rezultat asemănător celui prezentat în Corolarul 4.1 are loc şi pentru soluţiile slabe ale problemei mixte. Pentru aceasta, precum şi pentru alte rezultate semnificative privind principiul de maxim (cazul parabolic) recomandăm lucrările [39], [42]. În continuare vom prezenta un principiu de maxim pentru cazul $\Omega = \mathbb{R}^n$.

Teorema 4.2. *Dacă* $u \in C(\mathbb{R}^n \times [0,T]) \cap C^{2,1}(\mathbb{R}^n \times (0,T])$, *u mărginită şi*

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x,t) - \Delta u(x,t) \leq 0, \ \text{în } \mathbb{R}^n \times (0,T]$$

atunci

$$\sup_{\mathbb{R}^n \times [0,T]} u(x,t) = \sup_{\mathbb{R}^n} u(x,0).$$

Demonstraţie. Fie $M = \sup\limits_{\mathbb{R}^n \times [0,T]} u(x,t)$ şi $N = \sup\limits_{\mathbb{R}^n} u(x,0)$. Evident $M \geq N$. Fie $\varepsilon > 0$ şi v_ε funcţia definită prin

$$v_\varepsilon(x,t) = u(x,t) - \varepsilon(2nt + \|x\|^2).$$

Se observă că

$$\frac{\partial v_\varepsilon}{\partial t} - \Delta v_\varepsilon \leq 0, \quad \text{în } \mathbb{R}^n \times (0,T].$$

Să presupunem, prin absurd, că $M > N$. Pentru $\|x\|^2 \geq \varepsilon^{-1}(M-N)$ şi $t \in (0,T]$ avem $v_\varepsilon(x,t) \leq M - \varepsilon(\varepsilon^{-1}(M-N)) = N$ şi $v_\varepsilon(x,0) = u(x,0) - \varepsilon\|x\|^2 \leq N$.

În $\widetilde{Q}_T = \{(x,t) : \|x\|^2 \leq \varepsilon^{-1}(M-N), \ t \in [0,T]\}$ putem aplica Teorema 4.1 şi obţinem

$$v_\varepsilon(x,t) \leq N, \ \forall\, (x,t) \in \mathbb{R}^n \times [0,T].$$

De aici rezultă

$$u(x,t) \leq N + \varepsilon(2nt + \|x\|^2), \ \forall\, (x,t) \in \mathbb{R}^n \times (0,T).$$

Dacă fixăm perechea (x,t) şi facem pe ε să tindă la zero în inegalitatea de mai sus, obţinem $u(x,t) \leq N$ care implică $M \leq N$, de unde $M = N$. ∎

Teorema 4.2 poate fi utilizată pentru demonstrarea unicităţii soluţiei mărginite a problemei Cauchy pentru ecuaţia căldurii în tot spaţiul. Această problemă are forma

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x,t) - \Delta u(x,t) = f(x,t), \quad x \in \mathbb{R}^n,\ t \in (0,T) \tag{4.7}$$

$$u(x,0) = g(x), \quad x \in \mathbb{R}^n. \tag{4.8}$$

Spunem că funcţia $u \in C^{2,1}(\mathbb{R}^n \times (0,T)) \cap C(\mathbb{R}^n \times [0,T])$ este *soluţie clasică* a problemei Cauchy (4.7)–(4.8) dacă verifică ecuaţia (4.7) şi condiţia iniţială (4.8). Are loc următorul rezultat

Teorema 4.3. *Problema Cauchy* (4.7)-(4.8) *admite cel mult o soluţie clasică mărginită în* $\mathbb{R}^n \times (0,T)$.

Demonstraţie. Presupunând că u_1 şi u_2 sunt soluţii clasice mărginite în $\mathbb{R}^n \times (0,T)$, $u := u_1 - u_2$ este funcţie mărginită şi verifică relaţiile (4.7) şi (4.8) cu $f = g = 0$. Aplicând Teorema 4.2 rezultă că $u \equiv 0$, deci $u_1 = u_2$. ∎

Capitolul 11

Ecuaţii hiperbolice

11.1 Probleme la limită pentru ecuaţii de tip hiperbolic

Dacă ecuaţiile cu derivate parţiale de tip parabolic descriu fenomenele de transfer, cum ar fi transferul de substanţe în procesele de difuzie, cele hiperbolice se întâlnesc frecvent la descrierea fenomenelor ondulatorii. Prezentăm în continuare forma generală a ecuaţiei hiperbolice, de care ne ocupăm în acest capitol.

Fie $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ o mulţime deschisă. Ecuaţia

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x,t) - \Delta u(x,t) = 0, \ \forall\, (x,t) \in \Omega \times (0,\infty)$$

este cunoscută sub numele de *ecuaţia undelor*, deoarece ea descrie mişcarea coardei vibrante ($n = 1$), vibraţiile unei membrane elastice ($n = 2$) sau a solidului elastic ($n = 3$).

Dacă facem notaţiile: $Q_T = \Omega \times (0,T)$ ($T > 0$, fixat), $\Sigma_T = \partial\Omega \times (0,T)$, atunci problema mixtă pentru ecuaţia undelor cu condiţiile la limită de tip Dirichlet, omogene, are forma

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x,t) - \Delta u(x,t) = f(x,t), \qquad \forall\, (x,t) \in Q_T \tag{1.1}$$

$$u(x,0) = u_0(x), \ \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = u_1(x), \quad \forall\, x \in \Omega, \tag{1.2}$$

$$u(x,t) = 0, \qquad \text{pe } \Sigma_T, \tag{1.3}$$

unde $f : Q_T \to \mathbb{R}$, $u_0 : \Omega \to \mathbb{R}$ şi $u_1 : \Omega \to \mathbb{R}$ sunt funcţii date. În locul condiţiei Dirichlet omogene (1.3) se poae considera o condiţie de tip Neumann

$$\frac{\partial u}{\partial \nu}(x,t) = g(x,t) \quad \text{în } \Sigma_T \tag{1.3$'$}$$

sau o condiţie de tip mixt (Robin)

$$\frac{\partial u}{\partial \nu}(x,t) + \alpha u(x,t) = h(x,t) \quad \text{în } \Sigma_T, \tag{1.3$''$}$$

unde $\alpha \geq 0$ iar $g, h : \Sigma_T \to \mathbb{R}$ sunt funcţii date.

Spunem că funcţia $u : Q_T \to \mathbb{R}$ este *soluţie clasică* pentru (1.1)-(1.3) dacă $u \in C^2(Q_T) \cap C(\overline{Q}_T)$, $\dfrac{\partial u}{\partial t} \in C(\overline{Q}_T)$ şi verifică (în sens clasic) ecuaţia (1.1) împreună cu condiţiile iniţiale (1.2) şi la limită (1.3).

În acest capitol ne vom ocupa de existenţa unei soluţii clasice pentru ecuaţia undei doar pentru problema Cauchy în cazul $\Omega = \mathbb{R}^n$. Trecem acum la prezentarea unui model matematic descris cu ajutorul unei ecuaţii hiperbolice.

Prin simplitate şi apariţia frecventă în multe ramuri ale fizicii matematice, ecuaţia *coardei vibrante* constituie un exemplu clasic în teoria ecuaţiilor cu derivate parţiale.

Ecuaţia coardei vibrante. Să considerăm (Fig. 1.1) o coardă flexibilă de lungime ℓ, fixată la capete, care în poziţie de echilibru ia forma unui segment de dreaptă. Presupunem că la momentul $t = 0$ coarda este scoasă din poziţia de echilibru, care coincide cu direcţia axei Ox şi începe să vibreze.

Fig.1.1.

Notăm cu $u(x,t)$ amplitudinea (abaterea corzii de la poziţia de echilibru) în punctul x şi la momentul t. Ne propunem să obţinem ecuaţia satisfăcută de u, ca funcţie de x şi t.

Cu alte cuvinte, dacă $u(x,t)$ este deplasarea verticală a punctului de pe coardă aflat la distanţa x de origine la momentul t, atunci care este ecuaţia cu derivate parţiale satisfăcută de $u(x,t)$? Pentru a simplifica raţionamentul facem următoarele ipoteze:

1. Presupunem că deplasările corzii se află în acelaşi plan (xOu), iar direcţia deplasării este perpendiculară pe axa Ox; atunci fenomenul poate fi descris printr-o singură funcţie $u(x,t)$, care caracterizează deplasarea verticală a corzii.

2. Coarda este flexibilă şi elastică, adică tensiunile care apar în coardă sunt orientate totdeauna după tangentele la profilul ei instantaneu şi coarda nu se opune la flexiune.

3. Nu există elongaţii ale nici unui segment al corzii, deci după legea lui Hooke, mărimea tensiunii $T(x,t)$ este constantă, $|T(x,t)| = T_0$, $\forall\, x \in (0,\ell)$, $\forall\, t > 0$.

4. Forţele exterioare, precum rezistenţa aerului şi greutatea corzii sunt neglijabile.

5. Panta $\dfrac{\partial u}{\partial x}$ în fiecare punct al corzii (deplasate) este neglijabilă, prin urmare amplitudinea u este mică în raport cu lungimea corzii.

Alegem în mod arbitrar un arc M_1M_2 de pe coardă în care punctele M_1 şi M_2 au coordonatele (x,u) şi, respectiv, $(x+\Delta x, u+\Delta u)$ (Fig. 1.2).

Fig. 1.2.

Notăm cu T_1 şi T_2 tensiunile în M_1 şi, respectiv, M_2 care, după cum am specificat în ipoteza 2, acţionează pe direcţiile tangentelor la arcul $\overset{\frown}{M_1 M_2}$ în cele două puncte.

Notăm cu Δs lungimea arcului $\overset{\frown}{M_1 M_2}$ şi $\rho(x)$ densitatea liniară de masă a corzii. Deoarece fiecare punct al corzii se mişcă doar pe direcţia perpendiculară pe axa Ox, rezultă că componentele orizontale ale tensiunilor T_1 şi T_2 sunt egale. Deci

$$-T_1 \cos\alpha_1 + T_2 \cos\alpha_2 = 0$$

sau

$$T_1 \cos\alpha_1 = T_2 \cos\alpha_2 = T_0 = \text{ constant},$$

unde am notat $T_i = |T_i|,\ i = 1, 2.$

Componenta verticală a forţei de tensiune ce acţionează asupra elementului de arc Δs este

$$-T_1 \sin\alpha_1 + T_2 \sin\alpha_2 =$$

$$= T_0(-\operatorname{tg}\alpha_1 + \operatorname{tg}\alpha_2) = T_0 \left[-\frac{\partial u(x,t)}{\partial x} + \frac{\partial u(x+\Delta x, t)}{\partial x} \right].$$

Din legea a doua a lui Newton rezultă că (pentru echilibru) suma forţelor ce acţionează asupra elementului de arc Δs trebuie să fie nulă. Deci

$$T_0 \left[\frac{\partial u(x+\Delta x, t)}{\partial x} - \frac{\partial u(x,t)}{\partial x} \right] = \rho(x) \Delta s \, \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\,(\bar{x}, t)$$

unde $\bar{x}$ este abscisa centrului de masă a lui Δs. Deoarece $\Delta s \cong \Delta x$, împărţind ambii membri ai egalităţii de mai sus cu Δs şi trecând la limită cu $\Delta x \to 0$ obţinem

$$T_0 \,\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} = \rho(x)\, \frac{\partial^2 (x,t)}{\partial t^2}. \tag{1.4}$$

Dacă asupra corzii acţionează o forţă externă de densitate $f_0(x,t)$, atunci ecuaţia (4) devine

$$\rho^2(x)\, \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} - T_0\, \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} = f_0(x,t),\ \forall\, x \in (0,\ell),\ t > 0. \tag{1.5}$$

Dacă presupunem că $\rho(x) \equiv \rho =$ constant, atunci ecuaţia (1.5) capătă forma

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} - \omega^2\, \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} = f(x,t) \text{ în } (0,\ell)\times(0,\infty), \tag{1.6}$$

unde $\omega^2 = T_0\rho^{-1}, \ f = f_0\rho^{-1}$.

Deoarece extremităţile corzii sunt fixate, ecuaţiei (1.6) i se asociază condiţiile la limită de tip Dirichlet

$$u(0,t) = u(\ell,t) = 0, \ \forall\, t \geq 0. \tag{1.7}$$

În afară de acestea, se dau "condiţiile iniţiale", adică forma şi viteza corzii la momentul inţial

$$u(x,0) = u_0(x), \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = u_1(x), \ \forall\, x \in (0,\ell). \tag{1.8}$$

adică profilul corzii şi viteza punctelor sale la momentul iniţial.

11.2 Soluţii slabe pentru ecuaţia undei

Determinarea soluţiei clasice pentru problema mixtă (1)-(3) fiind o operaţie dificilă, vom introduce (analog cazului parabolic) conceptul de soluţie slabă (sau generalizată) pentru această problemă.

Definiţia 2.1. Fie Ω o mulţime deschisă şi mărginită cu frontiera de clasă C^1, $T > 0$, iar $f \in L^2(0,T;L^2(\Omega)) = L^2(Q_T)$, $u_0 \in H_0^1(\Omega)$ şi $u_1 \in L^2(\Omega)$ funcţii date. Funcţia $u : Q_T \to \mathbb{R}$ se numeşte *soluţie slabă* (sau *generalizată*) a problemei (1.1)-(1.3) dacă satisface următoarele condiţii:

a) $u \in C^1([0,T];L^2(\Omega)) \cap C([0,T];H_0^1(\Omega))$

b) Pentru orice $\varphi \in H_0^1(\Omega)$ aplicaţia $t \to \displaystyle\int_\Omega \frac{\partial u}{\partial t}(x,t)\varphi(x)dx$ este absolut continuă pe $[0,T]$ şi, în plus,

$$\frac{d}{dt}\int_\Omega \frac{\partial u}{\partial t}(x,t)\varphi(x)dx + \int_\Omega \nabla_x(x,t)\cdot\nabla\varphi(x)dx =$$
$$= \int_\Omega f(x,t)\varphi(x)dx, \quad \text{a.p.t. } t \in [0,T],$$

c) $u(x,0) = u_0(x), \ \dfrac{\partial u}{\partial t}(x,0) = u_1(x)$, ap.t. $x \in \Omega$.

Să observăm faptul că în condiţia (a) este încorporată şi condiţia la limită (1.3).

Ca şi în cazul parabolic, utilizând prima formulă a lui Green se dovedeşte că orice soluţie clasică pentru problema (1.1)-(1.3) este şi soluţie slabă.

Prezentăm acum teorema de existenţă şi unicitate a soluţiei slabe.

Teorema 2.1. *Fie* $f : L^2(\Omega)$, $u_0 \in H_0^1(\Omega)$ *şi* $u_1 \in L^2(\Omega)$. *Atunci problema mixtă* (1.1)-(1.3) *admite o unică soluţie slabă care, în plus, verifică evaluarea*

$$\begin{aligned}\int_\Omega \left|\frac{\partial u}{\partial t}(x,t)\right|^2 dx + \int_\Omega \|\nabla_x u(x,t)\|^2 dx \leq \\ \leq C\left(\|u_0\|^2_{H_0^1(\Omega)} + \|u_1\|^2_{L^2(\Omega)} + \int_0^t\int_\Omega f^2(x,s)dx\,ds\right),\ \forall\, t\in[0,T],\end{aligned} \tag{2.1}$$

unde C *este o constantă care nu depinde de* f, u_0 *şi* u_1.

Dacă $f \equiv 0$, *atunci soluţia* u *există pe toată axa reală şi, în plus, satisface legea conservării energiei*

$$\int_\Omega \left(|u_t(x,t)|^2 + \|\nabla_x u(x,t)\|^2\right) dx = constant,\ \forall\, t \in \mathbb{R}. \tag{2.2}$$

Demonstraţie. *Unicitatea.* Presupunem că u_1 şi u_2 sunt două soluţii slabe ale problemei (1.1)-(1.3). Deoarece $u := u_1 - u_2$ verifică problema pentru $f = u_0 = u_1 = 0$, inegalitatea (2.1) implică $u_t = 0$ şi $\nabla u = 0$, adică $u \equiv$ constant în Q_T. Dar, u fiind nulă pe Σ_T (condiţia (1.3)), rezultă $u \equiv 0$ în Q_T, adică $u_1 = u_2$.

Existenţa. Vom demonstra existenţa soluţiei construind-o efectiv, prin metoda separării variabilelor.

Fie $\{\varphi_k\} \subset L^2(\Omega)$ sistemul ortonormat complet constituit din funcţiile proprii ale laplaceanului corespunzătoare valorilor proprii $\lambda_k \in \mathbb{R}_+$, $\lambda_k \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} \infty$

$$\begin{cases} -\Delta\varphi_k = \lambda_k\varphi_k & \text{în } \Omega \\ \varphi_k = 0 & \text{pe } \partial\Omega. \end{cases} \tag{2.3}$$

Începem prin a căuta soluţia problemei sub forma seriei Fourier

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} u_k(t)\varphi_k(x),\ (x,t) \in \Omega\times(0,T).$$

Introducând această expresie în ecuaţia undelor şi ţinând cont de (2.3), găsim următorul şir de ecuaţii diferenţiale cu condiţii iniţiale ($k \in \mathbb{N}^*$)

$$\begin{cases} u_k''(t) + \lambda_k u_k(t) = f_k(t), & t > 0 \\ u_k(0) = u_0^k \\ u_k'(0) = u_1^k \end{cases} \tag{2.4}$$

unde f_k, u_0^k, u_1^k sunt coeficienţii Fourier ai lui f, u_0 şi, respectiv, u_1 în raport cu baza $\{\varphi_k\}$, adică:

$$\begin{aligned} f_k(t) &= (f(t), \varphi_k)_{L^2(\Omega)} := \int_\Omega f(x,t)\varphi_k(x)dx,\ t \in (0,T), \\ u_0^k &= (u_0, \varphi_k)_{L^2(\Omega)} := \int_\Omega u_0(x)\varphi_k(x)dx, \\ u_1^k &= (u_1, \varphi_k)_{L^2(\Omega)} := \int_\Omega u_1(x)\varphi_k(x)dx. \end{aligned}$$

Integrând ecuaţiile diferenţiale de ordinul al doilea cu coeficienţi constanţi neomogene (2.4) şi luând în consideraţie condiţiile iniţiale asociate, găsim:

$$\begin{aligned} u_k(t) &= u_0^k \cos\sqrt{\lambda_k}\, t + \frac{u_1^k}{\sqrt{\lambda_k}} \sin\sqrt{\lambda_k}\, t + \\ &+ \frac{1}{\sqrt{\lambda_k}} \int_0^t f_k(s) \sin\sqrt{\lambda_k}(t-s)ds, \end{aligned} \tag{2.5}$$

de unde

$$\begin{aligned} u(x,t) = \sum_{k=1}^\infty \Bigg(& u_0^k \cos\sqrt{\lambda_k}\, t + \frac{u_1^k}{\sqrt{\lambda_k}} \sin\sqrt{\lambda_k}\, t + \\ + \frac{1}{\sqrt{\lambda_k}} \int_0^t & f_k(s) \sin\sqrt{\lambda_k}(t-s)ds \Bigg) \varphi_k(x),\ t > 0,\ x \in \Omega. \end{aligned} \tag{2.6}$$

Demonstrăm că funcţia u dată de (2.6) satisface condiţiile Definiţiei 2.1, prin urmare este soluţie slabă a problemei (1.1)-(1.3). La fel ca în cazul parabolic, vom face demonstraţia în mai multe etape

I. $u \in C([0,T]; H_0^1(\Omega))$.
Facem notaţia $\psi_k = \dfrac{\varphi_k}{\sqrt{\lambda_k}}$ şi reamintim că sistemul $\{\psi_k\}$ este ortonormat şi complet în $H_0^1(\Omega)$. Astfel

$$u(t) = \sum_{k=1}^\infty \sqrt{\lambda_k}\, u_k(t) \psi_k$$

şi pentru a demonstra că $u \in C([0,T]; H_0^1(\Omega))$ este suficient să arătăm că seria

$$\sum_{k=1}^\infty \lambda_k u_k^2(t) = \|u(t)\|^2_{H_0^1(\Omega)}$$

este uniform convergentă pe intervalul $[0,T]$.

În acest sens reamintim că $u_0 \in H_0^1(\Omega)$, prin urmare,

$$u_0 = \sum_{k=1}^{\infty}(u_0, \psi_k)_{H_0^1(\Omega)}\psi_k = \sum_{k=1}^{\infty}\sqrt{\lambda_k}u_0^k\psi_k$$

de unde

$$\|u_0\|^2_{H_0^1(\Omega)} = \sum_{k=1}^{\infty}\lambda_k(u_0^k)^2.$$

În mod asemănător avem

$$\|u_1\|^2_{L^2(\Omega)} = \sum_{k=1}^{\infty}(u_1^k)^2$$

şi din inegalitatea Cauchy–Schwartz,

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left|\int_0^t f_k(s)\sin\sqrt{\lambda_k}(t-s)ds\right|^2 \le T\sum_{k=1}^{\infty}\int_0^t f_k^2(s)ds =$$
$$= T\int_0^t \|f(s)\|^2_{L^2(\Omega)}ds,\ \forall\, t \in [0,T].$$

Rezultă că seria $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\lambda_k u_k^2(t)$ este majorată de seria

$$C\left(\sum_{k=1}^{\infty}\left(\lambda_k(u_0^k)^2 + (u_1^k)^2 + T\int_0^T f_k^2(s)ds\right)\right) =$$
$$= C\left(\|u_0\|^2_{H_0^1(\Omega)} + \|u_1\|^2_{L^2(\Omega)} + \int_0^T\int_\Omega f^2(x,s)ds\,dx\right).$$

Rezultă că seria $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\lambda_k u_k^2(t)$ este uniform convergentă şi $u \in C([0,T]l; H_0^1(\Omega))$. Mai mult, u satisface evaluarea

$$\|u(t)\|^2_{H_0^1(\Omega)} \le C\left(\|u_0\|^2_{H_0^1(\Omega)} + \|u_1\|^2_{L^2(\Omega)} + \int_0^T\int_\Omega f^2(x,s)ds\,dx\right),\quad \forall\, t \in [0,T]. \tag{2.7}$$

II. $u \in C^1([0,T]; L^2(\Omega))$.

Pentru aceasta arătăm că seria derivată

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \sum_{k=1}^{\infty} u_k'(t)\varphi_k = \sum_{k=1}^{\infty} \Big(-\sqrt{\lambda_k} u_0^k \sin\sqrt{\lambda_k}\, t +$$
$$+u_1^k \cos\sqrt{\lambda_k}\, t + \int_0^t f_k(s)\cos\sqrt{\lambda_k}(t-s)ds\Big)\,\varphi_k$$

este uniform convergentă pe $[0,T]$.

Acest lucru este adevărat deoarece seria $\sum\limits_{k=1}^{\infty}(u_k'(t))^2$ este majorată de seria

$$C\sum_{k=1}^{\infty}\left(\lambda_k (u_0^k)^2 + (u_1^k)^2 + T\int_0^t f_k^2(s)ds\right)$$

care este uniform convergentă pe $[0,T]$ către

$$C\left(\|u_0\|^2_{H_0^1(\Omega)} + \|u_1\|^2_{L^2(\Omega)} + T\int_0^t\int_\Omega f^2(x,s)ds\,dx\right).$$

Rezultă de aici că $u \in C^1([0,T]; L^2(\Omega))$ şi

$$\left\|\frac{\partial u(t)}{\partial t}\right\|^2_{L^2(\Omega)} \le C\left(\|u_0\|^2_{H_0^1(\Omega)} + \|u_1\|^2_{L^2(\Omega)} + T\int_0^t\int_\Omega f^2(x,s)ds\,dx\right), \quad \forall\, t\in[0,T]. \tag{2.8}$$

Din (2.7) şi (2.8) rezultă (2.1).

Condiţia (c) din definiţie rezultă din dezvoltările

$$u(x,0) = \sum_{k=1}^{\infty} u_k(0)\varphi_k(x) = \sum_{k=1}^{\infty} u_0^k\varphi_k(x) = u_0(x)$$

şi

$$u_t(x,0) = \sum_{k=1}^{\infty} u_k'(0)\varphi_k(x) = \sum_{k=1}^{\infty} u_1^k\varphi_k(x) = u_1(x).$$

III. *Verificarea condiţiei* (b) *din definiţie.*
Pentru aceasta, demonstrăm că pentru $\varphi \in H_0^1(\Omega)$, funcţia

$$\Phi(t) := \int_\Omega \frac{\partial u(x,t}{\partial t}\,\varphi(x)dx \tag{2.9}$$

este absolut continuă. În acest scop demonstrăm următorul rezultat auxiliar.

Lema 2.1. *Fie* $\{g_k(t)\}$ *un şir de funcţii absolut continue pe* $[0,T]$ *astfel încât seria* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} g_k$ *este convergentă pe* $[0,T]$ *şi*

$$\sum_{k=1}^{\infty} g_k(t) = g(t), \ \forall\, t \in [0,T].$$

Presupunem, în plus, că există $h \in L^1(0,T)$ *astfel încât*

$$\sum_{k=1}^{\infty} |g_k'(t)| \le h(t), \quad a.p.t.\ t \in (0,T). \tag{2.10}$$

Atunci funcţia g *este absolut continuă pe* $[0,T]$ *şi*

$$g'(t) = \sum_{k=1}^{\infty} g_k'(t), \ a.p.t.\ t \in (0,T). \tag{2.11}$$

Demonstraţie. Din relaţia (2.10), teorema convergenţei dominate a lui Lebesgue şi faptul că derivata unei funcţii absolut continue este în L^1, rezultă că seria $\sum\limits_{k=1}^{\infty} g_k'(t)$ este absolut convergentă a.p.t. $t \in [0,T]$ la o funcţie din L^1 şi

$$\int_0^t \left(\sum_{k=1}^{\infty} g_k'(s) \right) ds = \sum_{k=1}^{\infty} \int_0^t g_k'(s) ds = g(t) - g(0), \ \forall\, t \in [0,T]. \tag{2.12}$$

Din relaţia (2.12), rezultă că g este absolut continuă pe $[0,T]$ şi derivata sa g' este dată de (2.11). ■

Aplicăm acum Lema 2.1 funcţiei Φ dată prin relaţia (2.9). Avem

$$\Phi(t) = \sum_{k=1}^{\infty} u_k'(t)(\varphi_k, \varphi) =$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} \left(\sqrt{\lambda_k}\, u_0^k \sin \sqrt{\lambda_k}\, t + u_1^k \cos \sqrt{\lambda_k}\, t + \int_0^t f_k(s) \cos \sqrt{\lambda_k}(t-s) ds \right) (\varphi_k, \varphi),$$

de unde rezultă

$$\Phi'(t) = \sum_{k=1}^{\infty} u_k''(t)(\varphi_k, \varphi) = \sum_{k=1}^{\infty} f_k(t)(\varphi_k, \varphi) - \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k u_k(t)(\varphi_k, \varphi).$$

Folosind inegalitatea lui Cauchy–Schwartz, obţinem

$$\left|\sum_{k=1}^{\infty} f_k(t)(\varphi_k,\varphi)\right| \leq \left(\sum_{k=1}^{\infty} f_k^2(t)\right)^{1/2}\left(\sum_{k=1}^{\infty}(\varphi_k,\varphi)^2\right)^{1/2} = \|f(t)\|_{L^2(\Omega)}\|\varphi\|_{L^2(\Omega)},$$

şi

$$\left|\sum_{k=1}^{\infty}\lambda_k u_k(t)(\varphi_k,\varphi)\right| \leq \left|\sum_{k=1}^{\infty}\sqrt{\lambda_k}u_k(t)(\varphi_k,\varphi)_{H_0^1(\Omega)}\right| \leq$$
$$\leq \left(\sum_{k=1}^{\infty}\lambda_k u_k^2(t)\right)^{1/2}\|\varphi\|_{H_0^1(\Omega)} \leq \|\varphi\|_{H_0^1(\Omega)}\|u(t)\|_{H_0^1(\Omega)}.$$

Din Lema 2.1 rezultă că funcţia Φ este absolut continuă şi derivata sa este

$$\Phi'(t) = \sum_{k=1}^{\infty} f_k(t)(\varphi_k,\varphi) - \sum_{k=1}^{\infty}\lambda_k u_k(t)(\varphi_k,\varphi),$$

prin urmare

$$\frac{d}{dt}\int_\Omega \frac{\partial u(x,t)}{\partial t}\varphi(x)dx = \sum_{k=1}^{\infty}(f(t),\varphi_k)(\varphi_k,\varphi) - \sum_{k=1}^{\infty}u_k(t)(\varphi_k,\varphi) =$$
$$= \int_\Omega f(x,t)\varphi(x)dx - \int_\Omega \nabla_x u(x,t)\nabla\varphi(x)dx, \text{ a.p.t. } t\in[0,T].$$

IV. Dacă $f \equiv 0$ atunci u este definită pe $\mathbb{R}$ şi verifică relaţia (2.2). Din ecuaţiile

$$u_k''(t) + \lambda_k u_k(t) = 0, \ \forall t > 0, \ k \in \mathbb{N}^*$$

prin înmulţire cu u_k şi integrare pe $[0,t]$ rezultă

$$\frac{1}{2}(u_k'(t))^2 + \lambda_k u_k^2(t) = \frac{1}{2}(u_1^k)^2 + \lambda_k(u_0^k)^2, \ \forall t \geq 0, \ k = 1,2,...$$

Sumând aceste relaţii şi ţinând cont de identitatea lui Parseval se obţine

$$\frac{1}{2}\|u_t(t)\|^2_{L^2(\Omega)} + \|u(t)\|^2_{H_0^1(\Omega)} = \frac{1}{2}\|u_1\|^2_{L^2(\Omega)} + \|u_0\|^2_{H_0^1(\Omega)}, \ \forall t \geq 0,$$

adică (2.2).

Această relaţie poate fi interpretată ca o lege de conservare exprimând faptul că energia sistemului rămâne constantă în timp. De asemenea, în acest caz, u se poate extinde pe semiaxa negativă prin relaţia $u(x,t) = -u(x,-t)$, $\forall t \leq 0$, rămânând soluţie a problemei (1.1)-(1.3) pe $\Omega\times\mathbb{R}$. ∎

Exemplu. Vom considera în acest exemplu mişcările unei corzi elastice de lungime ℓ fixată la ambele capete, asupra căreia acţionează o forţă f.

Am văzut că modelul matematic pentru această problemă este dat de sistemul

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \omega^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = f(x,t), \qquad x \in (0,\ell),\ t > 0, \tag{2.13}$$

$$u(x,0) = u_0(x),\ \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = u_1(x), \quad x \in (0,\ell), \tag{2.14}$$

$$u(0,t) = u(\ell,t) = 0, \qquad t \geq 0 \tag{2.15}$$

unde ω^2 este o constantă ce măsoară proprietăţi fizice ale corzii, iar u_0 şi u_1 reprezintă poziţia şi, respectiv, viteza iniţială a corzii. Pentru determinarea soluţiei slabe, folosim metoda separării variabilelor, în care scop avem nevoie de valorile şi funcţiile proprii pentru problema

$$-\varphi''(x) = \lambda\varphi(x),\ \forall\, x \in (0,\ell);\ \varphi(0) = \varphi(\ell) = 0.$$

După cum am văzut în Teorema 4.3, Cap.9, această problemă are o infinitate numărabilă de valori proprii şi funcţii proprii date prin

$$\lambda_k = \left(\frac{k\pi}{\ell}\right)^2,\ \varphi_k(x) = \sqrt{\frac{2}{\ell}} \sin\frac{k\pi}{\ell}\, x,\ x \in (0,\ell),\ k = 1,2,...$$

Prin urmare, conform Teoremei 2.1, soluţia problemei (2.13)–(2.15) este dată de funcţia

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} \left(a_k \cos\frac{k\pi\omega}{\ell}\, t + b_k \sin\frac{k\pi\omega}{\ell}\, t + c_k(t) \right) \sin\frac{k\pi}{\ell}\, x, \tag{2.16}$$

unde

$$\begin{aligned}
a_k &= \frac{2}{\ell}\int_0^\ell u_0(x)\sin\frac{k\pi}{\ell}\, x\, dx,\\
b_k &= \frac{2}{k\pi\omega}\int_0^\ell u_1(x)\sin\frac{k\pi}{\ell}\, x\, dx,\\
c_k(t) &= \frac{1}{k\pi\omega}\int_0^t f_k(s)\sin\frac{k\pi}{\ell}\,(t-s)ds\\
f_k(s) &= \frac{2}{\ell}\int_0^\ell f(x,\tau)\sin\frac{k\pi}{\ell}\, x\, dx,
\end{aligned}$$

pentru $k = 1, 2, ...$

Dacă $f = 0$, soluţia u dată prin formula (2.16) capătă forma

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} \left(a_k \cos \frac{k\pi\omega}{\ell} t + b_k \sin \frac{k\pi\omega}{\ell} t \right) \sin \frac{k\pi}{\ell} x \tag{2.17}$$

şi reprezintă vibraţiile libere ale corzii elastice cu capetele fixate. Această formulă are o interpretare interesantă pentru instrumentele muzicale cu corzi.

La instrumentele cu percuţie (de exemplu, pianul), vibraţia este provocată printr-o lovitură care se dă corzii (deci coarda nu are deplasare iniţială, $u_0 \equiv 0$, ci doar viteză iniţială), iar la cele cu coarde ciupite (de exemplu, harpa), vibraţiile sunt produse de o deviere iniţială (deci $u_1 \equiv 0$).

Termenii seriei,

$$u_k(t,x) = \left(a_k \cos \frac{k\pi\omega}{\ell} t + b_k \sin \frac{k\pi\omega}{\ell} t \right) \sin \frac{k\pi}{\ell} x$$

descriu mişcările simple ale corzii numite şi oscilaţii proprii. Aceste oscilaţii au perioadele $T_k = \dfrac{2\ell}{k\omega}$ şi sunt independente de x, deci aceeaşi perioadă pentru toate punctele corzii, iar amplitudinea $\sqrt{a_k^2 + b_k^2}\left|\sin \dfrac{\kappa\pi}{\ell} x\right|$, proprie fiecărui punct al corzii.

Cea mai mare amplitudine o au punctele pentru care $\left|\sin \dfrac{\kappa\pi}{\ell} x\right| = 1$. Aceste puncte pot fi determinate uşor pe coardă pentru diverse valori ale lui k. Vibraţiile corzii provoacă vibraţii ale aerului care sunt percepute ca sunete. Intensitatea sunetului este caracterizată de amplitudinea (sau energia) vibraţiei, iar înălţimea sunetului (sau tonul) este caracterizată de perioada vibraţiei.

Tonul fundamental este dat de prima oscilaţie ($k = 1$), iar celelalte oscilaţii proprii reprezintă armonice ale tonului fundamental.

O discuţie mai detaliată a acestor chestiuni se găseşte în [46].

11.3 Propagarea undelor în spaţiu. Problema Cauchy

În acest paragraf vom analiza una din problemele importante asociate ecuaţiei undelor şi anume Problema Cauchy. Aceasta constă în determinarea funcţiei u care verifică ecuaţia

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \Delta u = 0 \ \text{ în } \mathbb{R}^n \times (0, \infty) \tag{3.1}$$

cu condiţiile iniţiale

$$u(x,0) = u_0(x), \ \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = u_1(x), \ x \in \mathbb{R}^n \tag{3.2}$$

unde $u_0 : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ şi $u_1 : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ sunt funcţii date. Această ecuaţie are o importanţă fundamentală în teoria propagării sunetului, a undelor electromagnetice şi în alte domenii ale fizicii.

Funcţia $u : \mathbb{R}^n \times (0,\infty) \to \mathbb{R}$ se numeşte *soluţie clasică* pentru problema Cauchy (3.1)-(3.2) dacă $u \in C^2(\mathbb{R}^n \times (0,\infty))$ şi verifică problema (3.1) împreună cu condiţiile iniţiale (3.2).

Întrucât operatorul undelor $\dfrac{\partial}{\partial t^2} - \Delta$ este invariant la inversarea timpului $(x,t) \to (x,-t)$, este suficient să considerăm soluţia problemei Cauchy în semispaţiul $t > 0$, rezultate similare putând fi obţinute pentru $t < 0$ prin înlocuirea lui t cu $-t$.

Pentru aplicaţiile sale fizice prezintă interes considerarea ecuaţiei mai generale

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \omega^2 \Delta u = 0, \ \omega^2 = \text{constant}$$

care poate fi adusă la forma (3.1) prin modificarea unităţii de timp, $t' = \omega t$.

În finalul paragrafului vom arăta că dacă în locul ecuaţiei (3.1) se consideră ecuaţia neomogenă

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \Delta u = f \ \text{ în } \mathbb{R}^n \times (0,\infty) \tag*{(3.1)$'$}$$

unde $f : \mathbb{R}^n \times (0,\infty)$ este o funcţie dată, problema rezultată nu diferă esenţial de problema (3.1)-(3.2). Mai exact, folosind principiul superpoziţiei, soluţia noii probleme Cauchy (3.1)$'$-(3.2) se scrie ca suma soluţiilor a două probleme Cauchy de tipul (3.1)-(3.2).

Deşi noi ne ocupăm în special de cazurile particulare $n = 1$, $n = 2$ şi $n = 3$, o serie de rezultate vor fi demonstrate pentru cazul general. Întrucât pentru $n > 1$ nu avem o formulă simplă de reprezentare a soluţiei problemei (3.1)-(3.2), demonstrarea existenţei şi unicităţii nu este un lucru banal. Pentru început vom demonstra unicitatea soluţiei clasice.

Metoda folosită este cunoscută sub numele de "metoda energetică" deoarece expresiile ce intră în joc pot fi interpretate ca "energii" ale undei. Apoi vom scrie soluţiile problemei pentru $n = 2$ şi $n = 3$ şi vom stabili prin calcul direct că acestea verifică ecuaţia (3.1) şi condiţiile iniţiale (3.2). Cazul $n = 1$, fiind mai simplu, va fi tratat separat. În acest fel vom demonstra existenţa soluţiei.

Fie $(x^0, t^0) = (x_1^0, ..., x_n^0, t^0)$ un punct fixat din $\mathbb{R}^{n+1}$. Ecuaţia

$$(x_1 - x_1^0)^2 + \cdots + (x_n - x_n^0)^2 - (t - t^0)^2 = 0$$

descrie o suprafaţă conică cu vârful în (x^0, t^0), cu axa paralelă cu Ot şi cu generatoarea făcând un unghi de $45°$ cu axa Ot. Partea superioară, adică partea pentru care $t \geq t^0$ se numeşte *conul ascendent* cu vârful în punctul (x^0, t^0), iar partea inferioară, adică partea pentru care $t \leq t^0$ se numeşte *conul descendent* cu vârful în (x^0, t^0).

Să considerăm acum conul descendent cu vârful $(x^0, t^0) \in \mathbb{R}^{n+1}$. Suprafaţa şi interiorul acestui con sunt date prin inegalităţile

$$(x_1 - x_1^0)^2 + \cdots + (x_n - x_n^0)^2 - (t - t^0)^2 \leq 0, \; t \leq t_0. \tag{3.3}$$

Fie T, $0 \leq T \leq t^0$, un număr fixat. Atunci planul $t = T$, din $\mathbb{R}^{n+1}$, taie conul descendent cu vârful în (x^0, t^0) după bila închisă (în $\mathbb{R}^n$) de centru x^0 şi rază $t^0 - T$ (vezi Fig. 3.1)

$$\overline{B}(x^0, t^0 - T) = \{x : \left\| x - x^0 \right\|^2 \leq (t^0 - T)^2\} \tag{3.4}$$

Fig. 3.1

Vom demonstra acum o relaţie satisfăcută de soluţia ecuaţiei undelor cunoscută sub numele de *inegalitatea energiei* şi care se dovedeşte utilă în demonstrarea unicităţii soluţiei problemei Cauchy(3.1)-(3.2).

Teorema 3.1. (inegalitatea energiei) *Fie* (x^0, t^0) *un punct fixat în* $\mathbb{R}^{n+1}$ *cu* $t^0 > 0$ *şi fie* $D \subset \mathbb{R}^{n+1}$ *domeniul conic mărginit de conul* (3.3) *cu vârful* *în* (x^0, t^0) *şi de planul* $t = 0$. *Presupunem că funcţia* $u \in C^2(\overline{D})$ *satisface ecuaţia undelor în* D. *Atunci, pentru orice* T, $0 \le T \le t^0$, *are loc inegalitatea*

$$\int_{B_T} \left(\|\nabla_x u\|^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2 \right)_{|t=T} dx \le \int_{B_0} \left(\|\nabla_x u\|^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2 \right)_{|t=0} dx \tag{3.5}$$

unde cu B_τ *am notat bila închisă* $\overline{B}(x^0, t^0 - \tau)$ (*vezi* (3.4)) *cu centrul în* x^0 *şi de rază* $t^0 - \tau$, *în spaţiul* $\mathbb{R}^n$ *la momentul* $t = \tau$.

Demonstraţie. Fie

$$E(t) = \frac{1}{2}\int_{B_t} \|\nabla u(x,t)\|^2 dx = \frac{1}{2}\int_{B_t} \left(\|\nabla_x u\|^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2 \right) dx,\ 0 \le t \le t_0.$$

Această cantitate reprezintă energia undei în domeniul B_t la momentul t. Derivând cantitatea de mai sus şi utilizând teorema lui Gauss–Ostrogradski, obţinem

$$\begin{aligned} E'(t) &= \int_{B_t} \left(\nabla_x u \cdot \nabla_x \left(\frac{\partial u}{\partial t}\right) + \frac{\partial u}{\partial t}\,\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \right) dx - \\ &- \frac{1}{2}\int_{\partial B_t} \|\nabla u(x,t)\|^2 (x,t) d\sigma_x = \\ &= \int_{B_t} \frac{\partial u}{\partial t} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \Delta_x u \right) dx + \int_{\partial B_t} \frac{\partial u}{\partial t}\,\frac{\partial u}{\partial \nu}\, d\sigma_x - \\ &- \frac{1}{2}\int_{\partial B_t} \|\nabla u(x,t)\|^2 d\sigma_x = \int_{\partial B_t} \left(\frac{\partial u}{\partial t}\,\frac{\partial u}{\partial \nu} - \frac{1}{2}\|\nabla u\|^2 \right) d\sigma_x. \end{aligned} \tag{3.6}$$

Dar

$$\left| \frac{\partial u}{\partial t}\,\frac{\partial u}{\partial \nu} \right| \le \left|\frac{\partial u}{\partial t}\right| \left|\frac{\partial u}{\partial \nu}\right| \le \frac{1}{2} \left(\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2 + \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{\partial u}{\partial x_i}\right)^2 \right) = \frac{1}{2}\|\nabla u\|^2. \tag{3.7}$$

Din (3.6) şi (3.7) deducem

$$E'(t) \le 0,\ \forall\, t,\ 0 \le t \le t_0,$$

care implică inegalitatea (3.5). ∎

Teorema 3.2. *Presupunem că avem acelaşi context ca în Teorema* 1 *şi, în plus,* $u(x,0) = \dfrac{\partial u}{\partial t}(x,0) = 0$, *pentru orice* $x \in \overline{B}(x_0, t_0)$. *Atunci* $u(x,t) \equiv 0$ *în* $\overline{D}$.

Demonstraţie. Deoarece $u(x,0)=0$ pentru $x\in\overline{B}(x^0,t^0)$ implică $\nabla_x u(x,0)=0$, pentru $x\in B(x^0,t^0)$, din inegalitatea (3.5) deducem

$$\int_{B_T}\left(\|\nabla_x u\|^2+\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2\right)_{|t=T} dx=0,\ \forall T,\ 0\le T\le t^0.$$

De aici rezultă $\dfrac{\partial u}{\partial t}(x,T)=0$ şi $\nabla_x u(x,T)=0$, $\forall T$, adică u este o funcţie constantă în D. Din continuitatea lui u în $\overline{D}$ şi din faptul că $u=0$ pe B_0, rezultă $u\equiv 0$ în $\overline{D}$. ∎

Corolarul 3.1. *Presupunem că suntem în contextul Teoremei* 3.1. *Atunci există o singură funcţie* $u\in C^2(\overline{D})$ *care verifică ecuaţia undelor în* D *şi satisface condiţii prescrise* $u(x,0)=u_0(x)$, $\dfrac{\partial u}{\partial t}(x,0)=u_1(x)$ *pe* B_0.

Demonstraţie. Presupunând că u_1 şi u_2 sunt două funcţii care satisfac ipotezele din Corolar, funcţia $u:=u_1-u_2$ satisface ipotezele Teoremei 3.2, prin urmare $u_1=u_2$ în $\overline{D}$. ∎

Remarcăm acum că unicitatea soluţiei problemei Cauchy (3.1)-(3.2) este o simplă consecinţă a rezultatelor prezentate anterior. Mai mult, unicitatea rezultă chiar pentru cazul neomogen $\left(\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}-\Delta u=f\right)$ deoarece, operatorul undelor fiind liniar, unicitatea revine tot la cazul omogen. De asemenea, să menţionăm faptul că în Teorema 3.2 s-a pus în evidenţă o dependenţă a soluţiei u a ecuaţiei undei într-un punct (x^0,t^0) şi valorile lui u şi $\dfrac{\partial u}{\partial t}$ într-o mulţime $\overline{B}(x^0,t^0)$.

Din acest motiv $\overline{B}(x^0,t^0)$ se mai numeşte şi *domeniu de dependenţă* al soluţiei în punctul (x^0,t^0).

Soluţia problemei Cauchy pentru ecuaţia undelor omogenă

Vom stabili existenţa soluţiei problemei (3.1)-(3.2) în cazurile $n=1$, $n=2$ şi $n=3$. Pentru cazul $n=1$ vom găsi această soluţie, iar pentru $n=2$ şi $n=3$ vom propune o formulă pentru soluţie şi o vom verifica prin calcul direct. Având în vedere faptul că unicitatea a fost deja demonstrată, această formulă dă soluţia problemei.

Cazul $n = 1$. În acest caz, rezolvarea problemei Cauchy constă în determinarea unei funcţii $u \in C^2(\mathbb{R}^2)$ ce verifică ecuaţia

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 \tag{3.8}$$

şi condiţiile iniţiale

$$u(x,0) = u_0(x), \ \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = u_1(x) \tag{3.9}$$

Presupunem că $u_0 \in C^2(\mathbb{R})$ şi $u_1 \in C^1(\mathbb{R})$. Schimbarea de variabile $\xi = x - t$, $\eta = x + t$ aplicată ecuaţiei (3.8) o transformă în $\widetilde{u}_{\xi\eta} = 0$, cu soluţia generală scrisă în x şi t:

$$u(x,t) = \varphi(x+t) + \psi(x-t)$$

unde φ şi ψ sunt funcţii arbitrare de clasă C^1 pe $\mathbb{R}$. Pentru ca u, astfel găsit, să verifice condiţiile iniţiale (3.9), trebuie ca

$$\varphi(x) + \psi(x) = u_0(x) \ \text{ şi } \ \varphi'(x) - \psi'(x) = u_1(x).$$

Rezolvând acest sistem, obţinem

$$u(x,t) = \frac{1}{2}\left(u_0(x+t) + u_0(x-t)\right) + \frac{1}{2}\int_{x-t}^{x+t} u_1(s)ds, \ t \geq 0. \tag{3.10}$$

Dacă u_0 şi u_1 verifică condiţiile de regularitate impuse, atunci funcţia u dată în (3.10) este de clasă C^2 pe $\mathbb{R}$ şi satisface (3.8)-(3.9).

Cazul $n = 3$. Considerăm problema Cauchy pentru ecuaţia undei tri–dimensională

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \Delta u = 0, \qquad x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3, \ t > 0 \tag{3.11}$$

$$u(x,0) = u_0(x), \qquad x \in \mathbb{R}^3, \tag{3.12}$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = u_1(x), \quad x \in \mathbb{R}^3. \tag{3.13}$$

în ipoteza $u_0 \in C^3(\mathbb{R}^3)$ şi $u_1 \in C^2(\mathbb{R}^3)$. Pentru început demonstrăm un rezultat care reduce problema determinării soluţiei (3.11)-(3.13) la cea a soluţiei ecuaţiei (3.1) satisfăcând condiţiile speciale,

$$(3.14) \qquad u(x,0) = 0, \qquad x \in \mathbb{R}^3,$$

$$(3.15) \qquad \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = \varphi(x), \quad x \in \mathbb{R}^3.$$

Lema 3.1. *Fie u_φ soluţia problemei* (3.11), (3.14), (3.15) *despre care presupunem că $u_\varphi \in C^3(\mathbb{R}^3 \times [0,\infty))$. Atunci $v = \dfrac{\partial u_\varphi}{\partial t}$ satisface ecuaţia* (3.11) *şi condiţiile iniţiale*

$$(3.16) \qquad u(x,0) = \varphi(x), \quad x \in \mathbb{R}^3,$$

$$(3.17) \qquad \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = 0, \quad x \in \mathbb{R}^3.$$

şi $v \in C^2(\mathbb{R}^3 \times [0,\infty))$.

Demonstraţie. Faptul că v satisface (3.11) este evident. Apoi $v(x,0) = \dfrac{\partial u_\varphi}{\partial t}(x,0) = \varphi(x)$, deoarece u_φ satisface relaţia (3.15). Deoarece u_φ satisface (3.11) şi $u_\varphi(x,0) = 0$, rezultă

$$\frac{\partial v}{\partial t}(x,0) = \frac{\partial^2 u_\varphi}{\partial t^2}(x,0) = \left(\frac{\partial^2 u_\varphi}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u_\varphi}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 u_\varphi}{\partial x_3^2}\right)_{|t=0} = 0.$$

∎

Din Lema 3.1 şi principiul superpoziţiei rezultă că dacă $u \in C^2(\mathbb{R}^3 \times [0,\infty))$ este soluţie a problemei (3.11)-(3.13) atunci (după notaţiile din Lema 3.1) u este dat de

$$(3.18) \qquad u = \frac{\partial u_{u_0}}{\partial t} + u_{u_1}$$

presupunând că $u_{u_0} \in C^3(\mathbb{R}^3 \times [0,\infty))$ şi $u_{u_1} \in C^2(\mathbb{R}^3 \times [0,\infty))$. Prin urmare, pentru a rezolva problema (3.11)-(3.13) este suficient să aflăm soluţia problemei (3.11), (3.14), (3.15).

Lema care urmează face acest lucru.

Lema 3.2. *Presupunem $\varphi \in C^k(\mathbb{R}^3)$, $k \geq 2$. Atunci soluţia problemei Cauchy* (3.11), (3.14), (3.15) *este dată de formula*

$$(3.19) \qquad u_\varphi(x,t) = \frac{1}{4\pi t} \int_{\partial B(x,t)} \varphi(x') d\sigma_t$$

şi $u_\varphi \in C^k(\mathbb{R}^3 \times [0,\infty))$.

Formula (3.19) se numeşte *formula lui Kirchhoff*. Am notat cu $\partial B(x,t)$ suprafaţa laterală a bilei din$\mathbb{R}^3$, de centru x şi rază t, iar cu $d\sigma_t$ elementul de suprafaţă pe $\partial B(x,t)$. Uneori este necesară schimbarea variabilei de integrare în (3.19). Astfel, putem lua

$$x' = x + t\alpha$$

sau, echivalent,

$$x_1' x_1 + t\alpha_1,\ x_2' = x_2 + t\alpha_2,\ x_3' = x_3 + t\alpha_3$$

unde $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ este un vector unitar care are aceeaşi direcţie cu $x' - x$. Dacă x' variază pe sfera $\partial B(x,t)$, α se va mişca pe sfera unitate $\partial B(0,1)$ şi, deoarece $d\sigma_t = t^2 d\sigma_1$, formula (3.19) capătă forma

$$u_\varphi(x,t) = \frac{t}{4\pi}\int_{\partial B(0,1)} \varphi(x + t\alpha)d\sigma_1, \tag{3.20}$$

unde variabila de integrare este α.

Un alt mod de scriere a formulei lui Kirchhoff este cu ajutorul formulei de medie. Astfel, valoarea medie a funcţiei φ pe sfera $\partial B(x,t)$ este dată de

$$M[\varphi, \partial B(x,t)] = \frac{1}{4\pi t^2}\int_{\partial B(x,t)} \varphi(x')d\sigma_t = \frac{1}{4\pi}\int_{\partial B(0,1)} \varphi(x + t\alpha)d\sigma_1. \tag{3.21}$$

Astfel, formula lui Kirchhoff (3.19) devine

$$u_\varphi(x,t) = tM[\varphi, \partial B(x,t)]. \tag{3.22}$$

Demonstraţia Lemei 3.2. Pentru început, arătăm că u_φ dat de (3.19) verifică condiţiile iniţiale (3.14) şi (3.15). Continuitatea funcţiei φ implică, în mod elementar,

$$\lim_{t\to 0^+} M[\varphi, \partial B(x,t)] = \varphi(x) \tag{3.23}$$

deci, având în vedere (3.22), obţinem că $u_\varphi(x,t) \to 0$ pentru $t \to 0^+$, adică (3.14). Diferenţiind apoi relaţia (3.20) în raport cu t obţinem

$$\frac{\partial u_\varphi}{\partial t}(x,t) = \frac{1}{4\pi}\int_{\partial B(0,1)} \varphi(x + t\alpha)d\sigma_1 + \frac{t}{4\pi}\int_{\partial B(0,1)} \nabla\varphi(x + t\alpha)\alpha\, d\sigma_1. \tag{3.24}$$

Am folosit aici regula de derivare a funcţiilor compuse

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t}\,\varphi(x+t\alpha) &= \frac{\partial}{\partial t}\,\varphi(x_1+t\alpha_1, x_2+t\alpha_2, x_3+t\alpha_3) = \\ &= \sum_{k=1}^{3} D_k\varphi(x+t\alpha)\alpha_k = \nabla\varphi(x+t\alpha)\alpha,\end{aligned}$$

unde $D_k\varphi$ înseamnă derivata parţială a lui φ în raport cu variabila de pe locul k.

Din (3.23) rezultă că primul termen din (3.24) tinde la $\varphi(x)$ pentru $t \to 0^+$.

Apoi, deoarece derivatele lui φ sunt continue, integrala $\int_{\partial B(0,1)} \nabla\varphi(x + t\alpha)\alpha\, d\sigma_1$ este mărginită şi din (3.24) obţinem

$$\frac{\partial u_\varphi}{\partial t}\,(x,t) \to \varphi(x) \quad \text{pentru } t \to 0^+$$

ceea ce arată că u_φ satisface condiţia (3.15).

Pentru a arăta că u_φ satisface ecuaţia (3.11), rescriem relaţia (3.24) astfel,

$$\frac{\partial u_\varphi}{\partial t}\,(x,t) = \frac{1}{t}\,u_\varphi(x,t) + \frac{1}{4\pi t}\int_{\partial B(x,t)} \nabla\varphi(x')\alpha\, d\sigma_t.$$

Acum, deoarece α este versorul normalei exterioare la $\partial B(x,t)$ aplicând teorema lui Gauss–Ostrogradski, obţinem

$$\frac{\partial u_\varphi}{\partial t}\,(x,t) = \frac{1}{t}\,u_\varphi(x,t) + \frac{1}{4\pi t}\int_{B(x,t)} \Delta\varphi(x')dx'. \tag{3.25}$$

Diferenţiind relaţia (3.25) în raport cu t, obţinem

$$\begin{aligned}\frac{\partial u^2 u_\varphi}{\partial t^2}\,(x,t) &= -\frac{1}{t^2}\,u_\varphi(x,t) + \frac{1}{t}\,\frac{\partial u_\varphi}{\partial t}\,(x,t) - \\ &-\frac{1}{4\pi t^2}\int_{B(x,t)} \Delta\varphi(x')dx' + \frac{1}{4\pi t}\,\frac{\partial}{\partial t}\int_{B(x,t)} \Delta\varphi(x')dx'.\end{aligned}$$

Substituind în această egalitate pe $\dfrac{\partial u_\varphi}{\partial t}$ din relaţia (3.25), obţinem

$$\frac{\partial^2 u_\varphi}{\partial t^2}\,(x,t) = \frac{1}{4\pi t}\,\frac{\partial}{\partial t}\int_{B(x,t)} \Delta\varphi(x')dx'.$$

Dar (trecând eventual la coordonate sferice) se poate arăta că are loc egalitatea

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_{B(x,t)} \Delta\varphi(x')dx' = \int_{\partial B(x,t)} \Delta\varphi(x')d\sigma_t,$$

care, împreună cu relaţia anterioară, conduce la

$$\frac{\partial^2 u_\varphi}{\partial t^2}(x,t) = \frac{t}{4\pi}\int_{\partial B(0,1)} \Delta\varphi(x+t\alpha)d\sigma_1. \tag{3.26}$$

Dar, aplicând laplaceanul în raport cu x egalităţii (3.20), obţinem

$$\Delta u_\varphi(x,t) = \frac{t}{4\pi}\int_{S(0,1)} \Delta\varphi(x+t\alpha)d\sigma_1. \tag{3.27}$$

Relaţiile (3.26) şi (3.27) arată că u_φ satisface ecuaţia (3.11). Afirmaţiile privind regularitatea funcţiei u_φ rezultă din formula (3.20). Cu aceasta, Lema 3.2 este demonstrată. ∎

Cumulând rezultatele demonstrate în cele două leme, putem formula

Teorema 3.3. *Presupunem că* $u_0 \in C^3(\mathbb{R}^3)$ *şi* $u_1 \in C^2(\mathbb{R}^3)$. *Atunci soluţia problemei* (3.11)-(3.13) *în spaţiul tri–dimensional este dată de*

$$u(x,t) = \frac{1}{4\pi t}\int_{\partial B(x,t)} u_1(x')d\sigma_t + \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{4\pi t}\int_{\partial B(x,t)} u_0(x')d\sigma_t\right) \tag{3.28}$$

şi $u \in C^2(\mathbb{R}^3\times[0,\infty))$.

Cazul $n = 2$. În acest caz, problema Cauchy devine

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} = 0, \quad x=(x_1,x_2)\in\mathbb{R}^2,\ t>0, \tag{3.29}$$

$$u(x,0) = u_0(x), \qquad x\in\mathbb{R}^2, \tag{3.30}$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = u_1(x), \qquad x\in\mathbb{R}^2. \tag{3.31}$$

Soluţia acestei probleme va fi obţinută din soluţia problemei tridimensionale folosind *metoda coborârii.* Metoda constă în considerarea datelor iniţiale $u_0(x) = u_0(x_1,x_2)$ şi $u_1(x) = u_1(x_1,x_2)$ ca funcţii definite pe $\mathbb{R}^3$, dar care nu depind de variabile x_3. Substituind aceste funcţii în formula lui Kirchhoff, obţinem soluţia ecuaţiei undelor tridimensională care nu depinde de variabila x_3, prin urmare este soluţie a ecuaţiei undei bi–dimensionale (3.29). Dacă, în formula (3.19) a lui Kirchhoff proiectăm elementul de suprafaţă $d\sigma_t$ pe planul (x_1', x_2'), obţinem

$$d\sigma_1 = \frac{t}{\sqrt{t^2 - (x_1' - x_1)^2 - (x_2' - x_2)^2}}\, dx_1'\, dx_2'$$

şi, presupunând că $\varphi(x) = \varphi(x_1, x_2)$, formula devine

$$\begin{aligned} u_\varphi(x,t) &= \frac{1}{4\pi t}\int_{\partial B(x_1,x_2,x_3;t)} \varphi(x_1',x_2') d\sigma_t = \\ &= \frac{1}{4\pi t}\int_{\partial B(x_1,x_2,0;t)} \varphi(x_1',x_2') d\sigma_t = \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{B(x_1,x_2;t)} \frac{\varphi(x_1',x_2')}{\sqrt{t^2 - (x_1' - x_1)^2 - (x_2' - x_2)^2}} dx_1'\, dx_2' \end{aligned} \tag{3.32}$$

şi $u_\varphi(x,t) = u_\varphi(x_1, x_2; t)$. Am obţinut astfel

Teorema 3.4. *Dacă* $u_0 \in C^3(\mathbb{R}^2)$ *şi* $u_1 \in C^2(\mathbb{R}^2)$, *atunci soluţia problemei Cauchy pentru ecuaţia undelor bi–dimensionale* (3.29)-(3.31) *este dată de*

$$\begin{aligned} u(x_1,x_2;t) &= \frac{1}{2\pi}\int_{B(x_1,x_2;t)} \frac{u_1(x_1',x_2')}{\sqrt{t^2-(x_1'-x_1)^2-(x_2'-x_2)^2}}\, dx_1'\, dx_2' + \\ &+ \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{2\pi}\int_{B(x_1,x_2;t)} \frac{u_0(x_1',x_2')}{\sqrt{t^2 - (x_1' - x_1)^2 - (x_2' - x_2)^2}}\, dx_1'\, dx_2' \right) \end{aligned} \tag{3.33}$$

şi $u \in C^2(\mathbb{R}^2 \times [0,\infty))$. ∎

Menţionăm că metoda coborârii funcţionează şi mai departe pentru obţinerea soluţiei problemei Cauchy asociată ecuaţiei undelor în cazul $n = 1$. Deoarece noi am obţinut această soluţie pe o cale directă, lăsăm cititorului ca exerciţiu, verificarea celor menţionate anterior.

Ecuaţia neomogenă a undelor. Principiul lui Duhamel

Metoda lui Duhamel ne permite găsirea soluţiei unei probleme Cauchy pentru o ecuaţie neomogenă prin reducerea ei la o ecuaţie omogenă cu condiţii iniţiale de un anumit tip.

Să considerăm ecuaţia neomogenă a undelor cu condiţii iniţiale omogene

$$\text{(3.34)} \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \Delta u = f, & \text{în } \mathbb{R}^n \times (0,\infty), \\ u(x,0) = \dfrac{\partial u}{\partial t}(x,0) = 0, & \text{în } \mathbb{R}^n, \end{cases}$$

iar pentru $\forall\, s \geq 0$, fie $(x,t) \to v(x,t;s)$ soluţia problemei omogene

$$\text{(3.35)} \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial^2 v}{\partial t^2}(x,t;s) - \Delta_x v(x,t;s) = 0, & \text{în } \mathbb{R}^n \times (0,\infty), \\ v(x,0;s) = 0,\ \dfrac{\partial v}{\partial t}(x,0;s) = f(x,s), & \forall\, x \in \mathbb{R}^n. \end{cases}$$

Principiul lui Duhamel afirmă că funcţia u definită prin

$$\text{(3.36)} \qquad u(x,t) = \int_0^t v(x,t-s;s)ds$$

este soluţie a problemei (3.34). Mai exact, are loc

Teorema 3.5. *Dacă $f \in C(\mathbb{R}^n \times [0,\infty))$, atunci funcţia u definită în* (3.36) *este soluţie a problemei neomogene* (3.34).

Demonstraţie. Este clar că $u(x,0) = 0$. Apoi, $\dfrac{\partial u}{\partial t}(x,t) = v(x,0;t) + \displaystyle\int_0^t \dfrac{\partial v}{\partial t}(x,t-s;s)ds = \int_0^t \dfrac{\partial v}{\partial t}(x,t-s;s)ds$, de unde $\dfrac{\partial u}{\partial t}(x,0) = 0$. Derivând din nou în raport cu t, obţinem

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x,t) &= \frac{\partial v}{\partial t}(x,0;t) + \int_0^t \frac{\partial^2 v}{\partial t^2}(x,t-s;s)ds = \\ &= f(x,t) + \int_0^t \frac{\partial^2 v}{\partial t^2}(x,t-s;s)ds, \end{aligned}$$

deci

$$\begin{gathered} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x,t) - \Delta u(x,t) = \frac{\partial v}{\partial t}(x,0;t) + \\ + \int_0^t \left(\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} - \Delta v \right)(x,t-s;s)ds = f(x,t), \end{gathered}$$

ceea ce încheie demonstraţia. ∎

Acum putem explicita formulele care dau soluţia problemei (3.1′)-(3.2) pentru $n = 1, 2, 3$.

a) $n = 1$. În acest caz, soluţia problemei Cauchy (3.1′)-(3.2) este dată de *formula lui D'Alembert*

$$u(x,t) = \frac{1}{2}\int_0^t \left(\int_{x-t+s}^{x+t-s} f(\xi,s)d\xi\right) ds +$$
$$+\frac{1}{2}\int_{x-t}^{x+t} u_1(\xi)d\xi + \frac{1}{2}(u_0(x+t) + u_0(x-t)),\ \forall\, x \in \mathbb{R},\ t \geq 0.$$

b) $n = 2$. *Formula lui Poisson*

$$\begin{aligned} u(x,t) \ &= \frac{1}{2\pi}\int_0^t \left(\int_{B(x,t-s)} \frac{f(\xi,s)d\xi}{\sqrt{(t-s)^2 - \|x-\xi\|^2}}\right) ds + \\ &+\frac{1}{2\pi}\int_{B(x,t)} \frac{u_1(\xi)d\xi}{\sqrt{t^2 - \|x-\xi\|^2}} + \\ &+\frac{1}{2\pi}\ \frac{\partial}{\partial t}\int \frac{u_0(\xi)d\xi}{\sqrt{t^2 - \|x-\xi\|^2}},\ \forall\, x \in \mathbb{R}^2,\ t \geq 0. \end{aligned}$$

c) $n = 3$. *Formula lui Kirchhoff*

$$\begin{aligned} u(x,t) \ &= \frac{1}{4\pi}\int_{B(x,t)} \frac{f(\xi, t - \|x-\xi\|)}{\|x-\xi\|} d\xi + \frac{1}{4\pi t}\int_{\partial B(x,t)} u_1(\xi)d\sigma_t + \\ &+\frac{1}{4\pi}\ \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{t}\int_{\partial B(x,t)} u_0(\xi)d\sigma_t\right),\ \forall\, x \in \mathbb{R}^2,\ t \geq 0. \end{aligned}$$

■