ELEMENTE DE CALCUL DIFERENŢIAL PE DREAPTA REALĂ

Paul GEORGESCU

March 5, 2011

Cuprins

Capitolul 1

NOŢIUNI GENERALE

1.1 Teoria mulţimilor

Dacă A este o mulţime, vom nota prin $x \in A$ faptul ca x este un element al mulţimii A (sau x *aparţine* lui A), respectiv prin $x \notin A$ faptul că x nu este un element al mulţimii A (sau x *nu aparţine* lui A). Mulţimea care nu conţine niciun element se va numi mulţimea vidă şi se va nota $\emptyset$.

Submulţimi

Fiind date două mulţimi A şi B, vom spune că A este o *submulţime* a lui B (şi vom nota $A \subseteq B$), sau B este o *supramulţime* a lui A (şi vom nota $B \supseteq A$) dacă orice element al lui A este şi un element al lui B. Desigur, $\emptyset \subseteq A$ pentru orice mulţime A. Daca A este o submulţime a lui B, dar $A \neq B$, atunci A se numeşte *submulţime proprie* a lui B, ceea ce se notează $A \subsetneq B$. Dată o mulţime A, se va nota cu $\mathcal{P}(A)$ *mulţimea submulţimilor* (*părţilor*) sale. Se observă că $\emptyset, A \in \mathcal{P}(A)$.

Egalitatea a două mulţimi

Două mulţimi A, B vor fi numite *egale* dacă au aceleaşi elemente, acest lucru fiind notat $A = B$. Se observă că $A = B$ dacă şi numai dacă $A \subseteq B$ şi $B \subseteq A$, această caracterizare fiind utilă pentru demonstrarea practică a multor egalităţi de mulţimi. Dacă A şi B nu sunt egale, acest lucru se notează $A \neq B$, ceea ce revine, conform observaţiei anterioare, fie la $A \nsubseteq B$, fie la $B \nsubseteq A$.

Operaţii cu mulţimi

Fie X o mulţime şi $A, B \in \mathcal{P}(X)$. Definim mulţimile

$$A \cup B = \{x \in X; x \in A \vee x \in B\},$$
$$A \cap B = \{x \in X; x \in A \wedge x \in B\},$$

numite *reuniunea*, respectiv *intersecţia* lui A şi B. Dacă $A \cap B = \emptyset$, A şi B se numesc *disjuncte*.

Aceste operaţii cu mulţimi au următoarele proprietăţi

$$A \cup B = B \cup A, \quad A \cap B = B \cap A$$
$$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C), \quad (A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$$
$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C), \quad A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$$

(*comutativitate*, *asociativitate*, respectiv *distributivitate*). Proprietăţile de asociativitate asigură faptul ca scrierile $A \cup B \cup C$ şi $A \cap B \cap C$ nu sunt ambigue.

Operaţiile de reuniune şi intersecţie se pot extinde la familii nu neapărat finite de mulţimi. În acest sens, dată o familie $(A_i)_{i \in I}$, unde I este o mulţime oarecare de indici, finită sau nu, vom defini

$$\bigcup_{i \in I} A_i = \{x \in X; \text{ există } i \in I \text{ astfel ca } x \in A_i\},$$
$$\bigcap_{i \in I} A_i = \{x \in X; x \in A_i \text{ pentru orice } i \in I\}.$$

Mulţimile

$$A \backslash B = \{x \in X; x \in A \wedge x \notin B\},$$
$$A \Delta B = (A \backslash B) \cup (B \backslash A)$$

se numesc *diferenţa*, respectiv *diferenţa simetrică* a mulţimilor A şi B. Mulţimea

$$c_X A = \{x \in X; x \notin A\}$$

se numeşte *complementara* lui A faţă de X; dacă nu există pericol de confuzie, $c_X A$ se notează cA. Se observă atunci că

$$A \backslash B = A \cap cB$$

şi au loc următoarele proprietăţi, numite *formulele lui de Morgan*

$$c\left(\bigcup_{i\in I} A_i\right) = \bigcap_{i\in I} cA_i$$
$$c\left(\bigcap_{i\in I} A_i\right) = \bigcup_{i\in I} cA_i.$$

Vom numi *produs cartezian* al mulţimilor A şi B (în această ordine) mulţimea tuturor perechilor ordonate (x, y), cu $x \in A$, iar $y \in B$, adică

$$A \times B = \{(x, y); x \in A \wedge y \in B\}.$$

În general, $A \times B \neq B \times A$. Două elemente (x_1, y_1) şi (x_2, y_2) ale produsului cartezian $A \times B$ sunt egale dacă şi numai dacă $x_1 = x_2$ şi $y_1 = y_2$.

Date mulţimile A_1, $A_2, \ldots, A_n$, numim *produs cartezian* al acestora mulţimea tuturor perechilor ordonate cu n elemente (denumite şi *n-uple*) $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$, cu $a_i \in A_i$ pentru orice $1 \leq i \leq n$, adică

$$A_1 \times A_2 \ldots \times A_n = \{(a_1, a_2, \ldots, a_n), a_i \in A_i \text{ pentru orice } 1 \leq i \leq n\}.$$

Dacă $A_i = A$ pentru $1 \leq i \leq n$, se utilizează notaţia prescurtată

$$A \times A \times \ldots \times A = A^n.$$

Mulţimi de numere

În cele ce urmează, vom presupune cunoscute proprietăţile următoarelor mulţimi de numere:

$\mathbb{N}$ $=\{0, 1, 2, \ldots\}$ - mulţimea numerelor naturale;

$\mathbb{Z}$ $=\{0, 1, -1, 2, -2, \ldots\}$ - mulţimea numerelor întregi;

$\mathbb{Q}$ $=\left\{\frac{p}{q}; p, q \in \mathbb{Z}, q \neq 0\right\}$ - mulţimea numerelor raţionale.

Între acestea au loc următoarele relaţii de incluziune

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}.$$

Pentru $A \in \{\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}\}$, se notează cu $A^* = A \setminus \{0\}$ mulţimea numerelor nenule din A.

1.2 Construcţia axiomatică a mulţimii numerelor reale

Intuitiv, mulţimea numerelor reale poate fi înţeleasă ca mulţimea tuturor fracţiilor zecimale infinite, sub forma

$$\begin{aligned}\mathbb{R} &= \{\overline{r, r_1 r_2 \dots r_n \dots}; r \in \mathbb{Z}, r_1, r_2, \dots, r_n, \dots \in \{0, 1, \dots, 9\}\} \\ &= \left\{ r + \frac{r_1}{10} + \frac{r_2}{10^2} + \dots + \frac{r_n}{10^n} + \dots \right\}.\end{aligned}$$

Definiţia de mai sus (îndeajuns de explicită, dar totuşi pur algebrică) este însă greu de folosit în analiza matematică, necesitând unele completări. Din punctul de vedere al analizei matematice, mulţimea numerelor reale, notată $\mathbb{R}$, va fi un corp comutativ total ordonat, a cărui relaţie de ordine este compatibilă cu operaţiile de adunare şi înmulţire şi care în plus satisface o anumită axiomă de completitudine. Aceste proprietăţi, ce vor fi clarificate în cele de mai jos, sunt motivate de necesitatea de a efectua operaţiile elementare cu numere (structura de corp), necesitatea de a putea compara numere şi de a putea lucra convenabil cu inegalităţile rezultate (structura de ordine, împreună cu relaţiile de compatibilitate cu operaţiile), precum şi de a diferenţia mulţimea numerelor reale de mulţimea numerelor raţionale (axioma de completitudine).

Vom numi mulţimea numerelor reale o mulţime $\mathbb{R}$ înzestrată cu două operaţii algebrice „$+$" (adunarea) şi „$\cdot$" (înmulţirea) precum şi cu o relaţie de ordine „$\leq$" care satisfac grupurile de axiome (I), (II) şi (III) de mai jos.

Axiomele structurii algebrice

(I) $\mathbb{R}$ este un corp comutativ, adică

- **(I.1)** $x + (y + z) = (x + y) + z$ pentru orice $x, y, z \in \mathbb{R}$.
  (asociativitatea adunării)
- **(I.2)** $x + y = y + x$ pentru orice $x, y \in \mathbb{R}$.
  (comutativitatea adunării)
- **(I.3)** Există $0 \in \mathbb{R}$ astfel ca $0 + x = x + 0 = x$ pentru orice $x \in \mathbb{R}$.
  (existenţa elementului neutru la adunare)
- **(I.4)** Pentru orice $x \in \mathbb{R}$ există $-x \in \mathbb{R}$ astfel ca $x + (-x) = (-x) + x = 0$.
  (existenţa simetricului oricărui element în raport cu adunarea)

(I.5) $x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z$ pentru orice $x, y, z \in \mathbb{R}$.
(asociativitatea înmulţirii)

(I.6) $x + y = y + x$ pentru orice $x, y \in \mathbb{R}$.
(comutativitatea înmulţirii)

(I.7) Există $1 \in \mathbb{R}$ astfel ca $1 \cdot x = x \cdot 1 = x$ pentru orice $x \in \mathbb{R}$.
(existenţa elementului neutru la înmulţire)

(I.8) Pentru orice $x \in \mathbb{R}$, $x \neq 0$ există $\frac{1}{x} \in \mathbb{R}$ astfel ca $x \cdot \frac{1}{x} = \frac{1}{x} \cdot x = 1$.
(existenţa simetricului (inversului) oricărui element nenul în raport cu înmulţirea)

(I.9) $x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z$ pentru orice $x, y, z \in \mathbb{R}$.
(distributivitatea înmulţirii faţă de adunare)

(II) $\mathbb{R}$ este total ordonat, adică

(II.1) $x \leq x$ pentru orice $x \in \mathbb{R}$.

(II.2) $x \leq y$ şi $y \leq x \implies x = y$.

(II.3) $x \leq y$ şi $y \leq z \implies x \leq z$
(„$\leq$" este o relaţie de ordine pe $\mathbb{R}$)

(II.4) Pentru orice $x, y \in \mathbb{R}$, are loc fie $x \leq y$, fie $y \leq x$.
(relaţia de ordine este totală, adică oricare două elemente x, y se pot compara)

(II.5) Dacă $x \leq y$, atunci $x + z \leq y + z$ pentru orice $z \in \mathbb{R}$.
(relaţia de ordine este compatibilă cu operaţia de adunare)

(II.6) Dacă $x \leq y$ iar $0 \leq z$, atunci $x \cdot z \leq y \cdot z$.
(relaţia de ordine este compatibilă cu operaţia de înmulţire)

Proprietăţile de mai sus definesc structura algebrică a lui $\mathbb{R}$. Pentru a enunţa cea de-a treia axiomă, care face posibilă demonstrarea rezultatelor specifice analizei matematice, vor fi făcute mai întâi câteva preparative suplimentare.

1.2.1 Minoranţi, majoranţi

Fie $A \subset \mathbb{R}$, $A \neq \emptyset$. Spunem că A este *minorată* dacă există $m \in \mathbb{R}$ astfel că $m \leq x$ pentru orice $x \in A$. Un astfel de element m (care nu este unic determinat) se va numi *minorant* al mulţimii A. Similar, spunem că A este *majorată* dacă există $M \in \mathbb{R}$ astfel ca $x \leq M$ pentru orice $x \in A$, un astfel de element M (care de asemenea nu este unic determinat) numindu-se *majorant* al mulţimii A. Minoranţii şi majoranţii unei mulţimi A nu aparţin neapărat acestei mulţimi.

Exemplu

Fie $A = \left\{x = \frac{n}{n+1}; n \in \mathbb{N}^*\right\}$. Atunci A este majorată, 1 fiind un majorant al lui A, deoarece $x \leq 1$ pentru orice $x \in A$. Se observă că 1 nu este element al mulţimii A, întrucât toate elementele lui A sunt subunitare, iar orice $y \in \mathbb{R}$ pentru care $1 \leq y$ este de asemenea un majorant al mulţimii A. În particular, $2, 3, \ldots$ sunt majoranţi ai mulţimii A.

Similar, A este minorată, 0 fiind un minorant al lui A, deoarece $0 \leq x$ pentru orice $x \in A$. Se observă că 0 nu este element al mulţimii A, deoarece toate elementele lui A sunt strict pozitive, iar orice $y \in \mathbb{R}$ pentru care $y \leq 0$ este de asemenea un minorant al lui A. În particular, $-1, -2, \ldots$ sunt minoranţi ai mulţimii A.

Se observă că dacă o mulţime A este minorată, nu există un cel mai mic minorant al lui A, deoarece se pot preciza minoranţi oricât de mici. Similar, dacă o mulţime A este majorată, nu există un cel mai mare majorant, întrucât se pot preciza majoranţi oricât de mari.

În schimb, dacă A este minorată şi există un cel mai mare minorant al lui A, acesta se va numi *margine inferioară* a lui A, notată $\inf A$, iar dacă A este majorată şi există un cel mai mic majorant al lui A, acesta se va numi *margine superioară* a lui A, notată $\sup A$. Dacă marginea inferioară, respectiv marginea superioară a unei mulţimi A există, atunci acestea sunt unice, unicitatea derivând din caracterul acestora de a fi „cea mai mare", respectiv „cea mai mică".

Axioma de completitudine

În aceste condiţii, se poate enunţa cea de-a treia axiomă, numită *axioma de completitudine*, sau *axioma Cantor-Dedekind*.

(III) Orice submulţime nevidă majorată A a lui $\mathbb{R}$ admite o margine superioară în $\mathbb{R}$.

Se poate demonstra că proprietăţile de mai sus definesc existenţa şi unicitatea (până la un izomorfism de corpuri total ordonate) lui $\mathbb{R}$. Elementele mulţimii

$\mathbb{R}$ astfel definite se numesc *numere reale*. Elementele mulţimii $\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$ se vor numi *numere iraţionale*.

Notaţii

Vom preciza în cele ce urmează câteva notaţii utilizate în calculul cu numere reale. Mai întâi, este utilă introducerea notaţiei „$x < y$" (ordonarea strictă ataşată relaţiei de ordine „$\leq$") dacă x, y satisfac $x \leq y$ şi $x \neq y$. De asemenea, vom scrie relaţia $x \leq y$ şi sub forma $y \geq x$, iar relaţia $x < y$ şi sub forma $y > x$.

Numerele reale a pentru care $a \geq 0$ (respectiv $a \leq 0$) vor fi numite *numere pozitive* (respectiv *numere negative*), iar numerele reale a pentru care $a > 0$ (respectiv $a < 0$) vor fi numite *numere strict pozitive* (respectiv *strict negative*). În cele ce urmează, în loc de $x + (-y)$ vom nota $x - y$, în loc de $x \cdot y$ vom nota xy, iar în loc de $x \cdot \frac{1}{y}$ vom nota $\frac{x}{y}$.

Dreapta reală

Pentru ilustrarea geometrica a unor concepte ale analizei matematice, este util ca numerele reale să poată fi reprezentate pe o dreaptă.

Fie o dreaptă d, un punct $O \in d$ şi un vector director $\vec{u}$ al dreptei d. Perechea $\mathcal{R}$ se numeşte *reper cartezian* al dreptei d. Definim

$$\Phi : \mathbb{R} \to d, \quad \Phi(x) = P, \text{ unde } \overrightarrow{OP} = x\vec{u}$$

(fiecărui $x \in \mathbb{R}$ i se asociază punctul P de pe dreaptă pentru care $\overrightarrow{OP}$ are coordonata x în raport cu reperul $\mathcal{R}$). Se poate demonstra că funcţia Φ este bine definită şi stabileşte o corespondenţă bijectivă între mulţimea $\mathbb{R}$ a numerelor reale şi mulţimea punctelor dreptei d. Datorită acestei corespondenţe (numită şi *bijecţia lui Descartes*), mulţimea $\mathbb{R}$ va putea fi numită şi *dreapta (axa) reală*, iar numerele reale vor fi numite şi *puncte*.

1.2.2 Mulţimi mărginite

În aceste condiţii, o mulţime nevidă A care este majorată se va numi *mărginită superior*, iar o mulţime nevidă A care este minorată se va numi *mărginită inferior*. Dacă A este atât mărginită superior cât şi mărginită inferior, ea se va numi *mărginită*. Conform acestei definiţii, o mulţime A este mărginită dacă există $m, M \in \mathbb{R}$ astfel ca

$$m \leq x \leq M \quad \text{pentru orice } x \in A.$$

Caracterizări analitice pentru marginea superioară şi marginea inferioară a unei mulţimi

Cu notaţiile de mai sus, are loc următoarea teoremă de caracterizare a marginii superioare a unei mulţimi, care descrie caracteristica acesteia de a fi cel mai mic majorant prin intermediul a două inegalităţi, cea dintâi precizând faptul că marginea superioară este majorant, iar cea de-a doua precizând faptul că niciun număr mai mic decât marginea superioară nu este majorant.

Teorema 1.1. *Fie $A \neq \emptyset$. Un număr $\alpha \in \mathbb{R}$ este margine superioară a mulţimii A dacă şi numai dacă*

1. *$x \leq \alpha$ pentru orice $x \in A$.*
2. *Pentru orice $\varepsilon > 0$ există $x_\varepsilon \in A$ astfel ca $x_\varepsilon > \alpha - \varepsilon$.*

Demonstraţie.

„$\Rightarrow$" Dacă $\alpha = \sup M$, atunci α este majorant, deci $x \leq \alpha$ pentru orice $x \in A$. Cum α este cel mai mic majorant, $\alpha - \varepsilon$ nu este majorant, deci există măcar un $x_\varepsilon \in A$ astfel ca $x_\varepsilon > \alpha - \varepsilon$.

„$\Leftarrow$" Conform 1., A este majorată (de α), deci, conform axiomei de completitudine, A admite o margine superioară; fie aceasta M. Deoarece M este cel mai mic majorant, $M \leq \alpha$. Presupunem prin reducere la absurd că $M < \alpha$. Atunci, notând $\varepsilon = \alpha - M$, obţinem că există $x_\varepsilon \in A$ astfel ca $x_\varepsilon > \alpha - (\alpha - M) = M$, deci M nu este majorant, contradicţie. Urmează deci că $M = \alpha$, ceea ce încheie demonstraţia. ■

În mod absolut similar se demonstrează urmatoarea teoremă de caracterizare a marginii inferioare a unei mulţimi.

Teorema 1.2. *Fie $A \neq \emptyset$. Un număr $\beta \in \mathbb{R}$ este margine inferioară a mulţimii A dacă şi numai dacă*

1. *$\beta \leq x$ pentru orice $x \in A$.*
2. *Pentru orice $\varepsilon > 0$ există $x_\varepsilon \in A$ astfel ca $x_\varepsilon < \beta + \varepsilon$.*

Proprietatea lui Arhimede şi consecinţe ale sale

O consecinţă importantă a teoremei de caracterizare a marginii superioare este următorul rezultat, numit *proprietatea lui Arhimede*.

Teorema 1.3. *Fie x, y numere reale fixate, cu $x > 0$. Există atunci $n \in \mathbb{N}$ astfel ca $nx > y$.*

Demonstraţie. Presupunem prin reducere la absurd că nu există un astfel de n. Atunci, notând $A = \{nx; n \in \mathbb{N}\}$, obţinem că A este majorată (de y), deci, conform axiomei de completitudine, admite un cel mai mic majorant M. Din teorema de caracterizare a marginii superioare, aplicată pentru $\varepsilon = x$, obţinem că există $x_\varepsilon \in A$ astfel ca $x_\varepsilon > M - x$. Cum x_ε este un element al lui A, $\exists n \in \mathbb{N}$ astfel ca $x_\varepsilon = nx$, deci $nx > M - x$ şi atunci $(n+1)x > M$, contradicţie. ■

Printre consecinţele proprietăţii lui Arhimede menţionăm urmatoarele rezultate utile.

Corolar 1.3.1. *Pentru orice $x \in \mathbb{R}$ există $n \in \mathbb{Z}$ unic determinat astfel ca $n \leq x < n+1$.*

Pentru $x \in \mathbb{R}$ dat, numărul întreg n definit mai sus se numeşte *partea întreagă* a lui x şi se notează $[x]$. Notând şi $\{x\} = x - [x]$ *partea fracţionară* a lui x, următoarele proprietăţi sunt adevărate pentru orice $x \in \mathbb{R}$

$$[x] \leq x < x+1, \quad [x] + \{x\} = x, \quad 0 \leq \{x\} < 1.$$

Corolar 1.3.2. *Dacă a, b sunt numere reale fixate, $a < b$, există atunci un număr raţional r astfel ca $a < r < b$.*

Demonstraţie. Aplicând proprietatea lui Arhimede pentru $x = 1$ şi $y = \frac{1}{b-a}$, obţinem că există $n \in \mathbb{N}^*$ astfel ca $n > \frac{1}{b-a}$. Atunci $\frac{1}{n} < b - a$. Fie $r = \frac{[na]+1}{n}$. Evident, $r \in \mathbb{Q}$, iar

$$r > \frac{na - 1 + 1}{n} = a.$$

Cum $r \leq \frac{na+1}{n}$, avem că

$$r \leq a + \frac{1}{n} < a + (b-a) = b,$$

deci $a < r < b$. ■

Teorema de mai sus afirmă faptul că mulţimea $\mathbb{Q}$ este *densă* în $\mathbb{R}$, în sensul că între orice două numere reale se află măcar un număr raţional. Folosind noţiuni de aşa-numita *teorie a numerelor cardinale*, se poate demonstra că $\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$ este de asemenea densă în $\mathbb{R}$, adică între orice două numere reale se află şi un număr iraţional.

Maxim, minim, signum

Pentru orice $x, y \in \mathbb{R}$, definim *maximul* elementelor x, y prin

$$\max(x,y) = \begin{cases} x, & \text{dacă } x \geq y \\ y, & \text{dacă } x < y, \end{cases}$$

respectiv *minimul* elementelor x, y prin

$$\min(x,y) = \begin{cases} y, & \text{dacă } x \geq y \\ x, & \text{dacă } x < y. \end{cases}$$

Pentru orice $x \in \mathbb{R}$, definim *semnul* său, notat $\operatorname{sgn} x$ prin

$$\operatorname{sgn} x = \begin{cases} 1, & \text{dacă } x > 0 \\ 0, & \text{dacă } x = 0 \\ -1, & \text{dacă } x < 0 \end{cases}.$$

Modulul unui număr real

Pentru orice $x \in \mathbb{R}$, definim *modulul* sau *valoarea absoluta* a lui x, notat $|x|$ prin

$$|x| = \begin{cases} x, & \text{dacă } x \geq 0 \\ -x, & \text{dacă } x < 0 \end{cases}.$$

Sunt atunci adevărate următoarele proprietăţi de calcul:

M1 $|x| \geq 0$ pentru orice $x \in \mathbb{R}$ şi $x = 0 \Leftrightarrow x = 0$.

M2 $||x|| = |x|$ pentru orice $x \in \mathbb{R}$.

M3 $|xy| = |x||y|$ pentru orice $x, y \in \mathbb{R}$.

M4 $\left|\frac{x}{y}\right| = \frac{|x|}{|y|}$ pentru orice $x, y \in \mathbb{R}$, $y \neq 0$.

M5 $|x+y| \leq |x| + |y|$ pentru orice $x, y \in \mathbb{R}$.

M6 $|x-y| \geq \big||x| - |y|\big|$ pentru orice $x, y \in \mathbb{R}$.

M7 $|x| \leq M \Leftrightarrow -M \leq x \leq M$ pentru orice $x \in \mathbb{R}$.

M7′ $|x| < M \Leftrightarrow -M < x < M$ pentru orice $x \in \mathbb{R}$.

Are loc şi egalitatea

$$|x| = x \operatorname{sgn} x \quad \text{pentru orice } x \in \mathbb{R}.$$

De asemenea,

$$\max(x,y) = \frac{1}{2}\left(x + y + |x-y|\right), \quad \min(x,y) = \frac{1}{2}\left(x + y - |x-y|\right).$$

Funcţia modul astfel definită poate fi folosită pentru a caracteriza mărginirea unei mulţimi.

Teorema 1.4. *Fie $A \subset \mathbb{R}$, $A \neq \emptyset$. Au loc următoarele afirmaţii:*

1. *A este mărginită $\Leftrightarrow \exists M \in \mathbb{R}$ astfel ca $|x| \leq M$ pentru orice $x \in A$.*

2. *A este nemărginită $\Leftrightarrow \forall M \in \mathbb{R}\ \exists x_M \in A$ astfel ca $|x_M| > M$.*

Demonstraţie. 1. „$\Rightarrow$" Dacă A este mărginită, există m, $M \in \mathbb{R}$ astfel ca $m \leq x \leq M$ pentru orice $x \in A$, de unde $|x| \leq \max(|m|, |M|)$.

„$\Leftarrow$" Dacă $\exists M \in \mathbb{R}$ astfel ca $|x| \leq M$ pentru orice $x \in A$, atunci $-M \leq x \leq M$ pentru orice $x \in A$, deci A este mărginită.

2. Rezultă prin aplicarea operatorului de negare logică primei proprietăţi. ∎

1.3 Mulţimea $\overline{\mathbb{R}}$

În analiza matematică, pe lângă numere reale, se utilizează şi două simboluri cu sens aparte, $+\infty$ (plus infinit, notat prescurtat şi ∞) şi $-\infty$ (minus infinit), cu proprietatea că

$$-\infty < x < \infty \text{ pentru orice } x \in \mathbb{R}.$$

Vom nota

$$\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{+\infty\} \cup \{-\infty\}$$

şi vom numi această mulţime *dreapta reală încheiată*, observând că ea este de asemenea total ordonată.

Operaţiile aritmetice se extind (parţial) la $\overline{\mathbb{R}}$ în următorul mod:

$$
\begin{aligned}
x + \infty = x - (-\infty) &= +\infty \quad \forall x \in \mathbb{R};\\
x + (-\infty) = x - \infty &= -\infty \quad \forall x \in \mathbb{R};\\
x \cdot \infty &= \begin{cases} +\infty, & \text{dacă } x > 0 \\ -\infty, & \text{dacă } x < 0 \end{cases};\\
x \cdot (-\infty) &= \begin{cases} -\infty, & \text{dacă } x > 0 \\ +\infty, & \text{dacă } x < 0 \end{cases};\\
\frac{x}{\infty} = \frac{x}{-\infty} &= 0 \quad \forall x \in \mathbb{R};
\end{aligned}
$$

respectiv

$$
\begin{aligned}
\infty + \infty &= \infty;\\
(-\infty) + (-\infty) &= (-\infty);\\
\infty \cdot \infty &= (-\infty) \cdot (-\infty) = +\infty;\\
\infty \cdot (-\infty) &= -\infty.
\end{aligned}
$$

Operaţiilor $0 \cdot (\pm\infty)$, $\infty - \infty$, $-\infty - (-\infty)$, $\frac{\pm\infty}{\pm\infty}$ nu li se atribuie niciun sens.

1.3.1 Intervale în $\mathbb{R}$ şi $\overline{\mathbb{R}}$

Intervale în $\mathbb{R}$

Fie $a, b \in \mathbb{R}$. Numim *intervale* în $\mathbb{R}$ mulţimi de forma

$[a, b] = \{x \in \mathbb{R}; a \leq x \leq b\}$ (interval închis);

$(a, b) = \{x \in \mathbb{R}; a < x < b\}$ (interval deschis);

$[a, b) = \{x \in \mathbb{R}; a \leq x < b\}$; (interval semideschis; interval închis la dreapta şi deschis la stânga)

$(a, b] = \{x \in \mathbb{R}; a < x \leq b\}$ (interval semideschis; interval deschis la dreapta şi închis la stânga);

$(a, +\infty) = \{x \in \mathbb{R}; a < x < \infty\}$ (interval deschis nemărginit la dreapta; semidreaptă deschisă nemărginită la dreapta);

$(-\infty, a) = \{x \in \mathbb{R}; -\infty < x < a\}$ (interval deschis nemărginit la stânga; semidreaptă deschisă nemărginită la stânga);

$[a, +\infty) = \{x \in \mathbb{R}; a \leq x < \infty\}$ (semidreaptă închisă nemărginită la dreapta);

$(-\infty, a] = \{x \in \mathbb{R}; -\infty < x \leq a\}$ (semidreaptă închisă nemărginită la stânga);

$(-\infty, +\infty) = \mathbb{R}$ (axa reală).

Intervale centrate

Numim *intervale centrate* intervalele simetrice faţă de un punct a de pe axa reală, de forma $[a - r, a + r]$ şi $(a - r, a + r)$. Acestea pot fi caracterizate cu ajutorul funcţiei modul sub forma

$$[a - \varepsilon, a + \varepsilon] = \{x \in \mathbb{R}, |x - a| \leq \varepsilon\};$$
$$(a - \varepsilon, a + \varepsilon) = \{x \in \mathbb{R}, |x - a| < \varepsilon\}.$$

Intervale în $\overline{\mathbb{R}}$

Dacă $a, b \in \overline{\mathbb{R}}$, putem extinde notaţiile pentru intervale definite mai sus şi obţine

$$[a, b] = \left\{x \in \overline{\mathbb{R}}; a \leq x \leq b\right\}, (a, b) = \{x \in \mathbb{R}; a < x < b\};$$

$$[a, b) = \{x \in \mathbb{R}; a \leq x < b\}, (a, b] = \{x \in \mathbb{R}; a < x \leq b\},$$

păstrând denumirile de intervale închise, deschise, respectiv semideschise. De asemenea

$$[-\infty, +\infty] = \overline{\mathbb{R}} \text{ (dreapta reală încheiată).}$$

Conform proprietăţilor de densitate ale lui $\mathbb{Q}$ şi $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, se va observa că nici $\mathbb{Q}$ nici $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ nu conţin intervale.

Supremumul şi infimumul unei mulţimi în $\overline{\mathbb{R}}$

Fie $A \neq \emptyset$. Cu aceste notaţii, vom spune că

$$\sup A = +\infty \text{ dacă } A \text{ nu este majorată (este nemărginită superior)}$$

respectiv

$$\inf A = -\infty \text{ dacă } A \text{ nu este minorată (este nemărginită inferior).}$$

şi vom observa că în $\overline{\mathbb{R}}$ orice mulţime nevidă admite un supremum şi un infimum.

Exemple $\sup \mathbb{N} = +\infty$, $\inf \mathbb{Z} = -\infty$, $\sup \mathbb{Z} = +\infty$;

$A = \left\{x; x = n^2 + 1, n \in \mathbb{N}\right\}$ nu este mărginită superior, deci $\sup A = +\infty$.

$A = \{x; x = -n + 2, n \in \mathbb{N}\}$ nu este mărginită inferior, deci $\inf A = -\infty$.

1.3.2 Vecinătăţi în $\overline{\mathbb{R}}$

1. Numim *vecinătate* a unui punct $x \in \mathbb{R}$ orice mulţime $V \subset \overline{\mathbb{R}}$ care conţine un interval deschis incluzându-l pe x, adică pentru care există $a, b \in \mathbb{R}$ astfel ca
$$x \in (a, b) \subset V.$$

2. Numim *vecinătate* a lui $+\infty$ orice mulţime $V \subset \overline{\mathbb{R}}$ care conţine un interval de forma $(a, \infty]$, cu $a \in \mathbb{R}$.

3. Numim *vecinătate* a lui $-\infty$ orice mulţime $V \subset \overline{\mathbb{R}}$ care conţine un interval de forma $[-\infty, a)$, cu $a \in \mathbb{R}$.

Exemple Mulţimile $(-2, 4]$, $(0, 6]$, $(-\infty, 2]$, $(-2, 5] \cup (6, \infty)$ sunt vecinătăţi ale lui $x = 1$ deoarece conţin intervalul deschis $(0, 2)$ care-l include pe 1.

Mulţimea $A = \{-2, -1, 0, 1, 2, 3\}$ nu este vecinătate a lui $x = 1$ deoarece ea nu conţine intervale.

Mulţimea $B = [1, 3]$ nu este vecinătate a lui $x = 1$ deoarece nu există $a, b \in \mathbb{R}$ astfel ca $1 \in (a, b) \subset B$ (ar trebui ca $a < 1$ şi atunci $(a, b) \subsetneq B$).

Teorema 1.5. *Fie $x \in \mathbb{R}$. Atunci $V \subset \mathbb{R}$ este o vecinătate a lui x dacă şi numai dacă ea conţine un interval deschis centrat în x, adică există $\varepsilon > 0$ astfel ca*

$$x \in (x - \varepsilon, x + \varepsilon) \subset V.$$

Demonstraţie. „$\Leftarrow$" Se poate lua $\varepsilon = \min(x - a, b - x)$.
„$\Rightarrow$" Se poate lua $(a, b) = (x - \varepsilon, x + \varepsilon)$. ■

Dacă V este o vecinătate a lui $x \in \overline{\mathbb{R}}$, notăm acest lucru prin $V \in \mathcal{V}(x)$. Mulţimea $\mathcal{V}(x)$ şe numeşte *mulţimea tuturor vecinătăţilor* punctului x. Această mulţime are următoarele proprietăţi:

(V1) Fie $V \in \mathcal{V}(x)$. Atunci $x \in V$.

(V2) Fie $V \in \mathcal{V}(x)$ şi $W \supset V$. Atunci $W \in \mathcal{V}(x)$.

(V3) Fie $V_1, V_2 \in \mathcal{V}(x)$. Atunci $V_1 \cap V_2 \in \mathcal{V}(x)$.

(V4) Fie $V \in \mathcal{V}(x)$. Există atunci $W \in \mathcal{V}(x)$ astfel ca $V \in \mathcal{V}(y)$ pentru orice $y \in W$.

Conform (**V1**), dacă V este vecinătate a lui x, atunci V îl conţine pe x. Datorită (**V2**), orice mulţime care conţine o vecinătate a lui x este de asemenea o vecinătate a lui x. Conform (**V3**), intersecţia a două vecinătăţi ale lui x este de asemenea o vecinătate a lui x, (**V4**) reprezentând faptul că dacă V este o vecinătate a lui x, atunci V este de fapt o vecinătate nu doar pentru x, ci şi pentru toate punctele dintr-o mulţime W, care la rândul ei este o vecinătate a lui x.

Proprietatea de separaţie Hausdorff

Orice două puncte $a, b \in \overline{\mathbb{R}}$ pot fi separate prin vecinătaţi. În acest sens, are loc următoarea proprietate.

Teorema 1.6. *Fie $a, b \in \overline{\mathbb{R}}$. Există atunci $V_a \in \mathcal{V}(a)$ şi $V_b \in \mathcal{V}(b)$ astfel ca $V_a \cap V_b = \emptyset$.*

Demonstraţie. Dacă $a, b \in R$, atunci putem nota $\varepsilon = \frac{b-a}{3}$ şi considera $V_a = (a - \varepsilon, a + \varepsilon)$, respectiv $V_b = (b - \varepsilon, b + \varepsilon)$.

Dacă $a = -\infty$, $b \in \mathbb{R}$, atunci putem considera $V_a = [-\infty, b - 2)$, $V_b = (b - 1, b + 1)$. Dacă $a \in \mathbb{R}$, $b = +\infty$, atunci putem considera $V_a = (a - 1, a + 1)$, $V_b = (a + 2, +\infty]$. Dacă $a = -\infty$, $b = +\infty$, putem considera $V_a = [-\infty, -1)$, $V_b = (1, +\infty]$. ■

A fost menţionat anterior că axioma de completitudine deosebeşte $\mathbb{R}$ de mulţimea $\mathbb{Q}$ a numerelor raţionale. Acest lucru se poate observa din următorul exemplu.

Exemplu
Fie mulţimea $A = \{x \in \mathbb{Q}; x^2 \leq 2\}$. Evident, $A \neq \emptyset$, deoarece $0 \in A$. Ca submulţime a lui $\mathbb{R}$, ea este majorată (de exemplu de 2), având deci, conform axiomei de completitudine, un cel mai mic majorant $\sup A$. În acest sens, se poate arăta că $\sup A = \sqrt{2}$. Ca submulţime a lui $\mathbb{Q}$, A este de asemenea majorată, de exemplu de 2 şi de oricare altă aproximare zecimală prin adaus a lui $\sqrt{2}$: 1.42, 1.415, 1.4143, ş.a.m.d. Totuşi, niciun număr raţional q mai mic decât $\sqrt{3}$ nu poate fi nici măcar majorant datorită definiţiei mulţimii A, care va conţine o aproximare zecimală prin lipsă a lui $\sqrt{2}$ mai bună decât q, iar niciun număr raţional mai mare decât $\sqrt{2}$ nu poate fi cel mai mic majorant, întrucât va exista o aproximare zecimală prin adaus a lui $\sqrt{2}$ mai bună decât q.

1.4 Inegalităţi între numere reale

Inegalitatea mediilor

Fie $n \in \mathbb{N}^*$, $n \geq 2$ şi fie $a_1, a_2, \ldots, a_n$ numere reale strict pozitive. Definim

$$\begin{aligned} A_n &= \frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n}, \\ G_n &= \sqrt[n]{a_1 a_2 \ldots a_n}, \\ H_n &= \frac{n}{\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \ldots + \frac{1}{a_n}}, \end{aligned}$$

A_n, G_n, H_n numindu-se respectiv *media aritmetică*, *media geometrică* şi *media armonică* a numerelor $a_1, a_2, \ldots, a_n$. Are loc atunci inegalitatea

$$A_n \geq G_n \geq H_n,$$

numită *inegalitatea mediilor*, egalităţile atingându-se doar dacă $a_1 = a_2 = \ldots = a_n$.

Inegalitatea Cauchy-Buniakowski-Schwarz

Fie $n \in \mathbb{N}^*$, $n \geq 2$ şi fie $a_1, a_2, \ldots, a_n, b_1, b_2, \ldots, b_n$ numere reale. Atunci

$$(a_1 b_1 + a_2 b_2 + \ldots + a_n b_n)^2 \leq \left(a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2\right)^2 \left(b_1^2 + b_2^2 + \ldots + b_n\right)^2,$$

egalitatea atingându-se doar dacă $a_1, a_2, \ldots, a_n$ şi $b_1, b_2, \ldots, b_n$ sunt proporţionale, adică există $k \in \mathbb{R}$ astfel ca $a_1 = kb_1$, $a_2 = kb_2, \ldots a_n = kb_n$.

Pentru $b_1 = b_2 = \ldots = b_n = 1$, se obţine că

$$(a_1 + a_2 + \ldots + a_n)^2 \leq n \left(a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2\right)^2,$$

egalitatea atingându-se doar dacă $a_1 = a_2 = \ldots = a_n$.

Inegalitatea Bernoulli

Fie $a \in \mathbb{R}$, $a > -1$. Atunci, pentru orice $n \in \mathbb{N}$,

$$(1 + a)^n \geq 1 + na.$$

1.5 Funcţii

Fie $X, Y \neq \emptyset$. Numim *funcţie* definită pe mulţimea X cu valori în mulţimea Y o corespondenţă (notată de exemplu f) prin care oricărui element din mulţimea X i se asociază un singur element din mulţimea Y. În această situaţie, se notează $f : X \to Y$, X numindu-se *domeniul de definiţie* al funcţiei f, iar Y *codomeniul* acesteia. Dacă lui $x \in X$ îi corespunde prin funcţia f elementul $y \in Y$, acest lucru se va nota $y = f(x)$ sau $x \overset{f}{\mapsto} y$. În acest caz, y se numeşte *imaginea* lui x prin funcţia f, sau *valoarea* lui f în x, iar x se numeşte *argumentul* funcţiei. Mulţimea tuturor funcţiilor definite pe X cu valori în Y se va nota $\mathcal{F}(X, Y)$.

Egalitatea a două funcţii

O funcţie f trebuie concepută că un ansamblu format din domeniul de definiţie X, codomeniul Y şi corespondenţa propriu-zisă între argumente şi imagini. În acest sens, două funcţii $f : A \to B$ şi $g : C \to D$ vor fi *egale* dacă $A = C$ şi $B = D$ (domeniile, respectiv codomeniile funcţiilor sunt egale), iar $f(x) = g(x)$ pentru orice $x \in A$, adică oricărui x din domeniul comun de definiţie i se asociază prin f şi g un acelaşi element.

Restricţia şi prelungirea unei funcţii

Dacă $f : X \to Y$ este o funcţie, iar $A \subset X$, numim *restricţia* funcţiei f la mulţimea A funcţia notată $f|_A$ cu domeniul A şi codomeniul Y care păstrează pe A corespondenţa definită de f, adică $f|_A(x) = f(x)\ \forall x \in A$. Dacă $g : A \to Y$ este o funcţie dată, iar $A \subset X$, orice funcţie $f : X \to Y$ pentru care $f|_A = g$ se numeşte *prelungirea* lui A la X.

Exemplu
Fie $f : [0, \infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = x$ şi $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g(x) = |x|$. Atunci g este o prelungire a lui f (respectiv f este o restricţie a lui g), deoarece $[0, \infty) \subset \mathbb{R}$, iar $f(x) = g(x) = x$ pentru orice $x \in [0, \infty)$.

Imagine şi contraimagine

Fie funcţia $f : X \to Y$. Dacă $A \subset X$, notăm

$$f(A) = \{y \in B; \exists x \in A \text{ astfel ca } f(x) = y\}$$

imaginea mulţimii A prin funcţia f. Mulţimea $f(X)$ se va numi *imaginea* funcţiei f şi se va nota $\operatorname{Im} f$.

Dacă $B \subset Y$, notăm

$$f^{-1}(B) = \{x \in A; f(x) \in B\}$$

contraimaginea (*imaginea inversă*, *preimaginea*) mulţimii B prin funcţia f. Dacă $B = \{y\}$, se foloseşte notaţia $f^{-1}(y)$ în loc de $f^{-1}(\{y\})$. Cum mulţimea $f^{-1}(y)$ poate să fie mulţimea vidă sau să conţină mai mult de un element, simbolul f^{-1} nu defineşte în general o funcţie.

Exemplu
Fie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 - 2x + 3$. Vom determina $\operatorname{Im} f$. Fie $y \in \mathbb{R}$ astfel ca $y = f(x)$, cu $x \in \mathbb{R}$, adică $y = x^2 - 2x + 3$. Urmează că $x^2 - 2x + 3 - y = 0$. Conditia de existenţă a lui x este $\Delta = (-2)^2 - 4(3 - y) \geq 0$, de unde $y \geq 2$. Urmează că $\operatorname{Im} f = [2, +\infty)$.

Grafic, funcţie identică

Mulţimea

$$G_f = \{(x, y) \in X \times Y; y = f(x)\}$$

se va numi *graficul* funcţiei f. Fiind dată o mulţime A, funcţia $1_A : A \to A$ definită prin $1_A(x) = x \ \forall x \in A$ se va numi *funcţia identică* a mulţimii A.

Funcţii injective, funcţii surjective, funcţii bijective

O funcţie $f : X \to Y$ se numeşte *injectivă* dacă

$$\forall x, y \in X, x \neq y \implies f(x) \neq f(y)$$

(la argumente diferite x, y corespund prin f imagini diferite), ceea ce este echivalent cu

$$\forall x, y \in X, f(x) = f(y) \implies x = y$$

(dacă imaginile $f(x)$ şi $f(y)$ sunt egale, atunci sunt egale şi argumentele corespunzătoare x şi y). Aceasta conduce la faptul că f este injectivă dacă şi numai dacă $f^{-1}(y)$ conţine cel mult un element pentru orice $y \in B$.

O funcţie $f : X \to Y$ se numeşte *surjectivă* dacă $f(X) = Y$, adică orice element y din codomeniul Y al funcţiei este imaginea cel puţin a unui argument x. Aceasta conduce la faptul că f este surjectivă dacă şi numai dacă $f^{-1}(y)$ conţine cel puţin un element pentru orice $y \in B$.

O funcţie $f : X \to Y$ se numeşte *bijectivă* dacă ea este atât injectivă cât şi surjectivă. Din cele de mai sus, se observă că f este bijectivă dacă şi numai dacă $f^{-1}(y)$ conţine exact un element pentru orice $y \in B$. În aceste condiţii, simbolul f^{-1} defineşte o funcţie $f^{-1} : Y \to X$ prin $f^{-1}(y) = x$, unde x, y sunt în aşa fel încât $y = f(x)$. Funcţia f^{-1} astfel definită se numeşte funcţia *inversă* a funcţiei f, iar f se numeşte *inversabilă*.

Compunerea a două funcţii

Fie funcţiile $f : X \to Y$, $g : Y \to Z$. Funcţia $g \circ f : X \to Z$ definită prin $g \circ f(x) = g(f(x))\ \forall x \in X$ se numeşte *compunerea* (în această ordine) funcţiilor g şi f. Se poate observa că operaţia de compunere a funcţiilor nu este comutativă, dar este asociativă, în sensul că dacă $f : X \to Y$, $g : Y \to Z$, $h : Z \to M$, atunci $(h \circ g) \circ f = h \circ (g \circ f)$.

Funcţii numerice

O funcţie $f : E \to F$ se va numi *funcţie numerică* (*funcţie reală de variabilă reală*) dacă $E, F \subset \mathbb{R}$.

Funcţii pare, funcţii impare

Fie $D \subseteq \mathbb{R}$ o *mulţime simetrică*, adică o mulţime pentru care $x \in D \Leftrightarrow -x \in D$.

O funcţie $f : D \to \mathbb{R}$ se numeşte *pară* dacă $f(-x) = f(x)$ pentru orice $x \in D$. Deoarece

$$(a, b) \in G_f \Leftrightarrow b = f(a) \Leftrightarrow b = f(-a) \Leftrightarrow (-a, b) \in G_f,$$

urmează că G_f este simetric faţă de Oy.

O funcţie $f : D \to \mathbb{R}$ se numeşte *impară* dacă $f(-x) = -f(x)$ pentru orice $x \in D$. Deoarece

$$(a,b) \in G_f \Leftrightarrow b = f(a) \Leftrightarrow -b = f(-a) \Leftrightarrow (-a,-b) \in G_f,$$

urmează că G_f este simetric faţă de O.

Funcţii periodice

Fie $D \subseteq \mathbb{R}$. O funcţie $f : D \to \mathbb{R}$ se numeşte *periodică* dacă există $T \in \mathbb{R}^*$ astfel ca $f(x+T) = f(x)$ pentru orice $x \in \mathbb{R}$. Orice astfel de T se numeşte *perioadă* a funcţiei f. Se observă că dacă T este o perioadă a funcţiei f, atunci şi nT, $n \in \mathbb{Z}^*$ este de asemenea o perioadă a funcţiei f. Dacă există o cea mai mică perioadă pozitivă T_0 a funcţiei f, atunci aceasta se numeşte *perioadă principală* a funcţiei f. Pentru a studia comportarea unei funcţii periodice de perioadă T, este suficient să se analizeze comportarea acestei funcţii pe intervalul $[0, T]$.

Funcţii mărginite

Fie $D \subseteq \mathbb{R}$ şi $f : D \to \mathbb{R}$. Atunci

f se numeşte *mărginită superior* dacă $f(D)$ este majorată, adică există $M \in \mathbb{R}$ astfel ca $f(x) \leq M$ pentru orice $x \in D$.

f se numeşte *mărginită inferior* dacă $f(D)$ este minorată, adică există $m \in \mathbb{R}$ astfel ca $m \leq f(x)$ pentru orice $x \in D$.

Dacă f este atât mărginită inferior cât şi mărginită superior, adică există $m, M \in \mathbb{R}$ astfel ca $m \leq f(x) \leq M$ pentru orice $x \in D$, atunci f se numeşte *mărginită*.

Conform caracterizării mulţimilor mărginite cu ajutorul funcţiei modul (Teorema 1.4), f este mărginită dacă şi numai dacă există $M \in \mathbb{R}$ astfel ca $|f(x)| \leq M$ pentru orice $x \in D$.

Exemple $f : [1,2] \to \mathbb{R}$, $f(x) = 2x + 1$ este mărginită, deoarece $3 \leq f(x) \leq 5$ pentru orice $x \in [1,2]$.

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 2 + 3\sin x$ este mărginită, deoarece $|f(x)| \leq 2 + 3|\sin x| \leq 5$ pentru orice $x \in \mathbb{R}$.

Funcţii monotone

Fie $D \subseteq \mathbb{R}$ şi $f : D \to \mathbb{R}$. Atunci

f se numeşte *crescătoare* dacă

$$x, y \in D, x \leq y \implies f(x) \leq f(y).$$

f se numeşte *strict crescătoare* dacă

$$x, y \in D, x < y \implies f(x) < f(y).$$

f se numeşte *descrescătoare* dacă

$$x, y \in D, x \leq y \implies f(x) \geq f(y).$$

f se numeşte *strict descrescătoare* dacă

$$x, y \in D, x < y \implies f(x) > f(y).$$

Se obervă că f este crescătoare dacă şi numai dacă

$$(f(x) - f(y))(x - y) \geq 0 \text{ pentru orice } x, y \in D,$$

respectiv strict crescătoare dacă şi numai dacă

$$(f(x) - f(y))(x - y) > 0 \text{ pentru orice } x, y \in D, x \neq y,$$

proprietăţi analoage având loc şi pentru funcţii descrescătoare, respectiv strict descrescătoare. De asemenea, se poate observa că dacă f este strict monotonă, atnci f este injectivă.

Aplicatii

1.1. *Fie $a \in \mathbb{R}$. Arătaţi că* $\max(a, -a) = |a|$.

1.2. *Dacă $x, y \in \mathbb{R}$, $|x| < 1$, $|y| < 1$, arătaţi că* $\left|\frac{x+y}{1+xy}\right| < 1$.

1.3. *Demonstraţi că $\sqrt{2} + \sqrt{3}$ este număr iraţional.*

1.4. *Dacă* $a, b \in Q$, *iar* $a + b\sqrt{2} = 0$, *atunci* $a = b = 0$.

1.5. *Dacă* $a_1, a_2, b_1, b_2 \in Q$, *iar* $a_1 + b_1\sqrt{2} = a_2 + b_2\sqrt{2}$, *atunci* $a_1 = a_2$, $b_1 = b_2$.

1.6. *Rezolvaţi ecuaţia* $x^2 - 5|x| + 6 = 0$.

1.7. *Rezolvaţi sistemul*

$$\begin{cases} |x-1| + |y+2| = 6 \\ x = 1 + |y+2| \end{cases}.$$

1.8. *Determinaţi* $a \in \mathbb{R}$ *astfel ca sistemul* $\begin{cases} |x| + |y| = 2 \\ x^2 + y^2 = a \end{cases}$ *să aibă exact patru soluţii.*

1.9. *Dacă* $x, y \in \mathbb{R}$, $x \leq y + \varepsilon$ *pentru orice* $\varepsilon > 0$, *atunci* $x \leq y$.

1.10. *Dacă* $a, b, c, d \in (0, \infty)$, *atunci* $\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{d} + \frac{d}{a} \geq 4$.

1.11. *Dacă* $a_1, a_2, \ldots, a_n, b_1, b_2, \ldots, b_n \in (0, \infty)$, *atunci*

$$\frac{a_1^2}{b_1} + \frac{a_2^2}{b_2} + \ldots + \frac{a_n^2}{b_n} \geq \frac{(a_1 + a_2 + \ldots + a_n)^2}{b_1 + b_2 + \ldots + b_n}.$$

1.12. *Dacă* $a_1, a_2, \ldots, a_n, b_1, b_2, \ldots, b_n \in (0, \infty)$, *atunci*

$$\sqrt[n]{(a_1 + b_1)(a_2 + b_2)\ldots(a_n + b_n)} \geq \sqrt[n]{a_1 a_2 \ldots a_n} + \sqrt[n]{b_1 b_2 \ldots b_n}.$$

1.13. *Fie* $a, b \in (0, 1)$. *Demonstraţi că*

$$\log_a \frac{2ab}{a+b} + \log_b \frac{2ab}{a+b} \geq 2.$$

1.14. *Determinaţi* $m \in \mathbb{R}$ *astfel ca*

$$x^2 + y^2 + 4x - 2y + m \geq 0 \text{ pentru orice } x, y \in \mathbb{R}.$$

1.15. *Dacă* $A \subseteq \mathbb{R}$ *este mărginită, arătaţi că orice submulţime a lui* A *este mărginită.*

1.16. *Dacă* $A, B \subseteq \mathbb{R}$ *sunt mărginite, arătaţi că* $A \cap B$, $A \cup B$, $A \backslash B$, $B \backslash A$ *sunt mărginite.*

1.17. *Arătaţi că* A *este mărginită, unde*

1. $A = [0, 1) \cup (2, 5]$;

2. $A = \{x; x = 2 + u^2, u \in [-1, 3]\}$;
3. $A = \left\{x; x = 2 + \frac{(-1)^n}{n+1}, n \in \mathbb{N}\right\}$;
4. $A = \left\{x; x = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \ldots + \frac{1}{n+n}, n \in \mathbb{N}\right\}$;
5. $A = \{x; x = \sin u + \cos(2u), u \in \mathbb{R}\}$.

1.18. *Fie* $A = \{\operatorname{tg} 1, \operatorname{tg} 2, \operatorname{tg} 3, \operatorname{tg} 4\}$. *Precizaţi* $\min A$, $\max A$.

1.19. *Fie* $A = \left\{\sin \frac{n\pi}{4}; n \in \mathbb{N}\right\}$. *Precizaţi* $\min A$, $\max A$.

1.20. *Fie* $A = \left\{\frac{6+x^2}{6-x^2}; x \in [-2, 1]\right\}$. *Determinaţi* $\inf A$, $\sup A$.

1.21. *Fie* $d : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $d(x, y) = |x - y|$. *Arătaţi că d are următoarele proprietăţi*

1. $d(x, y) \geq 0$; $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$.
2. $d(x, y) = d(y, x)$.
3. $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$.

1.22. *Fie* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{x^2-1}{x^2+1}$. *Determinaţi* $f(2x)$, $2f(x)$, $f(x^2)$, $f(x)^2$.

1.23. *Determinaţi valorile minime ale următoarelor funcţii:*

1. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 3^{x^2+2x+3}$;
2. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^{-x^2+4x-3}$;
3. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt{3} \sin x + \cos x$.

1.24. *Fie* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *o funcţie oarecare.*

1. *Dacă f este simultan monoton crescătoare şi monoton descrescătoare, atunci ea este constantă.*
2. *Dacă f este simultan pară şi impară, atunci ea este funcţia nulă.*

1.25. *Fie* $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

1. *Dacă* f, g *sunt (strict) crescătoare, atunci* $f + g$, $f \circ g$ *sunt (strict) crescătoare.*

2. *Dacă f, g sunt (strict) descrescătoare, atunci $f + g$ este (strict) descrescătoare, iar $f \circ g$ este (strict) crescătoare.*

1.26. *Fie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{x^2+2}{x^2+1}$.*

1. *Demonstraţi că f este strict crescătoare pe $(-\infty, 0]$ şi strict descrescătoare pe $[0, \infty)$.*
2. *Determinaţi $f([-2, -1])$, $f([3, 4])$, $f([-1, 1])$.*

1.27. *Determinaţi care dintre următoarele funcţii sunt pare sau impare:*

1. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^5 + x^3$;
2. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^5 + \cos x$;
3. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^4 + |x| - \sqrt{x^2 + 1}$;
4. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x \sin^2 x$;
5. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sin^2 2x + \cos x$.
6. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \ln\left(\frac{1-x}{1+x}\right)$.

1.28. *Determinaţi $f \circ g$ şi $g \circ f$ pentru $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ date prin:*

1. $f(x) = x^2$, $g(x) = x + 2$;
2. $f(x) = \sin x$, $g(x) = x^2 + 1$.

1.29. *Determinaţi două funcţii $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ astfel ca $h = f \circ g$, dacă*

1. $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $h(x) = \sin(x^2 + 1)$;
2. $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $h(x) = \sqrt{x^4 + x^2 + 1}^3$.

1.30. *Fie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} 1, & x \in \mathbb{Q} \\ 0 & x \in \mathbb{R} \backslash \mathbb{Q} \end{cases}$. Arătaţi că orice număr raţional este perioadă a lui f, dar niciun număr iraţional nu este perioadă a lui f. Are f perioadă principală?*

1.31. *Fie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \cos x^2$. Demonstraţi că f nu este periodică.*

1.32. *Fie $f : \mathbb{Q} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 3x^2 + 2ax + 1$. Demonstraţi că*

1. *f nu este injectivă pentru nicio valoare a lui $a \in \mathbb{Q}$.*

2. *f este injectivă pentru orice $a \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.*

1.33. *Demonstraţi că următoarele funcţii sunt bijective şi precizaţi inversele acestora*

1. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt[5]{x^3 + 1}$;

2. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \ln\left(x + \sqrt{x^2 + 1}\right)$.

1.34. *Determinaţi $a \in \mathbb{R}$ astfel ca funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} ax + 1, & x \leq 2 \\ x + a, & x < 2 \end{cases}$ să fie*

1) injectivă; 2) surjectivă; 3) bijectivă.

1.35. *Demonstraţi că graficele funcţiilor $f_a : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f_a(x) = ax^2 + x + 2 - 4a$, $a \in \mathbb{R}$, trec printr-un punct care nu depinde de a.*

1.36. *Demonstraţi că următoarele funcţii sunt mărginite*

1. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{x}{1+|x|}$;

2. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{2x}{1+x^2}$.

1.37. *Fie $f : \mathbb{R} \to (-1, 1)$, $f(x) = \frac{x}{1+|x|}$. Demonstraţi că f este strict crescătoare şi surjectivă, iar inversa sa este $f^{-1} : (-1, 1) \to \mathbb{R}$, $f^{-1}(y) = \frac{y}{1-|y|}$.*

Capitolul 2

ŞIRURI DE NUMERE REALE

2.1 Proprietăţi generale

Fie $A \neq \emptyset$ o mulţime dată. Se numeşte *şir de elemente din* A o funcţie $f : \mathbb{N} \to A$. Dacă $A = \mathbb{R}$, şirul respectiv se va numi *şir de numere reale*, *şir numeric* sau, mai simplu, *şir*. Fiind dat un şir $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$, se vor numi *termeni ai şirului* numerele $f(0)$, $f(1)$, $f(2), \ldots$, notate de obicei cu ajutorul unui indice sub forma

$$f(0) = x_0, f(1) = x_1, f(2) = x_2, \ldots, f(n) = x_n, \ldots,$$

x_n numindu-se *termenul general al şirului*, sau *termenul de rang n*. Un şir cu termenul general x_n se va nota şi $(x_n)_{n\geq 0}$. Dacă primii k termeni $x_0, x_1, \ldots, x_{k-1}$ nu sunt definiţi (ceea ce corespunde unei funcţii $f : \{k, k+1, \ldots\} \to \mathbb{R}$), vom nota şirul sub forma $(x_n)_{n\geq k}$.

2.1.1 Moduri de definire a unui şir

Un şir poate fi definit precizând formula termenului general, prin intermediul unei recurenţe sau în mod descriptiv.

Exemple

Şiruri definite prin formula termenului general:

$(x_n)_{n\geq 0} : x_n = 3n + 1; \qquad x_0 = 1, x_1 = 4, x_2 = 7, \ldots$

$(x_n)_{n\geq 0} : x_n = \begin{cases} 1, & \text{dacă } n \text{ par} \\ 0, & \text{dacă } n \text{ impar} \end{cases}; \qquad x_0 = 1, x_1 = 0, x_2 = 1, \ldots.$

Şiruri definite prin intermediul unei recurenţe

Dacă pentru un şir $(x_n)_{n\geq 0}$ se cunosc primii k termeni $x_0, x_1, \ldots, x_{k-1}$, fiind dată de asemenea o relaţie prin care termenul general x_n se exprimă în funcţie de $x_{n-1}, x_{n-2}, \ldots, x_{n-k}$ pentru orice $n \geq k$, se spune că $(x_n)_{n\geq 0}$ este definit printr-o *recurenţă de ordinul k.*

Şiruri definite în mod descriptiv.

Şirul $(x_n)_{n\geq 1}$, x_n=*aproximarea prin lipsa cu n zecimale exacte a lui* $\sqrt{2}$ este definit în mod descriptiv. Se obţine că $x_1 = 1.4$, $x_2 = 1.41$, $x_3 = 1.414$, ş.a.m.d.

Progresii aritmetice, progresii geometrice

Şirul $(x_n)_{n\geq 0}$ definit prin recurenţa de ordinul întâi dată de

$$x_0 = a \text{ şi } x_{n+1} = x_n + r,\ n \geq 0,$$

a şi $r \in \mathbb{R}$ fiind date, se numeşte *progresie aritmetică*, r numindu-se *raţia progresiei* (din orice termen al şirului se obţine termenul care-l succede prin adăugirea raţiei). Se obţine că formula termenului general este $x_n = a + nr$, $n \geq 0$. De asemenea, suma primilor $n+1$ termeni este

$$\begin{aligned} S_n &= x_0 + x_1 + \ldots + x_n \\ &= a + (a+r) + \ldots + (a+nr) \\ &= (n+1)a + (r + 2r + \ldots + nr) \\ &= (n+1)a + \frac{n(n+1)}{2}r. \end{aligned}$$

Şirul $(x_n)_{n\geq 0}$ definit prin definit prin recurenţa de ordinul întâi dată de

$$x_0 = b \text{ şi } x_{n+1} = x_n q,\ n \geq 0,$$

b şi $q \in \mathbb{R}$ fiind date, se numeşte *progresie geometrică*, q numindu-se *raţia progresiei* (din orice termen al şirului se obţine termenul care-l succede prin înmulţirea cu raţia). Se obţine că formula termenului general este $x_n = bq^n$, $n \geq 0$. De asemenea, suma primilor $n+1$ termeni este

$$\begin{aligned} S_n &= x_0 + x_1 + \ldots + x_n \\ &= b + bq + \ldots bq^n \\ &= b(1 + q + \ldots + q^n) \\ &= b\frac{q^{n+1}-1}{q-1}, \text{ dacă } q \neq 1, \end{aligned}$$

în vreme ce dacă $q = 1$, atunci $S_n = (n+1)b$.

Exerciţiu

Determinaţi termenul general al şirului $(x_n)_{n\geq 0}$ dat prin

$$1)\ x_{n+1} = 2x_n - 1, n \geq 0,\ x_0 = 2; \quad 2)\ x_{n+1} = \sqrt{3x_n}, n \geq 0,\ x_0 = 1.$$

Soluţie

1) Relaţia de recurenţă este asemănătoare celei care defineşte o progresie geometrică, diferenţa fiind dată de prezenţa termenului liber -1. Acest termen liber va fi eliminat prin scăderea a două relaţii de recurenţă scrise pentru indici succesivi.

Punând $n = 0$ în relaţia de recurenţă se obţine că $x_1 = 3$. Scriind relaţia de recurenţă pentru $n = k+1$, respectiv $n = k$, şi scăzând cele două relaţii obţinute se deduce că $x_{k+2} - x_{k+1} = 2(x_{k+1} - x_k)$. Notând $y_n = x_{n+1} - x_n$, observăm că $y_{k+1} = 2y_k$, deci $(y_k)_{k\geq 0}$ este o progresie geometrică cu raţie 2. Deoarece $y_0 = x_1 - x_0 = 1$, se deduce că $y_n = y_0 2^n = 2^n$.

Cum $y_k = x_{k+1} - x_k$, urmează că $x_{k+1} - x_k = 2^k$. Punând succesiv $k = 0, k = 1, \ldots, k = n-1$ şi sumând relaţiile obţinute deducem că

$$x_n - x_0 = 1 + 2 + \ldots + 2^n = \frac{2^n - 1}{2 - 1} = 2^n - 1,$$

deci $x_n = x_0 + 2^n - 1 = 2^n + 1$.

Similar, putem determina $c \in \mathbb{R}$ astfel ca $(x_n + c)_{n\geq 0}$ să fie progresie geometrică. În acest scop, adunăm mai întâi c în ambii membri ai relaţiei de recurenţă. Obţinem că

$$x_{n+1} + c = 2x_n - 1 + c = 2(x_n + \frac{c-1}{2}).$$

În concluzie, pentru $c = \frac{c-1}{2}$, adică pentru $c = -1$, urmează că $(x_n + c)_{n\geq 0}$ este progresie geometrică de raţie 2. De aici,

$$x_n - 1 = 2^n(x_0 - 1) = 2^n,$$

de unde $x_n = 2^n + 1$.

2) Punând $n = 0$ în relaţia de recurenţă se obţine că $x_1 = \sqrt{3}$. Prin logaritmarea relaţiei de recurenţă se obţine că

$$\ln x_{n+1} = \frac{1}{2}\ln 3 + \frac{1}{2}\ln x_{n+1}.$$

Cu notaţia $z_n = \ln x_n$, se obţine că $z_{n+1} = \frac{1}{2}z_n + \frac{1}{2}\ln 3$, $z_1 = \ln x_1 = \frac{1}{2}\ln 3$, $z_0 = \ln x_0 = 0$.

Scriind relaţia de recurenţă pentru $n = k+1$, respectiv $n = k$, şi scăzând cele două relaţii obţinute se deduce că $z_{k+2} - z_{k+1} = \frac{1}{2}(z_{k+1} - z_k)$. Notând $y_n = z_{n+1} - z_n$, observăm că $y_{k+1} = \frac{1}{2}y_k$, deci $(y_k)_{k\geq 0}$ este o progresie geometrică cu raţie $\frac{1}{2}$. Deoarece $y_0 = z_1 - z_0 = \frac{1}{2}\ln 3$, se deduce că $y_n = y_0 2^n = \frac{1}{2^{n+1}}\ln 3$.

Cum $y_k = z_{k+1} - z_k$, urmează că $z_{k+1} - z_k = \frac{1}{2^{k+1}}\ln 3$. Punând succesiv $k = 0, k = 1, \ldots, k = n-1$ şi sumând relaţiile obţinute deducem că

$$\begin{aligned} z_n - z_0 &= \frac{1}{2}\ln 3 + \frac{1}{2^2}\ln 3 + \ldots + \frac{1}{2^n}\ln 3 = \frac{1}{2}\ln 3\left(1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{2^{n-1}}\right) \\ &= \frac{1}{2}\ln 3 \frac{1 - \frac{1}{2^n}}{1 - \frac{1}{2}} = \left(1 - \frac{1}{2^n}\right)\ln 3. \end{aligned}$$

deci $z_n = z_0 + \left(1 - \frac{1}{2^n}\right)\ln 3 = \left(1 - \frac{1}{2^n}\right)\ln 3$. Cum $z_n = \ln x_n$, urmează că

$$x_n = e^{z_n} = e^{\left(1-\frac{1}{2^n}\right)\ln 3} = e^{\ln 3^{\left(1-\frac{1}{2^n}\right)}} = 3^{1-\frac{1}{2^n}}.$$

■

2.1.2 Subşiruri ale unui şir dat

Numim *subşir* al şirului $(x_n)_{n\geq 0}$ un şir $(x_{k_n})_{n\geq 0}$ ai cărui termeni sunt elemente ale mulţimii termenilor şirului $(x_n)_{n\geq 0}$, $A = \{x_0, x_1, \ldots, x_n, \ldots\}$, cu $k_0 < k_1 < k_2 < \ldots < k_n \ldots$.

Cum un subşir $(x_{k_n})_{n\geq 0}$ nu conţine neapărat toţi termenii şirului iniţial $(x_n)_{n\geq 0}$, urmează că $k_n \geq n$ pentru orice $n \in \mathbb{N}$.

Exemple

Fie şirul $(x_n)_{n\geq 0}$. Atunci subşirul $(x_{2n})_{n\geq 0}$: $x_0, x_2, x_4, \ldots, x_{2n}, \ldots$ se numeşte *subşirul termenilor de rang par ai şirului*. Subşirul $(x_{2n+1})_{n\geq 0}$: $x_1, x_3, x_5, \ldots, x_{2n+1}, \ldots$ se numeşte *subşirul termenilor de rang impar ai şirului*. Un alt subşir este $(x_{n+3})_{n\geq 0}$: $x_3, x_4, x_5, \ldots$, obţinut prin eliminarea primilor trei termeni ai şirului.

Cum pentru orice $k \in \mathbb{N}^*$ putem construi şirul $(x_{kn})_{n\geq 0}$: $x_0, x_k, x_{2k}, \ldots, x_{kn}, \ldots$ al termenilor de rang divizibil cu k, urmează că orice şir are o infinitate de subşiruri.

2.1.3 Şiruri mărginite

Fie un şir $(x_n)_{n\geq 0}$ de numere reale şi $A = \{x_0, x_1, \ldots, x_n, \ldots\}$ mulţimea termenilor săi. Vom spune că $(x_n)_{n\geq 0}$ se numeşte *mărginit* dacă A este mărginită, respectiv că $(x_n)_{n\geq 0}$ este *mărginit superior* (respectiv *mărginit inferior*) dacă A este majorată (respectiv minorată). Un şir care nu este mărginit (respectiv nu este mărginit superior sau nu este mărginit inferior) se numeşte *nemărginit* (respectiv *nemărginit superior* sau *nemărginit inferior*).

Conform caracterizării mulţimilor mărginite, aplicată mulţimii A a termenilor şirului, se obţin următoarele proprietăţi.

Teorema 2.1. *Fie şirul de numere reale $(x_n)_{n\geq 0}$.*

1. *$(x_n)_{n\geq 0}$ este mărginit superior dacă şi numai dacă există $b \in \mathbb{R}$ astfel ca $x_n \leq b$ pentru orice $n \in \mathbb{N}$.*

2. *$(x_n)_{n\geq 0}$ este mărginit inferior dacă şi numai dacă există $a \in \mathbb{R}$ astfel ca $a \leq x_n$ pentru orice $n \in \mathbb{N}$.*

3. *$(x_n)_{n\geq 0}$ este mărginit dacă şi numai dacă există $a, b \in \mathbb{R}$ astfel ca $a \leq x_n \leq b$ pentru orice $n \geq 0$ dacă şi numai dacă există $M > 0$ astfel ca $|x_n| \leq M$ pentru orice $n \in \mathbb{N}$.*

Exemple

1. $(x_n)_{n\geq 0}$, $x_n = \sin \frac{n\pi}{3}$ este mărginit, deoarece $-1 \leq x_n \leq 1$ pentru orice $n \in \mathbb{N}$.

2. $(x_n)_{n\geq 0}$, $x_n = 2 + \frac{(-1)^n}{n+1}$ este mărginit, deoarece $|x_n| \leq 3$ pentru orice $n \in \mathbb{N}$.

3. $(x_n)_{n\geq 0}$, $x_n = \frac{n}{3^n}$ este mărginit, deoarece conform inegalităţii lui Bernoulli, $3^n = (1+2)^n \geq 1 + 2n$, deci $\frac{n}{3^n} < \frac{1}{2}$. Se obţine că $0 \leq x_n \leq \frac{1}{2}$ pentru orice $n \in \mathbb{N}$.

4. $(x_n)_{n\geq 0}$, $x_n = (-1)^n n$ nu este mărginit, nefiind nici mărginit inferior, nici mărginit superior.

Aplicând operatorul de negaţie logică afirmaţiilor din teorema de mai sus obţinem următoarea teoremă de caracterizare a şirurilor nemărginite.

Teorema 2.2. *Fie şirul de numere reale $(x_n)_{n\geq 0}$.*

1. *$(x_n)_{n\geq 0}$ este nemărginit superior dacă şi numai dacă pentru orice $b \in \mathbb{R}$ există un rang $n_b \in \mathbb{N}$ astfel ca $x_n > b$.*

2. *$(x_n)_{n\geq 0}$ este nemărginit inferior dacă şi numai dacă pentru orice $a \in \mathbb{R}$ există un rang $n_a \in \mathbb{N}$ astfel ca $x_n < a$.*

2.1.4 Şiruri monotone

Fie un şir de numere reale $(x_n)_{n\geq 0}$. Spunem că $(x_n)_{n\geq 0}$ este *crescător* (respectiv *strict crescător*) dacă $x_n \leq x_{n+1}$ pentru orice $n \geq 0$ (respectiv $x_n < x_{n+1}$ pentru orice $n \geq 0$), adică orice termen al şirului este mai mic (respectiv strict mai mic) decât termenul care-l succede.

De asemenea, spunem că $(x_n)_{n\geq 0}$ este *descrescător* (respectiv *strict descrescător*) dacă $x_n \geq x_{n+1}$ pentru orice $n \geq 0$ (respectiv $x_n > x_{n+1}$ pentru orice $n \geq 0$), adică orice termen al şirului este mai mare (respectiv strict mai mare) decât termenul care-l succede.

Un şir $(x_n)_{n\geq 0}$ crescător sau descrescător se va numi şir *monoton*, iar un şir $(x_n)_{n\geq 0}$ strict crescător sau strict descrescător se va numi şir *strict monoton*. Desigur, orice şir strict monoton este şi monoton; nu şi reciproc.

Pentru a preciza monotonia unui şir $(x_n)_{n\geq 0}$ se pot folosi următoarele metode.

Studierea semnului diferenţei $x_{n+1} - x_n$.

- Dacă $x_{n+1} - x_n \geq 0$ pentru orice $n \geq 0$, atunci $(x_n)_{n\geq 0}$ este crescător.
- Dacă $x_{n+1} - x_n \leq 0$ pentru orice $n \geq 0$, atunci $(x_n)_{n\geq 0}$ este descrescător.

Compararea raportului $\frac{x_{n+1}}{x_n}$ cu 1, dacă $(x_n)_{n\geq 0}$ este un şir cu termeni strict pozitivi.

- Dacă $\frac{x_{n+1}}{x_n} \geq 1$ pentru orice $n \geq 0$, atunci $(x_n)_{n\geq 0}$ este crescător.
- Dacă $\frac{x_{n+1}}{x_n} \leq 1$ pentru orice $n \geq 0$, atunci $(x_n)_{n\geq 0}$ este descrescător.

Folosind inegalităţi stricte în locul inegalităţilor nestricte se obţin criteriile corespunzătoare de monotonie strictă.

Legătura între monotonia şi mărginirea unui şir

Dacă $(x_n)_{n\geq 0}$ este un şir crescător, atunci

$$x_0 \leq x_1 \leq x_2 \leq \ldots \leq x_n \leq \ldots,$$

deci $x_0 \leq x_n$ pentru orice $n \in \mathbb{N}$, iar $(x_n)_{n\geq 0}$ este mărginit inferior de primul termen x_0.

Similar, dacă $(x_n)_{n\geq 0}$ este un şir descrescător, atunci

$$x_0 \geq x_1 \geq x_2 \geq \ldots \geq x_n \geq \ldots,$$

deci $x_0 \geq x_n$ pentru orice $n \in \mathbb{N}$, iar $(x_n)_{n\geq 0}$ este mărginit superior de primul termen x_0. Au loc atunci următoarele proprietăţi.

Teorema 2.3. *Fie $(x_n)_{n\geq 0}$ un şir.*

1. *Dacă $(x_n)_{n\geq 0}$ este crescător, atunci el este mărginit inferior.*

2. *Dacă $(x_n)_{n\geq 0}$ este descrescător, atunci el este mărginit superior.*

2.2 Şiruri cu limită

Noţiunea de limită este unul dintre cele mai importante concepte ale analizei matematice, precizând tendinţa termenilor unui şir de a se apropia de un anumit număr (cazul şirurilor cu limită finită), sau de a deveni oricât de mari, respectiv oricât de mici (cazul şirurilor cu limită infinită).

Fie $(x_n)_{n\geq 0}$ un şir de numere reale. Spunem că $(x_n)_{n\geq 0}$ *are limita* $l \in \overline{\mathbb{R}}$ dacă orice vecinătate $V \in \mathcal{V}(l)$ lasă în afara ei cel mult un număr finit de termeni ai şirului, adică există un rang $n_V \in \mathbb{N}$ astfel ca $x_n \in V$ pentru orice $n \geq n_V$ (altfel spus, vecinătatea V conţine toţi termenii şirului de la rangul n_V încolo). În acest caz, vom nota $x_n \to l$ *pentru* $n \to \infty$ sau $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = l$, spunându-se şi că şirul $(x_n)_{n\geq 0}$ (sau termenul său general x_n) *tinde* la l.

Se poate observa că adăugarea sau eliminarea unui număr finit de termeni ai şirului nu-i schimbă acestuia natura de a avea sau nu limită şi nici limita, dacă aceasta există, putându-se modifica doar rangul începând cu care termenii şirului aparţin unei vecinătăţi date.

Exemple

1. Un şir constant $(x_n)_{n\geq 0}$: $x_n = c$, $c \in \mathbb{R}$, este convergent la c, întrucât orice vecinătate $V \in \mathcal{V}(c)$ conţine toţi termenii şirului.

2. Şirul $(x_n)_{n\geq 0}$: $x_n = n$ are limita $+\infty$. Pentru a demonstra acest lucru, observăm că orice vecinătate $V \in \mathcal{V}(+\infty)$ conţine un interval de forma

$(M_V, +\infty]$. Fie $n_V = [M_V] + 1$. Atunci $n_V > M$, deci $x_{n_V} \in (M, +\infty] \subset V$. Analog, $x_n \in V$ pentru orice $n > n_V$, deci $(x_n)_{n\geq 0}$ are limita $+\infty$.

3. În mod asemănător se poate demonstra că şirul $(x_n)_{n\geq 0}$: $x_n = -n$ are limita $-\infty$.

Unicitatea limitei unui şir

În cele ce urmează, se va observa mai întâi că limita unui şir, dacă există, este unică.

Teorema 2.4. *Fie $(x_n)_{n\geq 0}$ un şir. Dacă $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = l_1 \in \overline{\mathbb{R}}$ şi $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = l_2 \in \overline{\mathbb{R}}$, atunci $l_1 = l_2$.*

Demonstraţie. Presupunem prin reducere la absurd că $l_1 \neq l_2$. Conform proprietăţii de separaţie Hausdorff, l_1 şi l_2 pot fi separate prin vecinătăţi, adică există $V_1 \in \mathcal{V}(l_1)$ şi $V_2 \in \mathcal{V}(l_2)$ astfel ca $V_1 \cap V_2 = \emptyset$. Cum atât l_1 cât şi l_2 sunt limite ale şirului $(x_n)_{n\geq 0}$, urmează că există două ranguri n_{V_1} şi $n_{V_2} \in \mathbb{N}$ astfel ca $x_n \in V_1$ pentru orice $n \geq n_{V_1}$, respectiv $x_n \in V_2$ pentru orice $n \geq n_{V_2}$. Urmează că $x_n \in V_1 \cap V_2$ pentru orice $n \geq \max(n_{V_1}, n_{V_2})$, ceea ce contrazice faptul că $V_1 \cap V_2 = \emptyset$. ■

Este uşor de observat că proprietăţile de monotonie şi mărginire se transmit de la un şir către subşirurile sale. Astfel, dacă un şir este monoton, orice subşir al său este de asemenea monoton, cu acelaşi sens de monotonie, iar dacă un şir este mărginit, orice subşir al său este de asemenea mărginit, mulţimea termenilor subşirului fiind inclusă în mulţimea (mărginită) a termenilor şirului. Pe aceeaşi linie de gândire, proprietatea unui şir de a avea limită se transmite de asemenea către subşirurile sale.

Teorema 2.5. *Fie $(x_n)_{n\geq 0}$ un şir de numere reale. Dacă $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = l \in \overline{\mathbb{R}}$, atunci orice subşir $(x_{k_n})_{n\geq 0}$ al său are aceeaşi limită.*

Demonstraţie. Fie $(x_{k_n})_{n\geq 0}$ un subşir al lui $(x_n)_{n\geq 0}$ şi fie $V \in \mathcal{V}(l)$ o vecinătate arbitrară a lui l. Deoarece $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = l$, V conţine toţi termenii şirului $(x_n)_{n\geq 0}$ de la un rang încolo, adică există $n_V \in \mathbb{N}$ astfel ca $x_n \in V$ pentru orice $n \geq n_V$. Deoarece $k_n \geq n$ pentru orice $n \in \mathbb{N}$, urmează că $k_{n_V} \geq n_V$ şi deci $x_{k_n} \in \mathcal{V}$ pentru $k_n \geq k_{n_V}$, de unde V conţine toţi termenii subşirului $(x_{k_n})_{n\geq 0}$ de la rangul k_{n_V} încolo. Cum V era arbitrară, urmează că $\lim\limits_{n\to\infty} x_{k_n} = l$. ■

Conform teoremei de mai sus, se observă că dacă un şir $(x_n)_{n\geq 0}$ are două subşiruri care tind la limite diferite, atunci el nu are limită, deoarece dacă $(x_n)_{n\geq 0}$ ar avea limita l, atunci şi cele două subşiruri ar avea aceeaşi limită l.

Exemplu
Şirul $(x_n)_{n\geq 0}$: $x_n = (-1)^n$ nu are limită, deoarece subşirul termenilor de rang par $(x_{2n})_{n\geq 0}$: $x_{2n} = 1$ şi subşirul termenilor de rang impar $(x_{2n+1})_{n\geq 0}$: $x_{2n+1} = -1$ au limitele diferite $l_1 = 1$, respectiv $l_2 = -1$.

2.2.1 Şiruri convergente

Un şir $(x_n)_{n\geq 0}$ cu limită finită l se numeşte *şir convergent*, spunându-se şi că $(x_n)_{n\geq 0}$ *este convergent către l*. Orice şir care nu este convergent se numeşte *divergent*.

În acest sens, şirurile divergente pot fi deci şiruri cu limită infinită sau şiruri fără limită. În plus, orice subşir al unui şir convergent este convergent la aceeaşi limită ca şi şirul iniţial, conform Teoremei 2.5. De aici, dacă un şir $(x_n)_{n\geq 0}$ conţine un subşir cu limită infinită, sau două subşiruri cu limite diferite, atunci el este divergent.

Exemplu
Şirul $(x_n)_{n\geq 0}$: $x_n = \frac{1+(-1)^n}{2} n$ este divergent, deoarece subşirul termenilor de rang par $(x_{2n})_{n\geq 0}$: $x_{2n} = 2n$ are limita $+\infty$.

Caracterizarea analitică a limitei unui şir

Definiţia cu vecinătăţi a limitei unui şir, deşi utilă teoretic, este greu de verificat sau folosit în aplicaţii. Vom prezenta în cele ce urmează câteva caracterizări echivalente cu un pronunţat aspect numeric, utile pentru demonstrarea unor proprietăţi verificabile practic. Mai întâi, este abordată situaţia şirurilor convergente.

Teorema 2.6. *Fie $(x_n)_{n\geq 0}$ un şir de numere reale şi $l \in \mathbb{R}$. Atunci $(x_n)_{n\geq 0}$ este convergent către l dacă şi numai dacă pentru orice $\varepsilon > 0$ există un rang $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ astfel încât $|x_n - l| < \varepsilon$ pentru orice $n \geq n_\varepsilon$.*

Demonstraţie. „$\Rightarrow$" Fie $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = l$. Fie de asemenea $\varepsilon > 0$ arbitrar. Pentru acest ε, vom considera $V_\varepsilon = (l - \varepsilon, l + \varepsilon)$ o vecinătate a lui l. Conform definiţiei limitei unui şir, există un rang n_{V_ε} (notat în continuare n_ε) astfel ca $x_n \in V_\varepsilon$ pentru orice

$n \geq n_\varepsilon$. Atunci $l - \varepsilon < x_n < l + \varepsilon$ pentru orice $n \geq n_\varepsilon$, de unde $|x_n - l| < \varepsilon$ pentru orice $n \geq n_\varepsilon$.

„$\Leftarrow$" Presupunem că şirul are proprietatea din enunţ şi fie V o vecinătate arbitrară a lui l. Această vecinătate conţine un interval deschis centrat în l, adică există $\varepsilon > 0$ astfel că $(l - \varepsilon, l + \varepsilon) \subseteq V$. Pentru acest ε, conform proprietăţii din enunţ, există un rang $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ astfel încât $|x_n - l| < \varepsilon$ pentru orice $n \geq n_\varepsilon$, de unde $x_n \in (l - \varepsilon, l + \varepsilon) \subseteq V$ pentru orice $n \geq n_\varepsilon$. În concluzie, vecinătatea V conţine toţi termenii şirului de la rangul n_ε încolo. ■

De fapt, proprietatea din enunţul Teoremei 2.6 este echivalentă cu proprietatea de definiţie a şirurilor convergente, putând fi folosită în locul acesteia pentru definirea noţiunii de şir convergent.

Exerciţiu
Fie $(x_n)_{n\geq 0}$: $x_n = \frac{2n+5}{n+2}$. Arătaţi că $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 2$.

Soluţie

Fie $\varepsilon > 0$ arbitrar. Au loc relaţiile

$$|x_n - 2| = \frac{1}{n+2} < \varepsilon$$

cu condiţia ca

$$\frac{1}{n+2} < \varepsilon \Leftrightarrow n + 2\frac{1}{\varepsilon} \Leftrightarrow n > \frac{1}{\varepsilon} - 2.$$

Atunci

$$n_\varepsilon = [\frac{1}{\varepsilon} - 2] + 1 = [\frac{1}{\varepsilon}] - 1,$$

iar pentru $n \geq n_\varepsilon$, $|x_n - 2| < \varepsilon$, de unde $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 2$. ■

Exerciţiu
Fie $(x_n)_{n\geq 0}$ un şir convergent de numere întregi. Arătaţi că $(x_n)_{n\geq 0}$ este constant de la un rang încolo.

Soluţie

Fie $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = l \in \mathbb{R}$. Pentru $\varepsilon = \frac{1}{4}$, există $n_\varepsilon \in N$ astfel ca $|x_n - l| < \frac{1}{4}$ pentru orice $n \geq n_\varepsilon$, deci $x_n \in (l - \frac{1}{4}, l + \frac{1}{4})$ pentru orice $n \geq n_\varepsilon$. Cum intervalul $(l - \frac{1}{4}, l + \frac{1}{4})$ are lungime $\frac{1}{2}$, el nu poate conţine decât un singur număr întreg, deci $(x_n)_{n\geq 0}$ este constant începând cu rangul n_ε, termenii săi fiind egali cu numărul întreg respectiv. ■

În continuare, este abordată situaţia şirurilor cu limită infinită, observându-se că şirurile cu limita $+\infty$ au termeni „oricât de mari" de la un rang încolo, respectiv şirurile cu limita $-\infty$ au termeni „oricât de mici" de la un rang încolo.

Teorema 2.7. *Fie $(x_n)_{n\geq 0}$ un şir de numere reale. Atunci*

1. *$(x_n)_{n\geq 0}$ are limita $+\infty$ dacă şi numai dacă pentru orice $M > 0$ există un rang $n_M \in \mathbb{N}$ astfel ca $x_n > M$ pentru orice $n \geq n_M$.*

2. *$(x_n)_{n\geq 0}$ are limita $-\infty$ dacă şi numai dacă pentru orice $M > 0$ există un rang $n_M \in \mathbb{N}$ astfel ca $x_n < -M$ pentru orice $n \geq n_M$.*

Demonstraţie. 1. „$\Rightarrow$" Fie $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = +\infty$. Fie de asemenea $M > 0$ arbitrar. Pentru acest M, vom considera $V_M = (M, +\infty]$ o vecinătate a lui $+\infty$. Conform definiţiei limitei unui şir, există un rang n_{V_M} (notat în continuare n_M) astfel ca $x_n \in V_M$ pentru orice $n \geq n_M$. Atunci $x_n > M$ pentru orice $n \geq n_M$, ceea ce trebuia demonstrat.

1. „$\Leftarrow$" Presupunem că şirul are proprietatea din enunţ şi fie V o vecinătate arbitrară a lui $+\infty$. Această vecinătate conţine un interval de forma $(M, +\infty]$; fără a restrânge generalitatea, M poate fi luat pozitiv. Pentru acest M, conform proprietăţii din enunţ, există un rang $n_M \in \mathbb{N}$ astfel încât $x_n > M$ pentru orice $n \geq n_M$, de unde $x_n \in (M, \infty] \subseteq V$ pentru orice $n \geq n_M$. În concluzie, vecinătatea V conţine toţi termenii şirului de la rangul n_M încolo.

Demonstraţia celei de-a doua afirmaţii este asemănătoare. ■

Exerciţiu

Fie $(x_n)_{n\geq 0}$: $x_n = \frac{n^2+2n+3}{n+1}$. Arătaţi că $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = +\infty$.

Soluţie

Fie $M > 0$ arbitrar. Au loc relaţiile

$$x_n = n + 1 + \frac{2}{n+1} > M$$

cu condiţia ca

$$n + 1 > M \Leftrightarrow n > M - 1.$$

Atunci $n_M = [M-1] + 1 = [M]$, iar pentru $n \geq n_M$, $x_n > M$, de unde $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = +\infty$. ■

Şiruri cu limita 0

În aceste condiţii, studiul şirurilor convergente cărora le este cunoscută limita poate fi redus la studiul unor şiruri convergente la 0, observându-se că un şir $(x_n)_{n\geq 0}$ are limita $l \in \mathbb{R}$ dacă şi numai dacă diferenţa dintre şir şi limita sa tinde la 0; acesta este doar un alt fel de a spune că termenii unui şir convergent devin „apropiaţi” de limita şirului de la un rang încolo.

Teorema 2.8. *Fie $(x_n)_{n\geq 0}$ un şir de numere reale şi $l \in \mathbb{R}$. Atunci $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = l$ dacă şi numai dacă $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n - l) = 0$.*

Demonstraţie. Conform teoremei de caracterizare a şirurilor convergente (Teorema 2.6),

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} x_n = l &\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0\ \exists n_\varepsilon \text{ astfel încât } |x_n - l| < \varepsilon\ \forall n \geq n_\varepsilon \\
&\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0\ \exists n_\varepsilon \text{ astfel încât } |(x_n - l) - 0| < \varepsilon\ \forall n \geq n_\varepsilon \\
&\Leftrightarrow \lim_{n\to\infty}(x_n - l) = 0.
\end{aligned}$$

■

Proprietatea de păstrare a semnului

Se poate observa că termenii unui şir cu limită au, cu excepţia eventuală a unui număr finit dintre ei, acelaşi semn cu limita şirului.

Teorema 2.9. *Fie $(x_n)_{n\geq 0}$ un şir de numere reale cu limita $l \in \overline{\mathbb{R}}$.*

1. *Dacă $l > 0$, atunci toţi termenii şirului sunt strict pozitivi de la un rang încolo.*
2. *Dacă $l < 0$, atunci toţi termenii şirului sunt strict negativi de la un rang încolo.*
3. *Dacă $l \neq 0$, atunci toţi termenii şirului sunt nenuli de la un rang încolo.*

Demonstraţie. 1. Dacă $l = \infty$, alegem $M = 1$ în Teorema 2.7 şi obţinem că exista $n_1 \in \mathbb{N}$ astfel ca $x_n > 1$ pentru orice $n \geq n_1$, de unde concluzia. Dacă $l \in \mathbb{R}$, luând $\varepsilon = \frac{l}{2}$, obţinem că există $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ astfel ca $|x_n - l| < \frac{l}{2}$ pentru orice $n \geq n_\varepsilon$, deci $-\frac{l}{2} < x_n - l < \frac{l}{2}$, sau $\frac{l}{2} < x_n < \frac{3l}{2}$ pentru orice $n \geq n_\varepsilon$. Cum $l > 0$, urmează că $x_n > 0$ pentru orice $n \geq n_\varepsilon$.

Cea de-a doua proprietate se demonstrează analog, iar cea de-a treia se obţine prin combinarea primelor două. ■

Şiruri cu limită infinită

Teorema 2.10. *Fie $(x_n)_{n\geq 0}$ un şir de numere reale.*

1. *Dacă $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = +\infty$ (respectiv $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = -\infty$), atunci $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{x_n} = 0$.*
2. *Dacă $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$, iar $x_n > 0$ (respectiv $x_n < 0$) de la un rang încolo, atunci $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{x_n} = +\infty$ (respectiv $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{x_n} = -\infty$).*

Demonstraţie. 1. Presupunem că $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \infty$. Fie $\varepsilon > 0$ arbitrar. Deoarece $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = +\infty$, există un rang $n_1 \in \mathbb{N}$ astfel ca $x_n > \frac{1}{\varepsilon}$ pentru orice $n \geq n_1$. Atunci $0 < \frac{1}{x_n} < \varepsilon$ pentru orice $n \geq n_1$. Cum ε era arbitrar, urmează că $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{x_n} = 0$. Dacă $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = -\infty$, demonstraţia este analoagă.

2. Presupunem că există un rang $n_1 \in N$ astfel ca $x_n > 0$ pentru orice $n \geq n_1$. Fie $M > 0$ arbitrar. Cum $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$, urmează că există un rang $n_2 \in \mathbb{N}$ astfel ca $|x_n - 0| < \frac{1}{M}$ pentru orice $n \geq n_2$. Atunci

$$0 < x_n < \frac{1}{M} \text{ pentru orice } n \geq \max(n_1, n_2),$$

deci $\frac{1}{x_n} > M$ pentru orice $n \geq \max(n_1, n_2)$. Cum M era arbitrar, urmează că $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{x_n} = +\infty$. Dacă $x_n < 0$ de la un rang încolo, demonstraţia este analoagă. ■

Rezulatele teoremei de mai sus pot fi prezentate sub forma prescurtată

$$\frac{\mathbf{1}}{+\infty} = \mathbf{0}, \quad \frac{\mathbf{1}}{-\infty} = \mathbf{0}, \quad \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{0+}} = +\infty, \quad \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{0-}} = -\infty.$$

Cu ajutorul Teoremei 2.6, se poate acum obţine următorul rezultat frecvent folosit în aplicaţii.

Teorema 2.11. *Fie $(x_n)_{n\geq 0}$ un şir monoton crescător de numere reale care este nemărginit superior. Atunci*

$$\lim_{n\to\infty} x_n = +\infty, \quad \lim_{n\to\infty} \frac{1}{x_n} = 0.$$

Demonstraţie. Fie $M > 0$ arbitrar. Cum $(x_n)_{n\geq 0}$ este nemărginit superior, există $n_M \in \mathbb{N}$ astfel ca $x_{n_M} > M$, iar deoarece $(x_n)_{n\geq 0}$ este monoton crescător, urmează că $x_n > M$ pentru orice $n \geq n_M$. Conform Teoremei 2.7, $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = +\infty$. Pentru a demonstra cea de-a doua parte a teoremei, se poate folosi Teorema 2.10, sau raţionamentul de mai jos.

Fie acum $\varepsilon > 0$ arbitrar şi fie $M_1 = \frac{1}{\varepsilon}$. Cum $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = +\infty$, urmează că există $n_{M_1} \in \mathbb{N}$ astfel ca $x_n > M_1$ pentru orice $n \geq n_{M_1}$. De aici, $\frac{1}{x_n} > 0$ pentru orice $n \geq n_{M_1}$. În plus, $\frac{1}{x_n} < \frac{1}{M} = \varepsilon$ pentru orice $n \geq n_{M_1}$. De aici, $|\frac{1}{x_n}| < \varepsilon$ pentru orice $n \geq n_{M_1}$, de unde $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{x_n} = 0$. ■

Cu un raţionament asemănător, se poate demonstra şi următoarea teoremă complementară celei de mai sus.

Teorema 2.12. *Fie $(x_n)_{n\geq 0}$ un şir monoton descrescător de numere reale care este nemărginit inferior. Atunci*

$$\lim_{n\to\infty} x_n = -\infty, \quad \lim_{n\to\infty} \frac{1}{x_n} = 0.$$

Exemple Pentru $k \in (0, \infty)$, $\lim\limits_{n\to\infty} n^k = \infty$, $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{n^k} = 0$. De exemplu, $\lim\limits_{n\to\infty} n^2 = \infty$, $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{\sqrt{n}} = 0$.

Pentru $q > 1$, $\lim\limits_{n\to\infty} q^n = \infty$, $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{q^n} = 0$. De exemplu, $\lim\limits_{n\to\infty} 5^n = \infty$, $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{2^n} = 0$.

Pentru $q \in (0, 1)$, $\lim\limits_{n\to\infty} q^n = 0$ (deoarece $p = \frac{1}{q} > 1$, iar $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{p^n} (= \lim\limits_{n\to\infty} q^n) = 0)$.

$\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt{n^2 + n + 1} = +\infty$, $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{n^2+n+1}} = 0$.

Criterii de majorare-minorare

Conform teoremei anterioare, pentru a arăta că limita unui şir $(x_n)_{n\geq 0}$ este $l \in \mathbb{R}$, poate fi studiată diferenţa dintre termenii şirului şi limita acestuia. Teorema următoare afirmă faptul că dacă această diferenţă poate fi estimată potrivit, cu valori din ce în ce mai mici (α_n de mai jos poate fi înţeles ca o eroare de aproximare), atunci într-adevăr şirul $(x_n)_{n\geq 0}$ are limita l.

Teorema 2.13. *Fie $(x_n)_{n\geq 0}$ un şir de numere reale şi $l \in \mathbb{R}$. Dacă există un şir $(\alpha_n)_{n\geq 0}$ de numere reale pozitive şi un rang oarecare $n_0 \in \mathbb{N}$ astfel ca*

$$|x_n - l| \leq \alpha_n \text{ pentru orice } n \geq n_0, \text{ iar } \lim_{n\to\infty} \alpha_n = 0$$

atunci $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = l$.

Demonstraţie. Fie $\varepsilon > 0$ arbitrar. Cum $(\alpha_n)_{n\geq 0}$ este convergent la 0, urmează că există $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ astfel ca $|\alpha_n - 0| < \varepsilon$ pentru orice $n \geq n_\varepsilon$. De aici, $|x_n - l| \leq \alpha_n < \varepsilon$ pentru orice $n \geq \max(n_0, n_\varepsilon)$, iar $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = l$. ■

Exerciţiu
Fie şirul $(x_n)_{n\geq 0}$: $x_n = \frac{2n+3}{n+1}$. Arătaţi că $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 2$.

Soluţie

Are loc relaţia

$$|x_n - 2| = \frac{1}{n+1}, \text{ iar } \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+1} = 0,$$

deoarece $(x_n)_{n\geq 0}$: $x_n = n + 1$ este un şir crescător şi nemărginit superior. De aici, $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 2$. ■

Exerciţiu
Fie şirul $(x_n)_{n\geq 1}$: $x_n = \frac{\sin n}{n}$. Demonstraţi că $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$.

Soluţie

Au loc relaţiile

$$\left|\frac{\sin n}{n} - 0\right| \leq \frac{1}{n}, \text{ iar } \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$$

deci $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$. ■

Se va observa acum că dacă termenii unui şir $(x_n)_{n\geq 0}$ pot fi minoraţi cu termeni „oricât de mari" ai unui şir $(a_n)_{n\geq 0}$ (i.e. $(a_n)_{n\geq 0}$ are limita $+\infty$), atunci ei sunt de asemenea „oricât de mari" (i.e. $(x_n)_{n\geq 0}$ are tot limita $+\infty$). De asemenea, dacă termenii unui şir $(x_n)_{n\geq 0}$ pot fi majoraţi cu termeni „oricât de mici" ai unui şir $(b_n)_{n\geq 0}$ (i.e. $(b_n)_{n\geq 0}$ are limita $-\infty$), atunci ei sunt de asemenea „oricât de mici" (i.e. $(x_n)_{n\geq 0}$ are tot limita $-\infty$).

Teorema 2.14. *Fie $(x_n)_{n\geq 0}$ un şir de numere reale.*

1. *Dacă există un şir de numere reale $(a_n)_{n\geq 0}$ cu proprietatea că $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = +\infty$ şi un rang $n_a \in N$ astfel ca $a_n \leq x_n$ pentru orice $n \geq n_a$, atunci $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = +\infty$.*

2. *Dacă există un şir de numere reale $(b_n)_{n\geq 0}$ cu proprietatea că $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = -\infty$ şi un rang $n_b \in N$ astfel ca $x_n \leq b_n$ pentru orice $n \geq n_b$, atunci $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = -\infty$.*

Demonstraţie. 1. Fie $(a_n)_{n\geq 0}$ cu proprietatea că $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = +\infty$ şi fie $M > 0$ arbitrar. Există atunci un rang n_M astfel ca $a_n > M$ pentru orice $n \geq n_M$. De aici, $x_n \geq a_n > M$ pentru orice $n \geq \max(n_a, n_M)$, de unde $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = +\infty$. Demonstraţia celei de-a două proprietăţi este asemănătoare. ■

Exerciţiu

Fie şirul $(x_n)_{n\geq 0}$: $x_n = n + (-1)^n$. Demonstraţi că $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \infty$.

Soluţie

Are loc inegalitatea $x_n \geq n - 1$ pentru orice $n \geq 0$, iar $\lim\limits_{n\to\infty}(n-1) = \infty$, de unde concluzia. ■

Exerciţiu

Fie şirul $(x_n)_{n\geq 0}$: $x_n = \frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{n}}$. Demonstraţi că $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \infty$.

Soluţie

Mai întâi, să observăm că

$$\frac{1}{\sqrt{k}} > \frac{2}{\sqrt{k} + \sqrt{k+1}} = 2(\sqrt{k+1} - \sqrt{k}) \text{ pentru orice } k \geq 1,$$

deci, prin sumare după k de la 1 la n,

$$x_n > 2(\sqrt{n+1} - 1) \text{ pentru orice } n \geq 1,$$

iar cum $\lim\limits_{n\to\infty} 2(\sqrt{n+1} - 1) = \infty$, urmează concluzia. ■

Şiruri conţinând funcţia modul

Prezentăm în continuare câteva consecinţe ale Teoremei 2.13, exprimând faptul că funcţia modul păstrează convergenţa şirurilor.

Teorema 2.15. *Fie $(x_n)_{n\geq 0}$ un şir de numere reale. Atunci*

1. *Dacă $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = l$, iar $l \in \mathbb{R}$, atunci $\lim\limits_{n\to\infty} |x_n| = l$.*

2. *Dacă $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$, atunci $\lim\limits_{n\to\infty} |x_n| = 0$.*

3. *Dacă $\lim\limits_{n\to\infty} |x_n| = 0$, atunci $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$.*

Demonstraţie. 1. Fie $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = l \in \mathbb{R}$ şi fie $\varepsilon > 0$ arbitrar. Există atunci $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ astfel ca $|x_n - l| < \varepsilon$ pentru orice $n \geq n_\varepsilon$. Cum

$$||x_n| - |l|| \leq |x_n - l| < \varepsilon \text{ pentru orice } n \geq n_\varepsilon,$$

conform inegalităţilor modulului, urmează că $\lim\limits_{n\to\infty} |x_n| = l$. Cea de-a doua afirmaţie rezultă din prima pentru $l = 0$.

3. Fie $\lim\limits_{n\to\infty} |x_n| = 0$ şi fie $\varepsilon > 0$ arbitrar. Există atunci $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ astfel ca $||x_n| - 0| < \varepsilon$ pentru orice $n \geq n_\varepsilon$. Deoarece $||x_n|| = |x_n|$, urmează că $|x_n - 0| < \varepsilon$ pentru orice $n \geq n_\varepsilon$, deci $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$. ■

Se va observa că reciproca primei afirmaţii nu este adevărată. În acest sens, fie $(x_n)_{n\geq 0}$: $x_n = (-1)^n$. Atunci $|x_n| \to 1$ pentru $n \to \infty$, dar $(x_n)_{n\geq 0}$ nu are limită. De asemenea, dacă $(x_n)_{n\geq 0}$ este un şir de numere reale astfel ca $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = -\infty$, atunci $\lim\limits_{n\to\infty} |x_n| = +\infty$, cu un raţionament asemănător celui de mai sus.

Limita şirului $(q^n)_{n\geq 0}$

Din cele de mai sus, se obţine că

$$\lim_{n\to\infty} q^n = 0 \text{ pentru } q \in (-1, 1).$$

Acest lucru a fost observat deja pentru $q \in (0, 1)$, conform Teoremei 2.11. Pentru $q \in (-1, 0)$, $|q^n| = |q|^n$, iar $|q| \in (0, 1)$, deci $\lim\limits_{n\to\infty} |q^n| = 0$, de unde $\lim\limits_{n\to\infty} q^n = 0$, conform celei de-a treia proprietăţi de mai sus. În fine, proprietatea este evidentă pentru $q = 0$.

Fie acum $q \in (-\infty, -1)$. Cum $q^{2n} \to \infty$ iar $q^{2n+1} \to -\infty$, urmează că nu există $\lim\limits_{n\to\infty} q^n$. Se observă în mod analog ca nu există $\lim\limits_{n\to\infty} q^n$ nici pentru $q = -1$.

Discuţia de mai sus poate fi sistematizată sub următoarea formă prescurtată

$$\lim_{n\to\infty} q^n = \begin{cases} \text{nu există,} & \text{dacă } q \leq -1 \\ 0, & \text{dacă } q \in (-1, 1) \\ 1, & \text{dacă } q = 1 \\ +\infty, & \text{dacă } q > 1 \end{cases}.$$

2.2.2 Proprietăţi ale şirurilor cu limită

Teorema ce urmează, numită şi *teorema de trecere la limită în inegalităţi* exprimă faptul că inegalităţile (nestricte) dintre termenii a două şiruri se păstrează prin trecere la limită.

Teorema 2.16. *Fie două şiruri $(x_n)_{n\geq 0}$ şi $(y_n)_{n\geq 0}$ cu proprietăţile*

1. *Există un rang n_0 astfel ca $x_n \leq y_n$ pentru $n \geq n_0$.*

2. $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x \in \overline{\mathbb{R}}$, $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = y \in \overline{\mathbb{R}}$.

Atunci $x \leq y$.

Demonstraţie. Presupunem prin reducere la absurd că $x > y$. Conform proprietăţii de separaţie Hausdorff, x şi y pot fi separate prin vecinătăţi, adică există $V_x \in \mathcal{V}(x)$ şi $V_y \in \mathcal{V}(y)$ astfel ca $V_x \cap V_y = \emptyset$ (şi deci $z_1 > z_2$ pentru orice $z_1 \in V_x$ şi $z_2 \in V_y$).

Conform definiţiei limitei, există $n_x \in \mathbb{N}$ astfel ca $x_n \in V_x$ pentru $n \geq n_x$ şi $n_y \in \mathbb{N}$ astfel ca $y_n \in V_y$ pentru $n \geq n_y$, ambele relaţii fiind satisfăcute pentru $n \geq \max(n_x, n_y)$. Rezultă de aici că $x_n > y_n$ pentru orice $n > \max(n_x, n_y)$, contradicţie. ■

Inegalităţile nestricte dintre termenii a două şiruri nu se păstrează neapărat prin trecere la limită. Aceasta se poate observa considerând şirurile $(x_n)_{n\geq 0}$: $x_n = \frac{1}{n+2}$ şi $(y_n)_{n\geq 0}$: $y_n = \frac{1}{n+1}$, pentru care $x_n < y_n$ pentru orice $n \geq 0$, dar $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \lim\limits_{n\to\infty} y_n = 0$.

Teorema de mai jos, numită şi *teorema cleştelui*, ne permite să calculăm limita unui şir care poate fi încadrat între alte două şiruri având aceeaşi limită.

Teorema 2.17. *Fie trei şiruri de numere reale $(a_n)_{n\geq 0}$, $(x_n)_{n\geq 0}$, $(b_n)_{n\geq 0}$ cu proprietăţile*

1. *Există un rang n_0 astfel ca $a_n \leq x_n \leq b_n$ pentru $n \geq n_0$.*

2. $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} b_n = l \in \overline{\mathbb{R}}$.

Atunci există $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$, iar $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = l$.

Demonstraţie. Dacă $l = +\infty$, atunci $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = +\infty$, folosind faptul că $a_n \le x_n$ pentru orice $n \ge n_0$, $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = +\infty$ şi Teorema 2.14. Pentru situaţia în care $l = -\infty$ se raţionează analog.

Fie acum $l \in \mathbb{R}$. Există atunci două ranguri $n_a, n_b \in \mathbb{N}$ astfel ca $|a_n - l| < \varepsilon$ pentru orice $n \ge n_a$, respectiv $|b_n - l| < \varepsilon$ pentru orice $n \ge n_b$. Urmează atunci că

$$-\varepsilon < a_n - l \le x_n - l \le b_n - l < \varepsilon \text{ pentru } n \ge \max(n_a, n_b, n_0),$$

de unde $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = l$. ■

Exerciţiu

Fie şirul $(x_n)_{n\ge1}$: $x_n = \frac{1}{n^2+1} + \frac{1}{n^2+2} + \ldots + \frac{1}{n^2+n}$. Arătaţi că $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$.

Soluţie

Observăm că dintre cei n termeni conţinuţi în suma care defineşte x_n, $\frac{1}{n^2+n}$ este cel mai mic, iar $\frac{1}{n^2+1}$ este cel mai mare. Urmează că $n \cdot \frac{1}{n^2+n} \le x_n \le n \cdot \frac{1}{n^2+1}$, deci

$$\frac{1}{n+1} \le x_n \le \frac{n}{n^2+1} < \frac{1}{n},$$

iar deoarece $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n+1} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$, urmează că de asemenea $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$, $(x_n)_{n\ge1}$ fiind încadrat între şirurile $(\frac{1}{n+1})_{n\ge1}$, $(\frac{1}{n})_{n\ge1}$ cu limita 0. ■

2.2.3 Relaţii intre convergenţă, monotonie şi mărginire

În cele ce urmează, vom studia relaţiile dintre proprietăţile de monotonie, mărginire şi convergenţă.

Teorema 2.18. *Orice şir convergent este mărginit.*

Demonstraţie. Fie $(x_n)_{n\ge0}$ astfel ca $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = l \in \mathbb{R}$. Punând $\varepsilon = 1$ în Teorema 2.6, obţinem că există $n_1 \in \mathbb{N}$ astfel încât $|x_n - l| < 1$ pentru orice $n \ge n_1$, sau $l - 1 < x_n < l + 1$ pentru orice $n \ge n_1$. Pentru a obţine inegalităţi valabile şi pentru x_0, x_1, …, x_{n_1-1}, observăm că, pentru orice $n \ge 0$,

$$\min(x_0, x_1, \ldots, x_{n_1-1}, l-1) \le x_n \le \max(x_0, x_1, \ldots, x_{n_1-1}, l+1)$$

deci $(x_n)_{n\ge0}$ este mărginit. ■

Teorema 2.19. *Orice şir nemărginit este divergent.*

Demonstraţie. Se aplică operatorul de negaţie logică propoziţiei de mai sus. ■

Exemple 1. *Nu orice şir mărginit este convergent.*

Şirul $(x_n)_{n\geq 0}$: $x_n = (-1)^n$ nu este convergent, deoarece subşirul termenilor de rang par $(x_{2n})_{n\geq 0}$: $x_{2n} = 1$ şi subşirul termenilor de rang impar $(x_{2n+1})_{n\geq 0}$: $x_{2n+1} = -1$ au limitele diferite $l_1 = 1$, respectiv $l_2 = -1$. În schimb, $(x_n)_{n\geq 0}$ este mărginit, deoarece $-1 \leq x_n \leq 1$ pentru orice $n \geq 0$.

2. *Nu orice şir convergent este monoton.*

   Şirul $(x_n)_{n\geq 0}$: $x_n = \frac{(-1)^n}{n}$ este convergent la 0, deoarece $|x_n| = \frac{1}{n}$, iar $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$, dar nu este monoton, luând alternativ atât valori pozitive, cât şi negative.

3. *Nu orice şir monoton este mărginit.*

   Şirul $(x_n)_{n\geq 0}$: $x_n = 2n+1$ este monoton, dar nu este mărginit, fiind nemărginit superior.

4. *Nu orice şir mărginit este monoton.*

   Şirul $(x_n)_{n\geq 0}$: $x_n = (-1)^n$ este mărginit, dar nu este monoton, luând alternativ atât valori pozitive, cât şi negative.

Teorema 2.20. *Orice şir monoton şi mărginit este convergent.*

Demonstraţie. Vom demonstra în cele ce urmează că orice şir $(x_n)_{n\geq 0}$ monoton crescător şi mărginit superior este convergent. În acest scop, să observăm că mulţimea $A = \{x_0, x_1, \ldots, x_n, \ldots\}$ a termenilor săi este mărginită, deoarece şirul $(x_n)_{n\geq 0}$ este mărginit. Fie atunci $l = \sup A$, care este număr real, deoarece A este mărginită. Vom arăta în continuare că l este limita şirului $(x_n)_{n\geq 0}$.

În acest scop, fie $\varepsilon > 0$ arbitrar. Deoarece $l = \sup A$, conform Teoremei 2.7, există $x \in A$ astfel ca $x > l - \varepsilon$. Cum $x \in A$, există un rang $n_0 \in \mathbb{N}$ astfel ca $x = x_{n_0}$, deci $x_{n_0} > l - \varepsilon$ şi, deoarece $(x_n)_{n\geq 0}$ este monoton crescător, $x_n > l - \varepsilon$ pentru orice $n \geq n_0$. Deoarece $l = \sup A$, urmează că $x_n \leq l$ pentru orice $n \geq 0$. Combinând aceste relaţii, urmează că $l - \varepsilon < x \leq l$ pentru orice $n \geq n_0$, deci $|x_n - l| < \varepsilon$ pentru orice $n \geq n_0$. Cum ε era arbitrar, urmează că $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = l$. Dacă $(x_n)_{n\geq 0}$ este monoton descrescător şi mărginit inferior, demonstraţia este analoagă. ■

Din cele de mai sus, se observă de asemenea că toţi termenii unui şir monoton crescător şi mărginit superior $(x_n)_{n\geq 0}$ sunt mai mici sau egali cu valoarea l a limitei şirului. Similar, toţi termenii unui şir monoton descrescător şi mărginit inferior $(x_n)_{n\geq 0}$ sunt mai mari sau egali cu valoarea limitei şirului.

Exerciţiu

Fie şirul $(x_n)_{n\geq 1}$: $x_n = \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \ldots + \frac{1}{n^2}$. Arătaţi că $(x_n)_{n\geq 1}$ este convergent.

Soluţie

Vom arăta că $(x_n)_{n\geq 1}$ este monoton şi mărginit. În acest scop, să observăm că, deoarece $x_{n+1} - x_n = \frac{1}{(n+1)^2} > 0$, şirul $(x_n)_{n\geq 1}$ este strict crescător, deci şi mărginit inferior. De asemenea, $\frac{1}{n^2} < \frac{1}{n(n-1)} = \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}$ pentru orice $n \geq 2$, deci

$$x_n < \frac{1}{1^2} + \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \ldots + \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}\right) < \frac{1}{1^2} + \frac{1}{1} = 2,$$

iar $(x_n)_{n\geq 1}$ este şi mărginit superior. Fiind monoton şi mărginit, $(x_n)_{n\geq 1}$ este convergent. ■

Combinând Teorema 2.11, Teorema 2.12 şi Teorema 2.20, obţinem următorul rezultat, care precizează existenţa limitei unui şir monoton.

Teorema 2.21. *Orice şir monoton $(x_n)_{n\geq 0}$ are limită, finită sau nu.*

2.2.4 Operaţii cu şiruri convergente

În cele ce urmează, se va observa că proprietatea unor şiruri de a fi convergente se păstrează după efectuarea operaţiilor uzuale de sumă, diferenţă, produs cu o constantă, produs termen cu termen, iar în anumite condiţii se păstrează şi după efectuarea inverselor sau a raportului termen cu termen.

Teorema 2.22. *Fie $(x_n)_{n\geq 0}$ şi $(y_n)_{n\geq 0}$ două şiruri convergente de numere reale astfel ca $\lim_{n\to\infty} x_n = x$, $\lim_{n\to\infty} y_n = y$. Atunci şirul sumă $(x_n + y_n)_{n\geq 0}$, şirul produs cu o constantă $(cx_n)_{n\geq 0}$, $c \in \mathbb{R}$, şi şirul produs $(x_n y_n)_{n\geq 0}$ sunt convergente, iar dacă $x \neq 0$ atunci şi şirul inverselor $(\frac{1}{x_n})_{n\geq 0}$ este convergent. În plus, au loc relaţiile*

1. $\lim_{n\to\infty}(x_n + y_n) = \lim_{n\to\infty} x_n + \lim_{n\to\infty} y_n = x + y$
(limita sumei este egală cu suma limitelor).

2. $\lim_{n\to\infty}(cx_n) = c\lim_{n\to\infty} x_n = cx$
(operaţia de înmulţire cu o constantă comută cu operaţia de calculare a limitei).

3. $\lim_{n\to\infty}(x_n y_n) = \lim_{n\to\infty} x_n \cdot \lim_{n\to\infty} y_n = xy$
(limita produsului este egală cu produsul limitelor).

4. $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{x_n} = \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty} x_n} = \frac{1}{x}$, *dacă* $\lim_{n\to\infty} x_n \neq 0$
(limita inverselor este egală cu inversa limitei).

Demonstraţie. 1. Fie $\varepsilon > 0$ arbitrar. Deoarece $\lim_{n\to\infty} x_n = x$, $\lim_{n\to\infty} y_n = y$, există rangurile $n_\varepsilon^1, n_\varepsilon^2 \in \mathbb{N}$ astfel ca

$$|x_n - x| < \frac{\varepsilon}{2} \text{ pentru orice } n \geq n_\varepsilon^1$$
$$|y_n - y| < \frac{\varepsilon}{2} \text{ pentru orice } n \geq n_\varepsilon^2.$$

Atunci, pentru orice $n \geq \max(n_\varepsilon^1, n_\varepsilon^2)$,

$$|(x_n + y_n) - (x + y)| \leq |x_n - x| + |y_n - y| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon.$$

Cum ε era arbitrar, urmează că $\lim_{n\to\infty}(x_n + y_n) = x + y = \lim_{n\to\infty} x_n + \lim_{n\to\infty} y_n$.

2. Dacă $c = 0$, $(cx_n)_{n\geq 0}$ este constant nul, fiind deci convergent la 0. Fie acum $c \neq 0$. Fie deasemenea $\varepsilon > 0$. Există atunci rangul $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ astfel ca

$$|x_n - x| < \frac{\varepsilon}{|c|} \text{ pentru orice } n \geq n_\varepsilon.$$

Atunci, pentru orice $n \geq n_\varepsilon$,

$$|cx_n - cx| = |c||x_n - x| < |c|\frac{\varepsilon}{|c|} = \varepsilon,$$

deci $\lim_{n\to\infty}(cx_n) = cx = c\lim_{n\to\infty} x_n$.

3. Mai întâi, se observă că au loc inegalităţile

$$\begin{aligned}|x_n y_n - xy| &\leq |x_n y_n - x_n y + x_n y - xy| \leq |x_n y_n - x_n y| + |x_n y - xy| \\ &\leq |x_n||y_n - y| + |x_n - x||y|.\end{aligned}$$

Cum $(x_n)_{n\geq 0}$ este convergent, el este şi mărginit, deci există $M > 0$ astfel ca $|x_n| \leq M$ pentru orice $n \geq 0$.

Fie $\varepsilon > 0$. Există atunci rangul $n_\varepsilon^1 \in \mathbb{N}$ astfel ca $|y_n - y| < \frac{\varepsilon}{2M}$ pentru orice $n \geq n_\varepsilon$.

Dacă $y = 0$, atunci, pentru orice $n \geq n_\varepsilon^1$,

$$|x_n y_n - xy| < M\frac{\varepsilon}{2M} = \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon,$$

deci $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n y_n) = xy = \lim\limits_{n\to\infty} x_n \cdot \lim\limits_{n\to\infty} y_n$.

Dacă $y \neq 0$, există rangul $n_\varepsilon^2 \in \mathbb{N}$ astfel ca $|x_n - x| < \frac{\varepsilon}{2|y|}$ pentru orice $n \geq n_\varepsilon^2$. Atunci, pentru orice $n \geq \max(n_\varepsilon^1, n_\varepsilon^2)$,

$$|x_n y_n - xy| < M\frac{\varepsilon}{2M} + \frac{\varepsilon}{2|y|}|y| = \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

deci $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n y_n) = xy = \lim\limits_{n\to\infty} x_n \cdot \lim\limits_{n\to\infty} y_n$.

4. Mai întâi, se observă că dacă $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x \neq 0$, atunci toţi termenii şirului sunt nenuli de la un rang încolo, deci şirul $\left(\frac{1}{x_n}\right)_{n\geq 0}$ este bine definit, cu execpţia eventuală a unui număr finit de termeni. Au loc egalităţile

$$\left|\frac{1}{x_n} - \frac{1}{x}\right| = \left|\frac{x_n - x}{x_n x}\right| = |x_n - x|\frac{1}{|x_n|}\frac{1}{|x|}.$$

Cum $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x \neq 0$, există un rang $n_x \in \mathbb{N}$ astfel ca $|x_n - x| < \frac{|x|}{2}$ pentru orice $n \geq n_x$, deci

$$|x_n| = |x_n - x + x| \geq |x| - |x_n - x| + |x| > |x| - \frac{|x|}{2} = \frac{|x|}{2}.$$

Fie acum $\varepsilon > 0$. Există atunci un rang $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ astfel ca $|x_n - x| < \frac{\varepsilon |x|^2}{2}$. Atunci, pentru orice $n \geq \max(n_x, n_\varepsilon)$,

$$\left|\frac{1}{x_n} - \frac{1}{x}\right| < \frac{\varepsilon |x|^2}{2}\frac{2}{|x|}\frac{1}{|x|} = \varepsilon,$$

deci $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{x_n} = \frac{1}{x} = \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty} x_n}$. ■

Exerciţiu

Fie şirul $(x_n)_{n\geq 0}$ definit prin $x_{n+1} = \frac{1}{2}x_n - 1$, $n \geq 0$, $x_0 = 1$. Demonstraţi că $(x_n)_{n\geq 0}$ este convergent.

Soluţie

Mai întâi, se observă că $x_1 = -\frac{1}{2} < x_0$. În plus,

$$x_{n+1} - x_n = \frac{1}{2}x_n - 1 - \frac{1}{2}x_{n-1} + 1 = \frac{1}{2}\left(x_n - x_{n-1}\right),$$

deci

$$\operatorname{sgn}(x_{n+1} - x_n) = \operatorname{sgn}\left(x_n - x_{n-1}\right) = \ldots = \operatorname{sgn}(x_1 - x_0).$$

Cum $x_1 < x_0$, urmează că şirul $(x_n)_{n\geq 0}$ este strict descrescător, deci şi mărginit superior de $x_0 = 1$.

Deoarece $x_{n+1} < x_n$, urmează că $x_n < \frac{1}{2}x_n - 1$, deci $x_n > -2$, iar $(x_n)_{n\geq 0}$ este şi mărginit inferior. Cum $(x_n)_{n\geq 0}$ este monoton şi mărginit, el este convergent. Fie l limita sa; atunci şirul $(\frac{1}{2}x_n)_{n\geq 0}$ are limita $\frac{1}{2}l$, iar şirul $(x_{n+1})_{n\geq 0}$ are tot limita l. Trecând la limită în relaţia de recurenţă, obţinem că $l = \frac{1}{2}l - 1$, deci $l = -2$. ■

Proprietăţile de mai sus se pot extinde în mod imediat la operaţii cu un număr mai mare (dar constant) de şiruri. De exemplu, dacă $(x_n^1)_{n\geq 0}$, $(x_n^2)_{n\geq 0}$,$\ldots$, $(x_n^k)_{n\geq 0}$ sunt şiruri convergente, cu limitele respectiv $l_1, l_2, \ldots, l_k$, atunci şirul sumă $(x_n^1 + x_n^2 + \ldots + x_n^k)_{n\geq 0}$ este convergent, iar

$$\lim_{n\to\infty}\left(x_n^1 + x_n^2 + \ldots + x_n^k\right) = \lim_{n\to\infty} x_n^1 + \lim_{n\to\infty} x_n^2 + \ldots + \lim_{n\to\infty} x_n^k.$$

Cazul operaţiilor cu un număr variabil de şiruri trebuie tratat cu atenţie, aşa cum se observă din următorul exemplu

$$1 = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n} + \ldots + \frac{1}{n}\right) \neq \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n} + \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n} + \ldots + \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n} = 0,$$

diferenţa provenind din faptul că paranteza $\left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n} + \ldots \frac{1}{n}\right)$ conţine un număr de n şiruri, n fiind variabil.

Teorema 2.23. *Fie $(x_n)_{n\geq 0}$ şi $(y_n)_{n\geq 0}$ două şiruri convergente de numere reale astfel ca $\lim_{n\to\infty} x_n = x$, $\lim_{n\to\infty} y_n = y$. Atunci şirul diferenţă $(x_n - y_n)_{n\geq 0}$ este convergent, iar dacă $y \neq 0$, atunci şi şirul raport $(\frac{x_n}{y_n})_{n\geq 0}$ este convergent. În plus, au loc relaţiile*

1. $\lim_{n\to\infty}(x_n - y_n) = \lim_{n\to\infty} x_n - \lim_{n\to\infty} y_n = x - y$
   (limita diferenţei este egală cu diferenţa limitelor).

2. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n} = \frac{\lim\limits_{n\to\infty} x_n}{\lim\limits_{n\to\infty} y_n} = \frac{x}{y}$, *dacă* $\lim\limits_{n\to\infty} y_n \neq 0$
(limita raportului este egală cu raportul limitelor).

Demonstraţie. 1. Deoarece $x_n - y_n = x_n + (-1)y_n$, iar $((-1)y_n)_{n\geq 0}$ este convergent cu limita $-y$ (din teorema de mai sus), urmează că

$$\lim_{n\to\infty} (x_n - y_n) = \lim_{n\to\infty} x_n + \lim_{n\to\infty} ((-1)y_n) = \lim_{n\to\infty} x_n - \lim_{n\to\infty} y_n.$$

2. Ca mai sus, şirul $\left(\frac{x_n}{y_n}\right)$ este bine definit, cu excepţia eventuală a unui număr finit de termeni. Deoarece $(\frac{1}{y_n})_{n\geq 0}$ este convergent cu limita $\frac{1}{y}$, urmează că

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n} = \lim_{n\to\infty} x_n \cdot \frac{1}{y_n} = \lim_{n\to\infty} x_n \cdot \lim_{n\to\infty} \frac{1}{y_n} = \frac{\lim\limits_{n\to\infty} x_n}{\lim\limits_{n\to\infty} y_n}.$$

■

Se poate demonstra de asemenea următorul rezultat.

Teorema 2.24. *Fie $(x_n)_{n\geq 0}$ şi $(y_n)_{n\geq 0}$ două şiruri convergente de numere reale astfel ca $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x > 0$, $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = y$. Atunci şirul putere $(x_n^{y_n})_{n\geq 0}$ este convergent. În plus, are loc relaţia*

$$\lim_{n\to\infty} (x_n^{y_n}) = \left(\lim_{n\to\infty} x_n\right)^{\lim\limits_{n\to\infty} y_n}$$ *(limita puterii se distribuie atât bazei şi exponentului).*

Alegând şirurile constante $(b_n)_{n\geq 0}$: $b_n = k$, $k \in \mathbb{N}^*$, respectiv $(b_n)_{n\geq 0}$: $b_n = \frac{1}{p}$, $p \in \mathbb{N}^*$, $p \geq 2$, se obţine următoarea consecinţă a teoremei de mai sus.

Corolar 2.24.1. *Fie $(x_n)_{n\geq 0}$ un şir convergent de numere reale astfel ca $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x > 0$, $k \in \mathbb{N}^*$, $p \in \mathbb{N}^*$, $p \geq 2$. Atunci*

1. $\lim\limits_{n\to\infty} x_n^k = \left(\lim\limits_{n\to\infty} x_n\right)^k = x^k$ *(limita puterii este egală cu puterea limitei).*

2. $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[p]{x_n} = \sqrt[p]{\lim\limits_{n\to\infty} x_n} = \sqrt[p]{x}$ *(limita radicalului este egală cu radicalul limitei).*

Analizăm acum cazul în care $(x_n)_{n\geq 0}$ are limita 0.

Teorema 2.25. *Fie $(x_n)_{n\geq 0}$ un şir convergent de numere reale pozitive astfel ca $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$ şi fie $(y_n)_{n\geq 0}$ un şir convergent de numere reale astfel ca $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = y \neq 0$. Atunci*

1. *Dacă* $y > 0$, *atunci* $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n^{y_n}) = 0$.

2. *Dacă* $y < 0$, *atunci* $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n^{y_n}) = +\infty$.

Consideraţii asemănătoare se pot formula în cazul în care $(x_n)_{n\geq 0}$ este un şir convergent de numere reale negative cu limita 0, sau măcar conţine termeni negativi, cu rezerva ca $(x_n^{y_n})_{n\geq 0}$ trebuie mai întâi sa fie bine definit. De exemplu, pentru $x_n = -\frac{1}{n}$ şi $y_n = \frac{1}{2n}$, $x_n^{y_n} = \sqrt[2n]{-\frac{1}{n}}$ nu este definit pentru nicio valoare a lui n.

Totuşi, dacă $(x_n)_{n\geq 0}$ şi $(y_n)_{n\geq 0}$ au ambele limita 0, nu se poate afirma nimic despre convergenţa sau divergenţa şirului $(x_n^{y_n})_{n\geq 0}$, spunându-se că 0^0 este un *caz de nedeterminare*. Acest lucru se poate observa din următoarele exemple.

- Dacă $x_n = \frac{1}{2^n}$, $y_n = \frac{1}{n}$, atunci $x_n^{y_n} = \frac{1}{2} \to \frac{1}{2}$.
- Dacă $x_n = \frac{1}{2^{n^2}}$, $y_n = -\frac{1}{n}$, atunci $x_n^{y_n} = 2^n \to +\infty$.
- Dacă $x_n = \frac{1}{2^n}$, $y_n = -\frac{(-1)^n}{n}$ atunci $x_n^{y_n} = 2^{(-1)^n}$ nici măcar nu are limită.

2.2.5 Operaţii cu şiruri cu limită infinită

Teorema 2.26. *Fie* $(x_n)_{n\geq 0}$ *şi* $(y_n)_{n\geq 0}$ *două şiruri de numere reale.*

1. *Dacă* $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = +\infty$ *şi* $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = y \in \overline{\mathbb{R}} \setminus \{-\infty\}$, *atunci* $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n + y_n) = +\infty$.

2. *Dacă* $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = -\infty$ *şi* $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = y \in \overline{\mathbb{R}} \setminus \{+\infty\}$, *atunci* $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n + y_n) = -\infty$.

Rezutatul Teoremei 2.26 poate fi prezentat şi sub forma prescurtată

$$\begin{aligned} \infty + \mathbf{c} = \infty, &\quad \infty + \infty = \infty, \\ -\infty + \mathbf{c} = -\infty, &\quad -\infty + (-\infty) = -\infty, c \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Teorema 2.27. *Fie* $(x_n)_{n\geq 0}$ *şi* $(y_n)_{n\geq 0}$ *două şiruri de numere reale.*

1. *Dacă* $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = +\infty$ *şi* $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = y \in \overline{\mathbb{R}}$, $y > 0$, *atunci* $\lim\limits_{n\to\infty} x_n y_n = +\infty$.

2. *Dacă* $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = +\infty$ *şi* $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = y \in \overline{\mathbb{R}}$, $y < 0$, *atunci* $\lim\limits_{n\to\infty} x_n y_n = -\infty$.

3. *Dacă* $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = -\infty$ *şi* $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = y \in \overline{\mathbb{R}}$, $y > 0$, *atunci* $\lim\limits_{n\to\infty} x_n y_n = -\infty$.

4. *Dacă* $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = -\infty$ *şi* $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = y \in \overline{\mathbb{R}}$, $y < 0$, *atunci* $\lim\limits_{n\to\infty} x_n y_n = +\infty$.

Rezutatul Teoremei 2.27 poate fi prezentat şi sub forma prescurtată

$$\begin{aligned} \mathbf{c.p.} \cdot +\infty &= +\infty, \quad \mathbf{c.n.} \cdot +\infty = -\infty, \\ \mathbf{c.p.} \cdot -\infty &= -\infty, \quad \mathbf{c.n.} \cdot -\infty = +\infty, \end{aligned}$$

unde prin **c.p.** şi **c.p.** înţelegem „constantă reală pozitivă" şi respectiv „constantă reală negativă".

Teorema 2.28. *Fie* $(x_n)_{n\geq 0}$ *şi* $(y_n)_{n\geq 0}$ *două şiruri de numere reale.*

1. *Dacă* $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = +\infty$ *şi* $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = y \in \mathbb{R}$, $y > 0$, *atunci* $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n} = +\infty$.
2. *Dacă* $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = +\infty$ *şi* $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = y \in \mathbb{R}$, $y < 0$, *atunci* $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n} = -\infty$.
3. *Dacă* $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = -\infty$ *şi* $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = y \in \mathbb{R}$, $y > 0$, *atunci* $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n} = -\infty$.
4. *Dacă* $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = -\infty$ *şi* $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = y \in \mathbb{R}$, $y < 0$, *atunci* $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n} = +\infty$.

Rezutatul Teoremei 2.28 poate fi prezentat şi sub forma prescurtată

$$\begin{aligned} \frac{\infty}{\mathbf{c.p.}} &= \infty, \quad \frac{\infty}{\mathbf{c.n.}} = -\infty, \\ \frac{-\infty}{\mathbf{c.p.}} &= -\infty, \quad \frac{-\infty}{\mathbf{c.n.}} = \infty. \end{aligned}$$

Teorema 2.29. *Fie* $(x_n)_{n\geq 0}$ *şi* $(y_n)_{n\geq 0}$ *două şiruri de numere reale.*
Dacă $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x \in \mathbb{R}$ *şi* $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = y \in \{-\infty, +\infty\}$, *atunci* $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n} = 0$.

Rezutatul Teoremei 2.29 poate fi prezentat şi sub forma prescurtată

$$\frac{\mathbf{c}}{\infty} = \mathbf{0}, \quad \frac{\mathbf{c}}{\infty} = \mathbf{0}, c \in \mathbb{R}.$$

Teorema 2.30. *Fie* $(x_n)_{n\geq 0}$ *şi* $(y_n)_{n\geq 0}$ *două şiruri de numere reale.*

1. *Dacă* $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = +\infty$ *şi* $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = y \in \overline{\mathbb{R}}$, $y > 0$, *atunci* $\lim\limits_{n\to\infty} x_n^{y_n} = +\infty$.
2. *Dacă* $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = +\infty$ *şi* $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = y \in \overline{\mathbb{R}}$, $y < 0$, *atunci* $\lim\limits_{n\to\infty} x_n^{y_n} = 0$.

Rezutatul Teoremei 2.30 poate fi prezentat şi sub forma prescurtată

$$\infty^{\textbf{c.p.}} = \infty, \quad \infty^{\textbf{c.n.}} = \mathbf{0}.$$

Dacă $(x_n)_{n\geq 0}$ are limita ∞ iar $(y_n)_{n\geq 0}$ are limita 0, nu se poate afirma nimic despre convergenţa sau divergenţa şirului $(x_n^{y_n})_{n\geq 0}$, spunându-se că ∞^0 este un *caz de nedeterminare*. Acest lucru se poate observa din următoarele exemple.

- Dacă $x_n = 2^n$, $y_n = \frac{1}{n}$, atunci $x_n^{y_n} = 2 \to 2$.
- Dacă $x_n = 2^{n^2}$, $y_n = \frac{1}{n}$, atunci $x_n^{y_n} = 2^n \to +\infty$.
- Dacă $x_n = 2^n$, $y_n = \frac{(-1)^n}{n}$ atunci $x_n^{y_n} = 2^{(-1)^n}$ nici măcar nu are limită.

În general, nu se poate afirma nimic despre convergenţa sau divergenţa produsului dintre un şir convergent şi un alt şir care nu are neapărat limită. Totuşi, sub ipoteze adiţionale, are loc următorul rezultat.

Teorema 2.31. *Produsul dintre un şir mărginit $(x_n)_{n\geq 0}$ şi un şir $(y_n)_{n\geq 0}$ convergent la 0 este un şir convergent la 0.*

Demonstraţie. Fie $\varepsilon > 0$ arbitrar. Cum $(x_n)_{n\geq 0}$ este mărginit, există $M > 0$ astfel că $|x_n| \leq M$ pentru orice $n \in \mathbb{N}$. Deoarece $(y_n)_{n\geq 0}$ este un şir convergent la 0, există un rang $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ astfel ca

$$|y_n - 0| < \frac{\varepsilon}{M} \text{ pentru orice } n \geq n_\varepsilon.$$

Atunci

$$|x_n y_n - 0| = |x_n||y_n| < M\frac{\varepsilon}{M} = \varepsilon \text{ pentru orice } n \geq n_\varepsilon.$$

Cum ε era arbitrar, urmează că $(x_n y_n)_{n\geq 0}$ este convergent la 0. ■

Exemplu
Dacă $(y_n)_{n\geq 0}$ este convergent la 0, atunci $((-1)^n y_n)_{n\geq 0}$ este de asemenea convergent la 0.

Demonstraţie. Este suficient să alegem $(x_n)_{n\geq 0}$: $x_n = (-1)^n$, care este mărginit. ■

2.2.6 Calculul unor limite fundamentale

Limitele funcţiilor polinomiale

Fie P o funcţie polinomială de grad $k \geq 1$,

$$P : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, P(x) = a_k x^k + a_{k-1} x^{k-1} + \ldots + a_1 x + a_0, \quad a_k \neq 0.$$

Considerăm şirul $(x_n)_{n\geq 0}$, $x_n = P(n)$. Pentru calculul limitei şirului $(x_n)_{n\geq 0}$ se va scoate factor comun forţat n^k ($k =$ grad P). Se obţine că

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} x_n &= \lim_{n\to\infty} a_k n^k + a_{k-1} n^{k-1} + \ldots + a_1 n + a_0 \\
&= \lim_{n\to\infty} n^k \left(a_k + a_{k-1} \frac{1}{n} + \ldots + a_1 \frac{1}{n^{k-1}} + a_0 \frac{1}{n^k} \right) \\
&= \infty \cdot a_k = \begin{cases} +\infty, & \text{dacă } a_k > 0 \\ -\infty, & \text{dacă } a_k < 0 \end{cases}.
\end{aligned}$$

Să observăm că limita termenului de grad maxim al lui P este de asemenea

$$\lim_{n\to\infty} a_k n^k = \infty \cdot a_k = \lim_{n\to\infty} x_n,$$

de unde se poate remarca faptul că *limita lui $P(n)$ este egală cu limita termenului de grad maxim al lui P*.

Exemple 1. $\lim\limits_{n\to\infty} \left(n^3 - 2n^2 + n - 1\right) = +\infty$, deoarece coeficientul termenului de grad maxim n^3 este pozitiv.

2. $\lim\limits_{n\to\infty} (-n^4 + 3n^3 - \sqrt{2}n + 5) = -\infty$, deoarece coeficientul termenului de grad maxim n^4 este negativ

Limitele funcţiilor raţionale

Fie P, Q două funcţii polinomiale de grad k, respectiv l, unde $k, l \geq 1$,

$$\begin{aligned}
&P : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, P(x) = a_k x^k + a_{k-1} x^{k-1} + \ldots + a_1 x + a_0, \quad a_k \neq 0, \\
&Q : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, Q(x) = b_l x^l + b_{l-1} x^{l-1} + \ldots + b_1 x + b_0, \quad b_l \neq 0.
\end{aligned}$$

Considerăm şirul $(x_n)_{n\geq 0}$, $x_n = \frac{P(n)}{Q(n)}$. Pentru calculul limitei şirului $(x_n)_{n\geq 0}$ se va scoate factor comun forţat n^k de la numărător ($k =$ grad P), respectiv n^l de la numitor ($l = \text{grad}\, Q$). Se obţine că

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} x_n &= \lim_{n\to\infty} \frac{a_k n^k + a_{k-1} n^{k-1} + \ldots + a_1 n + a_0}{b_l n^l + b_{l-1} n^{l-1} + \ldots + b_1 n + b_0} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{n^k \left(a_k + a_{k-1}\frac{1}{n} + \ldots + a_1 \frac{1}{n^{k-1}} + a_0 \frac{1}{n^k}\right)}{n^l \left(b_l + b_{l-1}\frac{1}{n} + \ldots + b_1 \frac{1}{n^{l-1}} + b_0 \frac{1}{n^l}\right)} \\
&= \lim_{n\to\infty} n^{k-l} \frac{a_k}{b^l} = \begin{cases} 0, & \text{dacă } k < l \\ \frac{a_k}{b_l}, & \text{dacă } k = l \\ +\infty \frac{a_k}{b_l}, & \text{dacă } k > l \end{cases}.
\end{aligned}$$

Să observăm că limita raportului termenilor de grad maxim este de asemenea

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_k n^k}{b_l n^l} = \lim_{n\to\infty} n^{k-l} \frac{a_k}{b^l},$$

de unde se poate remarca faptul că *limita lui $\frac{P(n)}{Q(n)}$ este egală cu limita raportului termenilor de grad maxim ai lui P şi Q*. De asemenea, dacă $\text{grad}\, P < \text{grad}\, Q$, atunci $\lim_{n\to\infty} \frac{P(n)}{Q(n)} = 0$, deci *dacă gradul numitorului este mai mare decât gradul numărătorului, atunci limita lui $\frac{P(n)}{Q(n)}$ este 0*. Dacă $\text{grad}\, P = \text{grad}\, Q$, atunci $\lim_{n\to\infty} \frac{P(n)}{Q(n)} = \frac{a_k}{b_l}$, deci *dacă gradul numitorului este egal cu gradul numărătorului, atunci limita lui $\frac{P(n)}{Q(n)}$ este raportul coeficienţilor termenilor dominanţi*. Dacă $\text{grad}\, P > \text{grad}\, Q$, atunci $\lim_{n\to\infty} \frac{P(n)}{Q(n)} = +\infty \frac{a_k}{b_l}$, deci *dacă gradul numărătorului este mai mare decât gradul numitorului, atunci limita lui $\frac{P(n)}{Q(n)}$ este $+\infty$ dacă coeficienţii termenilor dominanţi au acelaşi semn, respectiv $-\infty$ dacă coeficienţii termenilor dominanţi au semne opuse.*

Exemple 1.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2n^2 - 3n + 5}{3n^2 + 6n - 1} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^2(2 - 3\frac{1}{n} + 5\frac{1}{n^2})}{n^2(3 + 6\frac{1}{n} - \frac{1}{n^2})} = \frac{2}{3}.$$

2.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^3 + 4n^2 - n + 2}{2n^2 - 3n + 7} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^3(1 + 4\frac{1}{n} - \frac{1}{n^2} + 2\frac{1}{n^3})}{n^2(2 - 3\frac{1}{n} + 7\frac{1}{n^2})} = +\infty \cdot \frac{1}{2} = +\infty.$$

3.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{5n^2 + 3n - 6}{n^3 + 4n + 1} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^2(5 + 3\frac{1}{n} - \frac{6}{n^2})}{n^3(1 + 4\frac{1}{n^2} + \frac{1}{n^3})} = 0 \cdot 5 = 0.$$

Subşiruri ale şirurilor mărginite şi nemărginite

A fost deja observat că nu orice şir monoton este convergent. Totuşi, cu ajutorul teoremei de convergenţă a şirurilor monotone, putem arăta că din orice şir mărginit se poate extrage un subşir convergent, acest lucru reprezentând obiectul următorului rezultat, numit şi *Lema lui Césaro*.

Teorema 2.32. *Orice şir mărginit $(x_n)_{n\geq 0}$ conţine un subşir convergent.*

Demonstraţie. Fie $(x_n)_{n\geq 0}$ un şir mărginit şi fie $A = \{x_0, x_1, \ldots, x_n, \ldots\}$ mulţimea termenilor săi. Notăm $a_0 = \inf A$, $b_0 = \sup A$. Conform definiţiilor marginii inferioare şi marginii superioare, $a_0 \leq x_n \leq b_0$ pentru orice $n \geq 0$, deci, în particular, $a_0 < x_0 < b_0$; fie $k_0 = 0$. În plus, măcar unul dintre intervalele $[a_0, \frac{a_0+b_0}{2}]$ şi $[\frac{a_0+b_0}{2}, b_0]$ conţine o infinitate de termeni ai şirului $(x_n)_{n\geq 0}$, deci şi o infinitate de elemente ale mulţimii $A_1 = \{x_n; n > k_0\}$. Pentru fixarea ideilor, fie acesta $[a_0, \frac{a_0+b_0}{2}]$. Notăm atunci $a_1 = a_0$ şi $b_1 = \frac{a_0+b_0}{2}$ şi observăm că

$$b_1 - a_1 = \frac{b_0 - a_0}{2}, \quad a_1 \geq a_0, \quad b_1 \leq b_0.$$

De asemenea, putem alege un termen x_{k_1} al şirului astfel ca $x_{k_1} \in [a_1, b_1]$. Din nou, măcar unul dintre intervalele $[a_1, \frac{a_1+b_1}{2}]$ şi $[\frac{a_1+b_1}{2}, b_1]$ conţine o infinitate de elemente ale mulţimii $A_2 = \{x_n, n > k_1\}$; notăm acest interval $[a_2, b_2]$ şi observăm că

$$b_2 - a_2 = \frac{b_0 - a_0}{2^2}, \quad a_2 \geq a_1 \geq a_0, \quad b_2 \leq b_1 \leq b_0,$$

putând alege un termen x_{k_2} al şirului, $k_2 > k_1$, astfel ca $x_{k_2} \in [a_2, b_2]$. Procedând iterativ, putem construi trei şiruri $(a_n)_{n\geq 0}$, $(b_n)_{n\geq 0}$ şi $(x_{k_n})_{n\geq 0}$ astfel încât $(a_n)_{n\geq 0}$ este crescător, $(b_n)_{n\geq 0}$ este descrescător,

$$a_n \leq x_{k_n} \leq b_n \text{ pentru orice } n \geq 0, \text{ iar } b_n - a_n = \frac{b_0 - a_0}{2^n}.$$

Mai mult, deoarece $[a_n, b_n] \subset [a_0, b_0]$ pentru orice $n \geq 0$, şirurile $(a_n)_{n\geq 0}$, $(b_n)_{n\geq 0}$ sunt mărginite. Fiind şi monotone, ele sunt convergente; fie $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = l_1$, $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = l_2$. Deoarece $b_n - a_n = \frac{b_0-a_0}{2^n}$, urmează că $l_1 = l_2$, iar întrucât

$$a_n \leq x_{k_n} \leq b_n \text{ pentru orice } n \geq 0, \text{ iar } \lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n = l_1$$

urmează conform Teoremei 2.17 (criteriul cleştelui) că $\lim\limits_{n\to\infty} x_{k_n}$ este convergent, având aceeaşi limită l_1. ■

În mod asemănător, putem observa că şirurile nemărginite conţin subşiruri cu limită infinită.

Teorema 2.33. *Fie $(x_n)_{n\geq 0}$ un şir.*

1. *Dacă $(x_n)_{n\geq 0}$ este nemărginit superior, atunci el conţine un subşir cu limita $+\infty$.*

2. *Dacă $(x_n)_{n\geq 0}$ este nemărginit inferior, atunci el conţine un subşir cu limita $-\infty$.*

Demonstraţie. 1. Fie $A = \{x_0, x_1, \ldots, x_n, \ldots\}$ mulţimea termenilor şirului $(x_n)_{n\geq 0}$. Cum A este nemărginită, există $x \in A$ astfel ca $x > 0$. Deoarece $x \in A$ există $k_0 \in \mathbb{N}$ astfel ca $x = x_{k_0}$. Cum $A_1 = \{x_k; k > k_0\}$ este de asemenea nemărginită, există $y \in A$ astfel ca $y > 1$, deci există $k_1 > k_0$ astfel ca $x_{k_1} > 1$. Procedând iterativ, putem construi un şir $(x_{k_n})_{n\geq 0}$ astfel încât $x_{k_n} > n$ pentru orice $n \in \mathbb{N}$, iar conform criteriului majorării (Teorema 2.14) se obţine că $\lim\limits_{n\to\infty} x_{k_n} = \infty$. Cea de-a două afirmaţie se demonstrează analog. ■

2.2.7 Puncte limită ale unui şir

Fie $(x_n)_{n\geq 0}$ un şir dat. Vom numi *mulţimea punctelor limită* ale şirului $(x_n)_{n\geq 0}$, notată $\mathop{\mathrm{LIM}}\limits_{n\to\infty} x_n$, mulţimea tuturor limitelor de subşiruri ale lui $(x_n)_{n\geq 0}$.

Mai întâi se observă că mulţimea punctelor limită ale unui şir $(x_n)_{n\geq 0}$ dat este totdeauna nevidă. Mai precis, dacă şirul este mărginit, atunci el conţine un subşir convergent (Teorema 2.32), cu o limită oarecare l, iar în această situaţie $l \in \mathop{\mathrm{LIM}}\limits_{n\to\infty} x_n$. Dacă şirul este nemărginit superior (respectiv superior), atunci $+\infty \in \mathop{\mathrm{LIM}}\limits_{n\to\infty} x_n$ (respectiv $-\infty \in \mathop{\mathrm{LIM}}\limits_{n\to\infty} x_n$), conform Teoremei 2.33.

Exemplu
Fie $(x_n)_{n\geq 0}$: $x_n = (-1)^n$. Atunci $\mathop{\mathrm{LIM}}\limits_{n\to\infty} x_n = \{-1, 1\}$. În acest scop, se observă că orice subşir cu limită (care este în mod necesar finită, deoarece $(x_n)_{n\geq 0}$ este mărginit) $(x_{k_n})_{n\geq 0}$ al lui $(x_n)_{n\geq 0}$ este constant de la un rang încolo, fiind un şir convergent de numere întregi. Fiind constant de la un rang încolo, termenii săi sunt toţi egali cu 1 sau -1 începând cu acel rang, iar $(x_{k_n})_{n\geq 0}$ poate avea fie limita 1, fie limita -1.

Conform definiţiei, se pot observa următoarele proprietăţi.

1. Dacă o infinitate de termeni ai unui şir $(x_n)_{n\geq 0}$ sunt egali cu un acelaşi număr real x, atunci putem construi un subşir convergent la x cu termenii în cauză, deci $x \in \operatorname*{LIM}_{n\to\infty} x_n$.

2. Dacă un şir $(x_n)_{n\geq 0}$ are limita l, finită sau nu, atunci $l \in \operatorname*{LIM}_{n\to\infty} x_n$, pe post de subşir convergent la l putând lua chiar şirul $(x_n)_{n\geq 0}$.

3. Există şiruri care au o infinitate de puncte limită. De exemplu, pentru

$$(x_n)_{n\geq 0} : 1, 1, 2, 1, 2, 3, 1, 2, 3, 4, \ldots, 1, 2, 3, \ldots n, \ldots,$$

   orice număr natural este punct limită, întrucât $(x_n)_{n\geq 0}$ conţine toate numerele naturale, repetate de o infinitate de ori.

4. Dacă $l \in \operatorname*{LIM}_{n\to\infty} x_n$, atunci orice vecinătate V a lui l conţine o infinitate de termeni ai şirului $(x_n)_{n\geq 0}$, deoarece există un subşir $(x_{k_n})_{n\geq 0}$ al lui $(x_n)_{n\geq 0}$ care este convergent la l şi deci V conţine toţi termenii subşirului $(x_{k_n})_{n\geq 0}$ de la un rang încolo.

Teorema 2.34. *Fie $(x_n)_{n\geq 0}$ un şir de numere reale. Atunci $(x_n)_{n\geq 0}$ are limită dacă şi numai dacă $\operatorname*{LIM}_{n\to\infty} x_n$ se reduce la un singur element.*

Demonstraţie. „$\Leftarrow$" Fie $\lim_{n\to\infty} x_n = l$. Deoarece $(x_n)_{n\geq 0}$ are limita l, orice subşir al său are aceeaşi limită, iar $\operatorname*{LIM}_{n\to\infty} x_n = l$.

„$\Rightarrow$" Fie $\operatorname*{LIM}_{n\to\infty} x_n = l$ şi $V \in \mathcal{V}(l)$ o vecinătate arbitrară a lui V. Atunci în afara lui V se pot afla doar un număr finit de termeni ai şirului, în caz contrar din aceşti termeni putându-se extrage un şir cu limită, alta decât l, deoarece aceşti termeni se află în afara vecinătăţii V, contradicţie. ■

Limita superioară şi limita inferioară a unui şir

Fie $(x_n)_{n\geq 0}$ un şir de numere reale şi fie şirurile $(a_n)_{n\geq 0}$ şi $(b_n)_{n\geq 0}$ definite prin

$$a_n = \inf_{k\geq n} x_k = \inf \{x_n, x_{n+1}, \ldots\}$$
$$b_n = \sup_{k\geq n} x_k = \sup \{x_n, x_{n+1}, \ldots\}.$$

Cum $\{x_{n+1}, \ldots\} \subseteq \{x_n, x_{n+1}, \ldots\}$, urmează că $a_n \leq a_{n+1}$ şi $b_n \geq b_{n+1}$ pentru orice $n \geq 0$, deci $(a_n)_{n\geq 0}$ este monoton crescător, iar $(b_n)_{n\geq 0}$ este monoton descrescător.

Cum $(a_n)_{n\geq 0}$ şi $(b_n)_{n\geq 0}$ sunt monotone, ele admit limite. De asemenea, se observă că $a_n \leq b_n$ pentru orice $n \geq 0$.

Vom numi atunci *limită superioară* a şirului $(x_n)_{n\geq 0}$, notată $\limsup\limits_{n\to\infty} x_n$ sau $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, x_n$, limita şirului $(b_n)_{n\geq 0}$. Similar, vom numi *limită inferioară* a şirului $(x_n)_{n\geq 0}$, notată $\liminf\limits_{n\to\infty} x_n$ sau $\underline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, x_n$, limita şirului $(a_n)_{n\geq 0}$. Deoarece $a_n \leq b_n$ pentru orice $n \geq 0$, urmează că

$$\liminf_{n\to\infty} x_n \leq \limsup_{n\to\infty} x_n.$$

Exemplu

Fie $(x_n)_{n\geq 0}$: $x_n = 2\sin\frac{n\pi}{3} + (-1)^n$. Pentru $n = 6k$, $k \geq 0$, urmează că $x_{6k} = \sin(2k\pi) + 1 = 1$. Similar, $x_{6k+1} = \frac{\sqrt{3}}{2} - 1$, $x_{6k+2} = \frac{\sqrt{3}}{2} + 1$, $x_{6k+3} = -1$, $x_{6k+4} = -\frac{\sqrt{3}}{2} + 1$, $x_{6k+5} = -\frac{\sqrt{3}}{2} - 1$. Cum fiecare dintre aceste subşiruri este convergent, fiind constant, urmează că $\liminf\limits_{n\to\infty} x_n = -\frac{\sqrt{3}}{2} - 1$, $\limsup\limits_{n\to\infty} x_n = \frac{\sqrt{3}}{2} + 1$.

Dacă $(x_n)_{n\geq 0}$ este mărginit superior, există $M \in \mathbb{R}$ astfel ca $x_n \leq M$ pentru orice $n \geq 0$. Urmează că de asemenea $b_n \leq M$ pentru orice $n \geq 0$, deci $\limsup\limits_{n\to\infty} x_n (= \lim\limits_{n\to\infty} b_n)$ este finită. Similar, dacă $(x_n)_{n\geq 0}$ este mărginit inferior, atunci $\liminf\limits_{n\to\infty} x_n$ este finită. De asemenea, conform Teoremei 2.33, dacă $(x_n)_{n\geq 0}$ este nemărginit superior, atunci $\limsup\limits_{n\to\infty} x_n = +\infty$, iar dacă $(x_n)_{n\geq 0}$ este nemărginit inferior, atunci $\liminf\limits_{n\to\infty} x_n = -\infty$.

Fie acum $l \in \operatorname*{LIM}\limits_{n\to\infty} x_n$. Există atunci un subşir $(x_{k_n})_{n\geq 0}$ astfel ca $\lim\limits_{n\to\infty} x_{k_n} = l$. Cum

$$\inf_{n_1\geq k_n} x_n \leq x_{k_n} \leq \sup_{n_1\geq k_n} \text{ pentru orice } k_n \geq 0,$$

urmează că

$$a_{k_n} \leq x_{k_n} \leq b_{k_n} \text{ pentru orice } k_n \geq 0,$$

iar trecând la limită în aceste inegalităţi obţinem că

$$\liminf_{n\to\infty} x_n \leq l \leq \limsup_{n\to\infty} x_n.$$

Mai mult, se poate demonstra că $\limsup\limits_{n\to\infty} x_n \in \operatorname*{LIM}\limits_{n\to\infty} x_n$, deci $\limsup\limits_{n\to\infty} x_n$ este cel mai mare punct limită al şirului $(x_n)_{n\geq 0}$. Similar, $\liminf\limits_{n\to\infty} x_n \in \operatorname*{LIM}\limits_{n\to\infty} x_n$, deci $\liminf\limits_{n\to\infty} x_n$ este cel mai mic punct limită al şirului $(x_n)_{n\geq 0}$. În plus, deoarece

$$a_n = \inf_{k\geq n} x_k \geq \inf_{k\geq 0} x_k, \quad b_n = \sup_{k\geq n} x_k \leq \sup_{k\geq 0} x_k,$$

urmează că

$$\inf_{k\geq 0} x_k \leq \liminf_{n\to\infty} x_n \leq \limsup_{n\to\infty} x_n \leq \sup_{k\geq 0} x_k,$$

deci $\underset{n\to\infty}{\text{LIM}}\, x_n$ este cuprinsă între marginea inferioară şi marginea superioară a termenilor şirului. Teorema 2.34 se poate reformula atunci sub forma următoare.

Teorema 2.35. *Fie $(x_n)_{n\geq 0}$ un şir de numere reale. Atunci $(x_n)_{n\geq 0}$ are limită dacă şi numai dacă $\liminf_{n\to\infty} x_n = \limsup_{n\to\infty} x_n$. În această situaţie,*

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \liminf_{n\to\infty} x_n = \limsup_{n\to\infty} x_n.$$

Exemplul următor indică faptul că, dat fiind un şir $(x_n)_{n\geq 0}$, nu trebuie confundat $\limsup_{n\to\infty} x_n$ cu $\sup_{n\geq 0} x_n$ şi nici $\liminf_{n\to\infty} x_n$ cu $\inf_{n\geq 0} x_n$. Acest lucru este dealtfel evident din faptul că $\limsup_{n\to\infty} x_n$ şi $\liminf_{n\to\infty} x_n$, fiind puncte limită, nu sunt influenţate de valorile primilor termeni ai şirului $(x_n)_{n\geq 0}$, pe când $\sup_{n\geq 0} x_n$ şi $\inf_{n\geq 0} x_n$ da.

Exemplu

Fie $(x_n)_{n\geq 0}$: $x_n = (-1)^n \frac{n+2}{n+1}$. Atunci $x_{2n} = \frac{2n+2}{2n+1}$, care este strict descrescător cu limita 1, iar $x_{2n+1} = -\frac{2n+4}{2n+3}$, care este strict crescător, cu limita -1. Atunci $\limsup_{n\to\infty} x_n = 1$, $\liminf_{n\to\infty} x_n = -1$, $\sup_{n\geq 0} x_n = x_0 = 2$, $\inf_{n\geq 0} x_n = x_1 = -\frac{3}{2}$.

Totuşi, $\limsup_{n\to\infty} x_n$ şi $\liminf_{n\to\infty} x_n$ reţin unele proprietăţi de mărginire caracteristice $\sup_{n\geq 0} x_n$ şi $\inf_{n\geq 0} x_n$, chiar dacă într-o formă mai slabă. Aceste proprietăţi sunt cuprinse în următorul rezultat. Reamintim că

$$x_n \leq \sup_{n\geq 0} x_n \text{ pentru orice } n \geq 0, \quad x_n \geq \inf_{n\geq 0} x_n \text{ pentru orice } n \geq 0.$$

Teorema 2.36. *Fie $(x_n)_{n\geq 0}$ un şir mărginit şi fie $\varepsilon > 0$. Atunci*

1. *Există $n_\varepsilon^1 \in \mathbb{N}$ astfel că $x_n < \limsup_{n\to\infty} x_n + \varepsilon$ pentru orice $n \geq n_\varepsilon^1$.*

2. *Există $n_\varepsilon^2 \in \mathbb{N}$ astfel că $x_n > \liminf_{n\to\infty} x_n - \varepsilon$ pentru orice $n \geq n_\varepsilon^2$.*

Demonstraţie. Presupunem prin reducere la absurd că prima proprietate nu este adevărată. Există atunci $\varepsilon > 0$ astfel încât pentru orice $n_\varepsilon^1 \in \mathbb{N}$ există $n \geq n_\varepsilon^1$ astfel că $x_n \geq \limsup_{n\to\infty} x_n + \varepsilon$.

Pentru $n_\varepsilon^1 = 0$, există k_0 astfel ca $x_{k_0} \geq \limsup_{n\to\infty} x_n + \varepsilon$. Pentru $n_\varepsilon^1 = k_0 + 1$, obţinem că există $k_1 \geq n_0 + 1 > n_0$ astfel ca $x_{k_1} \geq \limsup_{n\to\infty} x_n + \varepsilon$. Procedând iterativ, obţinem existenţa unui subşir $(x_{k_m})_{m\geq 0}$ cu proprietatea că

$$x_{k_m} \geq \limsup_{n\to\infty} x_n + \varepsilon \text{ pentru orice } m \geq 0.$$

Cum $(x_{k_m})_{m\geq 0}$ este mărginit, fiind subşir al şirului iniţial $(x_n)_{n\geq 0}$, urmează că $(x_{k_m})_{m\geq 0}$ are la rândul lui un subşir convergent la o limită finită l. Conform proprietăţii de trecere la limită în inegalităţi, urmează că

$$l \geq \limsup_{n\to\infty} x_n + \varepsilon,$$

ceea ce contrazice faptul că

$$l \leq \limsup_{n\to\infty} x_n,$$

deoarece l este un punct limită al şirului $(x_n)_{n\geq 0}$. Cea de-a doua proprietate se demonstrează analog.

■

2.2.8 Şiruri fundamentale (Cauchy)

În cazurile în care limita unui şir este dificit de intuit sau determinat numeric, poate fi util un criteriu de convergenţă care să nu facă apel la determinarea limitei şirului. Consideraţiile de mai jos permit demonstrarea convergenţei unui şir fără determinarea limitei acestuia.

Fie $(x_n)_{n\geq 0}$ un şir. Spunem că $(x_n)_{n\geq 0}$ este *şir fundamental*, sau *şir Cauchy*, dacă pentru orice $\varepsilon > 0$ există un rang $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ astfel încât $|x_n - x_m| \leq \varepsilon$ pentru orice $m, n \geq n_\varepsilon$.

Echivalent, $(x_n)_{n\geq 0}$ este *şir Cauchy* dacă pentru orice $\varepsilon > 0$ există un rang $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ astfel încât $|x_n - x_{n+p}| \leq \varepsilon$ pentru orice $n \geq n_\varepsilon$ şi orice $p \geq 0$. Intuitiv, într-un şir Cauchy toţi termenii sunt apropiaţi unul de celălalt de la un rang încolo.

Teorema 2.37. *Fie $(x_n)_{n\geq 0}$ un şir Cauchy. Atunci $(x_n)_{n\geq 0}$ este mărginit.*

Demonstraţie. Conform definiţiei şirului Cauchy, aplicată pentru $\varepsilon = 1$, există un rang $n_1 \in \mathbb{N}$ astfel ca $|x_n - x_m| \leq 1$ pentru orice $m, n \geq n_1$. Fixând $m = n_1$, urmează că $|x_n - x_{n_1}| \leq 1$ pentru orice $n \geq n_1$, deci $-1 + x_{n_1} \leq x_n \leq 1 + x_{n_1}$ pentru orice $n \geq n_1$. Pentru a obţine inegalităţi valabile şi pentru x_0, $x_1 \ldots x_{n_1-1}$, observăm că, pentru orice $n \geq 0$,

$$\min(x_0, x_1, \ldots x_{n_1-1}, -1 + x_{n_1}) \leq x_n \leq \max(x_0, x_1, \ldots x_{n_1-1}, 1 + x_{n_1}),$$

deci $(x_n)_{n\geq 0}$ este mărginit. ■

În particular, fiind mărginit, orice şir Cauchy $(x_n)_{n\geq 0}$ admite un subşir convergent.

Teorema 2.38. *Fie $(x_n)_{n\geq 0}$ un şir de numere reale. Atunci $(x_n)_{n\geq 0}$ este şir Cauchy dacă şi numai dacă este convergent.*

Demonstraţie. „$\Rightarrow$". Fie $(x_n)_{n\geq 0}$ un şir Cauchy. Atunci el conţine un subşir convergent $(x_{k_n})_{n\geq 0}$; fie x limita acestuia. Fie de asemenea $\varepsilon > 0$ arbitrar. Pentru orice $n \geq 0$, are loc inegalitatea

$$|x_n - x| \leq |x_n - x_{k_n}| + |x_{k_n} - x|,$$

în care dorim să estimăm fiecare termen din membrul drept.

Cum $\lim\limits_{n\to\infty} x_{k_n} = x$, există un rang $n_\varepsilon^1 \in N$ astfel ca $|x_{k_n} - x| < \frac{\varepsilon}{2}$ pentru orice $n \geq n_1$.

În plus, cum $(x_n)_{n\geq 0}$ este şir Cauchy, există un rang $n_\varepsilon^2 \in N$ astfel ca $|x_m - x_n| \leq \frac{\varepsilon}{2}$ pentru orice $m, n \geq \frac{\varepsilon}{2}$. Deoarece $k_n \geq n$, urmează că $|x_n - x_{k_n}| \leq \frac{\varepsilon}{2}$ pentru $n \geq n_\varepsilon^2$.

Atunci, pentru $n \geq \max(n_\varepsilon^1, n_\varepsilon^2)$, au loc inegalităţile

$$|x_n - x| \leq |x_n - x_{k_n}| + |x_{k_n} - x| \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Cum ε era arbitrar, urmează că $(x_n)_{n\geq 0}$ este convergent la x.

„$\Leftarrow$". Fie $(x_n)_{n\geq 0}$ un şir convergent şi fie x limita sa. Fie de asemenea $\varepsilon > 0$ arbitrar. Deoarece $(x_n)_{n\geq 0}$ este convergent, urmează că există un rang $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ astfel ca $|x_n - l| < \frac{\varepsilon}{2}$ pentru orice $n \geq n_\varepsilon$. Atunci

$$|x_n - x_m| \leq |x_n - x| + |x - x_m| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} \text{ pentru orice } n \geq n_\varepsilon.$$

Cum ε era arbitrar, urmează că $(x_n)_{n\geq 0}$ este şir Cauchy. ■

Exerciţiu
Fie $(x_n)_{n\geq 1}$: $x_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n}$. Demonstraţi că $(x_n)_{n\geq 1}$ nu este convergent.

Soluţie

Vom arăta că $(x_n)_{n\geq 1}$ nu este şir Cauchy. Să presupunem prin reducere la absurd că $(x_n)_{n\geq 1}$ este şir Cauchy. Conform definiţiei şirului Cauchy, aplicată pentru $\varepsilon = \frac{1}{3}$, există un rang $n_1 \in \mathbb{N}$ astfel ca $|x_n - x_m| \leq \frac{1}{3}$ pentru orice $m, n \geq n_1$. În particular, pentru $m = 2n$, urmează că

$$|x_n - x_{2n}| \leq \frac{1}{3} \text{ pentru orice } n \geq n_1.$$

De asemenea,

$$|x_n - x_{2n}| = \left| \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \ldots + \frac{1}{2n} \right| \geq n \cdot \frac{1}{2n} = \frac{1}{2},$$

contradicţie. Urmează că $(x_n)_{n\geq 1}$ nu este şir Cauchy, deci nu este nici convergent.
■

Exerciţiu
Fie $(x_n)_{n\geq 1}$: $x_n = \frac{\cos x}{2} + \frac{\cos 2x}{2^2} + \ldots + \frac{\cos nx}{2^n}$. Demonstraţi că $(x_n)_{n\geq 1}$ este convergent.

Soluţie

Vom arăta că $(x_n)_{n\geq 1}$ este şir Cauchy. Mai întâi, observăm că au loc inegalităţile

$$\begin{aligned}
|x_{n+p} - x_n| &= \left| \frac{\cos(n+1)x}{2^{n+1}} + \frac{\cos(n+2)x}{2^{n+2}} + \ldots + \frac{\cos(n+p)x}{2^{n+p}} \right| \\
&\leq \left| \frac{\cos(n+1)x}{2^{n+1}} \right| + \left| \frac{\cos(n+2)x}{2^{n+2}} \right| + \ldots + \left| \frac{\cos(n+p)x}{2^{n+p}} \right| \\
&\leq \frac{1}{2^{n+1}} + \frac{1}{2^{n+2}} + \ldots + \frac{1}{2^{n+p}} = \frac{1}{2^{n+1}} \left(1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{2^{p-1}} \right) \\
&= \frac{1}{2^{n+1}} \frac{1 - \frac{1}{2^p}}{1 - \frac{1}{2}} < \frac{1}{2^{n+1}} \cdot 2 = \frac{1}{2^n}.
\end{aligned}$$

Fie $\varepsilon > 0$. Deoarece $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{2^n} = 0$, există un rang $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ astfel ca $\frac{1}{2^n} < \varepsilon$ pentru $n \geq n_\varepsilon$. De aici,

$$|x_{n+p} - x_n| < \varepsilon \text{ pentru orice } n \geq n_\varepsilon \text{ şi orice } p \geq 0.$$

Urmează că $(x_n)_{n\geq 1}$ este şir Cauchy, deci este convergent. ■

2.2.9 Criterii de convergenţă utilizând raportul $\dfrac{x_{n+1}}{x_n}$

Prezentăm mai întâi o inegalitate între limitele unor şiruri de radicali, respectiv rapoarte, asociate unui şir cu termeni strict pozitivi.

Teorema 2.39. *Fie $(x_n)_{n\geq 0}$ un şir cu termeni strict pozitivi. Are loc inegalitatea*

$$\liminf_{n\to\infty}\frac{x_{n+1}}{x_n} \leq \liminf_{n\to\infty}\sqrt[n]{x_n} \leq \limsup_{n\to\infty}\sqrt[n]{x_n} \leq \limsup_{n\to\infty}\frac{x_{n+1}}{x_n}.$$

Demonstraţie. Demonstrăm mai întâi că

$$\limsup_{n\to\infty}\sqrt[n]{x_n} \leq \limsup_{n\to\infty}\frac{x_{n+1}}{x_n}.$$

Fie $L = \limsup\limits_{n\to\infty}\frac{x_{n+1}}{x_n}$. Dacă $L = +\infty$, inegalitatea de mai sus este evidentă. Presupunem acum că $L < +\infty$ şi fie $\varepsilon > 0$.

Cum $\limsup\limits_{n\to\infty}\frac{x_{n+1}}{x_n} < L + \varepsilon$, urmează conform Teoremei 2.36 că există n_1^ε astfel ca $\frac{x_{n+1}}{x_n} < (L+\varepsilon) + \varepsilon$ pentru orice $n \geq n_1^\varepsilon$. De aici

$$x_n = \frac{x_n}{x_{n-1}}\frac{x_{n-1}}{x_{n-2}}\ldots\frac{x_{n_1^\varepsilon+1}}{x_{n_1^\varepsilon}}x_{n_1^\varepsilon} < x_{n_1}(L+2\varepsilon)^{n-n_1^\varepsilon} \text{ pentru orice } n \geq n_1^\varepsilon,$$

de unde

$$\sqrt[n]{x_n} < \sqrt[n]{x_{n_1}}(L+2\varepsilon)^{1-\frac{n_1^\varepsilon}{n}} \text{ pentru orice } n \geq n_1^\varepsilon,$$

iar

$$\limsup_{n\to\infty}\sqrt[n]{x_n} \leq L + 2\varepsilon,$$

prin trecere la limită superioară. Cum $\varepsilon > 0$ era arbitrar, urmează că $\limsup\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{x_n} \leq L$, ceea ce trebuia demonstrat. Cea de-a doua inegalitate se demonstrează analog. ■

Conform Teoremei 2.35, din rezultatul de mai sus se poate deduce imediat următorul criteriu de existenţă a limitei radicalului de ordin n al unui şir dat. În acest mod se poate reduce calculul unor limite care conţin radicali de ordin n la calculul unor limite de rapoarte, care pot fi mai simple decât cele dintâi.

Teorema 2.40. *Fie $(x_n)_{n\geq 0}$ un şir cu termeni strict pozitivi. Dacă există $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{x_{n+1}}{x_n} = l \in \overline{\mathbb{R}}$, atunci există şi $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{x_n} = l$.*

Exerciţiu

Demonstraţi că

1. $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = 1$, unde $a > 0$.

2. $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$.

Soluţie

1. Fie $(x_n)_{n\geq 2}$: $x_n = a$. Atunci $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{x_{n+1}}{x_n} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{a}{a} = 1$, deci de asemenea $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{x_n} = \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = 1$.

2. Fie $(x_n)_{n\geq 2}$: $x_n = n$. Atunci $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{x_{n+1}}{x_n} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{n+1}{n} = 1$, deci de asemenea $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{x_n} = \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$. ■

Convergenţa şi divergenţa şirului $(a_n)_{n\geq 0}$: $a_n = l^n$, pentru care raportul $\dfrac{a_{n+1}}{a_n}$ are valoarea constantă $l \in [0, \infty)$, a fost discutată anterior. În cele ce urmează, vom observa că un şir cu termeni strict pozitivi $(x_n)_{n\geq 0}$ pentru care raportul $\dfrac{x_{n+1}}{x_n}$ are limita l, fără a fi neapărat constant, are aceeaşi convergenţă sau divergenţă cu $(a_n)_{n\geq 0}$, cu excepţia eventuală a cazului în care $l = 1$.

Teorema 2.41. *Fie $(x_n)_{n\geq 0}$ un şir cu termeni strict pozitivi. Dacă există $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{x_{n+1}}{x_n} = l \in \overline{\mathbb{R}}$, atunci*

1. *Dacă $l \in [0, 1)$, atunci $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$.*

2. *Dacă $l \in (1, \infty]$, atunci $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = +\infty$.*

3. *Dacă $l = 1$, atunci $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$ nu poate fi precizată a priori cu ajutorul limitei raportului (spunem că este un caz de dubiu).*

Demonstraţie. Fie $l \in [0, 1)$. Există atunci $\varepsilon > 0$ astfel ca $l + \varepsilon < 1$. Există de asemenea $n_1^\varepsilon \in \mathbb{N}$ astfel ca $\left|\lim\limits_{n\to\infty} \frac{x_{n+1}}{x_n} - l\right| < \varepsilon$ pentru orice $n \geq n_1^\varepsilon$. Urmează că

$$x_n = \frac{x_n}{x_{n-1}} \frac{x_{n-1}}{x_{n-2}} \cdots \frac{x_{n_1^\varepsilon+1}}{x_{n_1^\varepsilon}} x_{n_1^\varepsilon} < x_{n_1}(l+\varepsilon)^{n-n_1^\varepsilon} = x_{n_1}(l+\varepsilon)^{-n_1^\varepsilon}(l+\varepsilon)^n.$$

Cum $l + \varepsilon < 1$, urmează că $\lim\limits_{n\to\infty} (l+\varepsilon)^n = 0$. Deoarece $(x_n)_{n\geq 0}$ este un şir cu termeni strict pozitivi, se obţine conform criteriului cleştelui că $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$. Cea de-a doua afirmaţie se poate demonstra analog. Pentru cea de-a treia, fie $(x_n)_{n\geq 0}$:

$x_n = n$. Atunci $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{x_{n+1}}{x_n} = 1$, iar $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = +\infty$. Fie de asemenea $(x_n)_{n\geq 1}$: $x_n = \frac{1}{n}$. Atunci $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{x_{n+1}}{x_n} = 1$, iar $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$. În concluzie, dacă $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{x_{n+1}}{x_n} = 1$, atunci $(x_n)_{n\geq 0}$ poate fi atât convergent cât şi divergent. ■

Exerciţiu

Demonstraţi că

1. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a^n}{n!} = 0$, unde $a > 0$.
2. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^k}{a^n} = 0$, unde $a > 1$, $k > 0$.

Soluţie

1. Fie $(x_n)_{n\geq 0}$: $x_n = \frac{a^n}{n!}$. Atunci

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_{n+1}}{x_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{a^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{a^n}{n!}} = \lim_{n\to\infty} \frac{a}{n+1} = 0,$$

deci de asemenea $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$.

2. Fie $(x_n)_{n\geq 0}$: $x_n = \frac{n^k}{a^n}$. Atunci

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_{n+1}}{x_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{(n+1)^k}{a^{n+1}}}{\frac{n^k}{a^n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{n} \cdot \frac{1}{a} = \frac{1}{a} \in (0,1),$$

deci $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$. ■

Cea de-a doua proprietate poate fi exprimată prescurtat prin faptul că funcţia exponenţială creşte mai rapid către $+\infty$ decât funcţia putere.

Exerciţiu

Determinaţi

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2\cdot 4\cdot 6\cdot \ldots \cdot (2n+2)}{1\cdot 4\cdot 7\cdot \ldots \cdot (3n+1)}.$$

Soluţie

Fie $(x_n)_{n\geq 0}$: $x_n = \frac{2\cdot 4\cdot 6\cdot \ldots \cdot (2n+2)}{1\cdot 4\cdot 7 \ldots \cdot (3n+1)}$. Atunci

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_{n+1}}{x_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{2\cdot 4\cdot 6\cdot \ldots \cdot (2n+2)\cdot (2n+4)}{1\cdot 4\cdot 7\cdot \ldots \cdot (3n+1)\cdot (3n+4)}}{\frac{2\cdot 4\cdot 6\cdot \ldots \cdot (2n+2)}{1\cdot 4\cdot 7\cdot \ldots \cdot (3n+1)}} = \lim_{n\to\infty} \frac{2n+4}{3n+4} = \frac{2}{3} \in (0,1),$$

deci $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$. ■

2.2.10 Teoremele Stolz-Césaro

Teoremele următoare, numite şi *Teoremele Stolz-Césaro*, sunt aplicabile limitelor de rapoarte de şiruri de forma $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n}$, care pot fi reduse la calculul unor limite de rapoarte de şiruri de forma $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}-a_n}{b_{n+1}-b_n}$, posibil mai simple, mai ales dacă $(a_n)_{n\geq 0}$ şi $(b_n)_{n\geq 0}$ sunt definite cu ajutorul unor sume. Ele sunt denumite respectiv *Teorema Stolz-Césaro pentru cazul de nedeterminare* $\frac{\infty}{\infty}$ şi *Teorema Stolz-Césaro pentru cazul de nedeterminare* $\frac{\infty}{\infty}$ pentru a indica situaţiile uzuale de aplicabilitate, deşi numai limita numitorului este cerută în mod explicit a fi $+\infty$, respectiv 0.

Teorema 2.42. *Fie $(a_n)_{n\geq 0}$ şi $(b_n)_{n\geq 0}$ două şiruri de numere reale astfel încât*

1. *$(b_n)_{n\geq 0}$ este strict crescător şi $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = +\infty$.*
2. *Există $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}-a_n}{b_{n+1}-b_n} = l \in \overline{\mathbb{R}}$.*

Atunci există şi $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = l$.

Exerciţiu
Determinaţi

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1+\sqrt{2}+\sqrt[3]{3}+\ldots+\sqrt[n]{n}}{1+\sqrt{2}+\sqrt{3}+\ldots+\sqrt{n}}.$$

Soluţie
Fie

$$\begin{aligned} (a_n)_{n\geq 0} : a_n &= 1+\sqrt{2}+\sqrt[3]{3}+\ldots+\sqrt[n]{n} \\ (b_n)_{n\geq 0} : b_n &= 1+\sqrt{2}+\sqrt{3}+\ldots+\sqrt{n} \end{aligned}$$

Deoarece $b_{n+1} - b_n = \sqrt{n} > 0$, urmează că $(b_n)_{n\geq 0}$ este strict crescător. Cum $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt{n} = +\infty$, urmează că $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = +\infty$. În plus,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}-a_n}{b_{n+1}-b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[n+1]{n+1}}{\sqrt{n+1}} = 0,$$

deoarece $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$. Urmează că de asemenea $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = 0$, deci valoarea limitei din enunţ este 0.

■

Exerciţiu
Fie $q \in (0,1)$. Demonstraţi că $\lim\limits_{n\to\infty} nq^n = 0$.

Soluţie

Mai întâi, se observă că

$$\lim_{n\to\infty} nq^n = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{\left(\frac{1}{q}\right)^n}.$$

Fie $(a_n)_{n\geq 0} : a_n = n$, $(b_n)_{n\geq 0} : b_n = \left(\frac{1}{q}\right)^n$. Deoarece $\frac{1}{q} > 1$ iar $b_{n+1} - b_n = \left(\frac{1}{q}\right)^n \left(\frac{1}{q} - 1\right) > 0$, urmează că $(b_n)_{n\geq 0}$ este strict crescător. Cum $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{1}{q}\right)^n = +\infty$, urmează că $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = +\infty$. În plus,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1} - a_n}{b_{n+1} - b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\left(\frac{1}{q}\right)^n \left(\frac{1}{q} - 1\right)} = 0.$$

Urmează că de asemenea $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = 0$, deci valoarea limitei din enunţ este 0. ■

Teorema 2.43. *Fie $(a_n)_{n\geq 0}$ şi $(b_n)_{n\geq 0}$ două şiruri de numere reale astfel încât*

1. *$(b_n)_{n\geq 0}$ este strict descrescător şi $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = 0$.*

2. *Există $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}-a_n}{b_{n+1}-b_n} = l \in \overline{\mathbb{R}}$.*

Atunci există şi $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = l$.

2.2.11 Şiruri cu limita numărul *e*

Vom considera în continuare şirul $(x_n)_{n\geq 0} : x_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$, căruia îi vom demonstra convergenţa.

Teorema 2.44. *Fie $(x_n)_{n\geq 0}$: $x_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$. Atunci $(x_n)_{n\geq 0}$ este strict crescător şi mărginit.*

Demonstraţie. *Monotonie*

Folosind formula binomială, observăm că

$$\begin{aligned} x_n &= \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k \left(\frac{1}{n}\right)^k = 1 + \sum_{k=1}^{n} C_n^k \left(\frac{1}{n}\right)^k \\ &= 1 + \sum_{k=1}^{n} \frac{n(n-1)\ldots(n-(k-1))}{k!} \cdot \frac{1}{n^k} \\ &= 1 + \sum_{k=1}^{n} \left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\ldots\left(1-\frac{k-1}{n}\right)\frac{1}{k!} \end{aligned}$$

Cu acelaşi raţionament,

$$x_{n+1} = 1 + \sum_{k=1}^{n+1} \left(1-\frac{1}{n+1}\right)\left(1-\frac{2}{n+1}\right)\ldots\left(1-\frac{k-1}{n+1}\right)\frac{1}{k!}.$$

Comparând factor cu factor, obţinem că

$$\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\ldots\left(1-\frac{k-1}{n}\right) < \left(1-\frac{1}{n+1}\right)\left(1-\frac{2}{n+1}\right)\ldots\left(1-\frac{k-1}{n+1}\right),$$

pentru orice $1 \leq k \leq n$, deci $x_n < x_{n+1}$, iar $(x_n)_{n\geq 0}$ este strict crescător.

Mărginire

Observăm că

$$x_n = 1 + \sum_{k=1}^{n} \left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\ldots\left(1-\frac{k-1}{n}\right)\frac{1}{k!} \leq 1 + \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k!},$$

iar cum

$$1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot k \leq 1 \cdot 2 \ldots \cdot 2 = 2^{k-1} \text{ pentru } k \geq 2,$$

obţinem că

$$\begin{aligned} x_n &\leq 1 + 1 + \sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k!} \leq 1 + 1 + \sum_{k=2}^{n}\frac{1}{2^{k-1}} = 1 + \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \ldots + \frac{1}{2^{n-1}}\right) \\ &= 1 + \frac{1-\frac{1}{2^n}}{1-\frac{1}{2}} < 3. \end{aligned}$$

Cum $(x_n)_{n\geq 0}$ este monoton crescător, $x_n \geq x_1 = 2$ pentru orice $n \geq 1$. În concluzie

$$2 \leq x_n < 3 \text{ pentru orice } n \geq 1,$$

deci $(x_n)_{n\geq 0}$ este mărginit.

Fiind monoton şi mărginit, $(x_n)_{n\geq 0}$ este convergent. Prin convenţie, se notează cu e limita sa, unde $e = 2.71828....$ ■

Din teorema de mai sus se obţine următoarea egalitate importantă

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e.$$

De asemenea, se observă că

$$\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)^{-n} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{\left(\frac{n-1}{n}\right)^n} = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n-1}\right)^n = \lim_{n\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{n-1}\right)^{n-1}\right]^{\frac{n}{n-1}}$$
$$= e,$$

deci

$$\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)^{-n} = e.$$

Teorema 2.45. *Şirul* $(y_n)_{n\geq 0}$*:* $y_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}$ *este strict descrescător şi convergent la e.*

Demonstraţie. *Monotonie*

Pentru a demonstra că $(y_n)_{n\geq 0}$ este strict descrescător, observăm că

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1} > \left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+2} \Leftrightarrow \left(\frac{n+1}{n}\right)^{n+1} > \left(\frac{n+2}{n+1}\right)^{n+2}$$
$$\Leftrightarrow \frac{n+1}{n+2} > \left(\frac{n(n+2)}{(n+1)^2}\right)^{n+1} \Leftrightarrow \sqrt[n+1]{\frac{n+1}{n+2}} > \frac{n(n+2)}{(n+1)^2}.$$

Aplicând inegalitatea dintre media geometrică şi media armonică numerelor 1, 1,...,1, $\frac{n+1}{n+2}$, obţinem că

$$\sqrt[n+1]{1\cdot 1\cdot\ldots\cdot\frac{n+1}{n+2}} > \frac{n+1}{1+1+\ldots+1+\frac{n+2}{n+1}} = \frac{(n+1)^2}{n^2+2n+2}.$$

Rămâne deci să demonstrăm că

$$\frac{(n+1)^2}{n^2+2n+2} \geq \frac{n(n+2)}{(n+1)^2},$$

ceea ce este imediat, deoarece

$$(n^2+2n+2)n(n+2) = [(n+1)^2+1][(n+1)^2-1] = (n+1)^4-1 < (n+1)^4.$$

Deoarece $(y_n)_{n\geq 1}$ este strict descrescător, el este mărginit superior de y_1. Conform inegalităţii lui Bernoulli,

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1} \geq 1+(n+1)\frac{1}{n} > 2,$$

deci $(y_n)_{n\geq 1}$ este şi mărginit inferior. Cum $(y_n)_{n\geq 1}$ este monoton şi mărginit, el este convergent. În plus

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1} = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right) = e,$$

deci $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = e$. ■

Cum termenii unui şir strict crescător sunt strict mai mici decât valoarea limitei, respectiv termenii unui şir strict descrescător sunt strict mai mari decât valoarea limitei, obţinem din cele de mai sus că

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n} < e < \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1},$$

de unde, prin logaritmare

$$\frac{1}{n+1} < \ln\left(1+\frac{1}{n}\right) < \frac{1}{n}.$$

Câteva consecinţe importante ale convergenţei şirurilor de mai sus, motivate de egalităţile deja obţinute, sunt indicate în cele ce urmează.

Teorema 2.46. *Au loc următoarele proprietăţi.*

1. *Fie $(p_n)_{n\geq 0}$ un şir de numere reale strict pozitive cu $\lim\limits_{n\to\infty} p_n = +\infty$. Atunci $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{p_n}\right)^{p_n} = e$.*

2. *Fie $(m_n)_{n\geq 0}$ un şir de numere reale strict negative cu $\lim\limits_{n\to\infty} m_n = -\infty$. Atunci $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{m_n}\right)^{m_n} = e$.*

3. *Fie $(z_n)_{n\geq 0}$ un şir de numere reale nenule cu $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = 0$. Atunci $\lim\limits_{n\to\infty}(1+z_n)^{\frac{1}{z_n}} = e$.*

Exemple

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2n+1}{2n-1}\right)^{n+1} = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{2}{2n-1}\right)^{n+1} = \lim_{n\to\infty}\left[\left(1+\frac{2}{2n-1}\right)^{\frac{2n-1}{2}}\right]^{\frac{2}{2n-1}(n+1)}$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left[\left(1+\frac{2}{2n-1}\right)^{\frac{2n-1}{2}}\right]^{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2n+2}{2n-1}} = e^2$$

Aici,

$$(z_n)_{n\geq 1} : z_n = \frac{2}{2n-1} \to 0 \text{ pentru } n \to \infty.$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2n^2-n+1}{2n^2+n+1}\right)^{n+2} = \lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{2n}{2n^2+n+1}\right)^{n+2}$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left[\left(1-\frac{2n}{2n^2+n+1}\right)^{\frac{2n^2+n+1}{-2n}}\right]^{\frac{-2n}{2n^2+n+1}(n+2)}$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left[\left(1-\frac{2n}{2n^2+n+1}\right)^{\frac{2n^2+n+1}{-2n}}\right]^{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{-2n^2-4n}{2n^2+n+1}}$$

$$= e^{-1} = \frac{1}{e}.$$

Aici,

$$(z_n)_{n\geq 1} : z_n = \frac{2n}{2n^2+n+1} \to 0 \text{ pentru } n \to \infty.$$

Din Teorema 2.46 se pot deduce de asemenea şi următoarele proprietăţi.

Teorema 2.47. *Fie $(x_n)_{n\geq 0}$ un şir de numere reale nenule cu $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$. Atunci*

1. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\ln(1+x_n)}{x_n} = 1.$

2. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a^{x_n}-1}{x_n} = \ln a$ *pentru orice* $a > 0$.

3. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{(1+x_n)^k-1}{x_n} = k$ *pentru orice* $k \in \mathbb{R}$.

Exerciţiu
Demonstraţi că

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\ln n}{n^k} = 0, \quad k > 0.$$

Soluţie

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\ln n}{n^k} = \lim_{n\to\infty} \frac{\ln(n+1) - \ln n}{(n+1)^k - n^k} = \lim_{n\to\infty} \frac{\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}{\frac{1}{n}} \frac{1}{\frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^k - 1}{n^k}} \frac{\frac{1}{n}}{n^k}$$
$$= \lim_{n\to\infty} \frac{\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}{\frac{1}{n}} \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^k - 1}{n^k}} \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty} n^{k+1}} = 1 \cdot \frac{1}{k} \cdot 0 = 0.$$

■

Proprietatea poate fi exprimată prescurtat prin faptul că funcţia putere creşte mai rapid către $+\infty$ decât funcţia logaritmică.

Exemple 1.

$$\lim_{n\to\infty} n(\sqrt[n]{2} - 1) = \lim_{n\to\infty} \frac{2^{\frac{1}{n}} - 1}{\frac{1}{n}} = \ln 2.$$

2.

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{\sqrt[n]{2} + \sqrt[n]{3}}{2}\right)^n = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{\sqrt[n]{2} + \sqrt[n]{3} - 2}{2}\right)^n$$
$$= \lim_{n\to\infty} \left[\left(1 + \frac{\sqrt[n]{2} + \sqrt[n]{3} - 2}{2}\right)^{\frac{2}{\sqrt[n]{2} + \sqrt[n]{3} - 2}}\right]^{\frac{\sqrt[n]{2} + \sqrt[n]{3} - 2}{2} n}$$
$$= \lim_{n\to\infty} \left[\left(1 + \frac{\sqrt[n]{2} + \sqrt[n]{3} - 2}{2}\right)^{\frac{2}{\sqrt[n]{2} + \sqrt[n]{3} - 2}}\right]^{\lim\limits_{n\to\infty} \frac{(\sqrt[n]{2}-1) + (\sqrt[n]{3}-1)}{2} n}$$
$$= e^{\left(\lim\limits_{n\to\infty} \frac{2^{\frac{1}{n}}-1}{\frac{1}{n}} + \lim\limits_{n\to\infty} \frac{3^{\frac{1}{n}}-1}{\frac{1}{n}}\right)\frac{1}{2}} = e^{(\ln 2 + \ln 3)\frac{1}{2}} = e^{\ln\sqrt{2\cdot 3}} = \sqrt{6}.$$

Un alt şir cu limita e

Fie acum şirul $(e_n)_{n\geq 1}$ definit prin

$$e_n = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \ldots + \frac{1}{n!}.$$

Teorema 2.48. *Şirul $(e_n)_{n\geq 0}$ este convergent cu limita e.*

Demonstraţie. Cum $e_{n+1} - e_n = \frac{1}{(n+1)!}$, $(e_n)_{n\geq 0}$ este strict crescător, deci $e_n \geq e_1 = 2$ pentru orice $n \geq 1$, iar conform inegalităţilor obţinute în Teorema 2.44, $e_n < 3$ pentru orice $n \geq 1$. În concluzie, $(e_n)_{n\geq 0}$ este mărginit. Fiind şi monoton, $(e_n)_{n\geq 0}$ este convergent; să notăm cu e' limita sa. Să notăm de asemenea $(x_n)_{n\geq 0}$: $x_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$. Deoarece $x_n < e_n$, obţinem prin trecere la limită pentru $n \to \infty$ că $e \leq e'$.

Fie acum $1 \leq m < n$ fixat. Atunci

$$\begin{aligned} x_n &= 1 + \sum_{k=1}^{n} \left(1 - \frac{1}{n}\right)\left(1 - \frac{2}{n}\right)\ldots\left(1 - \frac{k-1}{n}\right)\frac{1}{k!} \\ &< 1 + \sum_{k=1}^{m} \left(1 - \frac{1}{n}\right)\left(1 - \frac{2}{n}\right)\ldots\left(1 - \frac{k-1}{n}\right)\frac{1}{k!}. \end{aligned}$$

Trecând la limită pentru $n \to \infty$ în relaţia de mai sus, obţinem că

$$e \leq 1 + \sum_{k=1}^{m} \frac{1}{k!},$$

adică $e \leq e_m$. Cum această egalitate este valabilă în fapt pentru orice m (restricţia $m < n$ se elimină prin alegerea de la început a unui n suficient de mare), prin trecere la limită se obţine că $e \leq e'$. Cum şi $e' \leq e$, urmează că $e = e'$, iar $(e_n)_{n\geq 0}$ este convergent tot la e. ■

Din cele de mai sus, se obţine următoarea egalitate

$$\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \ldots + \frac{1}{n!}\right) = e.$$

Iraţionalitatea lui e

Teorema 2.49. *Numărul e este iraţional.*

Demonstraţie. Ca mai sus, să notăm

$$e_n = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \ldots + \frac{1}{n!}.$$

Atunci, pentru $p \geq 2$

$$\begin{aligned}
e_{n+p} - e_n &= \frac{1}{(n+1)!} + \frac{1}{(n+2)!} + \ldots + \frac{1}{(n+p)!} \\
&= \frac{1}{(n+1)!}\left(1 + \frac{1}{n+2} + \ldots + \frac{1}{(n+2)\ldots(n+p)}\right) \\
&\leq \frac{1}{(n+1)!}\left(1 + \frac{1}{n+2} + \ldots + \frac{1}{(n+2)^{p-1}}\right) \\
&= \frac{1}{(n+1)!}\frac{1 - \frac{1}{(n+2)^p}}{1 - \frac{1}{n+2}} < \frac{1}{(n+1)!}\frac{n+2}{n+1} = \frac{1}{nn!}\frac{n(n+2)}{(n+1)^2} \\
&< \frac{1}{nn!}, \text{ pentru } p \geq 2.
\end{aligned}$$

deci

$$0 < e_{n+p} - e_n < \frac{1}{nn!}.$$

Trecând la limită pentru $p \to \infty$, obţinem că

$$0 < e - e_n \leq \frac{1}{nn!}.$$

Să presupunem prin reducere la absurd că e este raţional, $e = \frac{p}{q}$, $p, q \in \mathbb{N}$, $q \geq 2$. Atunci

$$0 < \frac{p}{q} - e_q \leq \frac{1}{qq!} \implies 0 < (q-1)!p - q!e_q \leq \frac{1}{q} < 1$$

Cum e_q poate fi scris, prin aducere la acelaşi numitor, ca o fracţie cu numitorul $q!$, $q!e_q$ este un număr natural, deci între 0 şi 1 se află numărul întreg $(q-1)!p - q!e_q$, contradicţie. În concluzie, e este număr iraţional. ■

Constanta lui Euler

Fie acum şirul $(c_n)_{n\geq 1}$ definit prin

$$c_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n} - \ln n.$$

Teorema 2.50. *Şirul $(c_n)_{n\geq 0}$ este convergent.*

Demonstraţie. Vom demonstra că $(c_n)_{n\geq 0}$ este monoton şi mărginit.

Monotonie

Observăm că

$$c_{n+1} - c_n = \frac{1}{n+1} - \ln(n+1) + \ln n = \frac{1}{n+1} - \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) < 0,$$

deci $(c_n)_{n\geq 0}$ este strict descrescător.

Mărginire

Cum $(c_n)_{n\geq 0}$ este strict descrescător, el este mărginit superior. Observăm că

$$\ln(k+1) - \ln k = \ln\left(1 + \frac{1}{k}\right) > \frac{1}{k+1}, \text{ pentru } k \geq 1.$$

Sumând inegalităţile obţinute pentru $k = 1, k = 2, \ldots, k = n-1$ obţinem că

$$\ln n > \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n} \Leftrightarrow c_n < 1 \text{ pentru } n \geq 2,$$

Cum $(c_n)_{n\geq 0}$ este monoton şi mărginit, el este convergent. Prin convenţie, se notează cu c limita sa, unde $c = 0.57721....$ Numărul c astfel definit se numeşte *constanta lui Euler*. ■

Exerciţiu

Determinaţi

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \ldots + \frac{1}{2n}\right).$$

Soluţie

Au loc relaţiile

$$\begin{aligned}\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \ldots + \frac{1}{2n} &= \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{2n} - \ln(2n)\right)\\ &\quad - \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n} - \ln n\right) + \ln 2n - \ln n\\ &= c_{2n} - c_n + \ln 2.\end{aligned}$$

Cum $\lim\limits_{n\to\infty} c_{2n} = \lim\limits_{n\to\infty} c_n = e$, urmează că limita din enunţ este $\ln 2$. ■

Aplicaţii

2.1. *Fie* $(x_n)_{n\geq 0}$: $x_n = \frac{n+2}{2n+5}$. *Precizaţi valorile lui n pentru care* $|x_n - \frac{1}{2}| < \frac{1}{9}$.

2.2. *Fie* $(x_n)_{n\geq 0}$: $x_{n+1} = x_n^2 - 2x_n + 2$, $x_0 = \frac{4}{3}$.

1. *Demonstraţi că* $x_{n+1} - 1 = (x_n - 1)^2$.
2. *Determinaţi expresia termenului general* x_n.
3. *Determinaţi* $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$.

2.3. *Determinaţi valorile următoarelor limite de şiruri:*

1. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{2n^4+n^3+3n^2-n+5}{3n^3-2n^2+n-6}$;
2. $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\ln(n^2+2n+3) - \ln(3n^2+n-6)\right)$;
3. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\ln(n^2+n+1)}{\ln(n^6+2n+3)}$.

2.4. *Determinaţi valorile următoarelor limite de şiruri:*

1. $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\left(\frac{\sqrt{5}}{3}\right)^n + \left(\frac{1}{4}\right)^{n+1} + \left(\frac{2}{3}\right)^{2n+3} \right)$;
2. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{2^n+3^n}{5\cdot 2^{n+1}+3^{n+2}}$;
3. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{4n^2+n-1}{3n^2+2n+1} \left(\frac{3}{5}\right)^n$.
4. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1+0.5+0.5^2+\ldots+0.5^n}{1+\frac{1}{3}+\frac{1}{3}^2+\ldots+\frac{1}{3}^n}$;
5. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{(\sqrt{5}+\sqrt{3})^{n+1}-(\sqrt{5}-\sqrt{3})^{n+1}}{(\sqrt{5}+\sqrt{3})^n-(\sqrt{5}-\sqrt{3})^n}$.

2.5. *Dacă* $(x_n)_{n\geq 0}$ *este un şir cu proprietatea că* $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = +\infty$, *determinaţi*

1. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{x_n+2}{2x_n+3}$;
2. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{x_n^2+2}{3x_n+1}$;
3. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{x_n+3}{x_n^3+2}$.

2.6. *Determinaţi valorile următoarelor limite de şiruri:*

1. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{n+\sqrt{n}}-\sqrt{n-\sqrt{n}}\right)$;
2. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{3n+(-1)^n}{2n+3}$;
3. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n+2}-\sqrt{n+1}}{\sqrt{n+4}-\sqrt{n+3}}$;
4. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt[3]{n^3+n}-n\right)$.

2.7. *Folosind eventual un criteriu de majorare-minorare, demonstraţi că*

1. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sin 1+2\sin 2+\ldots+n\sin n}{n^3}=0$;
2. $\lim\limits_{n\to\infty}2n+n\sin\frac{n}{2}=+\infty$;
3. $\lim\limits_{n\to\infty}-n^2+[n]\cos\frac{n\pi}{3}=-\infty$.

2.8. *Fie şirul* $(x_n)_{n\geq 1}$*:* $x_n=\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot\ldots\cdot(2n-1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdot\ldots\cdot 2n}$. *Demonstraţi că* $0<x_n<\frac{1}{\sqrt{2n+1}}$ *pentru orice* $n\geq 1$ *şi determinaţi de aici* $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$.

2.9. *Fie şirul* $(x_n)_{n\geq 2}$*:* $x_n=\sqrt[n]{2^n+3^n}$. *Demonstraţi că* $3<x_n<3\sqrt[n]{2}$ *pentru orice* $n\geq 2$ *şi determinaţi de aici* $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$.

2.10. *Fie şirul* $(x_n)_{n\geq 2}$*:* $x_n=\sqrt[n]{1+\sqrt{2}+\ldots+\sqrt{n}}$. *Demonstraţi că* $1<x_n<\sqrt[n]{n}^2$ *pentru orice* $n\geq 2$ *şi determinaţi de aici* $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$.

2.11. *Fie şirul* $(x_n)_{n\geq 2}$*:* $x_n=\sqrt[n]{n}$. *Se notează* $x_n=1+\alpha_n$, $n\geq 2$. *Demonstraţi că* $0<\alpha_n<\sqrt{\frac{2}{n}}$ *şi determinaţi de aici* $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$.

2.12. *Determinaţi*

1. $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}\left[\frac{2n+1}{3n+2},\frac{2n+5}{3n+1}\right]$, $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}\left[\frac{2n+1}{3n+2},\frac{2n+5}{3n+1}\right]$;
2. $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}\left[\frac{3n+4}{4n+5},\frac{3n+8}{4n+9}\right]$, $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}\left[\frac{3n+4}{4n+5},\frac{3n+8}{4n+9}\right]$.

2.13. *Determinaţi valorile următoarelor limite de şiruri:*

1. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n^2+n}{n^2+n+1}\right)^{n+\sqrt{n}}$;

2. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{2^n+3}{2^n+1}\right)^{n+\ln n}$;

3. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{2n+3\sqrt{n}+5}{2n+5}\right)^{\sqrt{n}}$.

2.14. *Determinaţi valorile următoarelor limite de şiruri:*

1. $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n}}$;

2. $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{2^n+3^n+5^n}$.

2.15. *Determinaţi valorile următoarelor limite de şiruri:*

1. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sqrt[n]{n!}}{n}$;

2. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sqrt[n+1]{(n+1)!}}{\sqrt[n]{n!}}$.

2.16. *Folosind eventual una dintre teoremele Stolz-Césaro, determinaţi valorile următoarelor limite de şiruri:*

1. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1\cdot2\cdot3+2\cdot3\cdot4+\ldots+n\cdot(n+1)\cdot(n+2)}{n^2(n+1)^2}$;

2. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left(\frac{1}{\ln 2}+\frac{1}{\ln 3}+\ldots+\frac{1}{\ln n}\right)$;

3. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sqrt{1}+\sqrt{2}+\ldots+\sqrt{n}}{n\sqrt{n}}$.

2.17. *Determinaţi* $\limsup\limits_{n\to\infty} x_n$ *şi* $\liminf\limits_{n\to\infty} x_n$ *în următoarele situaţii:*

1. $(x_n)_{n\geq0}$: $x_n=\frac{(-1)^n}{n+1}+\frac{(-1)^{n^2}}{n^2+1}$;

2. $(x_n)_{n\geq0}$: $x_n=\frac{\sin n^2}{n+1}$;

3. $(x_n)_{n\geq0}$: $x_n=\arcsin(-1)^n+\arccos(-1)^{n+1}+\operatorname{arctg}(-1)^{n+2}$;

4. $(x_n)_{n\geq0}$: $x_n=\left(\frac{n+3}{n}\right)^{n\sin\frac{n\pi}{3}}+\left(\sqrt{n^2+3n+2}-\sqrt{n^2+2n+3}\right)^n$.

2.18. *Fie* $(x_n)_{n\geq0}$: $x_n=2+\frac{n}{n+2}\cos\frac{n\pi}{2}$. *Determinaţi* $\operatorname*{LIM}\limits_{n\to\infty} x_n$.

2.19. *Determinaţi valoarea limitei:*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{e^1 \cdot e^2 \cdot \ldots \cdot e^n}{n}.$$

2.20. *Fie şirul* $(x_n)_{n\geq 0}$: $x_{n+1} = \frac{x_n^2}{1+x_n}$, $n \geq 0$ *şi* $x_0 = 1$.

1. *Studiaţi monotonia şi mărginirea şirului* $(x_n)_{n\geq 0}$.
2. *Demonstraţi că şirul* $(x_n)_{n\geq 0}$ *este convergent şi calculaţi-i limita.*
3. *Folosind eventual una dintre teoremele Stolz-Césaro, determinaţi* $\lim\limits_{n\to\infty} nx_n$.

2.21. *Fie şirul* $(x_n)_{n\geq 0}$: $x_{n+1} = \sqrt{3x_n - 2}$, $n \geq 0$ *şi* $x_0 \in (1, 2)$.

1. *Demonstraţi că* $1 < x_n < 2$ *pentru orice* $n \geq 0$.
2. *Demonstraţi că* $(x_n)_{n\geq 0}$ *este strict crescător.*
3. *Demonstraţi că* $(x_n)_{n\geq 0}$ *este convergent şi precizaţi-i limita.*

2.22. *Fie şirul* $(x_n)_{n\geq 0}$: $x_n = \underbrace{\sqrt{2 + \sqrt{2 + \ldots + \sqrt{2}}}}_{n \text{ radicali}}$.

1. *Determinaţi o relaţie de recurenţă verificată de termenii şirului* $(x_n)_{n\geq 0}$.
2. *Demonstraţi că* $0 < x_n < 2$ *pentru orice* $n \geq 1$.
3. *Demonstraţi că* $(x_n)_{n\geq 0}$ *este strict crescător.*
4. *Demonstraţi că* $(x_n)_{n\geq 0}$ *este convergent şi precizaţi-i limita.*

2.23. *Fie şirul* $(x_n)_{n\geq 0}$: $x_{n+1} = x_n - x_n^2 + x_n^3$, $n \geq 0$ *şi* $x_0 \in (0, 1)$.

1. *Demonstraţi că* $0 < x_n < 1$ *pentru orice* $n \geq 0$.
2. *Demonstraţi că* $(x_n)_{n\geq 0}$ *este strict descrescător.*
3. *Demonstraţi că* $(x_n)_{n\geq 0}$ *este convergent şi precizaţi-i limita.*

2.24. *Fie şirul* $(x_n)_{n\geq 0}$: $x_{n+1} = x_n + \frac{1}{x_n^2}$, $n \geq 0$ *şi* $x_0 > 0$.

1. *Demonstraţi că* $x_n > 0$ *pentru orice* $n \geq 0$.

2. *Demonstraţi că* $(x_n)_{n\geq 0}$ *este strict crescător.*

3. *Demonstraţi că* $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = +\infty$.

2.25. *Determinaţi*

$$\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n}\right).$$

2.26. *Dacă un şir monoton* $(x_n)_{n\geq 0}$ *are un subşir convergent, atunci* $(x_n)_{n\geq 0}$ *este de asemenea convergent.*

2.27. *Dacă un şir* $(x_n)_{n\geq 0}$ *are o infinitate de subşiruri convergente, rezultă că acesta este convergent?*

2.28. *Fie* $(x_n)_{n\geq 0}$ *un şir şi* $l \in \mathbb{R}$. *Dacă orice vecinătate* V *a lui* l *conţine o infinitate de termeni ai şirului* $(x_n)_{n\geq 0}$, *rezultă că şirul are limita* l*?*

2.29. *Determinaţi* $a, b \in \mathbb{R}$ *astfel ca*

$$\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{4n^2+4n+3}-an-b\right)=2.$$

Capitolul 3

SERII NUMERICE

Date fiind numerele reale $x_0, x_1, \ldots, x_n$, în număr finit, suma lor $x_0 + x_1 + \ldots + x_n$ se poate calcula fără dificultate, după regulile uzuale. Extinderea noţiunii de sumă pentru mulţimi infinite de numere nu este însă la fel de imediată. Acest lucru se poate observa încercând să se calculeze suma

$$1 + (-1) + 1 + (-1) + \ldots + 1 + (-1) + \ldots$$

(termenii sumei sunt, alternativ, 1 şi -1). Gruparea în modul

$$(1 + (-1)) + (1 + (-1)) + \ldots + (1 + (-1)) + \ldots,$$

în care suma termenilor din fiecare grup este 0, poate conduce la ideea că valoarea acestei sume este 0. De asemenea, gruparea în modul

$$1 + ((-1) + 1) + ((-1) + 1) + \ldots + ((-1) + 1) + \ldots,$$

poate conduce la ideea că valoarea acestei sume este 1; desigur, asocierea a două valori distincte pentru o aceeaşi sumă de numere reale reprezintă o situaţie inacceptabilă. În special, din cele de mai sus se observă faptul că în cazul adunării unui număr infinit de numere reale nu are neapărat loc proprietatea de asociativitate.

În lipsa proprietăţii de asociativitate, singura posibilitate de calcul a unei sume infinite rămâne de a aduna termenii din sumă unul câte unul. În concluzie, pentru a calcula o sumă de forma

$$x_0 + x_1 + x_2 + \ldots + x_n + \ldots$$

vom determina

$$S_0 = x_0, \quad S_1 = x_0 + x_1, \quad S_2 = x_0 + x_1 + x_2, \dots,$$
$$S_n = x_0 + x_1 + x_2 + \ldots + x_n, \ldots$$

şi vom încerca să extragem informaţii despre comportarea şirului $(S_n)_{n\geq 0}$, utilizând aceste informaţii pentru determinarea sumei.

Numim atunci *serie numerică de termen general* x_n (sau, mai simplu, *serie de termen general* x_n) cuplul $((x_n)_{n\geq 0}, (S_n)_{n\geq 0})$ format din şirul $(x_n)_{n\geq 0}$ al termenilor seriei şi şirul $(S_n)_{n\geq 0}$ al sumelor parţiale, definit după regula

$$S_n = x_0 + x_1 + x_2 + \ldots + x_n.$$

În această situaţie, x_n se va numi şi *termenul de rang* n sau *indice* n al seriei. Vom nota o serie de termen general x_n prin

$$x_0 + x_1 + x_2 + \ldots + x_n + \ldots,$$

sau, sub formă prescurtată, prin

$$\sum_{n=0}^{\infty} x_n.$$

Dacă primii k termeni $x_0, x_1, \dots, x_{k-1}$ nu sunt definiţi, vom nota seria de termen general x_n prin

$$x_k + x_{k+1} + x_{k+2} + \ldots + x_n + \ldots,$$

respectiv prin

$$\sum_{n=k}^{\infty} x_n.$$

Notaţiile de mai sus sugerează şi denumirea de „sumă infinită” pentru o serie, deşi, conform exemplului anterior, sumele infinite de numere reale nu au neapărat aceleaşi proprietăţi ca şi sumele finite de numere reale, această denumire nefiind deci întrutotul justificată.

Serii convergente, serii divergente

Spunem că seria $\sum\limits_{n=0}^{\infty} x_n$ este *convergentă* dacă şirul sumelor parţiale $(S_n)_{n\geq 0}$ este convergent, respectiv că seria $\sum\limits_{n=0}^{\infty} x_n$ este *divergentă* dacă şirul sumelor parţiale

$(S_n)_{n\geq 0}$ este divergent. Dacă şirul sumelor parţiale $(S_n)_{n\geq 0}$ are limită, atunci $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = S \in \overline{\mathbb{R}}$ se va numi *suma* seriei $\sum\limits_{n=0}^{\infty} x_n$. Seriilor $\sum\limits_{n=0}^{\infty} x_n$ pentru care şirul sumelor parţiale $(S_n)_{n\geq 0}$ nu are limită nu li se asociază nicio sumă.

Exemplu

Fie seria $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{1}{2^n}$. Termenul general al acestei serii este $x_n = \frac{1}{2^n}$. Sub formă desfăşurată, seria se poate scrie în modul următor

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \ldots + \frac{1}{2^n} + \ldots.$$

Deoarece

$$S_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \ldots + \frac{1}{2^n} = \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{1 - \frac{1}{2}} = 2 - \left(\frac{1}{2}\right)^n,$$

urmează că

$$\lim_{n\to\infty} S_n = 2,$$

deci seria $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{1}{2^n}$ este convergentă, iar suma sa este 2.

Exemplu

Fie seria $\sum\limits_{n=0}^{\infty} n$. Termenul general al acestei serii este $x_n = n$. Sub formă desfăşurată, seria se poate scrie în modul următor

$$0 + 1 + 2 + \ldots + n + \ldots.$$

Deoarece

$$S_n = 0 + 1 + 2 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2},$$

urmează că

$$\lim_{n\to\infty} S_n = +\infty,$$

deci seria $\sum\limits_{n=0}^{\infty} n$ este divergentă, iar suma sa este $+\infty$.

Exemplu

Fie seria $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n$. Termenul general al acestei serii este $x_n = (-1)^n$. Sub formă desfăşurată, seria se poate scrie în modul următor

$$1 + (-1) + 1 + (-1) + \ldots + 1 + (-1) + \ldots$$

Deoarece

$$S_{2n} = (1 + (-1)) + (1 + (-1)) + \ldots + (1 + (-1)) + 1 = 1,$$

iar

$$S_{2n+1} = (1 + (-1)) + (1 + (-1)) + \ldots + (1 + (-1)) + (1 + (-1)) = 0,$$

urmează că

$$\lim_{n\to\infty} S_{2n} = 1, \quad \lim_{n\to\infty} S_{2n+1} = 0,$$

deci nu există $\lim_{n\to\infty} S_n$. Atunci seria $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n$ este divergentă, suma sa neputând fi definită.

În cele ce urmează, vom preciza condiţii pentru a stabili dacă o serie dată este sau nu convergentă, acolo unde este posibil determinându-se explicit şi suma seriei.

Sume calculabile exact

Seria $\sum_{n=0}^{\infty} q^n$

Termenul general al acestei serii este $x_n = q^n$. Dacă $q \neq 1$, atunci

$$S_n = x_0 + x_1 + \ldots + x_n = 1 + q + \ldots + q^n = \frac{q^{n+1} - 1}{q - 1},$$

în vreme ce dacă $q = 1$, atunci $S_n = n + 1$.

Urmează atunci că seria $\sum_{n=0}^{\infty} q^n$ este convergentă pentru $q \in (-1, 1)$, cu $\lim_{n\to\infty} S_n = \frac{1}{1-q}$, deoarece $\lim_{n\to\infty} q^{n+1} = 0$ pentru $q \in (-1, 1)$. În concluzie,

$$\sum_{n=0}^{\infty} q^n = \frac{1}{1-q}, \text{ pentru } q \in (-1, 1).$$

De asemenea, pentru $q = 1$ seria $\sum\limits_{n=0}^{\infty} q^n$ este divergentă, deoarece $\lim\limits_{n\to\infty}(n+1) = +\infty$, iar

$$\sum_{n=0}^{\infty} q^n = +\infty, \text{ pentru } q = 1.$$

Dacă $q \in (1, +\infty)$, atunci $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = +\infty$, deoarece $\lim\limits_{n\to\infty} q^{n+1} = +\infty$ pentru $q \in (1, \infty)$, iar $\sum\limits_{n=0}^{\infty} q^n$ este divergentă. În concluzie,

$$\sum_{n=0}^{\infty} q^n = +\infty, \text{ pentru } q \in (1, +\infty).$$

Dacă $q \in (-\infty, -1]$, atunci $\lim\limits_{n\to\infty} S_n$ nu există, deoarece $\lim\limits_{n\to\infty} q^{n+1}$ nu există pentru $q \in (-\infty, -1]$, iar $\sum\limits_{n=0}^{\infty} q^n$ este divergentă, acestei serii neputându-i-se asocia o sumă.

Discuţia de mai sus poate fi sistematizată sub următoarea formă prescurtată

$$\sum_{n=0}^{\infty} q^n = \begin{cases} \text{nu este definită,} & \text{dacă } q \leq -1 \\ \frac{1}{1-q}, & \text{dacă } q \in (-1, 1) \\ +\infty, & \text{dacă } q \geq 1 \end{cases}.$$

Exemplu

Fie suma $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{(-1)^n 2^{3n}}{9^n}$. Atunci termenul general al acestei serii este

$$x_n = \frac{(-1)^n 2^{3n}}{9^n} = \left(\frac{(-1)2^3}{9}\right)^n = \left(-\frac{8}{9}\right)^n,$$

de unde

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n 2^{3n}}{9^n} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(-\frac{8}{9}\right)^n = \frac{1}{1-\left(-\frac{8}{9}\right)} = \frac{9}{17}.$$

Serii telescopice

Fie seria $\sum\limits_{n=0}^{\infty} x_n$. Spunem că seria $\sum\limits_{n=0}^{\infty} x_n$ este o *serie telescopică* dacă există şirul $(a_n)_{n\geq 0}$, astfel ca

$$x_n = \alpha_n - \alpha_{n+1} \quad \text{pentru orice } n \geq 0,$$

adică există un şir pentru care termenul general al seriei se poate scrie ca diferenţa a doi termeni consecutivi ai acestui şir, primul cu acelaşi indice ca şi indicele termenului general al seriei. În această situaţie,

$$\begin{aligned} S_n = \sum_{k=0}^{n} x_k &= (a_0 - a_1) + (a_1 - a_2) + \ldots + (a_n - a_{n+1}) \\ &= a_0 - a_{n+1}, \end{aligned}$$

de unde seria $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ este convergentă dacă si numai dacă $(a_n)_{n\geq 0}$ este convergent. În această ultimă situaţie,

$$\sum_{n=0}^{\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} (a_0 - a_{n+1}) = a_0 - l,$$

unde $\lim_{n\to\infty} a_n = l$.

Exemplu

Fie seria $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+1)(n+2)}$. Atunci termenul general al sumei este $x_n = \frac{1}{(n+1)(n+2)}$. Observăm că

$$x_n = \frac{1}{(n+1)(n+2)} = \frac{(n+2)-(n+1)}{(n+1)(n+2)} = \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2},$$

de unde

$$\begin{aligned} S_n = \sum_{k=0}^{n} x_k &= \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \ldots + \left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2}\right) \\ &= 1 - \frac{1}{n+2}, \end{aligned}$$

iar

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+1)(n+2)} = \lim_{n\to\infty} \left(1 - \frac{1}{n+2}\right) = 1.$$

Exemplu

Fie seria $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n+2}}$. Atunci termenul general al sumei este $x_n = \frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n+2}}$. Observăm că

$$\begin{aligned} x_n &= \frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n+2}} = \frac{\sqrt{n+2}-\sqrt{n+1}}{(\sqrt{n+2}+\sqrt{n+1})(\sqrt{n+2}-\sqrt{n+1})} \\ &= \sqrt{n+2} - \sqrt{n+1} \end{aligned}$$

de unde

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{k=0}^{n} x_k = \left(\sqrt{2}-\sqrt{1}\right) + \left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right) + \ldots + \left(\sqrt{n+2}-\sqrt{n+1}\right) \\ &= \sqrt{n+2}-1, \end{aligned}$$

iar

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n+2}} = \lim_{n\to\infty} (\sqrt{n+2}-1) = +\infty.$$

Proprietăţi generale ale seriilor

Eliminarea termenilor

În Capitolul 2, a fost observat că adăugarea sau eliminarea unui număr finit de termeni ai unui şir nu-i modifică acestuia proprietatea de a avea sau nu avea limită. Cum convergenţa unei serii este definită prin intermediul şirului sumelor parţiale, este natural ca nici eliminarea unui număr finit de termeni ai unei serii date să nu modifice natura acesteia. Prin „natură” înţelegem aici proprietatea unei serii de a fi convergentă sau divergentă, iar prin serii „cu aceeaşi natură” înţelegem două serii care sunt ambele convergente sau ambele divergente.

Teorema 3.1. *Fie $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ o serie dată. Dacă se adaugă sau se elimină un număr finit de termeni, atunci seria obţinută are aceeaşi natură cu seria iniţială, putându-se modifica în schimb suma sa, dacă seria este convergentă. Dacă suma seriei este $+\infty$ sau $-\infty$, aceasta nu se modifică.*

Demonstraţie. Presupunem că se elimină termenii $x_{n_1}, x_{n_2}, \ldots, x_{n_k}$, $n_1 < n_2 < \ldots < n_k$. Fie $\sum_{n=0}^{\infty} y_n$ seria obţinută prin modificare şi fie $(T_n)_{n\geq 0}$ şirul sumelor sale parţiale. Atunci $y_n = x_{n+k}$ pentru orice $n > n_k - k$, iar

$$T_n = S_{n+k} - (x_{n_1} + x_{n_2} + \ldots + x_{n_k}) \text{ pentru orice } n > n_k - k.$$

Cum şirurile $(T_n)_{n\geq 0}$ şi $(S_{n+k})_{n\geq 0}$ diferă prin constanta $C = x_{n_1} + x_{n_2} + \ldots + x_{n_k}$ pentru $n \geq n_k - k$, ele au aceeaşi natură. Deoarece $(S_{n+k})_{n\geq 0}$ se obţine din $(S_n)_{n\geq 0}$ prin eliminarea termenilor $S_0, S_1, \ldots, S_{k-1}$ (în număr finit), el are aceeaşi natură cu $(S_n)_{n\geq 0}$.

Cum $T_n = S_{n+k} - C$, urmează că dacă $\sum\limits_{n=0}^{\infty} x_n = +\infty$, atunci $\sum\limits_{n=0}^{\infty} y_n = +\infty - C = +\infty$, iar dacă $\sum\limits_{n=0}^{\infty} x_n = -\infty$, atunci $\sum\limits_{n=0}^{\infty} y_n = -\infty - C = -\infty$ (suma seriei nu se modifică).

Dacă $\sum\limits_{n=0}^{\infty} x_n = L \in \mathbb{R}$, atunci $\sum\limits_{n=0}^{\infty} y_n = L - C$ (suma seriei se modifică dacă $C \neq 0$). Pentru cazul în care se adaugă un număr finit de termeni se procedează analog. ■

Comutativitate (Schimbarea ordinii termenilor)

Este cunoscut că o sumă finită are proprietatea de comutativitate, în sensul că valoarea sumei rămâne aceeaşi după orice schimbare a ordinii termenilor. Cu anumite precauţii (schimbarea ordinii va afecta doar un număr finit de termeni), această proprietate rămâne valabilă şi pentru serii.

Teorema 3.2. *Fie* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} x_n$ *o serie dată. Dacă se schimbă ordinea unui număr finit de termeni, atunci seria obţinută are aceeaşi natură cu seria iniţială şi aceeaşi sumă.*

Demonstraţie. Fie $\sum\limits_{n=0}^{\infty} y_n$ seria obţinută prin schimbarea ordinii. Cum această schimbare afectează doar un număr finit de termeni, există $n_1 \in \mathbb{N}$ astfel ca $x_n = y_n$ pentru orice $n \geq n_1$. Deoarece

$$x_0 + x_1 + \ldots + x_{n_1-1} = y_0 + y_1 + \ldots + y_{n_1-1},$$

aceste sume având aceiaşi termeni, eventual într-o altă ordine, urmează că $S_n = T_n$ pentru orice $n \geq n_1$, de unde $\sum\limits_{n=0}^{\infty} x_n$ şi $\sum\limits_{n=0}^{\infty} y_n$ au aceeaşi natură şi aceeaşi sumă. ■

Proprietăţi generale ale seriilor convergente

Asociativitate

S-a observat deja că pentru cazul seriei divergente $\sum\limits_{n=0}^{\infty} (-1)^n$ asocierea termenilor cu ajutorul parantezelor conduce la mai multe valori posibile ale sumei sale. Totuşi, se poate demonstra că prin gruparea termenilor unei serii convergente cu ajutorul parantezelor se obţine tot o serie convergentă, cu aceeaşi sumă ca şi seria iniţială.

Teorema 3.3. *Fie* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} x_n$ *o serie convergentă. Asocierea termenilor săi cu ajutorul parantezelor conduce la o serie convergentă, cu aceeaşi sumă ca şi seria iniţială.*

Demonstraţie. Se observă că şirul sumelor parţiale corespunzător seriei în care termenii sunt asociaţi cu ajutorul parantezelor este un subşir al şirului sumelor parţiale al seriei iniţiale. Cum acesta din urmă este convergent, urmează concluzia. ■

Restul de ordin p

Dată fiind seria $\sum\limits_{n=0}^{\infty} x_n$, vom numi *rest de ordin* p al acesteia seria

$$R_p = \sum_{n=p+1}^{\infty} x_n = x_{n+1} + x_{n+2} + \dots,$$

obţinută din seria iniţială prin eliminarea termenilor $x_0, x_1, \dots, x_p$, cu indici mai mici sau egali cu p. Se observă atunci că

$$\sum_{n=0}^{\infty} x_n = S_p + R_p, \quad \text{pentru orice } p \geq 0,$$

unde $(S_n)_{n\geq 0}$ este şirul sumelor parţiale asociat seriei date. Din acest motiv, dacă seria dată este convergentă, atunci şirul sumelor parţiale tinde la suma seriei, iar şirul resturilor tinde la 0, conform formulei de mai sus. Mai precis, are loc următorul rezultat.

Teorema 3.4. *Seria* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} x_n$ *este convergentă dacă şi numai dacă* R_p*, restul de ordin* p*, este o serie convergentă pentru orice* $p \in \mathbb{N}$*. În plus, dacă* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} x_n$ *este convergentă, atunci* $\lim\limits_{p\to\infty} R_p = 0$*.*

Demonstraţie. Cum R_p se obţine din seria $\sum\limits_{n=0}^{\infty} x_n$ prin eliminarea termenilor x_0, $x_1, \dots, x_p$, în număr finit, respectiv $\sum\limits_{n=0}^{\infty} x_n$ se obţine din R_p prin adăugarea termenilor $x_0, x_1, \ldots, x_p$, prima parte a teoremei se obţine în mod imediat din Teorema 3.1. De asemenea, dacă $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ este convergentă iar S este suma sa, atunci $S = S_p + R_p$, deci $R_p = S - S_p$, iar cum $\lim_{p\to\infty} S_p = S$, urmează că $\lim_{p\to\infty} R_p = 0$. ■

Criteriul de convergenţă Cauchy

A fost deja demonstrat în Capitolul 2 că un şir este convergent dacă şi numai dacă este şir fundamental (Cauchy). De aici, o serie dată este convergentă dacă şi numai dacă sirul sumelor sale parţiale este şir Cauchy. Acest lucru se reflectă în următorul rezultat.

Teorema 3.5. *Fie* $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ *o serie dată. Atunci* $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ *este convergentă dacă şi numai dacă pentru orice* $\varepsilon > 0$ *există un rang* $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ *astfel încât*

$$|x_{n+1} + x_{n+2} + \ldots + x_{n+p}| \leq \varepsilon \quad \textit{pentru orice } n \geq n_\varepsilon \textit{ şi orice } p \geq 0.$$

Demonstraţie. Fie $(S_n)_{n\geq 0}$ şirul sumelor parţiale asociate seriei $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$. Atunci

$$|S_{n+p} - S_n| = |x_{n+1} + x_{n+2} + \ldots + x_{n+p}|, \quad \text{pentru orice } n, p \geq 0.$$

Cum $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ este convergentă dacă şi numai dacă $(S_n)_{n\geq 0}$ este şir fundamental, adică dacă şi numai dacă pentru orice $\varepsilon > 0$ există un rang $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ astfel încât

$$|S_{n+p} - S_n| \leq \varepsilon \text{ pentru orice } n \geq n_\varepsilon \text{ şi orice } p \geq 0,$$

rezultă concluzia. ■

Divergenţa seriei $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$

A fost demonstrat în Capitolul 2 că şirul

$$(S_n)_{n\geq 1} : x_n = 1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n}$$

nu este şir Cauchy. Cum acesta este şirul sumelor parţiale asociat seriei $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$, urmează că seria $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ este divergentă. Seria de mai sus se numeşte şi *seria armonică*, întrucât fiecare termen al seriei este media armonică a termenilor care-l înconjoară, adică $\frac{1}{n} = \frac{2}{\frac{1}{\frac{1}{n-1}} + \frac{1}{\frac{1}{n+1}}}$ pentru orice $n > 1$.

Limita termenului general

Teorema 3.6. *Fie* $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ *o serie dată. Dacă* $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ *este convergentă, atunci* $\lim_{n\to\infty} x_n = 0$.

Demonstraţie. Fie $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ o serie convergentă, cu suma l. Deoarece

$$x_n = S_n - S_{n-1} \text{ pentru orice } n \geq 1,$$

iar $\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} S_{n-1} = l$, urmează concluzia. ■

Se observă de aici că dacă $\lim_{n\to\infty} x_n$ nu există, sau există şi nu este 0, atunci seria dată nu este convergentă. Se obţine deci următorul rezultat.

Corolar 3.6.1. *Fie* $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ *o serie dată. Dacă* $\lim_{n\to\infty} x_n$ *nu există, sau există şi nu este* 0, *atunci seria dată este divergentă.*

Exerciţiu

Demonstraţi că următoarele serii sunt divergente:

$$1) \sum_{n=1}^{\infty} \left(1+\frac{1}{2n}\right)^{3n+\frac{1}{n}}; \quad 2) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n+5^n}{2^{n+1}+5^{n+1}}; \quad 3) \sum_{n=0}^{\infty} \sqrt[3]{n}.$$

Soluţie

Putem calcula limita termenului general în fiecare dintre aceste cazuri. Cum

$$\lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{1}{2n}\right)^{3n+\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty} \left[\left(1+\frac{1}{2n}\right)^{2n}\right]^{\frac{3n+\frac{1}{n}}{2n}} = e^{\frac{3}{2}} \neq 0,$$

seria $\sum_{n=1}^{\infty} \left(1+\frac{1}{2n}\right)^{3n+\frac{1}{n}}$ este divergentă. Se observă că

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2^n+5^n}{2^{n+1}+5^{n+1}} = \lim_{n\to\infty} \frac{5^n(\frac{2}{5}^n+1)}{5^{n+1}(\frac{2}{5}^{n+1}+1)} = \frac{1}{5} \neq 0,$$

deci seria $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n+5^n}{2^{n+1}+5^{n+1}}$ este divergentă. De asemenea

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[3]{n} = +\infty \neq 0,$$

deci şi seria $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \sqrt[3]{n}$ este divergentă. ■

Se poate observa de asemenea faptul că doar faptul că $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$ nu este o condiţie suficientă pentru convergenţa seriei $\sum\limits_{n=0}^{\infty} x_n$ (fiind doar necesară). În acest sens, se poate observa că $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{n} = 0$, dar totuşi seria $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ este divergentă.

Mărginirea şirului sumelor parţiale

Teorema 3.7. *Fie $\sum\limits_{n=0}^{\infty} x_n$ o serie convergentă. Atunci şirul $(S_n)_{n\geq 0}$ al sumelor parţiale asociate seriei este mărginit.*

Demonstraţie. Fie $\sum\limits_{n=0}^{\infty} x_n$ o serie convergentă şi fie $(S_n)_{n\geq 0}$ şirul sumelor parţiale asociate seriei. Cum $\sum\limits_{n=0}^{\infty} x_n$ este convergentă, urmează că $(S_n)_{n\geq 0}$ este convergent, iar cum orice şir convergent este mărginit, urmează că $(S_n)_{n\geq 0}$ este mărginit. ■

Reciproc, dacă şirul sumelor parţiale asociate unei serii date este nemărginit, atunci seria este divergentă. Se obţine deci următorul rezultat.

Corolar 3.7.1. *Fie $\sum\limits_{n=0}^{\infty} x_n$ o serie dată şi fie $(S_n)_{n\geq 0}$ şirul sumelor parţiale asociate seriei. Dacă $(S_n)_{n\geq 0}$ este nemărginit, atunci seria $\sum\limits_{n=0}^{\infty} x_n$ este divergentă.*

Exerciţiu

Demonstraţi că seria $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{1}{\sqrt{n+1}}$ este divergentă.

Soluţie

Are loc estimarea

$$S_n = \frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{n+1}} \geq (n+1) \cdot \frac{1}{\sqrt{n+1}} = \sqrt{n+1}.$$

Cum $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt{n+1} = +\infty$, urmează că $(S_n)_{n\geq 0}$ este nemărginit, deci seria $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{1}{\sqrt{n+1}}$ este divergentă. ■

Operaţii cu serii convergente

Întrucât, aşa cum s-a menţionat anterior, convergenţa unei serii se defineşte prin intermediul convergenţei şirului sumelor sale parţiale, se va observa că proprietatea unor serii de a fi convergente se păstrează după efectuarea operaţiilor uzuale de sumă, diferenţă şi produs cu o constantă.

Teorema 3.8. *Fie* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} x_n$ *şi* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} y_n$ *două serii convergente de numere reale astfel ca* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} x_n = A$ *şi* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} y_n = B$*. Atunci seria sumă* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} (x_n + y_n)$ *şi seria produs cu o constantă* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c x_n$, $c \in \mathbb{R}$*, sunt convergente. În plus, au loc relaţiile*

1. $\sum\limits_{n=0}^{\infty} x_n + y_n = \sum\limits_{n=0}^{\infty} x_n + \sum\limits_{n=0}^{\infty} y_n = A + B;$

2. $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c x_n = c \sum\limits_{n=0}^{\infty} x_n = cA.$

Demonstraţia este imediată, utilizând proprietăţile operaţiilor cu şiruri convergente.

Serii cu termeni pozitivi, serii cu termeni negativi, serii alternante, serii cu termeni oarecare

Fie $\sum\limits_{n=0}^{\infty} x_n$ o serie dată. Spunem că $\sum\limits_{n=0}^{\infty} x_n$ este o *serie cu termeni pozitivi* dacă toţi termenii săi de la un indice încolo sunt pozitivi, adică există $N_1 \in \mathbb{N}$ astfel că $x_n \geq 0$ pentru orice $n \geq N_1$. Similar, spunem că $\sum\limits_{n=0}^{\infty} x_n$ este o *serie cu termeni negativi* dacă toţi termenii săi de la un indice încolo sunt negativi, adică există $N_2 \in \mathbb{N}$ astfel că $x_n \leq 0$ pentru orice $n \geq N_2$.

Seria $\sum\limits_{n=0}^{\infty} x_n$ se va numi *serie cu termeni oarecare* dacă are atât o infinitate de termeni pozitivi, cât şi o infinitate de termeni negativi. Un caz particular de serii cu termeni oarecare sunt *seriile alternante*. O serie $\sum\limits_{n=0}^{\infty} x_n$ se va numi *alternantă* dacă termenii săi sunt alternativ pozitivi şi negativi de la un rang încolo, adică există $N_3 \in \mathbb{N}$ pentru care $x_n = (-1)^n a_n$ pentru orice $n \geq N_3$, unde $(a_n)_{n\geq 0}$ este un şir de termeni nenuli cu semn constant. În concluzie, pentru o serie alternantă

$\sum\limits_{n=0}^{\infty} x_n$, fie $x_n = (-1)^n a_n$ pentru orice $n \geq N_3$, fie $x_n = (-1)^{n+1} a_n$ pentru orice $n \geq N_3$, unde $(a_n)_{n\geq 0}$ este un şir cu termeni strict pozitivi.

În cele ce urmează, conform faptului că eliminarea unui număr finit de termeni ai seriei nu modifică natura acesteia, vom presupune acolo unde este necesar că proprietatea de pozitivitate (respectiv negativitate, alternanţă) are loc începând cu primul termen al seriei. De asemenea, întrucât înmulţirea cu un număr negativ nu modifică natura unei serii, seriile cu termeni negativi nu vor fi tratate separat, rezultate privind convergenţa acestora putând fi deduse cu uşurinţă din rezultatele corespunzătoare privind convergenţa seriilor cu termeni pozitivi.

3.1 Serii cu termeni pozitivi

Monotonia şirului sumelor parţiale

Fie $\sum\limits_{n=0}^{\infty} x_n$ o serie cu termeni pozitivi. Deoarece $S_{n+1} - S_n = x_{n+1} \geq 0$, urmează că şirul sumelor parţiale $(S_n)_{n\geq 0}$ este monoton crescător. Acest lucru are consecinţe importante asupra convergenţei unei serii cu termeni pozitivi, deoarece dacă $(S_n)_{n\geq 0}$ este monoton, o condiţie necesară şi suficientă pentru convergenţa sa este ca el să fie mărginit superior. Obţinem deci următorul criteriu de convergenţă pentru serii cu termeni pozitivi.

Teorema 3.9. *Fie $\sum\limits_{n=0}^{\infty} x_n$ o serie cu termeni pozitivi. Atunci $\sum\limits_{n=0}^{\infty} x_n$ este convergentă dacă şi numai dacă şi numai dacă şirul $(S_n)_{n\geq 0}$ al sumelor parţiale asociate seriei este mărginit superior.*

În plus, dacă $\sum\limits_{n=0}^{\infty} x_n$ este o serie cu termeni pozitivi cu $\sum\limits_{n=0}^{\infty} x_n = A$, atunci, deoarece $(S_n)_{n\geq 0}$ tinde monoton crescător către limita sa A, urmează că $S_n \leq A$ pentru orice $n \geq 0$.

Exemplu

Fie seria $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$. Deoarece

$$\frac{1}{n^2} \leq \frac{1}{n(n-1)} = \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n} \quad \text{pentru orice } n \geq 2,$$

urmează că

$$\begin{aligned} S_n &= \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \ldots \frac{1}{n^2} \leq \frac{1}{1^2} + \frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n} \\ &= 1 + 1 - \frac{1}{n} \leq 2, \end{aligned}$$

iar şirul $(S_n)_{n\geq 1}$ al sumelor parţiale este mărginit superior, deci seria $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ este convergentă.

De asemenea, se poate observa că pentru serii cu termeni pozitivi are loc proprietatea de comutativitate, în care de această dată se pot schimba locurile unui număr infinit de termeni.

Teorema 3.10. *Fie $\sum\limits_{n=0}^{\infty} x_n$ o serie convergentă cu termeni pozitivi. Dacă se schimbă ordinea unor termeni din serie (chiar în număr infinit), seria $\sum\limits_{n=0}^{\infty} y_n$ astfel obţinută este convergentă şi are aceeaşi sumă.*

Demonstraţie. Fie $\sum\limits_{n=0}^{\infty} x_n = A$. Fie deasemenea $(T_n)_{n\geq 0}$ şirul sumelor parţiale asociat seriei $\sum\limits_{n=0}^{\infty} y_n$. Deoarece $\sum\limits_{n=0}^{\infty} y_n$ este obţinută prin rearanjarea termenilor seriei $\sum\limits_{n=0}^{\infty} x_n$, corespondenţa

$$\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}, \quad \varphi(i) = \text{ indicele lui } y_i \text{ înainte de rearanjare}$$

defineşte o funcţie. Cum

$$T_n = y_0 + y_1 + \ldots + y_n = x_{\varphi(0)} + x_{\varphi(1)} + \ldots + x_{\varphi(n)} \leq S_{n_M} \leq A$$

unde

$$n_M = \max(\varphi(0), \varphi(1), \ldots, \varphi(n)),$$

urmează că $(T_n)_{n\geq 0}$ este mărginit; fiind şi monoton crescător, el este convergent. De aici, $\sum\limits_{n=0}^{\infty} y_n$ este convergentă. Deoarece $T_n \leq A$ pentru orice $n \geq 0$, urmează că $\sum\limits_{n=0}^{\infty} y_n \leq A = \sum\limits_{n=0}^{\infty} x_n$.

Refăcând raţionamentul în sens invers (privind $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ ca o rearanjare a $\sum_{n=0}^{\infty} y_n$) obţinem că $\sum_{n=0}^{\infty} x_n \leq \sum_{n=0}^{\infty} y_n$, de unde $\sum_{n=0}^{\infty} x_n = \sum_{n=0}^{\infty} y_n$. ■

3.1.1 Criteriul de condensare

Un criteriu util pentru stabilirea, între altele, a convergenţei aşa-numitei serii armonice generalizate, care va fi folosită ca termen de comparaţie pentru alte serii, este următorul rezultat, numit *criteriul de condensare*.

Teorema 3.11. *Fie $(x_n)_{n\geq 0}$ un şir monoton descrescător cu termeni pozitivi. Atunci seriile $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ şi $\sum_{n=0}^{\infty} 2^n x_{2^n}$ au aceeaşi natură.*

Demonstraţie. Vom demonstra că $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ este convergentă dacă şi numai dacă $\sum_{n=0}^{\infty} 2^n x_{2^n}$ este convergentă, restul teoremei obţinându-se prin aplicarea operatorului de negaţie logică acestei afirmaţii. În acest scop, fie

$$S_n = x_0 + x_1 + \ldots + x_n; \quad T_n = x_1 + 2x_2 + \ldots + 2^n x_{2^n}$$

şirurile sumelor parţiale asociate celor două serii; se observă că ambele serii sunt cu termeni pozitivi.

Dacă $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ este convergentă, se observă că

$$\begin{aligned} S_{2^n} &= x_0 + x_1 + x_2 + (x_3 + x_4) + (x_5 + x_6 + x_7 + x_8) + \ldots \\ &\quad + (x_{2^k+1} + x_{2^k+2} + \ldots + x_{2^{k+1}}) + \ldots + (x_{2^{n-1}+1} + x_{2^{n-1}+2} + \ldots + x_{2^n}) \\ &\geq x_0 + x_1 + x_2 + 2x_4 + 4x_8 + \ldots + 2^k x_{2^{k+1}} + \ldots + 2^{n-1} x_{2^n}, \end{aligned}$$

întrucât $(x_n)_{n\geq 0}$ este monoton descrescător. De aici,

$$S_{2^n} \geq x_0 + \frac{1}{2}x_1 + \frac{1}{2}T_n,$$

iar cum $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ este convergentă şi cu termeni pozitivi, urmează că $S_{2^n} \leq S$, unde S este suma seriei $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$. Se obţine că $(T_n)_{n\geq 0}$ este mărginit superior, deci $\sum_{n=0}^{\infty} 2^n x_{2^n}$ este convergentă.

Presupunem acum că $\sum\limits_{n=0}^{\infty} 2^n x_{2^n}$ este convergentă şi fie $n \in \mathbb{N}$ oarecare. Există atunci un unic $m \in \mathbb{N}$ astfel că $2^m \leq n < 2^{m+1}$ (deci 2^m este ultima putere a lui 2 mai mică sau egală cu n). Se observă că

$$\begin{aligned} S_n &= x_0 + x_1 + \ldots + x_n \\ &\leq x_0 + x_1 + (x_2 + x_3) + (x_4 + x_5 + x_6 + x_7) + \ldots \\ &\quad + (x_{2^k} + x_{2^k+1} + \ldots + x_{2^{k+1}-1}) + \ldots + (x_{2^m} + x_{2^m+1} + \ldots + x_{2^{m+1}-1}) \\ &\leq x_0 + x_1 + 2x_2 + 4x_4 + \ldots + 2^k x_{2^k} + \ldots + 2^m x_{2^m}, \end{aligned}$$

întrucât $(x_n)_{n\geq 0}$ este monoton descrescător. De aici,

$$S_n \leq x_0 + T_n,$$

iar cum $\sum\limits_{n=0}^{\infty} 2^n x_{2^n}$ este convergentă şi cu termeni pozitivi, urmează că $T_n \leq T$, unde T este suma seriei $2^n x_{2^n}$. Se obţine că $(S_n)_{n\geq 0}$ este mărginit superior, deci $\sum\limits_{n=0}^{\infty} x_n$ este convergentă. ■

Exerciţiu

Studiaţi convergenţa seriei $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \dfrac{1}{n \ln n}$.

Soluţie

Deoarece $(x_n)_{n\geq 0}$: $x_n = \left(\dfrac{1}{n \ln n}\right)_{n\geq 2}$ este un şir monoton descrescător de numere strict pozitive, urmează conform criteriului de condensare că $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \dfrac{1}{n \ln n}$ şi $\sum\limits_{n=2}^{\infty} 2^n \dfrac{1}{2^n \ln 2^n} = \sum\limits_{n=2}^{\infty} \dfrac{1}{n \ln 2}$ au aceeaşi natură. Cum $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \dfrac{1}{n \ln 2}$ este divergentă, fiind seria armonică multiplicată cu o constantă, urmează că şi $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \dfrac{1}{n \ln n}$ este divergentă. ■

Convergenţa seriei $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^p}$

Dacă $p < 0$, atunci $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n^p} = +\infty$, iar seria $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^p}$ este divergentă, întrucât termenul său general nu tinde la 0. Similar, pentru $p = 0$, $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n^p} = \lim\limits_{n\to\infty} 1 = 1$, deci seria $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ este de asemenea divergentă.

Fie acum $p > 0$. Conform criteriului de condensare, seriile $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ şi $\sum_{n=1}^{\infty} 2^n \frac{1}{(2^n)^p}$ au aceeaşi natură. Cum

$$\sum_{n=1}^{\infty} 2^n \frac{1}{(2^n)^p} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2^{p-1})^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2^{p-1}}\right)^n,$$

iar $\frac{1}{2^{p-1}} \geq 1$ pentru $p \in (0,1]$, respectiv $\frac{1}{2^{p-1}} < 1$ pentru $p > 1$, urmează că seria $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ este divergentă pentru $p \in (0,1]$, respectiv convergentă pentru $p > 1$.

Discuţia de mai sus poate fi sistematizată sub următoarea formă prescurtată

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p} \text{ este } \begin{cases} \text{divergentă,} & \text{dacă } p \leq 1 \\ \text{convergentă,} & \text{dacă } p > 1 \end{cases}.$$

Reprezentând o formă mai generală a seriei $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$, seria $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ se mai numeşte şi *seria armonică generalizată*.

3.1.2 Criterii de comparaţie

În cele ce urmează vom prezenta un set de criterii care permit analiza convergenţei sau divergenţei unei serii cu termeni pozitivi date prin stabilirea unei relaţii între termenii seriei şi termenii unei alte serii a cărei natură este cunoscută (deseori cu seria armonică generalizată). Revenind la faptul că, pentru serii cu termeni pozitivi, convergenţa acestora este echivalentă cu nemărginirea şirului sumelor parţiale, interpretarea următorului rezultat este imediată: o serie ai cărei termeni sunt mai mari decât termenii unei serii „nemărginite" (i.e., divergente) date este de asemenea „nemărginită" (i.e., divergentă), în vreme ce o serie ai cărei termeni sunt mai mici decât termenii unei serii „mărginite" (i.e., convergente) date este de asemenea „mărginită" (i.e., convergentă).

Teorema 3.12. *Fie $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ şi $\sum_{n=0}^{\infty} y_n$ două serii cu termeni pozitivi. Dacă există $N \in \mathbb{N}$ astfel ca*

$$x_n \leq y_n \quad \textit{pentru orice } n \geq N,$$

atunci au loc următoarele proprietăţi.

1. *Dacă* $\sum_{n=0}^{\infty} y_n$ *este convergentă, atunci şi* $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ *este convergentă.*
2. *Dacă* $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ *este divergentă, atunci şi* $\sum_{n=0}^{\infty} y_n$ *este divergentă.*

Demonstraţie. Fie $(S_n)_{n\geq 0}$ şirul sumelor parţiale ale seriei $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$, respectiv $(T_n)_{n\geq 0}$ şirul sumelor parţiale ale seriei $\sum_{n=0}^{\infty} y_n$. Cum

$$x_n \leq y_n \quad \text{pentru orice } n \geq N,$$

urmează că

$$x_N + x_{N+1} + \ldots + x_n \leq y_N + y_{N+1} + \ldots + y_n \quad \text{pentru orice } n \geq N,$$

deci

$$S_n - (x_0 + x_1 + \ldots + x_{N-1}) \leq T_n - (y_0 + y_1 + \ldots + y_{N-1}) \quad \text{pentru orice } n \geq N. \tag{3.1}$$

1. Dacă $\sum_{n=0}^{\infty} y_n$ este convergentă, atunci $(T_n)_{n\geq 0}$ este mărginit superior. Conform (3.1), $(S_n)_{n\geq 0}$ este de asemenea mărginit superior. Cum $(S_n)_{n\geq 0}$ este crescător, urmează că el este convergent, deci $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ este convergentă.

2. Dacă $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ este divergentă, atunci $(S_n)_{n\geq 0}$ este nemărginit superior. Conform (3.1), $(T_n)_{n\geq 0}$ este de asemenea nemărginit superior, deci $\sum_{n=0}^{\infty} y_n$ este divergentă. ■

Date fiind $c \in (0, \infty)$ şi o serie cu termeni pozitivi $\sum_{n=0}^{\infty} z_n$, se observă că seriile $\sum_{n=0}^{\infty} z_n$ şi $\sum_{n=0}^{\infty} cz_n$ au aceeaşi natură. În aceste condiţii, se poate obţine uşor următorul corolar al teoremei de mai sus, numit *criteriul de comparaţie cu inegalităţi*.

Corolar 3.12.1. *Fie* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} x_n$ *şi* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} y_n$ *două serii cu termeni pozitivi şi fie* $c \in (0, \infty)$*. Dacă există* $N \in \mathbb{N}$ *astfel ca*

$$x_n \leq c y_n \text{ pentru orice } n \geq N, \tag{3.2}$$

atunci au loc următoarele proprietăţi.

1. *Dacă* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} y_n$ *este convergentă, atunci şi* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} x_n$ *este convergentă.*

2. *Dacă* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} x_n$ *este divergentă, atunci şi* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} y_n$ *este divergentă.*

Exerciţiu

Studiaţi convergenţa următoarelor serii:

1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n+2^n}$; 2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{\sqrt{n^4+n+1}}$; 3) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{n+1}{\sqrt{n^4+1}}$; 4) $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \dfrac{1}{n\sqrt[n]{n}}$.

Soluţie

1) Deoarece $\dfrac{1}{n+2^n} \leq \dfrac{1}{2^n}$ iar seria $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{1}{2^n}$ este convergentă, urmează că seria $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{1}{n+2^n}$ este de asemenea convergentă.

2) Deoarece $\dfrac{1}{\sqrt{n^4+n+1}} \leq \dfrac{1}{\sqrt{n^4}} = \dfrac{1}{n^2}$, iar seria $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^2}$ este convergentă, urmează că seria $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{\sqrt{n^4+n+1}}$ este de asemenea convergentă.

3) Deoarece $\dfrac{n+1}{\sqrt{n^4+1}} \geq \dfrac{n+1}{\sqrt{(n+1)^4}} = \dfrac{1}{n+1}$, iar seria $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{1}{n+1}$ este divergentă (este acelaşi lucru cu seria divergentă $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n}$), urmează că seria $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{n+1}{\sqrt{n^4+1}}$ este divergentă.

4) Deoarece $n \leq 2^n$ pentru orice $n \geq 2$, urmează că $\sqrt[n]{n} \leq 2$ pentru orice $n \geq 2$, deci $\dfrac{1}{n\sqrt[n]{n}} \geq \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{1}{n}$ pentru orice $n \geq 2$. Cum seria $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n}$ este divergentă, urmează că şi seria $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \dfrac{1}{n\sqrt[n]{n}}$ este divergentă. ∎

Informaţii despre îndeplinirea relaţiei (3.2), necesară pentru utilizarea criteriului de comparaţie, se pot obţine studiind comportarea raportului $\dfrac{x_n}{y_n}$.

În acest sens, să presupunem că $y_n > 0$ pentru orice $n \geq 0$. Conform Teoremei 2.36, dacă $\limsup\limits_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n} = L < \infty$, iar $\varepsilon > 0$, atunci există un rang $n_\varepsilon^1 \in \mathbb{N}$ astfel că $\frac{x_n}{y_n} < L + \varepsilon$ pentru orice $n \geq n_\varepsilon^1$. Se obţine că

$$x_n < (L+\varepsilon)y_n \quad \text{pentru orice } n \geq n_\varepsilon^1.$$

Similar, dacă $\liminf\limits_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n} = l > 0$, iar $\varepsilon \in (0, l)$, atunci există un rang $n_\varepsilon^2 \in \mathbb{N}$ astfel că $\frac{x_n}{y_n} > l - \varepsilon$ pentru orice $n \geq n_\varepsilon^2$. De aici,

$$x_n > (l-\varepsilon)y_n \quad \text{pentru orice } n \geq n_\varepsilon^2.$$

Putem atunci obţine următorul rezultat, numit *criteriul de comparaţie cu limite extreme*.

Corolar 3.12.2. *Fie* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} x_n$ *o serie cu termeni pozitivi şi* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} y_n$ *o serie cu termeni strict pozitivi.*

1. *Dacă* $\limsup\limits_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n} = L < \infty$, *iar* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} y_n$ *este convergentă, atunci şi* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} x_n$ *este convergentă.*

2. *Dacă* $\liminf\limits_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n} = l > 0$, *iar* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} y_n$ *este divergentă, atunci şi* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} x_n$ *este divergentă.*

Demonstraţie. 1) Concluzia se obţine deoarece $\sum\limits_{n=0}^{\infty} y_n$ este convergentă şi există un rang $n_\varepsilon^1 \in \mathbb{N}$ astfel ca

$$x_n < (L+\varepsilon)y_n \quad \text{pentru orice } n \geq n_\varepsilon^1.$$

2) Concluzia se obţine deoarece $\sum\limits_{n=0}^{\infty} y_n$ este divergentă şi există un rang $n_\varepsilon^2 \in \mathbb{N}$ astfel ca

$$x_n > (l-\varepsilon)y_n \quad \text{pentru orice } n \geq n_\varepsilon^2.$$

■

În situaţia în care există $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{x_n}{y_n} = l \in \overline{\mathbb{R}}$, există şi $\liminf\limits_{n\to\infty} \dfrac{x_n}{y_n}$, $\limsup\limits_{n\to\infty} \dfrac{x_n}{y_n}$. În plus, au loc egalităţile

$$\liminf_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n} = \limsup_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n} = l.$$

Corolarul de mai sus se poate particulariza atunci sub forma următoare, numită şi *criteriul de comparaţie cu limită.*

Corolar 3.12.3. *Fie $\sum\limits_{n=0}^{\infty} x_n$ o serie cu termeni pozitivi şi $\sum\limits_{n=0}^{\infty} y_n$ o serie cu termeni strict pozitivi astfel încât există $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n} = l \in \overline{\mathbb{R}}$. Au loc următoarele proprietăţi.*

1. *Dacă $l < \infty$, iar $\sum\limits_{n=0}^{\infty} y_n$ este convergentă, atunci şi $\sum\limits_{n=0}^{\infty} x_n$ este convergentă.*

2. *Dacă $l > 0$, iar $\sum\limits_{n=0}^{\infty} y_n$ este divergentă, atunci şi $\sum\limits_{n=0}^{\infty} x_n$ este divergentă.*

3. *Dacă $l \in (0, \infty)$, atunci seriile $\sum\limits_{n=0}^{\infty} x_n$ şi $\sum\limits_{n=0}^{\infty} y_n$ au aceeaşi natură.*

În multe situaţii, un bun termen de comparaţie este seria $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^p}$, $\dfrac{1}{n^p}$ precizând comportarea „aproximativă" a termenului general al seriei de studiat. De exemplu, în studiul convergenţei seriei $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{1}{n^3 - 2n + 1}$ este utilă comparaţia cu $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^3}$, întrucât $\dfrac{1}{n^3 - 2n + 1}$ are comportarea „aproximativă" a lui $\dfrac{1}{n^3}$ pentru $n \to \infty$, iar în studiul convergenţei seriei $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{n}{n^2\sqrt{n} - n + 1}$ este utilă comparaţia cu $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{n}{n^2\sqrt{n}} = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n\sqrt{n}}$, întrucât $\dfrac{n}{n^2\sqrt{n} - n + 1}$ are comportarea „aproximativă" a lui $\dfrac{n}{n^2\sqrt{n}} = \dfrac{1}{n\sqrt{n}}$.

Exemplu

Studiaţi convergenţa seriilor:

1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{\sqrt{n^3 + n}}$; 2) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{n+2}{n^2 + 6n + 11}$; 3) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{1}{n + \sqrt{n^2+1}}$;
4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n}}$.

Soluţie

1) Vom compara seria dată cu seria $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n^3}} = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$. Se obţine că

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{\sqrt{n^3+n}}}{\frac{1}{\sqrt{n^3}}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n^3}}{\sqrt{n^3+n}} = \lim_{n\to\infty} \sqrt{\frac{1}{1+\frac{1}{n^2}}} = 1 \in (0,\infty),$$

de unde seriile $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n^3+n}}$ şi $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$ au aceeaşi natură. Cum cea din urmă este convergentă, fiind o serie armonică generalizată cu $p = \frac{3}{2} > 1$, urmează că şi $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n^3+n}}$ este convergentă.

2) Vom compara seria dată cu seria $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n^2} = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$. Se obţine că

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{n+2}{n^2+6n+11}}{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n(n+2)}{n^2+6n+11} = \lim_{n\to\infty} \frac{1+\frac{2}{n}}{1+\frac{6}{n}+\frac{11}{n^2}} = 1 \in (0,\infty),$$

de unde seriile $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{n+2}{n^2+6n+11}$ şi $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ au aceeaşi natură. Cum cea din urmă este divergentă, fiind o serie armonică, urmează că şi $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{n+2}{n^2+6n+11}$ este divergentă.

3) Vom compara seria dată cu seria $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n}$. Se obţine că

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n+\sqrt{n^2+1}}}{\frac{1}{2n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{2n}{n+\sqrt{n^2+1}} = \lim_{n\to\infty} \frac{2}{1+\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}} = 1 \in (0,\infty),$$

de unde seriile $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n+\sqrt{n^2+1}}$ şi $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n}$ au aceeaşi natură. Cum cea din urmă este divergentă, fiind seria armonică multiplicată cu o constantă, urmează că şi $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n+\sqrt{n^2+1}}$ este divergentă.

4) Este deja cunoscut că $\lim\limits_{n\to\infty} \left(1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n}-\ln n\right) = c \in (0,1)$. De aici,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n}-\ln n}{\ln n} = 0,$$

iar

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n}}}{\frac{1}{\ln n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\ln n}{1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n}}=\frac{1}{1+\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n}-\ln n}{\ln n}}=1\in(0,\infty),$$

de unde seriile $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n}}$ şi $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{1}{\ln n}$ au aceeaşi natură. Deoarece $(x_n)_{n\geq 0}$: $\left(\frac{1}{\ln n}\right)_{n\geq 2}$ este un şir monoton descrescător de numere strict pozitive, urmează conform criteriului de condensare că $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{1}{\ln n}$ şi $\sum\limits_{n=2}^{\infty}2^n\frac{1}{\ln 2^n}=\sum\limits_{n=2}^{\infty}2^n\frac{1}{n\ln 2}$ au aceeaşi natură. Deoarece $n\leq 2^n$ pentru orice $n\geq 2$, urmează că $2^n\frac{1}{n\ln 2}\geq\frac{1}{\ln 2}$, deci termenul general al seriei $\sum\limits_{n=2}^{\infty}2^n\frac{1}{n\ln 2}$ nu tinde la 0, aceasta fiind în concluzie divergentă. Urmează că şi $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n}}$ este divergentă. ■

Vom preciza în cele ce urmează un alt criteriu, numit şi *criteriul de comparaţie cu rapoarte*, prin care convergenţa sau divergenţa unei serii se poate stabili prin intermediul comparaţiei cu o serie a cărei natură este cunoscută, ce poate fi dedus cu ajutorul Corolarului 3.12.1.

Teorema 3.13. *Fie* $\sum\limits_{n=0}^{\infty}x_n$ *şi* $\sum\limits_{n=0}^{\infty}y_n$ *două serii cu termeni strict pozitivi. Dacă există* $N\in\mathbb{N}$ *astfel ca*

$$\frac{x_{n+1}}{x_n}\leq\frac{y_{n+1}}{y_n}\quad\text{pentru orice } n\geq N,\tag{3.3}$$

atunci au loc următoarele proprietăţi.

1. *Dacă* $\sum\limits_{n=0}^{\infty}y_n$ *este convergentă, atunci şi* $\sum\limits_{n=0}^{\infty}x_n$ *este convergentă.*

2. *Dacă* $\sum\limits_{n=0}^{\infty}x_n$ *este divergentă, atunci şi* $\sum\limits_{n=0}^{\infty}y_n$ *este divergentă.*

Demonstraţie. Cu ajutorul (3.3) se deduce că

$$\frac{x_{n+1}}{y_{n+1}}\leq\frac{x_n}{y_n}\quad\text{pentru orice } n\geq N,$$

de unde
$$\frac{x_{n+1}}{y_{n+1}} \leq \frac{x_n}{y_n} \leq \frac{x_{n-1}}{y_{n-1}} \leq \ldots \leq \frac{x_N}{y_N} \quad \text{pentru orice } n \geq N.$$
Cu notaţia $\frac{x_N}{y_N} = c$, urmează că
$$\frac{x_n}{y_n} \leq c \quad \text{pentru orice } n \geq N,$$
de unde concluzia urmează conform Corolarului 3.12.1. ■

3.1.3 Criterii ale radicalului

Un dezavantaj al criteriilor de comparaţie este că utilizarea acestora necesită construcţia unor serii ajutătoare, alegerea acestora din urmă nefiind totdeauna imediată. Următorul criteriu, numit şi *criteriul radicalului cu inegalităţi*, este utilizat îndeosebi pentru studierea convergenţei unor serii pentru care termenul general conţine puterea de ordin n a unui alt şir şi nu necesită construcţia unei serii ajutătoare.

Teorema 3.14. *Fie $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ o serie cu termeni pozitivi. Au loc atunci următoarele proprietăţi.*

1. *Dacă există $q < 1$ şi $N \in \mathbb{N}$ astfel ca*
$$\sqrt[n]{x_n} \leq q \quad \textit{pentru orice } n \geq N,$$
atunci $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ este convergentă.

2. *Dacă*
$$\sqrt[n]{x_n} \geq 1 \quad \textit{pentru o infinitate de valori ale lui } n,$$
atunci $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ este divergentă.

Demonstraţie. 1. Dacă
$$\sqrt[n]{x_n} \leq q \quad \text{pentru orice } n \geq N,$$
urmează că
$$x_n \leq q^n \quad \text{pentru orice } n \geq N,$$

iar cum $\sum_{n=0}^{\infty} q^n$ este convergentă se obţine că şi $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ este convergentă.

2. Deoarece

$$\sqrt[n]{x_n} \geq 1 \quad \text{pentru o infinitate de valori ale lui } n,$$

se obţine că $x_n \geq 1$ pentru o infinitate de valori ale lui n, deci şirul termenilor generali $(x_n)_{n\geq 0}$ nu este convergent la 0, iar seria $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ este divergentă. ■

Se poate obţine atunci următorul *criteriu al radicalului cu limite extreme*.

Teorema 3.15. *Fie $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ o serie cu termeni strict pozitivi. Au loc atunci următoarele proprietăţi.*

1. *Dacă $\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{x_n} < 1$, atunci $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ este convergentă.*

2. *Dacă $\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{x_n} > 1$, atunci $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ este divergentă.*

3. *Dacă $\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{x_n} = 1$, atunci natura seriei $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ nu poate fi precizată a priori cu ajutorul criteriului radicalului cu limite extreme (spunem că este un caz de dubiu).*

Demonstraţie. 1. Conform Teoremei 2.36, dacă $\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{x_n} = L < 1$, iar $0 < \varepsilon < 1 - L$, atunci există un rang $n_\varepsilon^1 \in \mathbb{N}$ astfel că $\sqrt[n]{x_n} < L + \varepsilon < 1$ pentru orice $n \geq n_\varepsilon^1$, deci $x_n < (L+\varepsilon)^n$ pentru orice $n \geq n_\varepsilon^1$. Cum seria $\sum_{n=0}^{\infty} (L+\varepsilon)^n$ este convergentă, urmează că şi $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ este convergentă.

2. Dacă $\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{x_n} = L > 1$, cum $\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{x_n}$ este un punct limită al şirului $(\sqrt[n]{x_n})_{n\geq 0}$, urmează că există un subşir $(\sqrt[k_n]{x_{k_n}})_{k_n\geq 0}$ astfel ca $\lim_{n\to\infty} (\sqrt[k_n]{x_{k_n}})_{k_n\geq 0} = L > 1$.

Dacă $L < \infty$, fie $0 < \varepsilon < L - 1$. Atunci există un rang $n_\varepsilon^2 \in \mathbb{N}$ astfel ca $\sqrt[k_n]{x_{k_n}} > L - \varepsilon > 1$ pentru $n \geq n_\varepsilon^2$. De aici, $x_{k_n} \geq 1$ pentru $n \geq n_\varepsilon^2$, deci $(x_n)_{n\geq 0}$ nu este convergent la 0, iar seria $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ este divergentă.

Dacă $L = \infty$, există un rang $n_\varepsilon^3 \in \mathbb{N}$ astfel ca $\sqrt[k_n]{x_{k_n}} > 1$ pentru $n \geq n_\varepsilon^3$, obţinându-se în mod similar că seria $\sum\limits_{n=0}^{\infty} x_n$ este divergentă.

3. Este suficient să se considere seriile $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n}, \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n^2}$. Pentru ambele, $\limsup\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{x_n} = 1 (= \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{x_n})$, prima fiind divergentă, iar cea de-a doua convergentă. ■

În situaţia în care există $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{x_n} = l \in \overline{\mathbb{R}}$, există şi $\limsup\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{x_n}$, iar

$$\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{x_n} = l.$$

Teorema de mai sus se poate particulariza atunci sub forma următoare, numită şi *criteriul radicalului cu limită*.

Corolar 3.15.1. *Fie $\sum\limits_{n=0}^{\infty} x_n$ o serie cu termeni pozitivi astfel încât există $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{x_n} = l \in \overline{\mathbb{R}}$. Au loc următoarele proprietăţi.*

1. *Dacă $l < 1$, atunci $\sum\limits_{n=0}^{\infty} x_n$ este convergentă.*
2. *Dacă $l > 1$, atunci $\sum\limits_{n=0}^{\infty} x_n$ este divergentă.*
3. *Dacă $l = 1$, atunci natura seriei $\sum\limits_{n=0}^{\infty} x_n$ nu poate fi precizată a priori cu ajutorul criteriului radicalului cu limită.*

Exerciţiu

Studiaţi convergenţa seriei $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \left(\frac{3n^2+2n-1}{2n^2+3n+1}\right)^n$.

Soluţie

1) Termenul general al seriei este $x_n = \left(\frac{3n^2+2n-1}{2n^2+3n+1}\right)^n$. Urmează că

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{x_n} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left(\frac{3n^2+2n-1}{2n^2+3n+1}\right)^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{3n^2+2n-1}{2n^2+3n+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^2\left(3+\frac{2}{n}-\frac{1}{n^2}\right)}{n^2\left(1+\frac{3}{n}+\frac{1}{n^2}\right)}$$

$$= \frac{3}{2} > 1$$

deci seria $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\left(\dfrac{3n^2+2n-1}{2n^2+3n+1}\right)^n$ este divergentă. ■

Exerciţiu

Discutaţi natura seriei $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\left(\dfrac{an+1}{n+2}\right)^n$, unde $a>0$.

Soluţie

Termenul general al seriei este $x_n=\left(\dfrac{an+1}{n+2}\right)^n$. Urmează că

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{x_n}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left(\frac{an+1}{n+2}\right)^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{an+1}{n+2}=\lim_{n\to\infty}\frac{n\left(a+\frac{1}{n}\right)}{n\left(1+\frac{2}{n}\right)}=a.$$

De aici, $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\left(\dfrac{an+1}{n+2}\right)^n$ este convergentă dacă $a\in(0,1)$, respectiv divergentă dacă $a>1$.

Dacă $a=1$, urmează că $x_n=\left(\frac{n+1}{n+2}\right)^n$, deci

$$\lim_{n\to\infty}x_n=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+1}{n+2}\right)^n=\lim_{n\to\infty}\left[\left(1-\frac{1}{n+2}\right)^{-(n+2)}\right]^{-\frac{n}{n+2}}=e^{-1}=\frac{1}{e}.$$

Urmează că $(x_n)_{n\geq 0}$ nu este convergent la 0, iar $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\left(\dfrac{n+1}{n+2}\right)^n$ este divergentă. ■

3.1.4 Criterii ale raportului

Un alt criteriu util pentru studiul convergenţei unor serii cu termeni pozitivi, în special a acelora pentru care termenul general conţine produse, este *criteriul raportului cu inegalităţi*, indicat mai jos. De asemenea, acesta nu necesită construcţia unei serii ajutătoare.

Teorema 3.16. *Fie $\sum\limits_{n=0}^{\infty}x_n$ o serie cu termeni strict pozitivi. Au loc atunci următoarele proprietăţi.*

1. *Dacă există $q<1$ şi $N\in\mathbb{N}$ astfel ca*
$$\frac{x_{n+1}}{x_n}\leq q \quad \textit{pentru orice } n\geq N,$$
atunci $\sum\limits_{n=0}^{\infty}x_n$ este convergentă.

2. *Dacă există $N \in \mathbb{N}$ astfel ca*

$$\frac{x_{n+1}}{x_n} \geq 1 \quad \textit{pentru orice } n \geq N,$$

atunci $\sum\limits_{n=0}^{\infty} x_n$ *este divergentă.*

Demonstraţie. 1. Deoarece

$$\frac{x_{n+1}}{x_n} \leq q \quad \text{pentru orice } n \geq N,$$

urmează că

$$\frac{x_{n+1}}{x_n} \leq \frac{q^{n+1}}{q^n} \quad \text{pentru orice } n \geq N,$$

iar deoarece $\sum\limits_{n=0}^{\infty} q^n$ este convergentă, se obţine cu ajutorul Teoremei 3.13 (criteriul de comparaţie cu rapoarte) că şi seria $\sum\limits_{n=0}^{\infty} x_n$ este convergentă.

2. Se observă că

$$\frac{x_{n+1}}{x_n} \geq \frac{1^{n+1}}{1^n} \text{ pentru orice } n \geq N,$$

iar cum seria $\sum\limits_{n=0}^{\infty} 1^n$ este divergentă, se obţine cu ajutorul Teoremei 3.13 (criteriul de comparaţie cu rapoarte) că şi seria $\sum\limits_{n=0}^{\infty} x_n$ este divergentă. ∎

Se poate obţine atunci următorul *criteriu al raportului cu limite extreme*.

Teorema 3.17. *Fie* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} x_n$ *o serie cu termeni strict pozitivi. Au loc atunci următoarele proprietăţi.*

1. *Dacă* $\limsup\limits_{n\to\infty} \frac{x_{n+1}}{x_n} < 1$, *atunci* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} x_n$ *este convergentă.*

2. *Dacă* $\liminf\limits_{n\to\infty} \frac{x_{n+1}}{x_n} > 1$, *atunci* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} x_n$ *este divergentă.*

3. *Dacă* $\limsup\limits_{n\to\infty} \dfrac{x_{n+1}}{x_n} \geq 1 \geq \liminf\limits_{n\to\infty} \dfrac{x_{n+1}}{x_n}$*, atunci natura seriei* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} x_n$ *nu poate fi precizată a priori cu ajutorul criteriului raportului cu limite extreme.*

Demonstraţie. 1. Conform Teoremei 2.36, dacă $\limsup\limits_{n\to\infty} \frac{x_{n+1}}{x_n} = L < 1$, iar $0 < \varepsilon < 1 - L$, atunci există un rang $n_\varepsilon^1 \in \mathbb{N}$ astfel că $\frac{x_{n+1}}{x_n} < L + \varepsilon < 1$ pentru orice $n \geq n_\varepsilon^1$, deci $\sum\limits_{n=0}^{\infty} x_n$ este convergentă.

2. Similar, dacă $\liminf\limits_{n\to\infty} \frac{x_{n+1}}{x_n} = l > 1$, iar $0 < \varepsilon < l - 1$, atunci există un rang $n_\varepsilon^2 \in \mathbb{N}$ astfel că $\frac{x_{n+1}}{x_n} > l - \varepsilon > 1$ pentru orice $n \geq n_\varepsilon^2$, deci $\sum\limits_{n=0}^{\infty} x_n$ este divergentă.

3. Este suficient să se considere seriile $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{1}{n}$, $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{1}{n^2}$. Pentru ambele, $\limsup\limits_{n\to\infty} \dfrac{x_{n+1}}{x_n} = 1 = \liminf\limits_{n\to\infty} \dfrac{x_{n+1}}{x_n}$, prima fiind divergentă, iar cea de-a doua convergentă. ■

În situaţia în care există $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{x_{n+1}}{x_n} = l \in \overline{\mathbb{R}}$, există şi $\liminf\limits_{n\to\infty} \dfrac{x_{n+1}}{x_n}$, $\limsup\limits_{n\to\infty} \dfrac{x_{n+1}}{x_n}$. În plus, au loc egalităţile

$$\liminf_{n\to\infty} \frac{x_{n+1}}{x_n} = \limsup_{n\to\infty} \frac{x_{n+1}}{x_n} = l.$$

Corolarul de mai sus se poate particulariza atunci sub forma următoare, numită şi *criteriul raportului cu limită*.

Corolar 3.17.1. *Fie* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} x_n$ *o serie cu termeni strict pozitivi astfel încât există* $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{x_{n+1}}{x_n} = l \in \overline{\mathbb{R}}$. *Au loc următoarele proprietăţi.*

1. *Dacă* $l < 1$*, atunci* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} x_n$ *este convergentă.*

2. *Dacă* $l > 1$*, atunci şi* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} x_n$ *este divergentă.*

3. *Dacă* $l = 1$*, atunci natura seriei* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} x_n$ *nu poate fi precizată a priori cu ajutorul criteriului raportului cu limită.*

Exerciţiu

Studiaţi convergenţa seriilor

1) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{2^n n!}{n^n}$; 2) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{2 \cdot 5 \cdot 8 \ldots (3n+2)}{1 \cdot 3 \cdot 5 \ldots (2n+1)}$.

Soluţie

1) Termenul general al seriei este $x_n = \dfrac{2^n n!}{n^n}$. Urmează că

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_{n+1}}{x_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{2^{n+1}(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}}{\frac{2^n n!}{n^n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{2^{n+1}(n+1)!}{(n+1)^{n+1}} \frac{n^n}{2^n n!} = \lim_{n\to\infty} \frac{2}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}$$
$$= \frac{2}{e} < 1,$$

deci seria $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{2^n n!}{n^n}$ este convergentă.

2) Termenul general al seriei este $x_n = \dfrac{2 \cdot 5 \cdot 8 \ldots (3n+2)}{1 \cdot 3 \cdot 5 \ldots (2n+1)}$. Urmează că

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_{n+1}}{x_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{2\cdot5\cdot8\ldots(3n+2)(3n+5)}{1\cdot3\cdot5\ldots(2n+1)(2n+3)}}{\frac{2\cdot5\cdot8\ldots(3n+2)}{1\cdot3\cdot5\ldots(2n+1)}}$$
$$= \lim_{n\to\infty} \frac{2 \cdot 5 \cdot 8 \ldots (3n+2)(3n+5)}{1 \cdot 3 \cdot 5 \ldots (2n+1)(2n+3)} \cdot \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \ldots (2n+1)}{2 \cdot 5 \cdot 8 \ldots (3n+2)}$$
$$= \lim_{n\to\infty} \frac{3n+5}{2n+3} = \frac{3}{2} > 1,$$

deci seria $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{2 \cdot 5 \cdot 8 \ldots (3n+2)}{1 \cdot 3 \cdot 5 \ldots (2n+1)}$ este divergentă. ∎

În ceea ce priveşte relaţia între domeniile de aplicabilitate ale criteriilor raportului şi radicalului, să notăm că dacă $(x_n)_{n\geq 0}$ este un şir cu termeni strict pozitivi atunci, aşa cum reiese din Teorema 2.39, are loc inegalitatea

$$\liminf_{n\to\infty} \frac{x_{n+1}}{x_n} \leq \liminf_{n\to\infty} \sqrt[n]{x_n} \leq \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{x_n} \leq \limsup_{n\to\infty} \frac{x_{n+1}}{x_n}.$$

Se observă de aici că dacă $\limsup\limits_{n\to\infty} \frac{x_{n+1}}{x_n} < 1$ atunci şi $\limsup\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{x_n} < 1$, iar dacă $\liminf\limits_{n\to\infty} \frac{x_{n+1}}{x_n} > 1$, atunci şi $\limsup\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{x_n} > 1$. De aici, dacă sunt îndeplinite condiţiile pentru aplicarea criteriului raportului cu limite extreme, atunci sunt îndeplinite şi condiţiile pentru aplicarea criteriului radicalului cu limite extreme, obţinându-se aceleaşi rezultate. De asemenea, dacă $\lim_{n\to\infty} \frac{x_{n+1}}{x_n}$ există, atunci şi $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{x_n}$ există şi are aceeaşi valoare, deci dacă sunt îndeplinite condiţiile pentru aplicarea criteriului raportului cu limită, atunci sunt îndeplinite şi condiţiile pentru aplicarea criteriului radicalului cu limită, obţinându-se acelaşi rezultat.

În plus, există situaţii în care criteriile raportului nu sunt aplicabile, fiind aplicabile în schimb criterii ale radicalului. Un exemplu în acest sens este seria cu termeni pozitivi $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{3+(-1)^n}{2^n}$. Deoarece termenul general este $x_n = \frac{2+(-1)^n}{2^n}$, urmează că $\frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{2+(-1)^{n+1}}{2+(-1)^n} \cdot \frac{1}{2}$, de unde

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{3}{2} > 1; \quad \liminf_{n\to\infty} \frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{1}{6} < 1,$$

deci criteriul raportului cu limite extreme nu este aplicabil. Totuşi, $\frac{1}{2^n} \leq x_n \leq \frac{3}{2^n}$, de unde $\frac{1}{2} \leq \sqrt[n]{x_n} \leq \frac{\sqrt[n]{3}}{2}$, iar $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{x_n} = \frac{1}{2} < 1$, conform criteriului cleştelui. De aici, criteriul radicalului cu limită (şi de fapt şi cel cu limite extreme) este aplicabil, iar seria $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{3+(-1)^n}{2^n}$ este convergentă. Se poate deci concluziona faptul că sus-menţionatele criterii ale radicalului au o arie de aplicabilitate mai largă decât criteriile corespunzătoare ale raportului.

3.1.5 Criteriul Raabe-Duhamel

Diversele variante are criteriului Raabe-Duhamel, menţionate în cele ce urmează, sunt în general utilizate atunci când aplicarea criteriul raportului conduce la un caz de dubiu. Vom prezenta mai întâi *criteriul Raabe-Duhamel cu inegalităţi*; a se remarca faptul că utilizarea raportului inversat ($\frac{x_n}{x_{n+1}}$, în contrast cu raportul $\frac{x_{n+1}}{x_n}$ utilizat în cadrul criteriului raportului) conduce la obţinerea unor situaţii inverse de convergenţă faţă de cele obţinute în criteriul raportului, respectiv „$\geq q > 1$" pentru convergenţă (în loc de „$\leq q < 1$" pentru criteriul raportului) şi „≤ 1" pentru divergenţă (în loc de „≥ 1" pentru criteriul raportului).

Teorema 3.18. *Fie* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} x_n$ *o serie cu termeni strict pozitivi. Au loc atunci următoarele proprietăţi.*

1. *Dacă există $q > 1$ şi $N \in \mathbb{N}$ astfel ca*

$$n\left(\frac{x_n}{x_{n+1}} - 1\right) \geq q \quad \textit{pentru orice } n \geq N,$$

atunci $\sum\limits_{n=0}^{\infty} x_n$ *este convergentă.*

2. *Dacă există $N \in \mathbb{N}$ astfel ca*

$$n\left(\frac{x_n}{x_{n+1}} - 1\right) \leq 1 \quad \textit{pentru orice } n \geq N,$$

atunci $\sum\limits_{n=0}^{\infty} x_n$ *este divergentă.*

Demonstraţie. 1. Deoarece

$$n\left(\frac{x_n}{x_{n+1}} - 1\right) \geq q \quad \text{pentru orice } n \geq N,$$

urmează că

$$nx_n - (n+1)x_{n+1} \geq (q-1)x_{n+1} \quad \text{pentru orice } n \geq N.$$

Punând succesiv $n = N$, $n = N+1, \ldots, n = k-1$ şi sumând inegalităţile obţinute deducem că

$$Nx_N - kx_k \leq (q-1)(x_{N+1} + x_{N+2} + \ldots + x_k) \quad \text{pentru orice } k \geq N+1,$$

de unde

$$x_{N+1} + x_{N+2} + \ldots + x_k \leq \frac{1}{q-1} N x_N$$

şi deci

$$S_k \leq \frac{1}{q-1} N x_N + (x_0 + x_1 + \ldots + x_N) \quad \text{pentru orice } k \geq N+1,$$

iar şirul sumelor parţiale $(S_n)_{n \geq 0}$ este mărginit superior. Urmează de aici că $\sum\limits_{n=0}^{\infty} x_n$ este convergentă.

2. Deoarece

$$n\left(\frac{x_n}{x_{n+1}} - 1\right) \leq 1 \quad \text{pentru orice } n \geq N,$$

se obţine că

$$\frac{x_{n+1}}{x_n} \geq \frac{n}{n+1} = \frac{\frac{1}{n+1}}{\frac{1}{n}} \quad \text{pentru orice } n \geq N.$$

Cum seria $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ este divergentă, urmează conform criteriului de comparaţie cu rapoarte că şi $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ este divergentă. ■

Se poate obţine atunci următorul *criteriu Raabe-Duhamel cu limite extreme*.

Teorema 3.19. *Fie $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ o serie cu termeni strict pozitivi. Au loc atunci următoarele proprietăţi.*

1. *Dacă $\liminf_{n\to\infty} n\left(\frac{x_n}{x_{n+1}} - 1\right) > 1$, atunci $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ este convergentă.*

2. *Dacă $\limsup_{n\to\infty} n\left(\frac{x_n}{x_{n+1}} - 1\right) < 1$, atunci $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ este divergentă.*

3. *Dacă $\limsup_{n\to\infty} n\left(\frac{x_n}{x_{n+1}} - 1\right) \geq 1 \geq \liminf_{n\to\infty} n\left(\frac{x_n}{x_{n+1}} - 1\right)$, atunci natura seriei $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ nu poate fi precizată a priori cu ajutorul criteriului Raabe-Duhamel cu limite extreme.*

Demonstraţie. 1. Conform Teoremei 2.36, dacă $\liminf_{n\to\infty} n\left(\frac{x_n}{x_{n+1}} - 1\right) = l > 1$, iar $0 < \varepsilon < l - 1$, atunci există un rang $n_\varepsilon^1 \in \mathbb{N}$ astfel ca $n\left(\frac{x_n}{x_{n+1}} - 1\right) > l - \varepsilon > 1$ pentru orice $n \geq n_\varepsilon^1$, deci $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ este convergentă.

2. Similar, dacă $\limsup_{n\to\infty} n\left(\frac{x_n}{x_{n+1}} - 1\right) = L < 1$, iar $0 < \varepsilon < 1 - L$, atunci există un rang $n_\varepsilon^2 \in \mathbb{N}$ astfel ca $n\left(\frac{x_n}{x_{n+1}} - 1\right) < L + \varepsilon < 1$ pentru orice $n \geq n_\varepsilon^2$, deci $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ este divergentă. ■

În situaţia în care există $\lim_{n\to\infty} n\left(\frac{x_n}{x_{n+1}} - 1\right) = l \in \overline{\mathbb{R}}$, există şi $\liminf_{n\to\infty} n\left(\frac{x_n}{x_{n+1}} - 1\right)$,

$\limsup\limits_{n\to\infty} n\left(\dfrac{x_n}{x_{n+1}} - 1\right)$. În plus, au loc egalităţile

$$\liminf_{n\to\infty} n\left(\frac{x_n}{x_{n+1}} - 1\right) = \limsup_{n\to\infty} n\left(\frac{x_n}{x_{n+1}} - 1\right) = l.$$

Corolarul de mai sus se poate particulariza atunci sub forma următoare, numită şi *criteriul Raabe-Duhamel cu limită*.

Corolar 3.19.1. *Fie* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} x_n$ *o serie cu termeni strict pozitivi astfel încât există* $\lim\limits_{n\to\infty} n\left(\frac{x_n}{x_{n+1}} - 1\right) = l \in \overline{\mathbb{R}}$. *Au loc următoarele proprietăţi.*

1. *Dacă* $l > 1$, *atunci* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} x_n$ *este convergentă.*

2. *Dacă* $l < 1$, *atunci* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} x_n$ *este divergentă.*

3. *Dacă* $l = 1$, *atunci natura seriei* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} x_n$ *nu poate fi precizată a priori cu ajutorul criteriului Raabe-Duhamel cu limită.*

Exerciţiu

Demonstraţi că seria armonică generalizată $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{1}{n^p}$ este convergentă pentru $p > 1$, respectiv divergentă pentru $p < 1$.

Soluţie

Termenul general al seriei este $x_n = \dfrac{1}{n^p}$. Urmează că

$$\lim_{n\to\infty} n\left(\frac{x_n}{x_{n+1}} - 1\right) = \lim_{n\to\infty} n\left(\left(1+\frac{1}{n}\right)^p - 1\right) = \lim_{n\to\infty} \frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^p - 1}{\frac{1}{n}} = p.$$

Concluzia urmează atunci conform criteriului Raabe-Duhamel cu limită. ■

Exerciţiu

Studiaţi convergenţa seriei $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1\cdot 3\cdot 5\cdot \ldots \cdot (2n-1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdot \ldots \cdot 2n}$.

Soluţie

Termenul general al seriei este $x_n = \dfrac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \ldots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \ldots \cdot 2n}$, de unde

$$\begin{aligned}
\frac{x_{n+1}}{x_n} &= \frac{\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot\ldots\cdot(2n-1)\cdot(2n+1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdot\ldots\cdot 2n\cdot(2n+2)}}{\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot\ldots\cdot(2n-1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdot\ldots\cdot 2n}} \\
&= \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot\ldots\cdot(2n-1)\cdot(2n+1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdot\ldots\cdot 2n\cdot(2n+2)} \cdot \frac{2\cdot 4\cdot 6\cdot\ldots\cdot 2n}{1\cdot 3\cdot 5\cdot\ldots\cdot(2n-1)} \\
&= \frac{2n+1}{2n+2}.
\end{aligned}$$

Urmează că $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{x_{n+1}}{x_n} = 1$, deci aplicarea criteriul raportului conduce la un caz de dubiu. Atunci

$$\lim_{n\to\infty} n\left(\frac{x_n}{x_{n+1}} - 1\right) = \lim_{n\to\infty} n\left(\frac{2n+2}{2n+1} - 1\right) = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{2n+1} = \frac{1}{2} < 1,$$

deci seria dată este divergentă. ∎

3.2 Serii cu termeni oarecare

Comparativ cu situaţia seriilor cu termenilor pozitivi, pentru care studiul convergenţei se reduce la studiul mărginirii şirului sumelor parţiale, deoarece monotonia acestuia este asigurată *a priori*, situaţia seriilor cu termeni oarecare este mult mai complicată, întrucât această cale de abordare se pierde, şirul sumelor parţiale nemaifiind monoton. În concluzie, nici criteriile de convergenţă obţinute anterior (criteriile de comparaţie, ale raportului şi radicalului, ş. a. m. d.) nu mai sunt valabile.

Principala strategie de demonstrare a convergenţei seriilor cu termeni oarecare va fi acum scrierea termenului general ca un produs de doi factori, construirea seriei care are ca termen general unul din factori şi a şirului care are ca termen general pe cel de-al doilea factor şi determinarea unor proprietăţi de convergenţă, monotonie şi mărginire pentru acestea care vor conduce la convergenţa seriei iniţiale. În situaţia în care seria care are ca termen general modulul termenului general al seriei iniţiale este convergentă, convergenţa seriei iniţiale se va obţine din convergenţa acesteia din urmă; desigur, convergenţa celei de-a doua serii este mult mai simplu de obţinut, fiind vorba despre o serie cu termeni pozitivi. În fine, pentru cazul particular al seriilor alternante, convergenţa acestora se poate obţine demonstrând monotonia şirului obţinut prin eliminarea factorului alternant.

3.2.1 Criteriul lui Dirichlet

În situaţia în care $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ este o serie nu neapărat convergentă, dar cu şirul sumelor parţiale mărginit, înmulţirea termenului general x_n cu termenul general y_n al unui şir cu valori „mici” (monoton descrescător şi convergent la 0) „îmbunătăţeşte” convergenţa seriei, în sensul că seria rezultat $\sum_{n=0}^{\infty} x_n y_n$ este convergentă. Are loc atunci următorul rezultat, numit *criteriul lui Dirichlet*.

Teorema 3.20. *Dacă $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ este o serie cu şirul sumelor parţiale mărginit, iar $(y_n)_{n\geq 0}$ este un şir monoton descrescător şi convergent la* 0*, atunci $\sum_{n=0}^{\infty} x_n y_n$ este convergentă.*

Demonstraţie. Vom demonstra că şirul $(T_n)_{n\geq 0}$ al sumelor parţiale asociat seriei $\sum_{n=0}^{\infty} x_n y_n$ este convergent, fiind şir Cauchy. În acest scop, să notăm cu $(S_n)_{n\geq 0}$ şirul sumelor parţiale asociat seriei $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$; cum $(S_n)_{n\geq 0}$ este mărginit, urmează că există $M \geq 0$ astfel ca $|S_n| \leq M$ pentru orice $n \geq 0$. Să observăm că $x_k = S_k - S_{k-1}$ pentru $k \geq 1$. Obţinem de aici că

$$\begin{aligned}
|T_{n+p} - T_n| &= |x_{n+1}y_{n+1} + x_{n+2}y_{n+2} + \ldots + x_{n+p}y_{n+p}| \\
&= |(S_{n+1} - S_n)y_{n+1} + (S_{n+2} - S_{n+1})y_{n+2} + \ldots \\
&\quad + (S_{n+p} - S_{n+p-1})y_{n+p}| \\
&= |S_{n+1}(y_{n+1} - y_{n+2}) + S_{n+2}(y_{n+2} - y_{n+3}) + \ldots \\
&\quad + S_{n+p-1}(y_{n+p-1} - y_{n+p}) + S_{n+p}y_{n+p} - S_n y_{n+1}| \\
&\leq |S_{n+1}(y_{n+1} - y_{n+2})| + |S_{n+2}(y_{n+2} - y_{n+3})| + \ldots \\
&\quad + |S_{n+p-1}(y_{n+p-1} - y_{n+p})| + |S_{n+p}y_{n+p}| + |S_n y_{n+1}|.
\end{aligned}$$

Deoarece $(y_n)_{n\geq 0}$ este un şir monoton descrescător, urmează că $y_{n+1} - y_{n+2} \geq 0$,

$y_{n+2} - y_{n+3} \geq 0, \ldots, y_{n+p-1} - y_{n+p} \geq 0$. De aici,

$$\begin{aligned}
|T_{n+p} - T_n| &\leq |S_{n+1}|(y_{n+1} - y_{n+2}) + |S_{n+2}|(y_{n+2} - y_{n+3}) + \ldots \\
&\quad + |S_{n+p-1}|(y_{n+p-1} - y_{n+p}) + |S_{n+p}||y_{n+p}| + |S_n||y_{n+1}| \\
&\leq M(y_{n+1} - y_{n+2}) + M(y_{n+2} - y_{n+3}) + \ldots \\
&\quad + M(y_{n+p-1} - y_{n+p}) + My_{n+p} + My_{n+1} \\
&= 2My_{n+1}.
\end{aligned}$$

Fie $\varepsilon > 0$. Cum $(y_n)_{n\geq 0}$ este şir convergent la 0, urmează că există $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ astfel ca $|y_n| \leq \frac{\varepsilon}{2M}$ pentru orice $n \geq n_\varepsilon$. Atunci

$$|T_{n+p} - T_n| \leq 2My_{n+1} \leq 2M \cdot \frac{\varepsilon}{2M} = \varepsilon \quad \text{pentru orice } n \geq n_\varepsilon, p \in \mathbb{N},$$

de unde $(T_n)_{n\geq 0}$ este şir Cauchy, deci şi convergent. Cum şirul sumelor sale parţiale $(T_n)_{n\geq 0}$ este convergent, seria $\sum\limits_{n=0}^{\infty} x_n y_n$ este convergentă. ∎

Exerciţiu

Demonstraţi că seria $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\sin nx}{n}$ este convergentă, unde $x \in \mathbb{R}$.

Soluţie

Mai întâi, fie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n} = \sum_{n=0}^{\infty} \sin nx \cdot \frac{1}{n} = \sum_{n=1}^{\infty} x_n y_n.$$

Fie $(S_n)_{n\geq 1}$ şirul sumelor parţiale asociat seriei $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n$,

$$S_n = \sin 0x + \sin x + \sin 2x + \ldots + \sin nx = \sin x + \sin 2x + \ldots + \sin nx.$$

Să observăm că

$$|\sin x + \sin 2x + \ldots + \sin nx| = \left| \frac{\cos\frac{x}{2} - \cos\frac{(n+1)x}{2}}{2\sin\frac{x}{2}} \right| \leq \frac{2}{2|\sin\frac{x}{2}|} = \frac{1}{|\sin\frac{x}{2}|},$$

dacă $\sin\frac{x}{2} \neq 0$ (adică $x \neq 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$), respectiv

$$|\sin x + \sin 2x + \ldots + \sin nx| = |0 + 0 + \ldots + 0| = 0,$$

dacă $\sin\frac{x}{2} = 0$ (adică $x = 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$), deci în orice caz $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n$ are şirul sumelor parţiale mărginit . Cum $(y_n)_{n\geq 1} = \left(\frac{1}{n}\right)_{n\geq 1}$ este monoton descrescător şi convergent la 0, urmează concluzia. ∎

3.2.2 Criteriul lui Abel

Dacă se porneşte de această dată de la o serie convergentă $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$, înmulţirea termenului general x_n cu termenul general y_n al unui şir cu proprietăţi suficient de bune (i.e. monoton şi mărginit) păstrează convergenţa seriei, în sensul că seria rezultat $\sum_{n=0}^{\infty} x_n y_n$ este de asemenea convergentă. Are loc atunci următorul rezultat, numit *criteriul lui Abel*.

Teorema 3.21. *Dacă $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ este o serie convergentă, iar $(y_n)_{n\geq 0}$ este un şir monoton şi mărginit, atunci $\sum_{n=0}^{\infty} x_n y_n$ este convergentă.*

Demonstraţie. Deoarece $(y_n)_{n\geq 0}$ este un şir monoton şi mărginit, el este convergent; fie $y \in \mathbb{R}$ limita acestuia. Observăm că

$$\sum_{n=0}^{\infty} x_n y_n = \sum_{n=0}^{\infty} x_n (y_n - y + y) = \sum_{n=0}^{\infty} (x_n(y_n - y) + x_n y).$$

Vom arăta că seria $\sum_{n=0}^{\infty} x_n y_n$ este convergentă, fiind suma seriilor convergente $\sum_{n=0}^{\infty} x_n(y_n - y)$ şi $\sum_{n=0}^{\infty} x_n y$; pentru a demonstra convergenţa primei serii se va aplica criteriul lui Dirichlet.

Dacă $(y_n)_{n\geq 0}$ este monoton descrescător, atunci $(y_n - y)_{n\geq 0}$ este monoton descrescător şi convergent la 0, iar seria $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ are şirul sumelor parţiale mărginit, fiind convergentă. Urmează că $\sum_{n=0}^{\infty} x_n(y_n - y)$ este convergentă, conform criteriului lui Dirichlet.

Dacă $(y_n)_{n\geq 0}$ este monoton crescător, atunci

$$\sum_{n=0}^{\infty} x_n(y_n - y) = \sum_{n=0}^{\infty} -x_n(y - y_n).$$

Cum $\sum_{n=0}^{\infty} x_n(y - y_n)$ este convergentă, conform criteriului lui Dirichlet, urmează că şi $\sum\limits_{n=0}^{\infty} x_n(y_n - y)$, obţinută din cea dintâi prin produsul cu constanta -1, este convergentă.

De asemenea, seria $\sum\limits_{n=0}^{\infty} x_n y$ este convergentă, fiind obţinută prin produsul dintre seria convergentă $\sum\limits_{n=0}^{\infty} x_n$ şi constanta y. De aici, seria $\sum\limits_{n=0}^{\infty} x_n y_n$ este convergentă, fiind suma seriilor convergente $\sum\limits_{n=0}^{\infty} x_n(y_n - y)$ şi $\sum\limits_{n=0}^{\infty} x_n y$. ■

Exerciţiu

Demonstraţi că seria $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\sin n \cos(\frac{1}{n})}{n}$ este convergentă.

Soluţie

Observăm mai întâi că

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n \cos(\frac{1}{n})}{n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n}{n} \cos(\frac{1}{n}).$$

A fost deja demonstrat că seria $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\sin nx}{n}$ este convergentă, unde $x \in \mathbb{R}$, deci, pentru $x = 1$, urmează că seria $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\sin n}{n}$ este convergentă. Cum şirul $(y_n)_{n\geq 1}$: $y_n = \frac{1}{n}$ este monoton descrescător şi convergent la 0, luând valori între 0 şi 1, iar funcţia cosinus este descrescătoare pe intervalul $[0, \frac{\pi}{2}]$, urmează că $(y_n)_{n\geq 1}$ este monoton crescător. În plus, $(y_n)_{n\geq 1}$ este mărginit, deoarece funcţia cosinus este mărginită. Urmează că seria din enunţ este convergentă, conform criteriului lui Abel. ■

3.2.3 Serii alternante. Criteriul Leibniz

Pentru cazul particular al seriilor alternante, se poate observa cu ajutorul criteriului lui Dirichlet că pornindu-se de la seria $\sum\limits_{n=0}^{\infty} (-1)^n$, cu şirul sumelor parţiale mărginit, prin înmulţirea termenului general $(-1)^n$ cu termenul general y_n al unui şir cu valori monoton descrescător şi convergent la 0 se obţine o serie convergentă. Mai precis, are loc următorul rezultat, numit *criteriul lui Leibniz*.

Teorema 3.22. *Dacă* $(y_n)_{n\geq 0}$ *este un şir monoton descrescător şi convergent la* 0*, atunci* $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n y_n$ *este convergentă.*

Demonstraţie. Fie $(S_n)_{n\geq 0}$ şirul sumelor parţiale asociat seriei $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n$. Deoarece $S_{2k} = 1$, $S_{2k+1} = 0$ pentru orice $k \in \mathbb{N}$, urmează că $(S_n)_{n\geq 0}$ este mărginit. Aplicând criteriul lui Dirichlet, urmează că seria $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n y_n$ este convergentă. ∎

Exerciţiu

Demonstraţi că seria $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{\sqrt{n+2}}$ este convergentă.

Soluţie

Se observă că

$$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{\sqrt{n+2}} = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)(-1)^n\frac{1}{\sqrt{n+2}}.$$

Deoarece $(y_n)_{n\geq 0}$: $y_n = \frac{1}{n+2}$ este monoton descrescător şi convergent la 0, urmează că seria $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{\sqrt{n+2}}$ este convergentă, conform criteriului lui Leibniz. Atunci şi seria $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{\sqrt{n+2}}$ este convergentă, fiind obţinută prin înmulţirea seriei convergente $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{\sqrt{n+2}}$ cu constanta -1. ∎

Monotonia unor subşiruri ale şirului sumelor parţiale

Să presupunem acum că $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n y_n$ este o serie alternantă, în condiţiile de aplicare ale criteriului lui Leibniz, adică $(y_n)_{n\geq 0}$ este un şir monoton descrescător şi convergent la 0. Fie deasemenea $(S_n)_{n\geq 0}$ şirul sumelor parţiale asociat seriei $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n y_n$. Se observă atunci că $(S_{2k})_{k\geq 0}$ este monoton descrescător iar $(S_{2k+1})_{k\geq 0}$ este monoton crescător. În plus, are loc relaţia

$$S_{2k+1} \leq \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n y_n \leq S_{2k} \quad \text{pentru orice } k \geq 0.$$

Într-adevăr,

$$S_{2(k+1)} - S_{2k} = (-1)^{2k+1}a_{2k+1} + (-1)^{2k+2}a_{2k+2} = a_{2k+2} - a_{2k+1} \leq 0$$

deci $(S_{2k})_{k\geq 0}$ este monoton descrescător. Similar,

$$S_{2(k+1)+1} - S_{2k+1} = (-1)^{2k+2}a_{2k+2} + (-1)^{2k+3}a_{2k+3} = a_{2k+2} - a_{2k+3} \geq 0,$$

deci $(S_{2k+1})_{k\geq 0}$ este monoton crescător. Deoarece orice termen al unui şir crescător este mai mic sau egal cu limita şirului, respectiv orice termen al unui şir descrescător este mai mare sau egal cu limita şirului, urmează că

$$S_{2k+1} \leq \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n y_n \leq S_{2k} \quad \text{pentru orice } k \geq 0.$$

3.2.4 Serii absolut convergente

Cu ajutorul criteriului lui Leibniz, se poate observă că seria $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ este convergentă. Totuşi, seria asociată a modulelor, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left|\frac{(-1)^n}{n}\right| = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ este divergentă. În acelaşi timp, seria $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}$ este convergentă, iar seria asociată a modulelor, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left|\frac{(-1)^n}{n^2}\right| = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ este de asemenea convergentă.

Aceste exemple sugerează o posibilă clasificare a seriilor convergente în serii pentru care seria asociată a modulelor este convergentă, respectiv divergentă. În acest sens, o serie $\sum\limits_{n=0}^{\infty} x_n$ pentru care $\sum\limits_{n=0}^{\infty} |x_n|$ este convergentă se va numi *absolut convergentă*, în vreme ce o serie $\sum\limits_{n=0}^{\infty} x_n$ pentru care $\sum\limits_{n=0}^{\infty} |x_n|$ este divergentă se va numi *condiţionat convergentă* sau *semiconvergentă*. Din cele de mai sus, se observă că seria $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}$ este absolut convergentă, în vreme ce seria $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ nu este convergentă (este condiţionat convergentă, sau semiconvergentă).

Se observă de asemenea că pentru serii cu termeni pozitivi noţiunile de convergenţă şi absolută convergenţă coincid, deoarece modulul unui număr pozitiv este chiar numărul în cauză. În general, pentru serii cu termeni oarecare, convergenţa nu implică absolută convergenţă, după cum se poate deduce din exemplul seriei $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ de mai sus. Totuşi, are loc implicaţia inversă, în sensul că orice serie absolut convergentă este convergentă.

Teorema 3.23. *Dacă o serie* $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ *este absolut convergentă, atunci ea este şi convergentă.*

Demonstraţie. Cum seria $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ este absolut convergentă, urmează că seria $\sum_{n=0}^{\infty} |x_n|$ este convergentă. Fie $\varepsilon > 0$. Conform criteriului Cauchy, există un rang $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ astfel încât

$$\big||x_{n+1}| + |x_{n+2}| + \ldots + |x_{n+p}|\big| \leq \varepsilon \quad \text{pentru orice } n \geq n_\varepsilon \text{ şi orice } p \geq 0.$$

Cum

$$\big||x_{n+1}| + |x_{n+2}| + \ldots + |x_{n+p}|\big| = |x_{n+1}| + |x_{n+2}| + \ldots + |x_{n+p}|,$$

iar

$$\left|x_{n+1} + x_{n+2} + \ldots + x_{n+p}\right| \leq |x_{n+1}| + |x_{n+2}| + \ldots + |x_{n+p}|,$$

urmează că

$$\left|x_{n+1} + x_{n+2} + \ldots + x_{n+p}\right| \leq \varepsilon \quad \text{pentru orice } n \geq n_\varepsilon \text{ şi orice } p \geq 0,$$

deci seria $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ este convergentă, conform criteriului Cauchy. ■

Deoarece seria modulelor $\sum_{n=0}^{\infty} |x_n|$ este o serie cu termeni pozitivi, pentru studierea convergenţei acesteia se pot utiliza criteriile de convergenţă pentru serii cu termeni pozitivi stabilite anterior. Acest lucru sugerează faptul că se poate obţine convergenţa unei serii cu termeni oarecare demonstrând mai întâi convergenţa seriei modulelor cu ajutorul unui criteriu oarecare de convergenţă, convergenţa seriei date fiind atunci o consecinţă a absolutei ei convergenţe.

Exerciţiu

Studiaţi absoluta convergenţă a seriei $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n^2}$, $x \in \mathbb{R}$.

Soluţie

Cum
$$\left|\frac{\cos nx}{n^2}\right| \leq \frac{1}{n^2},$$
iar $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ este convergentă, fiind o serie armonică generalizată cu $p = 2 > 1$, urmează că şi seria $\sum_{n=1}^{\infty} \left|\frac{\cos nx}{n^2}\right|$ este convergentă, conform criteriului de comparaţie cu inegalităţi. De aici, seria $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n^2}$ este absolut convergentă. ■

Exerciţiu

Studiaţi absoluta convergenţă a seriei $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$.

Soluţie

Deoarece
$$\sum_{n=1}^{\infty} \left|\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}},$$
iar $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$ este divergentă, fiind o serie armonică generalizată cu $p = \frac{1}{2} < 1$, urmează că seria $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ nu este absolut convergentă. ■

3.2.5 Produsul după Cauchy a două serii

Fie seriile cu termeni oarecare $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ şi $\sum_{n=0}^{\infty} y_n$. Vom numi *seria produs după Cauchy* a celor două serii seria $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$ definită prin
$$c_n = x_0 y_n + x_1 y_{n-1} + \ldots + x_n y_0 = \sum_{k=0}^{n} x_k y_{n-k},$$
pentru care c_n, termenul de ordin n, conţine suma tuturor produselor de forma $x_k y_l$ în care suma indicilor celor doi factori x_k şi y_l este n.

Se observă că, definită în acest mod, seria produs după Cauchy $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$ conţine într-adevăr toate produsele de forma $x_k y_l$, $k, l \in \mathbb{N}$, câte o singură dată, un astfel de produs fiind un termen al sumei prin care este definit c_{k+l} şi numai al acesteia.

Totuşi, deşi procedeul de sumare este natural, el nu asigură proprietatea de păstrare a convergenţei a două serii. Mai precis, dacă $\sum\limits_{n=0}^{\infty} x_n$ şi $\sum\limits_{n=0}^{\infty} y_n$ sunt două serii convergente, seria produs după Cauchy $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n$ nu este neapărat convergentă. În acest sens, să considerăm exemplul seriilor

$$\sum_{n=0}^{\infty} x_n = \sum_{n=0}^{\infty} y_n = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{\sqrt{n+1}}.$$

În primul rând, se observă cu ajutorul criteriului lui Leibniz că aceste serii sunt convergente. În plus,

$$c_n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{1}{\sqrt{k+1}} (-1)^{n-k} \frac{1}{\sqrt{n-k+1}} = (-1)^n \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{\sqrt{(k+1)(n+1-k)}}.$$

Cum

$$\sqrt{(k+1)(n+1-k)} \leq \sqrt{(n+1)(n+1)} = n+1,$$

urmează că

$$|c_n| = \left| (-1)^n \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{\sqrt{(k+1)(n+1-k)}} \right| \geq \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{n+1} = 1,$$

deci seria $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n$ este divergentă, întrucât termenul general c_n nu tinde la 0.

Totuşi, convergenţa seriei produs după Cauchy este asigurată dacă măcar una dintre cele două serii $\sum\limits_{n=0}^{\infty} x_n$ şi $\sum\limits_{n=0}^{\infty} y_n$ este absolut convergentă. În acest sens, are loc următorul rezultat, numit *teorema lui Mertens*.

Teorema 3.24. *Dacă seriile $\sum\limits_{n=0}^{\infty} x_n$ şi $\sum\limits_{n=0}^{\infty} y_n$ sunt convergente, măcar una dintre ele fiind şi absolut convergentă, atunci seria produs după Cauchy a celor două serii este şi ea convergentă, suma ei fiind produsul sumelor celor două serii, adică*

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n = \left(\sum_{n=0}^{\infty} x_n \right) \left(\sum_{n=0}^{\infty} y_n \right).$$

În situaţia în care se îmbunătăţeşte convergenţa seriilor $\sum\limits_{n=0}^{\infty} x_n$ şi $\sum\limits_{n=0}^{\infty} y_n$, în sensul că ambele serii sunt asumate a fi absolut convergente, se îmbunătăţeşte şi convergenţa seriei produs după Cauchy, în sensul că seria produs devine şi ea absolut convergentă. Mai precis, are loc următorul rezultat, numit *teorema lui Cauchy*.

Teorema 3.25. *Dacă seriile $\sum\limits_{n=0}^{\infty} x_n$ şi $\sum\limits_{n=0}^{\infty} y_n$ sunt absolut convergente, atunci seria produs după Cauchy a celor două serii este şi ea absolut convergentă, suma ei fiind produsul sumelor celor două serii.*

Cum pentru cazul seriilor cu termeni pozitivi proprietăţile de convergenţă şi absolută convergenţă coincid, are loc următoarea consecinţă.

Corolar 3.25.1. *Dacă seriile cu termeni pozitivi $\sum\limits_{n=0}^{\infty} x_n$ şi $\sum\limits_{n=0}^{\infty} y_n$ sunt convergente, atunci şi seria produs după Cauchy a celor două serii este convergentă, suma ei fiind produsul sumelor celor două serii.*

În fine, în situaţia în care $\sum\limits_{n=0}^{\infty} x_n$, $\sum\limits_{n=0}^{\infty} y_n$ şi seria produs după Cauchy a celor două serii $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n$ sunt toate convergente, acest lucru este suficient pentru a arăta că suma seriei produs este produsul sumelor celor două serii. Mai precis, are loc următorul rezultat, numit *teorema lui Abel*.

Teorema 3.26. *Dacă seriile $\sum\limits_{n=0}^{\infty} x_n$, $\sum\limits_{n=0}^{\infty} y_n$ sunt convergente, cu $\sum\limits_{n=0}^{\infty} x_n = A$, $\sum\limits_{n=0}^{\infty} y_n = B$, iar seria produs după Cauchy a celor două serii $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n$ este de asemenea convergentă, cu $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n = C$, atunci $C = AB$.*

3.3 Estimarea restului de ordin p

Din punct de vedere practic, pentru calculul aproximativ al sumei unei serii convergente, este important să se cunoască o estimare a restului de ordin p al seriei, această estimare reprezintând de fapt o estimare a erorii cu care S_p, suma parţială de ordin p, aproximează suma S a seriei.

Pentru serii cu termeni pozitivi, se poate stabili o estimare a restului de ordin p în condiţiile de aplicare ale criteriului radicalului, respectiv criteriului raportului.

Teorema 3.27. *Fie* $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ *o serie cu termeni pozitivi. Dacă*

$$\sqrt[n]{x_n} \leq q < 1 \quad \text{pentru orice } n \geq N,$$

atunci

$$0 \leq R_p \leq \frac{q^{p+1}}{1-q} \quad \text{pentru orice } p \geq N.$$

Demonstraţie. Se observă că

$$R_p = x_{p+1} + x_{p+2} + \ldots \geq 0 \quad \text{pentru orice } p \geq 0.$$

Deoarece $\sqrt[n]{x_n} \leq q$ pentru orice $n \geq N$, urmează că $x_n \leq q^n$ pentru orice $n \geq N$. Atunci

$$\begin{aligned} R_p &= x_{p+1} + x_{p+2} + \ldots \\ &\leq q^{p+1} + q^{p+2} + \ldots \\ &\leq q^{p+1}(1 + q + q^2 + \ldots) \\ &\leq \frac{q^{p+1}}{1-q}, \quad \text{pentru orice } p \geq N, \end{aligned}$$

de unde concluzia. ■

Teorema 3.28. *Fie* $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ *o serie cu termeni strict pozitivi. Dacă*

$$\frac{x_{n+1}}{x_n} \leq q < 1 \quad \text{pentru orice } n \geq N,$$

atunci

$$0 \leq R_p \leq x_N \frac{q^{p-N+1}}{1-q} \quad \text{pentru orice } p \geq N.$$

Demonstraţie. Deoarece $\frac{x_{n+1}}{x_n} \leq q$ pentru orice $n \geq N$, urmează că

$$\begin{aligned} x_n &= \frac{x_n}{x_{n-1}} \frac{x_{n-1}}{x_{n-2}} \ldots \frac{x_{N+1}}{x_N} x_N \\ &\leq q^{n-N} x_N \quad \text{pentru orice } n \geq N. \end{aligned}$$

Atunci

$$\begin{aligned}R_p &= x_{p+1} + x_{p+2} + \dots \\ &\le x_N q^{p-N+1} + x_N q^{p-N+2} + \dots \\ &\le x_N q^{p-N+1}(1 + q + q^2 + \dots) \\ &\le x_N \frac{q^{p-N+1}}{1-q}, \quad \text{pentru orice } p \ge N,\end{aligned}$$

de unde concluzia. ■

Pentru serii alternante, se poate stabili o estimare a restului de ordin p în condiţiile de aplicare ale criteriului lui Leibniz.

Teorema 3.29. *Fie* $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n y_n$ *o serie alternantă, unde* $(y_n)_{n\ge 0}$ *este un şir monoton descrescător şi convergent la* 0. *Atunci*

$$|R_p| \le y_{p+1} \quad \textit{pentru orice } p \ge 0.$$

Demonstraţie. Fie $(S_n)_{n\ge 0}$ şirul sumelor parţiale asociate seriei $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n y_n$. Pentru orice $p \ge 0$, au loc relaţiile

$$|R_{2p}| = |S - S_{2p}| = S_{2p} - S \le S_{2p} - S_{2p+1} = -(-1)^{2p+1} y_{2p+1} = y_{2p+1},$$

respectiv

$$|R_{2p+1}| = |S - S_{2p+1}| = S - S_{2p+1} \le S_{2p+2} - S_{2p+1} = (-1)^{2p+2} y_{2p+2} = y_{2p+2},$$

deoarece $S_{2p} \ge S \ge S_{2p+1}$. Din relaţiile de mai sus, urmează concluzia. ■

Aplicaţii

3.1. *Determinaţi sumele următoarelor serii folosind formula de sumare a progresiei geometrice*

1) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{3^n+4^n}{7^n}$; *2)* $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2^{3n}}$; *3)* $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{2^{2n+1}}$; *4)* $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2+(-1)^n}{3^{2n}}$;

5) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^n+(-1)^{n+1}}{3^{2n+1}}$; *6)* $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^n}{[3+(-1)^n]^n}$.

3.2. *Ţinând seama de relaţia*

$$\frac{n}{(n+1)!} = \frac{n+1-1}{(n+1)!},$$

determinaţi suma seriei telescopice $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n}{(n+1)!}$.

3.3. *Ţinând seama de relaţia*

$$\log_{\frac{1}{2}} \frac{n(n+2)}{(n+1)^2} = \log_{\frac{1}{2}} \frac{n+2}{n+1} - \log_{\frac{1}{2}} \frac{n+1}{n},$$

determinaţi suma seriei telescopice $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \log_{\frac{1}{2}} \frac{n(n+2)}{(n+1)^2}$.

3.4. *Ţinând seama de relaţia*

$$\frac{1}{n(n+1)(n+2)} = \frac{1}{2} \cdot \frac{n+2-n}{n(n+1)(n+2)},$$

determinaţi suma seriei telescopice $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)(n+2)}$.

3.5. *Ţinând seama de relaţia*

$$\frac{n}{1 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (2n+1)} = \frac{1}{2} \cdot \frac{2n+1-1}{1 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (2n+1)},$$

determinaţi suma seriei telescopice $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n}{1 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (2n+1)}$.

3.6. *Demonstraţi că următoarele serii sunt divergente analizând comportarea termenului general*

1) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n}}$; *2)* $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{n+2}$; *3)* $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n+3^n}{1+3^n}$; *4)* $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(\sqrt[n]{2} + \sqrt[n]{5} - 1\right)$;

5) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n+2}-\sqrt{n}}$; *6)* $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln(e^n+2)}{n}$; *7)* $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \ln(\ln n)$.

3.7. *Fie* $(x_n)_{n\geq 0}$: $x_{n+1} = x_n(1-x_n)$, $x_0 \in (0,1)$.

1. *Demonstraţi că* $x_n \in (0,1)$ *pentru orice* $n \geq 0$.

2. *Demonstraţi că* $(x_n)_{n\geq 0}$ *este strict descrescător.*

3. *Demonstraţi că* $\lim_{n\to\infty} x_n = 0$.

4. *Demonstraţi că seria* $\sum_{n=0}^{\infty} x_n^2$ *este convergentă.*

3.8. *Demonstraţi că nu există şiruri* $(x_n)_{n\geq 0}$ *astfel ca seria* $\sum_{n=0}^{\infty}(|x_n - 2| + |3 - x_n|)$ *să fie convergentă.*

3.9. *Fie* $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ *o serie cu termeni pozitivi.*

1. *Demonstraţi, folosind eventual criteriul de convergenţă Cauchy, că dacă* $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ *este convergentă, atunci şi* $\sum_{n=0}^{\infty} x_n^2$ *este convergentă.*

2. *Dacă* $\sum_{n=0}^{\infty} x_n^2$ *este convergentă, rezultă neapărat că* $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ *este convergentă?*

3.10. *Fie* $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ *o serie convergentă cu termeni strict pozitivi. Demonstraţi că* $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x_n + x_{n+1}}{2}$, $\sum_{n=0}^{\infty} \sqrt{x_n x_{n+1}}$ *şi* $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2}{\frac{1}{x_n} + \frac{1}{x_{n+1}}}$ *sunt de asemenea convergente.*

3.11. *Studiaţi convergenţa următoarelor serii cu ajutorul criteriului de condensare*
1) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{n^2}$; *2)* $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln n \ln(\ln n)}$; *3)* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln(\ln n)}{n(\ln n)^2}$.

3.12. *Demonstraţi cu ajutorul criteriului de condensare că seria* $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(\ln n)^p}$ *este convergentă dacă* $p > 1$, *respectiv divergentă dacă* $p \leq 1$.

3.13.
1. *Determinaţi* $\lim_{n\to\infty} \frac{1 + \sqrt{2} + \sqrt[3]{3} + \ldots + \sqrt[n]{n}}{n}$;

2. *Studiaţi convergenţa seriei* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1 + \sqrt{2} + \sqrt[3]{3} + \ldots + \sqrt[n]{n}}$, *folosind eventual un criteriu de comparaţie.*

3.14. *Studiaţi convergenţa următoarelor serii cu ajutorul unui criteriu de comparaţie*

1) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5+(-1)^n}{n^2}$; 2) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3+\sin n}{n}$; 3) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\ln n}$; 4) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(\ln n)^{\ln n}}$;

5) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(n+(-1)^n)^2}$; 6) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2n+3}$; 7) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2n^2+3n+4}$; 8) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^2+n+1}{n^3+n+2}$;

9) $\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{n+2}{n^2+1}\right)^2$; 10) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n+\sqrt{n^2+1}}}{n^2}$; 11) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{2+\frac{3}{n}}}$; 12) $\sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt[n]{2}-1)$;

13) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n+1}{2^{2n}+1}$; 14) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$; 15) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}\left(\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\ldots+\frac{1}{2n}\right)$.

3.15. *Studiaţi convergenţa următoarelor serii cu ajutorul unui criteriu al raportului*

1) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{3^n}$; 2) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)!}$; 3) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{(n+1)!}$; 4) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!}$; 5) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!\cdot 2^n}{n^n}$;

6) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{n+2^n}$; 7) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot \ldots \cdot (2n-1)}{2\cdot 5\cdot 8\cdot \ldots \cdot (3n-1)}$; 8) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^n}{1\cdot 3\cdot 5\cdot \ldots \cdot (2n+1)}$;

9) $\sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt{3}-\sqrt[3]{3})(\sqrt{3}-\sqrt[5]{3})\ldots(\sqrt{3}-\sqrt[2n+1]{3})$.

3.16. *Studiaţi convergenţa următoarelor serii cu ajutorul unui criteriu al radicalului*

1) $\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{2n+1}{n+2}\right)^n$; 2) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2n+1}{3n+2}\right)^{n+2}$; 3) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(\ln n)^n}$; 4) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n+2}{2n+3}\right)^{n\ln n}$;

5) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{3^n+2}$; 6) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{4n+1}{4n+5}\right)^{n^2}$; 7) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^{-n^2}$; 8) $\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{n}{2n+1}\right)^{n^2}$;

9) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n}\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2}$; 10) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2n-1}{2^n}$; 11) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{\left(3+\frac{1}{n}\right)^n}$; 12) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n}{(3n+5)^n}$;

13) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n^{n+1}}{(2n+3)^n}$; 14) $\sum_{n=0}^{\infty} (\sqrt{n+1}-\sqrt{n})^n$; 15) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\sqrt{(n+1)(n+2)}-n\right)^n$.

3.17. *Studiaţi convergenţa următoarelor serii cu ajutorul criteriului Raabe-Duhamel*

1) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3\cdot 7\cdot \ldots \cdot (4n-1)}{4\cdot 8\cdot \ldots \cdot 4n}$; 2) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n!}}{(3+\sqrt{1})(3+\sqrt{2})\ldots(3+\sqrt{n})}$;

3 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1\cdot 3\cdot \ldots \cdot (2n-1)}{2\cdot 4\cdot \ldots \cdot 2n}\cdot\frac{3n+2}{3n+1}$; 4) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1\cdot 3\cdot \ldots \cdot (2n-1)}{2\cdot 4\cdot \ldots \cdot 2n}\right)^2\cdot\frac{1}{2n+1}$;

5) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{6\cdot 12\cdot \ldots \cdot 6n}{2\cdot 5\cdot \ldots \cdot (3n-1)}\cdot\frac{1}{2^n+1}$.

3.18. *Discutaţi convergenţa următoarelor serii în funcţie de valorile parametrilor* $a > 0$ *şi* $p \in \mathbb{R}$

1) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a^n}{n^p}$; 2) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a^n}{1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n}}$; 3) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(a\frac{n^2-n+2}{n^2}\right)^n$;
4) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(1+a+a^2+\ldots+a^n)}$; 5) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{a(a+1)\ldots(a+n)}$;
6) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(a+1)(2a+1)\ldots(na+1)}{n^n}$; 7) $\sum_{n=0}^{\infty} a^{\sqrt{n}}$; 8) $\sum_{n=1}^{\infty} a^{\ln n}$.

3.19. *Discutaţi convergenţa următoarelor serii în funcţie de valorile parametrilor $a, b > 0$*
1) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a(a+1)(a+2)\ldots(a+(n-1))}{b(b+1)(b+2)\ldots(b+(n-1))}$; 2) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{a^n+b^n}$.

3.20. *Discutaţi convergenţa seriei* $\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{an+b}{cn+d}\right)^n$ *în funcţie de valorile parametrilor* $a, b, c, d > 0$.

3.21. *Studiaţi convergenţa următoarelor serii cu ajutorul criteriului Dirichlet*
1) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n^2}, x \in \mathbb{R}$; 2) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos 3n}{\ln(n+1)}$; 3) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos \frac{n\pi}{2}}{\ln(n+2)}$; 4) $\sum_{n=0}^{\infty} (\sqrt[n]{2}-1)\sin 2n$;
5) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \sin n}{n}$; 6) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n \sin \frac{1}{n}}{\sqrt{n}}$; 7) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n \ln(1+\frac{1}{n})}{\sqrt[3]{n}}$; 8) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx \cos x}{n}$;
9) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n \sin n^2}{n^3}$; 10) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos n \sin n^2}{\sqrt[4]{n}}$; 11) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin^2 n}{n^2}$; 12) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \sin^2 n}{n}$;
13) $\sum_{n=0}^{\infty} \left(1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n}-\ln n\right) \sin nx \cos nx, n \in \mathbb{R}$; 14) $\sum_{n=1}^{\infty} \ln\left(1-\frac{1}{n}\right) \sin(n+\frac{1}{2})$.

3.22. *Studiaţi convergenţa următoarelor serii cu ajutorul criteriului Abel*
1) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n}{n} \sin \frac{1}{n}$; 2) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n}{n} \cos \frac{1}{\sqrt{n}}$; 3) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n}{n^2} \sqrt[n]{n}$; 4) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} \operatorname{arctg} n$;
5) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} \left(e-\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right)$; 6) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n}{\sqrt{n+2}} \sin \frac{1}{n}$; 7) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n}{n} \ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$;
8) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(n+\frac{1}{n})}{n}$.

3.23. *Studiaţi convergenţa următoarelor serii cu ajutorul criteriului Leibniz*
1) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$; 2) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{3n}}{n+\ln n}$; 3) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1}(\sqrt[n]{3}-1)$; 4) $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{n}{3^n}$;
5) $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{2n+3}{6^n}$; 6) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \sqrt{n}}{n+1}$; 7) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n(n+3)}}$; 8) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{1+\ln^2 n}$;

9) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^{n+3}\left(\dfrac{3n+2}{6n+1}\right)^n$.

3.24. *Demonstraţi că următoarele serii sunt divergente*

1) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{2+\cos n}$; 2) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n\dfrac{\ln(2^n+3)}{\ln(3^n+2)}$; 3) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n\dfrac{2\cdot 5\cdot\ldots\cdot(3n+2)}{4\cdot 6\cdot\ldots\cdot(2n+4)}$;
4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\sqrt[n]{2+(-1)^n}$.

3.25. *Studiaţi convergenţa absolută a următoarelor serii*

1) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{\sin nx}{n^2+n+1}$; 2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\sin n\cos\frac{1}{n}}{n\sqrt{n}}$; 3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\sin n!}{n\ln^2 n}$; 4) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^n n}{2^n}$;
5) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{\frac{n(n+1)}{2}}}{2n^2+\sin n}$; 6) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{(-1)^n}}{n^2+(-1)^n}$.

3.26. *Discutaţi convergenţa următoarelor serii în funcţie de valorile parametrului $a\in\mathbb{R}$.*

1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{n^{a+1}}$; 2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{a^n}{1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n}}$; 3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{a^n}{1+2^n}$; 4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{a^n}{a^{2n}+1}$;
5) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n(\sqrt{n^2+1}-an)$; 6) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{a+3}{2a+1}\right)^n$; 7) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{a^n+\sqrt{n}}$.

3.27. *Demonstraţi că seria* $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n x_n$, *unde*

$$x_n=\begin{cases}\frac{1}{n+2}, & \text{dacă } n \text{ este par}\\ \frac{1}{2^n}, & \text{dacă } n \text{ este impar}\end{cases}$$

este divergentă.

Capitolul 4

PROPRIETĂŢI TOPOLOGICE ŞI DE NUMĂRARE ALE LUI $\overline{\mathbb{R}}$

4.1 Proprietăţi topologice ale lui $\overline{\mathbb{R}}$

4.1.1 Puncte de acumulare

Fie o mulţime $A \subset \overline{\mathbb{R}}$. Vom spune că $a \in \overline{\mathbb{R}}$ se numeşte *punct de acumulare* al mulţimii A dacă orice vecinătate V a lui a conţine puncte ale lui A diferite de a, adică

$$\forall V \in \mathcal{V}(a), (V \setminus \{a\}) \cap A \neq \emptyset.$$

Exemple 1. $a = 0$ este punct de acumulare al mulţimii $A = (0, 1)$ deoarece orice vecinătate V a lui 0 conţine un interval $I = (-\varepsilon, \varepsilon)$, $\varepsilon > 0$, deci şi puncte ale lui $(0, 1)$ diferite de 0. Altfel spus,

$$(V \setminus \{0\}) \cap A = (0, \varepsilon) \neq \emptyset.$$

2. $a = 3$ nu este punct de acumulare al mulţimii $A = (0, 1) \cup \{3\}$ deoarece vecinătatea $V = (2, 4)$ a lui 3 nu conţine puncte ale lui A diferite de 3. Altfel spus,

$$(V \setminus \{3\}) \cap A = \emptyset.$$

3. $a = +\infty$ este punct de acumulare al mulţimii $A = \mathbb{N}$ deoarece orice vecinătate V a lui $+\infty$ conţine un interval $I = (M, +\infty]$, $M > 0$, deci şi puncte ale lui

$\mathbb{N}$ diferite de $+\infty$. Altfel spus,

$$(V \setminus \{+\infty\}) \cap A = \{[M]+1, [M]+2, \ldots\} \neq \emptyset.$$

Din exemplele de mai sus se deduc câteva consecinţe privind localizarea punctelor de acumulare. mai întâi, un punct de acumulare al unei mulţimi A poate să nu fie element al acelei mulţimi (exemplul 1). De asemenea, nu orice element al unei mulţimi A este neapărat punct de acumulare al acelei mulţimi (exemplul 2). Din cel de-al treilea exemplu, se poate observa că punctele de acumulare ale unei mulţimi pot fi şi la infinit.

Mulţimea tuturor punctelor de acumulare ale mulţimii A se numeşte atunci *mulţimea derivată* a lui A şi se notează A', în vreme ce un element al unei mulţimi A care nu este punct de acumulare al acelei mulţimi se numeşte *punct izolat* al lui A. De aici se poate observa că $a \in A$ este punct izolat al lui A dacă există o vecinătate V a lui A care nu conţine puncte din A.

Exemple 1. Dacă $A = (0,3) \cup \{5\}$, atunci $A' = [0,3]$, iar 5 este punct izolat al lui A.

2. Dacă $A = \{0,1,2\}$, atunci $A' = \emptyset$, toate elementele lui A fiind puncte izolate.

3. Dacă $A = \left\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots, \frac{1}{n}, \ldots\right\}$, atunci $A' = \{0\}$, toate elementele lui A fiind puncte izolate.

Alegând în mod potrivit în definiţia unui punct de acumulare vecinătăţi V din ce în ce mai mici se obţin puncte ale lui A diferite de a care sunt din ce în ce mai aproape de a. În acest mod se poate obţine următoarea caracterizare echivalentă a unui punct de acumulare cu ajutorul şirurilor, exprimând faptul că o mulţime care are un punct de acumulare a conţine elemente „oricât de apropiate” de a şi diferite de a.

Teorema 4.1. *Fie $A \subset \overline{\mathbb{R}}$. Atunci $a \in \overline{\mathbb{R}}$ este punct de acumulare al lui A dacă şi numai dacă există un şir $\{a_n\}_{n\geq 0}$ de elemente ale lui A, diferite de a, cu limita a.*

Demonstraţie. Pentru fixarea ideilor, să presupunem că $a \in \mathbb{R}$, situaţiile în care $a \in \{\pm\infty\}$ tratându-se analog.

„$\Rightarrow$" Fie a un punct de acumulare al lui A. Conform definiţiei, în vecinătatea $V_0 = (a-1, a+1)$ se află un punct a_0 al lui A diferit de a. Datorită alegerii lui V_0, urmează şi că $|a - a_0| < 1$.

Fie acum $\delta_1 = \min\left(\frac{1}{2}, |a - a_0|\right)$ şi $V_1 = (a - \delta_1, a + \delta_1)$. Atunci vecinătatea V_1 conţine un punct a_1 al lui A diferit de a. Are loc şi $|a - a_1| < \delta_1 < \frac{1}{2}$, iar deoarece $|a - a_1| < \delta_1 \leq |a - a_0|$, urmează că $a_1 \neq a_0$. Procedând în mod inductiv şi alegând

$$\delta_n = \min\left(\frac{1}{2^n}, |a - a_{n-1}|\right), \quad V_n = (a - \delta_n, a + \delta_n).$$

obţinem un şir $(a_n)_{n\geq 0}$ de elemente ale lui A diferite de a şi diferite şi între ele. Deoarece $|a - a_n| < \frac{1}{2^n}$, urmează că $(a_n)_{n\geq 0}$ converge către a.

„$\Leftarrow$" Fie un şir $\{a_n\}_{n\geq 0}$ de elemente ale lui A, diferite de a, cu limita a. Fie de asemenea $V \in \mathcal{V}(a)$ o vecinătate oarecare a lui a. Cum $a_n \to a$ pentru $n \to \infty$, există $n_V \in \mathbb{N}$ astfel ca $a_n \in V$ pentru orice $n \geq n_V$. Atunci

$$(V \setminus \{a\}) \cap A \supset \{a_{n_V}\} \neq \emptyset.$$

Cum V era arbitrară, urmează că a este un punct de acumulare al lui A. ■

Din cele de mai sus, observând că şirul $\{a_n\}_{n\geq 0}$ poate fi ales cu termenii diferiţi între ei (vezi procedeul său de construcţie), deducem că o mulţime A care are un punct de acumulare a este în mod necesar infinită. În particular, o mulţime finită nu are puncte de acumulare, toate elementele sale fiind deci puncte izolate.

De asemenea, din aceeaşi observaţie se obţine în mod imediat următorul rezultat.

Corolar 4.1.1. *Un punct $a \in \overline{\mathbb{R}}$ este punct de acumulare al unei mulţimi $A \subset \overline{\mathbb{R}}$ dacă şi numai dacă orice vecinătate $V \in \mathcal{V}(a)$ conţine o infinitate de elemente ale lui A.*

Pot fi demonstrate cu ajutorul celor de mai sus următoarele proprietăţi de calcul.

Teorema 4.2. *Fie $A, B \subset \overline{\mathbb{R}}$. Au loc următoarele proprietăţi.*

1. *Dacă $A \subset B$, atunci $A' \subset B'$.*

2. *$(A \cup B)' = A' \cup B'$.*

3. *$(A \cap B)' \subset A' \cap B'$.*

Demonstraţie. 1. Fie $a \in A'$. Există atunci un şir $\{a_n\}_{n\geq 0}$ de elemente ale lui A, diferite de a, cu limita a. Cum $A \subset B$, urmează că $\{a_n\}_{n\geq 0}$ este şi un şir de elemente ale lui B, deci şi $a \in B'$.

2. Deoarece $A \subset A \cup B$ şi $B \subset A \cup B$, urmează conform 2. că $A' \subset (A \cup B)'$ şi $B' \subset (A \cup B)'$, deci $A' \cup B' \subset (A \cup B)'$.

Fie acum $a \in (A \cup B)'$. Există atunci un şir $\{a_n\}_{n\geq 0}$ de elemente ale lui $A \cup B$, diferite de a, cu limita a. Acest şir conţine fie un număr infinit de elemente ale lui A, fie un număr infinit de elemente ale lui B, în caz contrar el având un număr finit de elemente, contradicţie. Să presupunem pentru fixarea ideilor că $\{a_n\}_{n\geq 0}$ conţine un număr infinit de elemente ale lui A. Atunci subşirul format cu toate aceste elemente are limita tot a şi deci $a \in A'$. În concluzie, $(A \cup B)' \subset A' \cup B'$, iar deoarece şi $A' \cup B' \subset (A \cup B)'$, urmează că $(A \cup B)' = A' \cup B'$, ceea ce încheie demonstraţia teoremei.

3. Deoarece $A \cap B \subset A$ şi $A \cap B \subset B$, urmează conform 2. că $(A \cap B)' \subset A'$ şi $(A \cap B)' \subset B'$, deci $(A \cap B)' \subset A' \cap B'$. ■

Faptul că $(A \cap B)'$ şi $A' \cap B'$ nu sunt neapărat egale se poate observa considerând $A = (0, 1)$ şi $B = (1, 2)$. Atunci $A' = [0, 1]$ şi $B' = [1, 2]$, deci $A' \cap B' = \{1\}$. Totuşi, $A \cap B = \emptyset$, deci $(A \cap B)' = \emptyset$, iar $(A \cap B)' \neq A' \cap B'$.

4.1.2 Puncte aderente

Fie o mulţime $A \subset \overline{\mathbb{R}}$. Vom spune că $a \in \overline{\mathbb{R}}$ se numeşte *punct aderent* al mulţimii A dacă orice vecinătate V a lui a conţine puncte ale lui A, adică

$$\forall V \in \mathcal{V}(a), V \cap A \neq \emptyset.$$

Cum definiţia unui punct aderent este mai puţin restrictivă decat definiţia unui punct de acumulare (este necesar ca $V \cap A \neq \emptyset$, în loc de $(V \setminus \{a\}) \cap A \neq \emptyset$, când cea din urmă relaţie este satisfăcută fiind satisfăcută în mod evident şi cea dintâi), urmează că orice punct de acumulare al unei mulţimi A este în acelaşi timp şi punct aderent al acelei mulţimi.

De asemenea, deoarece $a \in V$ pentru orice $V \in \mathcal{V}(a)$, urmează că $a \in V \cap A$ pentru orice $a \in A$ şi orice $V \in \mathcal{V}(a)$, deci $V \cap A \neq \emptyset$. De aici, orice $a \in A$ este punct aderent al lui A.

Mulţimea tuturor punctelor aderente ale mulţimii A se numeşte atunci *aderenţa* sau *închiderea* mulţimii A şi se notează $\overline{A}$. Din cele de mai sus se observă că $A \subset \overline{A}$ şi $A' \subset \overline{A}$.

În mod analog Teoremei 4.1 se poate demonstra următorul rezultat, care afirmă faptul că $\overline{A}$ conţine, pe lângă elementele din A, şi limitele de şiruri cu termeni din A.

Teorema 4.3. *Fie $A \subset \overline{\mathbb{R}}$. Atunci $a \in \overline{\mathbb{R}}$ este punct aderent al lui A dacă şi numai dacă există un şir $\{a_n\}_{n\geq 0}$ de elemente ale lui A, cu limita a.*

Exemple 1. Dacă $A = \{0, 1, \ldots, n\}$, atunci $\overline{A} = A$.

2. Dacă $A = (0, 1)$, atunci $\overline{A} = [0, 1]$.

3. Dacă $A = \mathbb{Q}$, atunci $\overline{A} = \overline{\mathbb{R}}$, deoarece orice număr real este limita unui şir de numere raţionale, $+\infty$ este limita şirului $(x_n)_{n\geq 0}$: $x_n = n \in \mathbb{Q}$, iar $-\infty$ este limita şirului $(x_n)_{n\geq 0}$: $x_n = -n \in \mathbb{Q}$.

Cu ajutorul celor de mai sus se pot demonstra următoarele proprietăţi de calcul.

Teorema 4.4. *Fie $A, B \subset \overline{\mathbb{R}}$. Au loc următoarele proprietăţi.*

1. $\overline{A} = A \cup A'$.
2. *Dacă $A \subset B$, atunci $\overline{A} \subset \overline{B}$.*
3. $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$.
4. $\overline{A \cap B} \subset \overline{A} \cap \overline{B}$.

Demonstraţie. 1. S-a demonstrat deja că $A \subset \overline{A}$ şi $A' \subset \overline{A}$, deci $A \cup A' \subset \overline{A}$.

Fie acum $a \in \overline{A}$. Dacă $a \notin A$, fie $V \in \mathcal{V}(a)$ oarecare. Atunci $V \cap A \neq \emptyset$ şi cum $a \notin A$ urmează că $(V \setminus \{a\}) = V \setminus A \neq \emptyset$. Deoarece V este o vecinătate arbitrară, urmează că $a \in A'$. În concluzie, luând în calcul şi cazul în care $a \in A$, urmează că $a \in A \cup A'$, deci $\overline{A} \subset A \cup A'$, iar deoarece $A \cup A' \subset \overline{A}$, urmează că $\overline{A} = A \cup A'$.

Cea de-a doua şi cea de-a treia afirmaţie se demonstrează la fel ca afirmaţiile similare din Teorema 4.2.

4. Deoarece $A \cap B \subset A$ şi $A \cap B \subset B$, urmează conform 2. că $\overline{A \cap B} \subset \overline{A}$ şi $\overline{A \cap B} \subset \overline{B}$. ■

Faptul că $\overline{A \cap B}$ şi $\overline{A} \cap \overline{B}$ nu sunt neapărat egale se poate observa considerând $A = (0,1)$ şi $B = (1,2)$. Atunci $\overline{A} = [0,1]$, $\overline{B} = [1,2]$, deci $\overline{A} \cap \overline{B} = \{1\}$. Totuşi, $A \cap B = \emptyset$, deci $\overline{A \cap B} = \emptyset$, iar $\overline{A \cap B} \neq \overline{A} \cap \overline{B}$.

4.1.3 Puncte interioare

Fie o mulţime $A \subset \overline{\mathbb{R}}$. Vom spune că $a \in \overline{\mathbb{R}}$ se numeşte *punct interior* al mulţimii A dacă A este vecinătate pentru a. Deoarece A este vecinătate pentru a, rezultă că $a \in A$, adică un punct interior al unei mulţimi aparţine în mod necesar acelei mulţimi.

Conform definiţiei vecinătăţii unui punct, urmează că $a \in \mathbb{R}$ este punct interior al lui A dacă există (c,d) astfel ca $a \in (c,d) \subset A$, respectiv $+\infty$ este punct interior lui A dacă există $(c,\infty]$ astfel ca $+\infty \in (c,\infty] \subset A$, iar $-\infty$ este punct interior lui A dacă există $[-\infty,d)$ astfel ca $-\infty \in [-\infty,d) \subset A$. De asemenea, dacă A nu conţine intervale, atunci A nu are puncte interioare, neputând fi vecinătate pentru niciun punct al său. În cele ce urmează, prin „interval deschis I" vom înţelege un interval de tip (c,d), $(c,\infty]$ sau $[-\infty,d)$, potrivit cu situaţia în care este utilizat.

Exemple 1. $a = \frac{1}{2}$ este punct interior al mulţimii $A = [0,1) \cup 2$ deoarece $a \in (0,1) \subset A$, dar $a = 0$ şi $a = 2$ nu sunt puncte interioare ale lui A, întrucât A nu conţine intervale deschise în care se află 0 şi 2, neconţinând nici numere negative, nici numere mai mari ca 2.

2. $A = \mathbb{Q}$ nu are puncte interioare deoarece nu conţine intervale.

Mulţimea tuturor punctelor interioare ale mulţimii A se numeşte atunci *interiorul* mulţimii A şi se notează $\overset{\circ}{A}$.

Teorema 4.5. *Fie $A, B \subset \overline{\mathbb{R}}$. Au loc următoarele proprietăţi.*

1. $\overset{\circ}{A} \subset A$.
2. *Dacă* $A \subset B$, *atunci* $\overset{\circ}{A} \subset \overset{\circ}{B}$.
3. $\overset{\circ}{\overline{A \cap B}}$ $= \overset{\circ}{A} \cap \overset{\circ}{B}$.
4. $\overset{\circ}{A \cup B} \supset \overset{\circ}{A} \cup \overset{\circ}{B}$.

Demonstraţie. Proprietatea cuprinsă în prima afirmaţie a fost deja demonstrată.

2. Fie $a \in \mathring{A}$. Există atunci un interval deschis I astfel ca $a \in I \subset A$, iar cum $A \subset B$ urmează că $a \in I \subset B$, deci $a \in \mathring{B}$. Cum a era arbitrar, se obţine că $\mathring{A} \subset \mathring{B}$.

3. Deoarece $A \cap B \subset A$ şi $A \cap B \subset B$, se deduce conform 2. că $\overset{\circ}{A \cap B} \subset \mathring{A}$ şi $\overset{\circ}{A \cap B} \subset \mathring{B}$, deci $\overset{\circ}{A \cap B} \subset \mathring{A} \cap \mathring{B}$.

Fie acum $a \in \mathring{A} \cap \mathring{B}$. Atunci $a \in \mathring{A}$ şi $a \in \mathring{B}$, deci există intervalele deschise I_1 şi I_2 astfel că $a \in I_1 \subset A$ şi $a \in I_2 \subset B$. Cum $I = I_1 \cap I_2$ este tot un interval deschis, iar $a \in I \subset A \cap B$, urmează că $a \in \overset{\circ}{A \cap B}$. De aici, $\mathring{A} \cap \mathring{B} \subset \overset{\circ}{A \cap B}$, iar cum $\overset{\circ}{A \cap B} \subset \mathring{A} \cap \mathring{B}$, rezultă că $\overset{\circ}{A \cap B} = \mathring{A} \cap \mathring{B}$.

4. Deoarece $A \subset A \cup B$ şi $B \subset A \cup B$, urmează conform 2. că $\mathring{A} \subset \overset{\circ}{A \cup B}$ şi $\mathring{B} \subset \overset{\circ}{A \cup B}$, deci $\mathring{A} \cup \mathring{B} \subset \overset{\circ}{A \cup B}$. ■

Faptul că $\overset{\circ}{A \cup B}$ şi $\mathring{A} \cup \mathring{B}$ nu sunt neapărat egale se poate observa considerând $A = (0,1)$ şi $B = [1,2)$. Atunci $\mathring{A} = (0,1)$, $\mathring{B} = (1,2)$, deci $\mathring{A} \cup \mathring{B} = (0,1) \cup (1,2)$. Totuşi, $A \cup B = (0,2)$, deci $\overset{\circ}{A \cup B} = (0,2)$, iar $\overset{\circ}{A \cup B} \neq \mathring{A} \cup \mathring{B}$.

Un alt tip de legătură între aderenţa şi interiorul unei mulţimi, exprimat cu ajutorul mulţimilor complementare, este precizat în teorema următoare. În cele ce urmează, pentru o mulţime M dată, prin cM se va înţelege complementara mulţimii M în raport cu $\overline{\mathbb{R}}$, adică mulţimea $\overline{\mathbb{R}} \setminus M$. De asemenea, $a \in \overline{\mathbb{R}}$ se va numi *punct exterior* al mulţimii M dacă cM este vecinătate pentru a.

Teorema 4.6. *Fie $A \subset \overline{\mathbb{R}}$. Au loc egalităţile*

1. $c\overline{A} = \overset{\circ}{cA}$;

2. $c\mathring{A} = \overline{cA}$.

Demonstraţie. 1. Fie $a \in c\overline{A}$. Atunci $a \notin \overline{A}$, deci există $V \in \mathcal{V}(a)$ astfel ca $V \cap A \neq \emptyset$. De aici, $V \subset cA$. Cum $V \in \mathcal{V}(a)$, există un interval deschis I astfel ca $a \in I \subset V \subset cA$. În concluzie, $a \in \overset{\circ}{cA}$. De aici, $c\overline{A} \subset \overset{\circ}{cA}$.

Fie acum $a \in \overset{\circ}{cA}$. Atunci $cA \in \mathcal{V}(a)$, deci există un interval deschis I astfel ca $a \in I \subset cA$. De aici, $I \cap A = \emptyset$. Cum $I \in \mathcal{V}(a)$, urmează că $a \notin \overline{A}$, deci $a \in c\overline{A}$. De aici, $\overset{\circ}{cA} \subset c\overline{A}$, iar cum şi $c\overline{A} \subset \overset{\circ}{cA}$, urmează că $c\overline{A} = \overset{\circ}{cA}$.

2. Fie $a \in \overset{\circ}{cA}$. Presupunem prin reducere la absurd că $a \notin \overline{cA}$. Atunci există $V \in \mathcal{V}(a)$, $V \cap cA = \emptyset$. De aici, $V \subset A$, deci $A \in \mathcal{V}(a)$, iar $a \in \overset{\circ}{A}$, contradicţie. Presupunerea făcută este deci falsă, iar $a \in \overline{cA}$, de unde $\overset{\circ}{cA} \subset \overline{cA}$.

Fie acum $a \in \overline{cA}$. Presupunem prin reducere la absurd că $a \notin c\overset{\circ}{A}$. Atunci $a \in \overset{\circ}{A}$, deci există un interval deschis I astfel ca $a \in I \subset A$, deci $I \cap cA = \emptyset$. Cum $I \in \mathcal{V}(a)$, urmează că $a \notin \overline{cA}$, contradicţie. Presupunerea făcută este deci falsă, iar $a \in c\overset{\circ}{A}$, de unde $\overline{cA} \subset c\overset{\circ}{A}$. Cum $c\overset{\circ}{A} \subset \overline{cA}$, urmează că $c\overset{\circ}{A} = \overline{cA}$. ∎

Corolar 4.6.1. *Fie $B \subset \overline{\mathbb{R}}$. Au loc egalităţile*

1. $\overline{B} = c\left(\overset{\circ}{cB}\right)$;
2. $\overset{\circ}{B} = c\left(\overline{cB}\right)$.

Demonstraţie. Demonstraţiile celor două egalităţi se obţin în mod imediat punând $B = cA$ în Teorema 4.6, ţinând seama că $c(cB) = B$. ∎

4.1.4 Puncte de frontieră

Fie $A \subset \overline{\mathbb{R}}$. Vom spune că $a \in \overline{\mathbb{R}}$ se numeşte *punct de frontieră* al lui A dacă $a \in \overline{A} \cap \overline{cA}$.

Din definiţia de mai sus se observă că un punct $a \in \overline{\mathbb{R}}$ este punct de frontieră al lui A dacă este limita atât a unui şir de elemente din A cât şi a unui şir de elemente din cA, adică există două şiruri $(a_n)_{n\geq 0} \subset A$ şi $(b_n)_{n\geq 0} \subset cA$ astfel ca $a_n \to a$ şi $b_n \to a$ pentru $n \to \infty$.

Mulţimea tuturor punctelor de frontieră ale lui A se numeşte atunci *frontiera* lui A şi se notează $\operatorname{Fr} A$ sau ∂A.

Are loc de asemenea următoarea proprietate de calcul, utilă în determinarea frontierei unei mulţimi.

Teorema 4.7. *Fie $A \subset \overline{\mathbb{R}}$. Atunci* $\operatorname{Fr} A = \overline{A} \setminus \overset{\circ}{A}$.

Demonstraţie. Au loc relaţiile

$$\operatorname{Fr} A = \overline{A} \cap \overline{cA} = \overline{A} \cap c\overset{\circ}{A} = \overline{A} \setminus \overset{\circ}{A},$$

de unde concluzia. ∎

Exemple 1. Dacă $A = (0,1)$, atunci $\overline{A} = [0,1]$, $\overset{\circ}{A} = (0,1)$, deci $\operatorname{Fr} A = \{0,1\}$.

2. Dacă $A = \{1,2,\ldots,n\}$, atunci $\overline{A} = A$, $\overset{\circ}{A} = \emptyset$ (deoarece A nu conţine intervale), deci $\operatorname{Fr} A = A$.

3. Dacă $A = \mathbb{Q}$, atunci $\overline{A} = \overline{\mathbb{R}}$, $\overset{\circ}{A} = \emptyset$, deci $\operatorname{Fr} A = \overline{\mathbb{R}}$.

4.1.5 Mulţimi deschise, mulţimi închise, mulţimi compacte

Mulţimi deschise

Fie $A \subset \overline{\mathbb{R}}$. Vom spune că A este *deschisă* dacă este mulţimea vidă sau este vecinătate pentru orice punct al său.

Exemple 1. Dacă $A = (0,1)$, atunci ea este deschisă, fiind vecinătate pentru orice $a \in (0,1)$.

2. Dacă $A = [0,2)$, atunci A nu este deschisă, întrucât ea nu este vecinătate pentru $a = 0$.

3. Dacă $A = \mathbb{N}$, atunci A nu este deschisă, întrucât ea nu este vecinătate pentru niciun punct al său, neconţinând intervale.

4. Dacă $A = \emptyset$, ea este deschisă prin definiţie. Dacă $A = \mathbb{R}$, atunci pentru orice $a \in \mathbb{R}$, $a \in (a-1, a+1) \subset \mathbb{R}$, deci $\mathbb{R}$ este vecinătate pentru a. Cum a este arbitrar, $\mathbb{R}$ este deschisă. Dacă $A = \overline{\mathbb{R}}$, la observaţia anterioară se adaugă faptul că $+\infty \in (0,\infty] \subset \overline{\mathbb{R}}$, iar $-\infty \subset [-\infty, 0) \subset \overline{\mathbb{R}}$, deci $\overline{\mathbb{R}}$ este de asemenea deschisă.

Are loc următoarea teoremă de caracterizare a mulţimilor deschise prin intermediul interiorului acestora.

Teorema 4.8. *Fie $A \subset \overline{\mathbb{R}}$. Atunci A este deschisă dacă şi numai dacă $A = \overset{\circ}{A}$.*

Demonstraţie. „$\Rightarrow$" Dacă A este deschisă, fie $a \in A$ oarecare. Conform definiţiei, A este vecinătate a lui a, deci $a \in \overset{\circ}{A}$ şi atunci, deoarece a este oarecare, urmează că $\overset{\circ}{A} \subset A$. Cum şi $A \subset \overset{\circ}{A}$, urmează că $A = \overset{\circ}{A}$.

„$\Rightarrow$" Dacă $A = \overset{\circ}{A}$, atunci orice $a \in A$ aparţine şi lui $\overset{\circ}{A}$, deci, conform definiţiei unui punct interior, A este vecinătate pentru A. Urmează atunci că A este vecinătate pentru orice $a \in A$, deci A este deschisă. ■

În particular, din rezultatul de mai sus se obţine uşor faptul că $I_1 = (c, d)$, $I_2 = (c, +\infty)$, $I_3 = (c, +\infty]$, $I_4 = [-\infty, d]$ şi $I_5 = (-\infty, d)$ sunt mulţimi deschise pentru orice $c, d \in \mathbb{R}$.

Se va observa în cele ce urmează că interiorul unei mulţimi A este mulţime deschisă şi este cea mai mare mulţime deschisă inclusă în A, în sensul că oricare altă mulţime deschisă inclusă în A este conţinută în $\overset{\circ}{A}$.

Teorema 4.9. *Fie* $A \subset \overline{\mathbb{R}}$*. Atunci* $\overset{\circ}{A}$ *este o mulţime deschisă, iar* $\overset{\circ\circ}{A} = \overset{\circ}{A}$*. Mai mult, dacă* $B \subset A$ *este o altă mulţime deschisă, atunci* $B \subset \overset{\circ}{A}$*.*

Demonstraţie. Demonstrăm mai întâi că $\overset{\circ}{A}$ este o mulţime deschisă.

Dacă $\overset{\circ}{A} = \emptyset$, teorema este demonstrată. Fie acum $a \in \overset{\circ}{A}$. Atunci există un interval deschis I astfel ca $a \in I \subset A$. Cum I este interval deschis, este mulţime deschisă conform observaţiei de mai sus, deci I este vecinătate pentru orice punct al său. Deoarece şi $I \subset A$, urmează că A este vecinătate pentru orice punct al lui I, deci $I \subset \overset{\circ}{A}$. Deoarece $a \in I \subset \overset{\circ}{A}$, se obţine că $\overset{\circ}{A}$ este vecinătate pentru a, iar cum a este arbitrar, urmează că $\overset{\circ}{A}$ este deschisă.

Deoarece $\overset{\circ}{A}$ este deschisă, urmează conform Teoremei 4.8 că $\overset{\circ\circ}{A} = \overset{\circ}{A}$. Fie acum $B \subset A$ o mulţime deschisă. Atunci $\overset{\circ}{B} \subset \overset{\circ}{A}$, iar deoarece B este deschisă, $\overset{\circ}{B} = B$, de unde $B \subset \overset{\circ}{A}$. ∎

Operaţii cu mulţimi deschise

Teorema 4.10. *Au loc următoarele proprietăţi.*

1. *Orice reuniune de mulţimi deschise este mulţime deschisă.*

2. *Orice intersecţie finită de mulţimi deschise este mulţime deschisă.*

Demonstraţie. 1. Fie $(A_i)_{i \in I} \subset \overline{\mathbb{R}}$ mulţimi deschise, mulţimea I a indicilor nefiind neapărat finită. Fie deasemenea $a \in \bigcup\limits_{i \in I} A_i$. Există atunci $i_0 \in I$ astfel ca $a \in A_{i_0}$, iar cum A_{i_0} este deschisă, $A_{i_0} \in \mathcal{V}(a)$. Deoarece $A_{i_0} \subset \bigcup\limits_{i \in I} A_i$, urmează că de asemenea $\bigcup\limits_{i \in I} A_i \in \mathcal{V}(a)$. Cum a era arbitrar în $\bigcup\limits_{i \in I} A_i$, se obţine că $\bigcup\limits_{i \in I} A_i$ este mulţime deschisă.

2. Fie $(A_i)_{1\le i\le n} \subset \overline{\mathbb{R}}$ mulţimi deschise şi $a \in \bigcap_{i=1}^{n} A_i$. Atunci $a \in A_i$ pentru $1 \le i \le n$, deci pentru orice $1 \le i \le n$ există un interval deschis I_i astfel ca $I_i \subset A_i$. Deoarece $\bigcap_{i=1}^{n} I_i$ este tot un interval deschis, iar $a \in \bigcap_{i=1}^{n} I_i \subset \bigcap_{i=1}^{n} A_i$, urmează că $\bigcap_{i=1}^{n} A_i \in \mathcal{V}(a)$. Cum a era arbitrar, se obţine că $\bigcap_{i=1}^{n} A_i$ este mulţime deschisă. ■

Se poate observa că o intersecţie infinită de mulţimi deschise nu este neapărat mulţime deschisă. În acest sens, să considerăm $(A_i)_{i\ge 1} : A_i = (-\frac{1}{i}, \frac{1}{i})$. Atunci A_i este deschisă pentru orice $i \ge 1$, dar $\bigcap_{i\ge 1} A_i = \{0\}$, care nu este mulţime deschisă.

Exemplu
$A = (0,1) \cup (2,4)$ este deschisă, ca reuniune a mulţimilor deschise $(0,1)$ şi $(2,4)$.

Mulţimi închise

Fie $A \subset \overline{\mathbb{R}}$. Vom spune că A este *închisă* dacă cA este deschisă.

Se poate observa imediat că are loc următoarea teoremă de caracterizare a mulţimilor închise prin intermediul aderenţei acestora.

Teorema 4.11. *Fie $A \subset \overline{\mathbb{R}}$. Atunci A este închisă dacă şi numai dacă $A = \overline{A}$.*

Demonstraţie. Au loc următoarele echivalenţe

A închisă $\Leftrightarrow cA$ deschisă $\Leftrightarrow cA = \overset{\circ}{cA} \Leftrightarrow cA = c\overline{A} \Leftrightarrow A = \overline{A}$. ■

Din teorema de mai sus şi din teorema de caracterizare a mulţimilor închise cu ajutorul limitelor de şiruri (Teorema 4.3) se poate observa că $A \subset \overline{\mathbb{R}}$ este închisă dacă si numai dacă ea conţine limitele tuturor şirurilor cu elemente din A.

Exemple 1. $A = [0,1]$ este mulţime închisă, deoarece $\overline{A} = A$. Altfel, $cA = [-\infty, 0) \cup (0, \infty]$, care este mulţime deschisă, fiind reuniunea mulţimilor deschise $[-\infty, 0)$ şi $(0, \infty]$.

2. $A = \mathbb{R}$ nu este mulţime închisă, deoarece $\overline{A} = \overline{\mathbb{R}} \ne A$. Altfel, A nu conţine $+\infty$, care este limita şirului $(x_n)_{n\ge 0} : x_n = n$ cu elemente din A.

3. $A = (-\infty, 0]$ nu este mulţime închisă, deoarece $cA = \{-\infty\} \cup (0, \infty]$, care nu este mulţime deschisă, întrucât nu este vecinătate a lui $+\infty$. Altfel, $\overline{A} = [-\infty, 0] \ne A$, sau A nu conţine $-\infty$, care este limita şirului $(x_n)_{n\ge 0} : x_n = -n$ cu elemente din A.

4. $\emptyset$ este mulţime închisă deoarece $c\emptyset = \overline{\mathbb{R}}$, care este mulţime deschisă. De asemenea, $\overline{\mathbb{R}}$ este mulţime închisă, deoarece $c\overline{\mathbb{R}} = \emptyset$, care este mulţime deschisă.

Din exemplele de mai sus se poate observa că $\emptyset$ şi $\overline{\mathbb{R}}$ sunt atât mulţimi deschise, cât şi închise. Se poate demonstra că aceste mulţimi sunt singurele care au simultan cele două proprietăţi.

Prin analogie cu Teorema 4.9, se va observa că aderenţa unei mulţimi date A este mulţime închisă şi este cea mai mică mulţime închisă care include pe A, în sensul că oricare altă mulţime închisă care include pe A conţine şi $\overline{A}$.

Teorema 4.12. *Fie $A \subset \overline{\mathbb{R}}$. Atunci $\overline{A}$ este o mulţime închisă, iar $\overline{\overline{A}} = \overline{A}$. Mai mult, dacă $B \supset A$ este o altă mulţime închisă, atunci $B \supset \overline{A}$.*

Demonstraţie. Demonstrăm mai întâi că $\overline{A}$ este o mulţime închisă.

Deoarece $c\overline{A} = \overset{\circ}{cA}$ iar $\overset{\circ}{cA}$ este deschisă, urmează că $c\overline{A}$ este deschisă, deci $\overline{A}$ este închisă.

Au loc deasemenea următoarele egalităţi

$$c\left(\overline{\overline{A}}\right) = \overset{\circ}{c\overline{A}} = \overset{\circ\circ}{cA} = \overset{\circ}{cA} = c\overline{A},$$

de unde $\overline{\overline{A}} = \overline{A}$. Fie acum $B \supset A$ o mulţime închisă. Atunci $\overline{B} \supset \overline{A}$, iar deoarece B este închisă, $\overline{B} = B$, de unde $B \supset \overline{A}$. ∎

Operaţii cu mulţimi închise

Teorema 4.13. *Au loc următoarele proprietăţi.*

1. *Orice reuniune finită de mulţimi închise este mulţime închisă.*

2. *Orice intersecţie de mulţimi închise este mulţime închisă.*

Demonstraţie. 1. Fie $(A_i)_{1\leq i\leq n} \subset \overline{\mathbb{R}}$ mulţimi închise. Atunci $c\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \bigcap_{i=1}^{n} cA_i$, iar cum $(A_i)_{1\leq i\leq n}$ sunt închise, cA_i este mulţime deschisă pentru orice $1 \leq i \leq n$. Atunci $\bigcap_{i=1}^{n} cA_i$ este deschisă, fiind o intersecţie finită de mulţimi deschise. De aici, $c\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right)$ este deschisă, iar complementara sa $\bigcup_{i=1}^{n} A_i$ este închisă.

2. Fie $(A_i)_{i\in I} \subset \overline{\mathbb{R}}$ mulţimi închise, mulţimea I a indicilor nefiind neapărat finită. Atunci $c\left(\bigcap\limits_{i\in I} A_i\right) = \bigcup\limits_{i\in I} cA_i$, iar $\bigcup\limits_{i\in I} cA_i$ este deschisă, fiind reuniune de mulţimi deschise. De aici, $c\left(\bigcap\limits_{i\in I} A_i\right)$ este deschisă, iar complementara sa $\bigcap\limits_{i\in I} A_i$ este închisă. ■

Se poate observa că o reuniune infinită de mulţimi închise nu este neapărat mulţime închisă. În acest sens, să considerăm $(A_i)_{i\geq 0} : A_i = [-i, i]$. Atunci A_i este închisă pentru orice $i \geq 0$, dar $\bigcup\limits_{i\geq 0} A_i = \mathbb{R}$, care nu este mulţime închisă.

Exemplu
$A = [-1, 2] \cup [4, 5]$ este deschisă, ca reuniune a mulţimilor închise $[-1, 2]$ şi $[4, 5]$.

Mulţimi compacte

Fie $A \subset \overline{\mathbb{R}}$. Vom spune că A este *compactă* dacă este închisă şi mărginită.

Exemple 1. $A = [0, 1]$ este compactă, fiind închisă şi mărginită.

2. $A = [0, 2] \cup [4, 6]$ este compactă, fiind închisă (ca reuniune finită de mulţimi închise) şi mărginită.

3. $A = [0, \infty]$ nu este compactă, nefiind mărginită.

4. $A = \left\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots, \frac{1}{n}, \ldots\right\}$ nu este compactă, nefiind închisă, deoarece limita şirului $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots, \frac{1}{n}, \ldots$ este 0, element neconţinut în mulţimea A.

Operaţii cu mulţimi compacte

Teorema 4.14. *Au loc următoarele proprietăţi.*

1. *Orice reuniune finită de mulţimi compacte este mulţime compactă.*

2. *Orice intersecţie de mulţimi compacte este mulţime compactă.*

Demonstraţie. 1. Fie $(A_i)_{1\leq i\leq n} \subset \overline{\mathbb{R}}$ mulţimi compacte. Atunci $\bigcup\limits_{i=1}^{n} A_i$ este închisă, conform Teoremei 4.13, iar cum o reuniune finită de mulţimi mărginite este mărginită, ea este şi mărginită. Fiind mărginită şi închisă, $\bigcup\limits_{i=1}^{n} A_i$ este compactă.

2. Fie $(A_i)_{i\in I} \subset \overline{\mathbb{R}}$ mulţimi închise, mulţimea I a indicilor nefiind neapărat finită. Atunci $\bigcap\limits_{i\in I} A_i$ este închisă, conform Teoremei 4.13, iar cum o intersecţie de

mulţimi mărginite este mărginită, ea este şi mărginită. Fiind mărginită şi închisă, $\bigcap\limits_{i\in I} A_i$ este compactă. ■

Teorema 4.15. *Fie $A \subset \overline{\mathbb{R}}$. Atunci A este compactă dacă şi numai dacă din orice şir de elemente din A se poate extrage un subşir convergent la un element din A.*

Demonstraţie. „$\Rightarrow$" Fie A compactă şi fie $(a_n)_{n\geq 0}$ un şir de elemente din A. Cum A este compactă, ea este mărginită şi atunci $(a_n)_{n\geq 0}$ este mărginit. Cum orice şir mărginit conţine un subşir convergent, $(a_n)_{n\geq 0}$ conţine un subşir $(a_{n_k})_{k\geq 0}$ convergent; fie a limita acestui subşir. Deoarece a este limita unui şir de elemente din A, urmează că $a \in \overline{A}$, iar cum A este închisă, $A = \overline{A}$. De aici, $a \in A$, deci $(a_n)_{n\geq 0}$ conţine un subşir $(a_{n_k})_{k\geq 0}$ convergent la $a \in A$. Cum $(a_n)_{n\geq 0}$ era arbitrar, urmează concluzia.

„$\Leftarrow$" Fie $A \subset \overline{\mathbb{R}}$ pentru care este îndeplinită proprietatea din enunţ. Demonstrăm mai întâi că A este închisă. În acest scop, fie $a \in \overline{A}$. Atunci există un şir $(a_n)_{n\geq 0}$ de elemente din A, $a_n \to a$ pentru $n \to \infty$, conform definiţiei aderenţei unei mulţimi. Conform proprietăţii din enunţ, există un subşir $(a_{n_k})_{k\geq 0}$ al acestuia convergent la un element $b \in A$. Deoarece $(a_{n_k})_{k\geq 0}$ este un subşir al unui şir cu limita a, el are limita a, deci $b = a$ şi deci $a \in A$. Cum a era arbitrar, urmează că A este închisă.

Demonstrăm acum că A este şi mărginită. Mai întâi, presupunem prin reducere la absurd că A este nemărginită superior. Atunci A conţine un şir $(a_n)_{n\geq 0}$ cu limita $+\infty$. Conform proprietăţii din enunţ, $(a_n)_{n\geq 0}$ conţine un subşir $(a_{n_k})_{k\geq 0}$ convergent la $a \in A$, ceea ce este o contradicţie, deoarece $(a_{n_k})_{k\geq 0}$ este divergent cu limita $+\infty$, fiind subşir al lui $(a_n)_{n\geq 0}$. Urmează că presupunerea făcută este falsă, iar A este mărginită superior. Analog se demonstrează că A este mărginită inferior. Fiind mărginită superior şi inferior, A este mărginită. Deoarece A este închisă şi mărginită, A este compactă, ceea ce încheie demonstraţia. ■

Mulţimi dense

Fie $A, B \subset \overline{\mathbb{R}}$. Vom spune că A este *densă în B* dacă orice element al lui B este limita unui şir cu elemente din A, adică $B \subset \overline{A}$. Dacă $B = \overline{\mathbb{R}}$, adică orice element al lui $\overline{\mathbb{R}}$ este limita unui şir cu elemente din A, atunci A se numeşte *densă*.

Din definiţia de mai sus, se observă că dacă A este densă, atunci $\overline{A} = \overline{\mathbb{R}}$. Într-adevăr, conform definiţiei, $\overline{\mathbb{R}} \subset \overline{A}$, iar cum $\overline{A} \subset \overline{\mathbb{R}}$, urmează că $\overline{A} = \overline{\mathbb{R}}$.

De asemenea, pentru a se demonstra că A este densă este suficient să se arate că $\overline{A} \supset \mathbb{R}$. În acest sens, dacă $\overline{A} \supset \mathbb{R}$, atunci $\overline{\overline{A}} \supset \overline{\mathbb{R}}$, iar cum $\overline{\overline{A}} = \overline{A}$, urmează că $\overline{A} \supset \overline{\mathbb{R}}$.

Exemple 1. $\mathbb{Q}$ este densă, deoarece orice număr real este limita unui şir de numere raţionale.

2. $\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$ este de asemenea densă, deoarece orice număr real este limita unui şir de numere iraţionale. Altfel,

$$\begin{aligned}\overline{\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}} &= \overline{\overline{\mathbb{R}}\backslash(\mathbb{Q}\cup\{-\infty,+\infty\})} = \overline{c(\mathbb{Q}\cup\{-\infty,+\infty\})}\\ &= c\overset{\circ}{\overbrace{\mathbb{Q}\cup\{-\infty,+\infty\}}} = c\emptyset = \overline{\mathbb{R}},\end{aligned}$$

deci $\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$ este densă. S-a folosit faptul că $\overset{\circ}{\overbrace{\mathbb{Q}\cup\{-\infty,+\infty\}}}$, deoarece $\mathbb{Q}\cup\{-\infty,+\infty\}$ nu conţine intervale.

3. $\mathbb{Q}\cap[0,1]$ este densă în $[0,1]$, deoarece $\overline{\mathbb{Q}\cap[0,1]} = \overline{\mathbb{Q}}\cap\overline{[0,1]} = \overline{\mathbb{R}}\cap[0,1] = [0,1]$.

4. $A = \left\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots, \frac{1}{n}, \ldots\right\}$ nu este densă în $[0,1]$, deoarece $\overline{A} = A\cup\{0\} \not\supset [0,1]$.

Denumirea de mulţime densă este justificată de următoarea teoremă, care afirmă faptul că pentru oricare două numere reale date, o mulţime densă conţine măcar un element situat între acestea.

Teorema 4.16. *Fie $A \subset \overline{\mathbb{R}}$. Atunci A este densă dacă şi numai dacă pentru orice x, $y \in \mathbb{R}$, $x < y$, există $a \in A$ astfel ca $x < a < y$.*

Demonstraţie. „$\Rightarrow$" Fie A densă şi fie $x, y \in \mathbb{R}$, $x < y$. Atunci $\frac{x+y}{2} \in (x,y)$, iar $(x,y) \in \mathcal{V}(\frac{x+y}{2})$. Cum $\frac{x+y}{2} \in \overline{A}$, există un şir $(a_n)_{n\geq 0}$ de elemente din A astfel că $a_n \to \frac{x+y}{2}$ pentru $n \to \infty$ şi deoarece $(x,y) \in \mathcal{V}(\frac{x+y}{2})$, există $N \in \mathbb{N}$ astfel ca $a_n \in (x,y)$ pentru orice $n \geq N$. De aici, $x < a_n < y$ şi $a_n \in A$ pentru orice $n \geq N$.

„$\Leftarrow$" Fie A o mulţime cu proprietatea din enunţ şi fie $c \in \mathbb{R}$. Conform proprietăţii din enunţ, pentru orice $n \in \mathbb{N}$ există $a_n \in A$ astfel că $c - \frac{1}{2^n} < a_n < c + \frac{1}{2^n}$. Deoarece $c - \frac{1}{2^n} \to c$, $c + \frac{1}{2^n} \to c$ pentru $n \to \infty$, urmează că $a_n \to c$ pentru $n \to \infty$, conform criteriului cleştelui, deci $c \in \overline{A}$. Cum c era arbitrar, urmează că A este densă. ∎

Exemple 1. $\mathbb{Z}$ nu este densă, deoarece nu conţine niciun punct situat între 0 şi 1.

2. $(\mathbb{Q} \cap (-\infty, -1]) \cup (\mathbb{Q} \cap [1, \infty))$ nu este densă, deoarece nu conţine niciun punct situat între -1 şi 1.

4.2 Proprietăţi de numărare ale lui $\overline{\mathbb{R}}$

4.2.1 Numere cardinale

Fie $A, B \subset \overline{\mathbb{R}}$. Vom spune că A, B *au acelaşi cardinal* şi vom nota $A \sim B$ dacă există o funcţie bijectivă $f : A \to B$. Se observă că relaţia „$\sim$" astfel definită între mulţimi este relaţie de echivalenţă, întrucât este

1. reflexivă, deoarece $A \sim A$, cu $f : A \to A$, $f(x) = x$.
2. simetrică, deoarece dacă $A \sim B$, cu $f : A \to B$ bijectivă, atunci şi $B \sim A$, cu $f^{-1} : B \to A$ bijectivă.
3. tranzitivă, deoarece dacă $A \sim B$, cu $f : A \to B$ bijectivă, iar $B \sim C$, cu $g : B \to C$ bijectivă, atunci $A \sim C$, cu $g \circ f : A \to C$ bijectivă.

Mulţimi finite

O mulţime A va fi numită atunci *finită* dacă este mulţimea vidă (şi atunci are cardinal 0, sau are 0 elemente) sau are acelaşi cardinal cu $A_n = \{1, 2, \ldots, n\}$ pentru un $n \in \mathbb{N}$ oarecare (şi atunci se spune că are cardinal n, sau are n elemente).

4.2.2 Mulţimi numărabile

Fie $A \subset \overline{\mathbb{R}}$. Vom spune că A este *numărabilă* dacă există o funcţie bijectivă $f : \mathbb{N} \to A$. În această situaţie, cardinalul mulţimii A se va nota cu $\aleph_0$ (alef zero). O mulţime care nu este numărabilă se va numi *nenumărabilă*.

Dacă notăm $f(n) = a_n$, $n \in \mathbb{N}$, atunci se observă că A este numărabilă dacă elementele sale pot fi puse sub forma unui şir cu termeni distincţi, anume

$$A = \{a_0, a_1, \ldots, a_n, \ldots\}.$$

O mulţime A se va numi atunci *cel mult numărabilă* dacă este finită sau numărabilă. Se observă atunci că A este cel mult numărabilă dacă şi numai dacă există o funcţie injectivă $f : A \to \mathbb{N}$.

Exemple 1. $A = \mathbb{N}$ este numărabilă. În acest caz, $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, $f(n) = n$ este funcţia căutată. Altfel, $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \ldots\}$, elementele sale putând fi puse sub forma unui şir cu termeni distincţi.

2. $A = \mathbb{Z}$ este numărabilă, deoarece $\mathbb{Z} = \{0, 1, -1, 2, -2, \ldots\}$, elementele sale putând fi puse sub forma unui şir cu termeni distincţi. Altfel,

$$f : \mathbb{N} \to \mathbb{Z}, \quad f(n) = \begin{cases} \frac{n}{2} & \text{dacă } n \text{ este par} \\ -\frac{n+1}{2} & \text{dacă } n \text{ este impar} \end{cases}.$$

este bijectivă.

Din Exemplul 2, în care s-a construit o funcţie bijectivă $f : \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$, se observă că o mulţime infinită poate avea acelaşi cardinal ca şi o submulţime proprie a sa. De asemenea,

$$f_1 : \mathbb{R} \to (-1, 1), \quad f_1(x) = \frac{x}{1 + |x|}$$
$$f_2 : \mathbb{R} \to (0, \infty), \quad f_2(x) = \begin{cases} \frac{1}{1+x}, & \text{dacă } x \in [0, \infty) \\ 1 - x, & \text{dacă } x \in (-\infty, 0) \end{cases}$$

sunt bijective, deci $\mathbb{R}$, $(0, \infty)$ şi $(-1, 1)$ au acelaşi cardinal. De fapt, toate intervalele deschise (a, b) au acelaşi cardinal, întrucât au acelaşi cardinal cu $(-1, 1)$, acest lucru observându-se din faptul că

$$f_3 : (a, b) \to (-1, 1), \quad f_3(x) = \frac{2}{b-a}x - \frac{a+b}{b-a}$$

este bijectivă. Similar, intervalele (a, ∞) au acelaşi cardinal cu $(0, \infty)$ întrucât

$$f_4 : (a, \infty) \to (0, \infty), \quad f_4(x) = x - a$$

este bijectivă, iar intervalele $(-\infty, b)$ au acelaşi cardinal cu $(-\infty, 0)$ întrucât

$$f_5 : (-\infty, b) \to (-\infty, 0), \quad f_5(x) = x - b$$

este bijectivă. Cum $(0,\infty)$ şi $(-\infty,0)$ au acelaşi cardinal, întrucât

$$f_6 : (0,\infty) \to (-\infty,0), \quad f_6(x) = -x$$

este bijectivă, urmează că mulţimile $\mathbb{R}$, (a,∞), $(-\infty,b)$, (a,b) au acelaşi cardinal pentru orice $a,b \in \mathbb{R}$. Vom demonstra ulterior că aceste mulţimi nu sunt numărabile.

Operaţii cu mulţimi numărabile

Se poate observa că o reuniune finită de mulţimi numărabile este numărabilă. În acest sens, fie $(A_i)_{1\leq i\leq n}$ o familie finită de mulţimi numărabile. Atunci A_i poate fi pusă sub forma unui şir cu termeni distincţi, $A_i = \left\{a_0^i, a_1^i, a_2^i, \ldots\right\}$ pentru orice $1 \leq i \leq n$. De aici,

$$\bigcup_{i=1}^{n} A_i = \left\{a_0^1, a_0^2, \ldots, a_0^n, a_1^1, a_1^2, \ldots a_1^n, \ldots\right\}.$$

Eliminând eventualele repetări, elementele mulţimii $\bigcup\limits_{i=1}^{n} A_i$ pot fi scrise sub forma unui şir cu termeni distincţi, iar $\bigcup\limits_{i=1}^{n} A_i$ este numărabilă. Cu un raţionament asemănător, se poate demonstra că dacă F este finită iar A este numărabilă, atunci $A \cup F$ este numărabilă. De asemenea, dacă A este numărabilă, atunci orice submulţime a sa este finită sau numărabilă.

Vom studia acum situaţia în care se face reuniunea unei familii numărabile de mulţimi numărabile.

Teorema 4.17. *Fie $(A_i)_{i\in\mathbb{N}}$ o familie de mulţimi numărabile. Atunci $\bigcup\limits_{i\in\mathbb{N}} A_i$ este numărabilă.*

Demonstraţie. Fie $A_i = \left\{a_0^i, a_1^i, a_2^i, \ldots\right\}$ pentru $i \in \mathbb{N}$. Aranjăm elementele mulţimilor

A_i, $i \in \mathbb{N}$ sub forma următorului tabel

$$\begin{array}{cccc}
a_0^0 & a_1^0 & a_2^0 & \cdots \\[2em]
a_0^1 & a_1^1 & a_2^1 & \cdots \\[2em]
a_0^2 & a_1^2 & a_2^2 & \cdots \\[2em]
\vdots & \vdots & \vdots &
\end{array}$$

în care pe linia i, $i \geq 0$, se află elementele mulţimii A_i. Urmărind săgeţile din diagrama de mai jos

$$\begin{tikzcd}
a_0^0 \arrow[r] & a_1^0 \arrow[dl] & a_2^0 \arrow[r] & a_3^0 \ldots \arrow[dl] \\
a_0^1 \arrow[d] & a_1^1 \arrow[ur] & a_2^1 \arrow[dl] & a_3^1 \ldots \\
a_0^2 \arrow[ur] & a_1^2, & a_2^2 & a_3^2 \ldots \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots
\end{tikzcd}$$

se deduce că,

$$\bigcup_{i \in \mathbb{N}} A_i = \left\{ a_0^0, a_1^0, a_0^1, a_2^0, a_1^1, a_0^2, \ldots \right\}.$$

Eliminând eventualele repetări, se observă că elementele mulţimii $\bigcup\limits_{i \in \mathbb{N}} A_i$ pot fi scrise sub forma unui şir cu termeni distincţi, deci $\bigcup\limits_{i \in \mathbb{N}} A_i$ este numărabilă. ■

Cu ajutorul acestei teoreme se poate demonstra că mulţimea numerelor raţionale este numărabilă.

Teorema 4.18. $\mathbb{Q}$ *este numărabilă.*

Demonstraţie. Fie $\mathbb{Q}_+ = \{x \in \mathbb{Q}, x > 0\}$, $\mathbb{Q}_- = \{x \in \mathbb{Q}, x < 0\}$. Atunci,

$$\mathbb{Q}_+ = \bigcup_{n \geq 1} \left\{ \frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \ldots, \frac{m}{n}, \ldots \right\},$$

unde $A_n = \left\{\frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \dots, \frac{m}{n}, \dots\right\}$ conţine toate fracţiile pozitive cu numitorul n şi este numărabilă. Atunci $\mathbb{Q}_+ = \bigcup\limits_{n\geq 1} A_n$ este numărabilă, conform Teoremei 4.17. De aici, $\mathbb{Q}_-$ este numărabilă, deoarece $\mathbb{Q}_+$ este numărabilă, iar $f_1 : \mathbb{Q}_+ \to \mathbb{Q}_-$, $f_1(x) = -x$ este bijectivă, în concluzie $\mathbb{Q}_+$ şi $\mathbb{Q}_-$ având acelaşi cardinal. Atunci $\mathbb{Q}_+ \cup \mathbb{Q}_-$ este numărabilă, ca reuniune finită de mulţimi numărabile, iar $\mathbb{Q} = \mathbb{Q}_+ \cup \mathbb{Q}_- \cup \{0\}$ este de asemenea numărabilă, ca reuniunea dintre o mulţime numărabilă şi o mulţime finită. ■

4.2.3 Mulţimi de puterea continuului

Vom demonstra în cele ce urmează că intervalul $[0,1]$ „are mai multe elemente" decât $\mathbb{Q}$, proprietate care nu este evidentă intuitiv, în sensul că elementele lui $\mathbb{Q}$ se pot număra, iar elementele lui $[0,1]$ nu, deşi este evident că ambele mulţimi au un număr infinit de elemente.

Teorema 4.19. *Intervalul* $[0,1]$ *nu este o mulţime numărabilă.*

Demonstraţie. Presupunem prin reducere la absurd că $[0,1]$ este o mulţime numărabilă. Atunci

$$[0,1] = \{x_0, x_1, x_2, \dots, x_n, \dots\},$$

intervalul $[0,1]$ putându-se pune sub forma unui şir cu termeni distincţi.

Notâm $I_0 = [0,1]$ şi împărţim acest interval în subintervalele $[0, \frac{1}{3}]$, $[\frac{1}{3}, \frac{2}{3}]$, $[\frac{2}{3}, 1]$ de lungimi egale; fie I_1 un interval dintre acestea care nu-l conţine pe x_0. Împărţim acum I_1 în trei subintervale de lungimi egale şi fie I_2 un interval dintre acestea care nu-l conţine pe x_1. Procedând în mod inductiv, obţinem un şir de intervale $(I_n)_{n\geq 0}$, $I_n = [a_n, b_n]$, $b_n - a_n = \frac{1}{3^n}$, astfel ca

$$I_0 \supset I_1 \supset I_2 \dots \supset I_n \supset \dots$$

şi I_n nu conţine x_0, $x_1, \dots x_{n-1}$. Şirul de intervale $(I_n)_{n\geq 0}$ este descrescător, cu lungimea tinzând la 0, intersecţia tuturor intervalelor fiind un punct.

Urmează că $\bigcap\limits_{n\geq 0} I_n = \{x\}$, iar cum $x \in [0,1]$, $x = x_{n_0}$ pentru $n_0 \in \mathbb{N}$ oarecare, ceea ce este o contradicţie, deoarece atunci $x \notin I_{n_0+1}$, deci $x \notin \bigcap\limits_{n\geq 0} I_n$. ■

Vom nota atunci cardinalul intervalului $[0,1]$ cu c (*puterea continuului*), înţelegând că o mulţime cu cardinal c „are mai multe elemente" decât o mulţime numărabilă, de cardinal $\aleph_0$. Cum

$$f:[0,1]\to(0,1),\quad f(x)=\begin{cases}\frac{1}{2}, & \text{dacă } x=0,\\ \frac{1}{n+2}, & \text{dacă } x=\frac{1}{n}, n\in\mathbb{N}^*\\ x, & \text{în rest}\end{cases}$$

este bijectivă, urmează că $[0,1]$ şi $(0,1)$ au acelaşi cardinal. Cu ajutorul unei construcţii similare se poate demonstra că $[0,1]$ şi $[0,1)$ au acelaşi cardinal. Din consideraţiile enunţate anterior se deduce că atât mulţimea $\mathbb{R}$ cât şi toate intervalele $[a,b]$, (a,b), $(-\infty,b]$, $(-\infty,b)$, $[a,\infty)$, (a,∞) au acelaşi cardinal c.

Din cele ce urmează se va observa că numerele iraţionale, fiind în număr mai mare decât cele raţionale, sunt „responsabile" pentru faptul că mulţimea numerelor reale nu este numărabilă.

Corolar 4.19.1. *Mulţimea I a numerelor iraţionale nu este numărabilă.*

Demonstraţie. Presupunem prin reducere la absurd că I este numărabilă. Atunci, deoarece $\mathbb{R}=\mathbb{Q}\cup I$, urmează că $\mathbb{R}$ este numărabilă, ca reuniunea unui număr finit de mulţimi numărabile, contradicţie. ■

Aplicaţii

4.1. *Precizaţi interiorul următoarelor mulţimi:*

$A_1=(0,1)\cup[2,3]$, $A_2=[0,2)\cup(4,5]\cup\{6\}$, $A_3=[2,\infty)$, $A_4=[-\infty,5]$, $A_5=\mathbb{Q}\cap[1,2]$, $A_6=(\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q})\cap[2,3]$, $A_7=\{x\in\mathbb{R}; 4\le x<8\}$, $A_8=\mathbb{R}^*$, $A_9=\{0,1,2,\dots,10\}$.

4.2. *Precizaţi mulţimea derivată şi aderenţa următoarelor mulţimi:*

$A_1=(0,1)\cup(1,2)$, $A_2=(1,2)\cup(3,4)\cup\{7\}$, $A_3=\mathbb{N}$, $A_4=(2,\infty)$, $A_5=\mathbb{Q}\cap(-1,1)$, $A_6=(\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q})\cap(0,2)$, $A_7=\left\{0,\frac{1}{2},\frac{1}{3},\dots,\frac{n}{n+1},\dots\right\}$, $A_8=\left\{2,\frac{3}{2},\frac{4}{3},\dots,\frac{n+1}{n},\dots\right\}$.

4.3. *Fie $A=[0,1)\cup(1,2]\cup\{6\}$. Determinaţi A', $\overline{A}$, $\overset{\circ}{A}$, $\mathrm{Fr}\,A$. Este A deschisă? Dar închisă sau compactă?*

4.4. *Demonstraţi că $A=\bigcup\limits_{i\ge 0}\left(\frac{2i+1}{i+1},\frac{2i+3}{i+1}\right)$ este mulţime deschisă.*

4.5. *Demonstraţi că* $A = \bigcap\limits_{i=1}^{10} \left[\frac{2n+1}{n+1}, \frac{3n+5}{n+2}\right]$ *este mulţime închisă.*

4.6. *Precizaţi dacă următoarele mulţimi sunt dense în mulţimile precizate:*

$A_1 = \mathbb{Z}$ *în* $B_1 = \mathbb{R}$, $A_2 = \mathbb{N}$ *în* $B_2 = \mathbb{Z}$, $A_3 = [0,1]$ *în* $B_3 = [-1,2]$, $A_4 = \mathbb{Q}^*$ *în* $B_4 = \mathbb{R}$, $A_5 = \{0,1,2,\ldots,10\}$ *în* $B_5 = [0,10]$, $A_6 = \left\{0, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots, \frac{n}{n+1}, \ldots\right\}$ *în* $B_6 = [0,1]$.

4.7. *Precizaţi care dintre următoarele mulţimi sunt numărabile:*

$A_1 = [0,1) \cup (2,3]$, $A_2 = 2\mathbb{Z} = \{x; x = 2k, k \in \mathbb{Z}\}$, $A_3 = \mathbb{N} \times \mathbb{N}$, $A_4 = \mathbb{Q} \times \mathbb{Z}$, $A_5 = \mathbb{R} \times \mathbb{Q}$, $A_6 = \mathbb{R}^n$, $A_7 = \mathbb{Q}^n$.

Capitolul 5

LIMITE DE FUNCŢII

5.1 Limita unei funcţii într-un punct

Fie o funcţie $f : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Ne punem problema de a studia comportarea lui f în apropierea unui punct dat $x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$, în sensul de a observa dacă pentru valori x ale argumentului apropiate de x_0 valorile $f(x)$ ale funcţiei se apropie şi ele de o valoare reală fixă sau sunt arbitrar de mari, respectiv arbitrar de mici.

Formulată în acest sens, suficient de intuitiv dar relativ imprecis, problema necesită unele clarificări şi restricţii. Din cele de mai sus, se poate observa faptul că sunt de interes valorile funcţiei f pentru argumente apropiate de x_0 şi nu valoarea $f(x_0)$ însăşi. De fapt, f poate nici să nu fie definită în x_0, adică nu este necesar ca x_0 să aparţină lui D. Totuşi, este necesar ca D să conţină valori x ale argumentului oricât de apropiate de x_0, adică x_0 trebuie să fie punct de acumulare al lui D. Mai mult, nu este necesar ca x_0 să fie finit, el putând fi $-\infty$ sau $+\infty$.

Pentru o funcţie $f : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ şi pentru $x_0 \in D'$, vom spune că funcţia f *are limita* $l \in \overline{\mathbb{R}}$ în x_0 dacă pentru orice vecinătate $V \in \mathcal{V}(l)$ există o vecinătate $U \in \mathcal{V}(x_0)$ astfel încât pentru orice $x \in U \cap D$, $x \neq x_0$, urmează că $f(x) \in V$. În acest caz, vom nota $f(x) \to l$ *pentru* $x \to x_0$ sau $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = l$, spunându-se şi că $f(x)$ *tinde la* l *pentru* x *tinzând la* x_0.

Se observă că dacă x_0 nu este punct de acumulare al lui D, adică dacă x_0 este punct izolat al lui D sau punct exterior lui D, atunci problema existenţei limitei lui f în D nu are sens, întrucât D nu conţine valori ale argumentului x oricât de apropiate de x_0.

De asemenea, într-un mod similar demonstraţiei rezultatului corespunzător privind limite de şiruri, se poate demonstra că dacă limita unei funcţii există, atunci aceasta este unică.

Exemple 1. Fie $f : (-1,1) \cup \{2\} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x+1$. Atunci $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 1$, iar $\lim\limits_{x\to 1} f(x) = 2$, problema existenţei limitei lui f în $x_0 = 1$ având sens, deoarece acesta este punct de acumulare al domeniului de definiţie, chiar dacă nu aparţine acestuia. În acelaşi timp, problema existenţei limitei lui f în $x_0 = 2$ nu are sens, deoarece acesta este punct izolat al domeniului de definiţie. În mod similar, problema existenţei limitei lui f în $x_0 = 3$ nu are sens, deoarece acesta este punct exterior domeniului de definiţie.

2. Fie $f : [0,1) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x}, & x \in (0,1) \\ 0, & x = 0 \end{cases}$. Atunci $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = +\infty$, în timp ce $f(0) = 0$, deci o funcţie poate avea într-un punct dat o limită diferită de valoarea funcţiei în acel punct. În general, dacă $f : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, iar $x_0 \in D'$, se poate întâmpla ca $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) \neq f(x_0)$, adică valoarea limitei unei funcţii într-un punct poate fi diferită de valoarea funcţiei în acel punct. Funcţiile care verifică egalitatea $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$ se numesc *funcţii continue în* x_0 şi vor fi studiate în capitolul următor.

5.1.1 Caracterizări analitice

Să presupunem pentru moment că $x_0 \in \mathbb{R}$ şi să considerăm vecinătăţi V ale lui l de tipul $(l-\varepsilon, l+\varepsilon)$ dacă l este finit, respectiv $(M, +\infty]$ dacă $l = +\infty$ şi $[-\infty, -M)$ dacă $l = -\infty$. Conform definiţiei de mai sus, obţinem următoarea *teoremă de caracterizare analitică* a limitei unei funcţii într-un punct, numită şi *teorema de caracterizare cu* $\varepsilon - \delta$.

Teorema 5.1. *Fie $f : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ şi $x_0 \in D' \cap \mathbb{R}$. Atunci au loc următoarele afirmaţii.*

1. $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = l \in \mathbb{R} \Leftrightarrow$ *Pentru orice $\varepsilon > 0$ există $\delta_\varepsilon > 0$ astfel ca $|f(x) - l| < \varepsilon$ pentru orice $x \in D$, $x \neq x_0$ cu proprietatea că $|x - x_0| < \delta_\varepsilon$.*

2. $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = +\infty \Leftrightarrow$ *Pentru orice $M > 0$ există $\delta_M > 0$ astfel ca $f(x) > M$ pentru orice $x \in D$, $x \neq x_0$ cu proprietatea că $|x - x_0| < \delta_M$.*

3. $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = -\infty \Leftrightarrow$ *Pentru orice* $M > 0$ *există* $\delta_M > 0$ *astfel ca* $f(x) < -M$ *pentru orice* $x \in D$, $x \neq x_0$ *cu proprietatea că* $|x - x_0| < \delta_M$.

Pentru $x_0 = +\infty$, se obţine în mod similar următoarea caracterizare a funcţiilor cu limită la $+\infty$, un rezultat asemănător având loc şi pentru $x_0 = -\infty$.

Teorema 5.2. *Fie* $f : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, *cu* $+\infty \in D'$. *Atunci au loc următoarele afirmaţii.*

1. $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = l \in \mathbb{R} \Leftrightarrow$ *Pentru orice* $\varepsilon > 0$ *există* $\delta_\varepsilon > 0$ *astfel ca* $|f(x) - l| < \varepsilon$ *pentru orice* $x \in D$, $x > \delta_\varepsilon$.

2. $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty \Leftrightarrow$ *Pentru orice* $M > 0$ *există* $\delta_M > 0$ *astfel ca* $f(x) > M$ *pentru orice* $x \in D$, $x > \delta_M$.

3. $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -\infty \Leftrightarrow$ *Pentru orice* $M > 0$ *există* $\delta_M > 0$ *astfel ca* $f(x) < -M$ *pentru orice* $x \in D$, $x > \delta_M$.

5.1.2 Teorema de caracterizare cu şiruri

Teorema următoare, denumită şi *teorema de caracterizare cu şiruri a limitei unei funcţii într-un punct* sau *teorema de caracterizare Heine a limitei unei funcţii într-un punct*, permite transferul unor proprietăţi şi reguli de calcul ale limitelor de şiruri la limite de funcţii.

Teorema 5.3. *Fie* $f : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *şi* $x_0 \in D'$. *Atunci* f *are limita* l *în* x_0 *(finită sau infinită) dacă şi numai dacă pentru orice şir* $(a_n)_{n \geq 0}$ *cu limita* x_0 *astfel încât* $a_n \in D$, $a_n \neq x_0$ *pentru orice* $n \geq 0$, *urmează că şirul valorilor* $(f(a_n))_{n \geq 0}$ *are limita* l.

Demonstraţie. „$\Rightarrow$" Dacă $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = l$, fie $(a_n)_{n \geq 0}$ un şir cu limita x_0 astfel încât $a_n \in D$, $a_n \neq x_0$ pentru orice $n \geq 0$. Fie deasemenea $V \in \mathcal{V}(l)$ o vecinătate arbitrară a lui l.

Deoarece $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = l$, există o vecinătate $U \in \mathcal{V}(x_0)$ astfel încât pentru orice $x \in U \cap D$, $x \neq x_0$, urmează că $f(x) \in V$. Cum $\lim\limits_{n \to \infty} a_n = x_0$, există un rang $n_U \in \mathbb{N}$ astfel ca $a_n \in U$ pentru orice $n \geq n_U$, iar deoarece şi $a_n \neq x_0$ pentru orice $n \geq 0$, urmează că $f(a_n) \in V$ pentru orice $n \geq n_U$. Cum vecinătatea $V \in \mathcal{V}(l)$ era arbitrară, urmează că şirul valorilor $(f(a_n))_{n \geq 0}$ are limita l.

„$\Leftarrow$" Dacă pentru orice şir $(a_n)_{n \geq 0}$ cu limita x_0 astfel încât $a_n \in D$, $a_n \neq x_0$ pentru orice $n \geq 0$, şirul valorilor $(f(a_n))_{n \geq 0}$ are limita l, să presupunem prin reducere la absurd că l nu este limita funcţiei f în x_0. Rezultă atunci că există $V \in \mathcal{V}(l)$ astfel ca pentru orice $U \in V(x_0)$ există $x \in U \cap D$, $x \neq x_0$, astfel ca $f(x) \notin V$.

Fie acum un şir de vecinătăţi $(U_n)_{n\geq 0}$ ale lui x_0, $U_n = (x_0 - \frac{1}{n+1}, x_0 + \frac{1}{n+1})$. Cum $U_n \in \mathcal{V}(x_0)$ pentru orice $n \geq 0$, conform celor de mai sus, există $a_n \in U_n \cap D$, $a_n \neq x_0$, astfel ca $f(a_n) \notin V$ pentru orice $n \geq 0$. Deoarece $a_n \in U_n$, urmează că $|a_n - x_0| < \frac{1}{n+1}$ pentru orice $n \geq 0$, deci $(a_n)_{n\geq 0}$ are limita x_0. Conform ipotezei, şirul valorilor $(f(a_n))_{n\geq 0}$ are limita l, deci vecinătatea V a lui l conţine toţi termenii şirului $(f(a_n))_{n\geq 0}$, cu excepţia cel mult a unui număr finit, contradicţie cu faptul că $f(a_n) \notin V$ pentru orice $n \geq 0$. ■

Condiţii suficiente ca o funcţie să nu aibă limită într-un punct

Conform teoremei de mai sus, se observă că dacă este îndeplinită una dintre condiţiile următoare, atunci funcţia $f : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ nu are limită în $x_0 \in D'$.

1. Există două şiruri $(a_n)_{n\geq 0}$, $(b_n)_{n\geq 0}$ cu limita x_0 astfel ca $a_n, b_n \in D$, $a_n, b_n \neq x_0$ pentru orice $n \geq 0$, iar şirurile de valori $(f(a_n))_{n\geq 0}$, $(f(b_n))_{n\geq 0}$ au limite diferite l_1 şi l_2.

2. Există un şir $(a_n)_n \geq 0$ cu limita x_0 astfel ca $a_n \in D$, $a_n \neq x_0$ pentru orice $n \geq 0$, iar şirul valorilor $(f(a_n))_{n\geq 0}$ nu are limită.

Exemplu

Funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sin x$ nu are limită la $+\infty$. În acest sens, să observăm că pentru şirul $(a_n)_{n\geq 0}$, $a_n = 2n\pi$, cu limita $+\infty$, şirul valorilor $(f(a_n))_{n\geq 0}$ are limita 0, fiind constant nul, în timp ce pentru şirul $(b_n)_{n\geq 0}$, $b_n = \frac{\pi}{2} + 2n\pi$, de asemenea cu limita $+\infty$, şirul valorilor $(f(b_n))_{n\geq 0}$ are limita 1, fiind constant egal cu 1.

De fapt, cu un raţionament asemănător se poate observa că are loc următoarea proprietate mai generală.

Teorema 5.4. *Fie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ periodică şi neconstantă. Atunci f nu are limită la $+\infty$ sau $-\infty$.*

În particular, teorema de mai sus atestă faptul că funcţiile trigonometrice directe uzuale nu au limită la $\pm\infty$.

5.1.3 Limite laterale

În situaţia în care argumentul x se apropie de punctul x_0 dat doar prin valori mai mici, respectiv mai mari decât x_0, se obţine conceptul de limită laterală.

Pentru o funcţie $f : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ şi pentru $x_0 \in (D \cap (-\infty, x_0))'$ (adică pentru x_0 punct de acumulare la stânga al mulţimii D), vom spune că funcţia f *are limita la stânga* $l_s \in \overline{\mathbb{R}}$ în x_0 dacă pentru orice vecinătate $V \in \mathcal{V}(l_s)$ există o vecinătate $U \in \mathcal{V}(x_0)$ astfel încât pentru orice $x \in U \cap D$, $x < x_0$, urmează că $f(x) \in V$. În acest caz, vom nota

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ x < x_0}} f(x) = l_s, \text{ sau } \lim_{x \nearrow x_0} f(x) = l_s, \text{ sau } f(x_0 - 0) = l_s.$$

Similar, vom spune că funcţia f *are limita la dreapta* $l_d \in \overline{\mathbb{R}}$ în $x_0 \in (D \cap (x_0, +\infty))'$ (adică pentru x_0 punct de acumulare la dreapta al mulţimii D) dacă pentru orice vecinătate $V \in \mathcal{V}(l_d)$ există o vecinătate $U \in \mathcal{V}(x_0)$ astfel încât pentru orice $x \in U \cap D$, $x > x_0$, urmează că $f(x) \in V$. În acest caz, vom nota

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ x > x_0}} f(x) = l_d, \text{ sau } \lim_{x \searrow x_0} f(x) = l_d, \text{ sau } f(x_0 + 0) = l_d.$$

Limitele la stânga şi la dreapta ale unei funcţii într-un punct x_0 se mai numesc şi *limite laterale* în x_0.

Caracterizarea cu şiruri a limitelor laterale într-un punct

În mod analog teoremei de caracterizare cu şiruri a limitei unei funcţii într-un punct se poate demonstra următorul rezultat.

Teorema 5.5. *Fie $f : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Au loc următoarele afirmaţii.*

1. *Funcţia f are limita la stânga $l_s \in \overline{\mathbb{R}}$ în $x_0 \in (D \cap (-\infty, x_0))'$ dacă şi numai dacă pentru orice şir $(a_n)_{n \geq 0}$ cu limita x_0 astfel încât $a_n \in D$, $a_n < x_0$ pentru orice $n \geq 0$, urmează că şirul valorilor $(f(a_n))_{n \geq 0}$ are limita l_s.*

2. *Funcţia f are limita la dreapta $l_d \in \overline{\mathbb{R}}$ în $x_0 \in (D \cap (x_0, +\infty))'$ dacă şi numai dacă pentru orice şir $(a_n)_{n \geq 0}$ cu limita x_0 astfel încât $a_n \in D$, $a_n > x_0$ pentru orice $n \geq 0$, urmează că şirul valorilor $(f(a_n))_{n \geq 0}$ are limita l_d.*

Se poate observa că existenţa uneia dintre limitele laterale într-un punct nu antrenează automat şi existenţa celeilalte. În anumite situaţii, se poate întâmpla ca una dintre limitele laterale să existe, în timp ce problema existenţei celelalte nici măcar să nu aibă sens.

Exemplu 1. Fie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} x, & x \leq 0 \\ \sin \frac{1}{x}, & x > 0 \end{cases}$. Se observă că, pentru $x_0 = 0$, $l_s = \lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x<0}} x = 0$. Totuşi, l_d nu există, deoarece pentru $(a_n)_{n \geq 0}$, $a_n = \frac{1}{2n\pi}$, $a_n \to 0$ pentru $n \to \infty$, $a_n > 0$ pentru $n \geq 0$, $f(a_n) = \sin 2n\pi = 0$, deci $f(a_n) \to 0$ pentru $n \to \infty$, în vreme ce pentru $(b_n)_{n \geq 0}$, $b_n = \frac{1}{\frac{\pi}{2} + 2n\pi}$, $b_n \to 0$ pentru $n \to \infty$, $b_n > 0$ pentru $n \geq 0$, $f(b_n) = \sin(\frac{\pi}{2} + 2n\pi) = 1$, deci $f(b_n) \to 1$ pentru $n \to \infty$.

2. Fie $f : [0, 2] \to \mathbb{R}$, $f(x) = x$. Se observă că pentru $x_0 = 0$, $l_d = \lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x>0}} x = 0$, în vreme ce problema existenţei lui l_s nu are sens, deoarece 0 nu este punct de acumulare la stânga al lui $[0, 2]$.

Caracterizarea limitei unei funcţii într-un punct cu ajutorul limitelor laterale

Se poate observa că definiţia limitei într-un punct conţine condiţii mai restrictive decât definiţiile limitelor laterale, fiind necesar ca $f(x) \in V$ pentru orice $x \in U \cap D$, $x \neq x_0$, nu doar pentru $x \in U \cap D$, $x < x_0$ (respectiv $x > x_0$). Urmează că dacă x_0 este simultan punct de acumulare la stânga şi la dreapta al unei mulţimi D, iar funcţia $f : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ are limita l în x_0, atunci are în mod necesar şi limite laterale în x_0 şi acestea sunt egale tot cu l. Reciproca nu este neapărat adevărată, în sensul că o funcţie poate avea limite laterale într-un punct fără să aibă neapărat limită în acel punct.

Totuşi, se poate demonstra că dacă limitele laterale într-un punct sunt egale, atunci funcţia are limită în acel punct, fapt descris de următoarea teoremă.

Teorema 5.6. *Fie $f : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ şi fie $x_0 \in (D \cap (-\infty, x_0))' \cap (D \cap (x_0, +\infty))'$ (adică x_0 este simultan punct de acumulare la stânga şi la dreapta al mulţimii D). Atunci f are limită în x_0 dacă şi numai dacă f are limite laterale în x_0 şi*

$$l_s = \lim_{\substack{x \to x_0 \\ x<x_0}} f(x) = \lim_{\substack{x \to x_0 \\ x>x_0}} f(x) = l_d.$$

În acest caz, $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ este egală cu valoarea comună a limitelor.

Demonstraţie. „$\Rightarrow$" A fost observat deja că dacă f are limita l în x_0, atunci f are limite laterale în x_0, egale tot cu l.

„$\Leftarrow$" Fie $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ x < x_0}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ x > x_0}} f(x) = l$ şi fie $V \in \mathcal{V}(l)$ o vecinătate arbitrară a lui l. Conform definiţiilor limitelor laterale, există $U_1, U_2 \in \mathcal{V}(x_0)$ astfel că $f(x) \in V$ pentru orice $x \in U_1 \cap D$, $x < x_0$, respectiv pentru orice $x \in U_2 \cap D$, $x > x_0$. Notând $U = U_1 \cap U_2$, urmează că $f(x) \in V$ pentru $x \in U \cap D$, $x \neq x_0$. Cum $U \in \mathcal{V}(x_0)$, iar V era arbitrară, urmează că $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = l$. ■

Exerciţiu

Fie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} ax + 1, & x \leq 2 \\ x + 3, & x > 2 \end{cases}$. Determinaţi $a \in \mathbb{R}$ astfel ca f să aibă limită în $x_0 = 2$.

Soluţie

Cum

$$l_s = \lim_{\substack{x \to 2 \\ x < 2}} f(x) = \lim_{\substack{x \to 2 \\ x < 2}} (ax + 1) = 2a + 1; \qquad l_d = \lim_{\substack{x \to 2 \\ x > 2}} f(x) = \lim_{\substack{x \to 2 \\ x > 2}} (x + 3) = 5,$$

pentru existenţa limitei funcţiei f în $x_0 = 2$ este necesar şi suficient ca $2a + 1 = 5$, deci $a = 2$. ■

5.1.4 Criterii de existenţă a limitei unei funcţii într-un punct

Criteriu de existenţă a unei limite finite

Ca şi în cazul limitelor de şiruri, pentru a arăta că limita unei funcţii $f : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ în $x_0 \in D'$ este $l \in \mathbb{R}$, poate fi studiată diferenţa dintre valorile $f(x)$ ale funcţiei pentru x apropiat de x_0 şi limita l. În situaţia în care modulul acestei diferenţe este „mic", în sensul că poate fi majorat cu o funcţie cu limita 0 în x_0, atunci funcţia f are limita l în x_0, fapt observat în următorul rezultat, numit şi *criteriul majorării*.

Teorema 5.7. *Fie $f : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x_0 \in D'$ şi $l \in \mathbb{R}$. Dacă există o funcţie $\alpha : D \to [0, \infty)$ şi o vecinătate $V \in \mathcal{V}(x_0)$ astfel ca*

$$|f(x) - l| \leq \alpha(x) \quad \text{pentru orice } x \in V \cap D, x \neq x_0,$$

iar $\lim\limits_{x \to x_0} \alpha(x) = 0$, atunci $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = l$.

Demonstraţie. Fie $\varepsilon > 0$ arbitrar. Cum $\lim\limits_{x \to x_0} \alpha(x) = 0$, urmează că există $\delta_\varepsilon > 0$ astfel ca $|\alpha(x) - 0| < \varepsilon$ pentru orice $x \in D$ cu proprietatea că $|x - x_0| < \delta_\varepsilon$, $x \neq x_0$.

Deoarece $V \in \mathcal{V}(x_0)$, există $\delta_1 > 0$ astfel ca $x_0 \in (x_0 - \delta_1, x_0 + \delta_1) \subset V$. De aici, există $\delta_\varepsilon^1 > 0$, $\delta_\varepsilon^1 = \min(\delta_\varepsilon, \delta_1)$ astfel ca $|f(x) - l| \leq \alpha(x) < \varepsilon$ pentru orice $x \in D$, $|x - x_0| < \delta_\varepsilon^1$, $x \neq x_0$. Cum $\varepsilon > 0$ era arbitrar, urmează că $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = l$. ■

Exerciţiu

Fie funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} x \sin \dfrac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 1, & x = 0 \end{cases}$. Demonstraţi că $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = 0$.

Soluţie

Cum $|f(x) - l| = |x \sin \frac{1}{x} - 0| \leq |x|$ pentru orice $x \neq 0$, iar $\lim\limits_{x \to 0} |x| = 0$, urmează conform celor de mai sus că $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = 0$. ■

Criteriu de existenţă a unei limite infinite

De asemenea, pentru a arăta că o funcţie $f : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ are limita $+\infty$ în $x_0 \in D'$, este suficient să se demonstreze că valorile lui f sunt minorate pe o vecinătate a lui x_0 de valorile unei funcţii g, cu o expresie posibil mai simplă, iar $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = +\infty$. Similar, pentru a arăta că o funcţie $f : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ are limita $-\infty$ în $x_0 \in D'$ este suficient să se demonstreze că valorile lui f sunt majorate pe o vecinătate a lui x_0 de valorile unei funcţii g, iar $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = -\infty$.

Teorema 5.8. *Fie $f : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ şi fie $x_0 \in D'$.*

1. *Dacă există $g : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ cu proprietatea că există o vecinătate $V \in \mathcal{V}(x_0)$ astfel ca $f(x) \geq g(x)$ pentru orice $x \in V \cap D$, $x \neq x_0$, iar $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = +\infty$, atunci $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = +\infty$.*

2. *Dacă există $g : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ cu proprietatea că există o vecinătate $V \in \mathcal{V}(x_0)$ astfel ca $f(x) \leq g(x)$ pentru orice $x \in V \cap D$, $x \neq x_0$, iar $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = -\infty$, atunci $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = -\infty$.*

Demonstraţie. 1. Fie g, V cu proprietatea din enunţ şi fie $(a_n)_{n \geq 0}$ cu proprietatea că $\lim\limits_{n \to \infty} a_n = x_0$, $a_n \in D$, $a_n \neq x_0$ pentru $n \geq 0$. Deoarece $\lim\limits_{n \to \infty} a_n = x_0$, există $n_V \in \mathbb{N}$ astfel ca $a_n \in V$ pentru orice $n \geq n_V$, deci $f(a_n) \geq g(a_n)$ pentru orice $n \geq$

n_V. Cum $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = +\infty$, urmează că $\lim\limits_{n \to \infty} g(a_n) = +\infty$, deci, conform criteriului majorării pentru şiruri, $\lim\limits_{n \to \infty} f(a_n) = +\infty$. Folosind teorema de caracterizare cu şiruri a limitei unei funcţii într-un punct, urmează că $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = +\infty$.

Demonstraţia celei de-a doua proprietăţi este asemănătoare. ∎

Exerciţiu
Demonstraţi că $\lim\limits_{x \to \infty} (-x + \sin x) = -\infty$.

Soluţie

Cum $-x + \sin x \leq -x + 1$ pentru orice $x \in \mathbb{R}$, iar $\lim\limits_{x \to \infty} (-x + 1) = -\infty$, urmează conform celor de mai sus că $\lim\limits_{x \to \infty} (-x + \sin x) = -\infty$. ∎

A se nota că, în exemplul de mai sus, $\lim\limits_{x \to \infty} (-x + \sin x)$ există, deşi funcţia sinus, ca funcţie de sine stătătoare, nu are limită la $+\infty$.

Criteriul Cauchy-Bolzano

În cazul şirurilor de numere reale, se putea demonstra că un şir $(x_n)_{n \geq 0}$ este convergent fără a-i cunoaşte limita, arătând că acesta este şir Cauchy. În cazul funcţiilor, se poate obţine un criteriu analog de existenţă a unei limite finite într-un punct, numit *criteriul Cauchy-Bolzano*.

Teorema 5.9. *Fie $f : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ şi $x_0 \in D'$. Atunci f are limită finită în x_0 dacă şi numai dacă pentru orice $\varepsilon > 0$ există $\delta_\varepsilon > 0$ astfel ca $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$ pentru orice $x, y \in D$, $x, y \neq x_0$, astfel ca $|x - x_0| < \delta_\varepsilon$, $|y - x_0| < \delta_\varepsilon$.*

Demonstraţie. „$\Rightarrow$" Fie $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = l \in \mathbb{R}$ şi fie $\varepsilon > 0$ arbitrar. Conform caracterizării cu $\varepsilon - \delta$ a limitei unei funcţii într-un punct, există $\delta_\varepsilon > 0$ astfel ca $|f(x) - f(x_0)| < \frac{\varepsilon}{2}$ pentru orice $x \in D$, $|x - x_0| < \delta_\varepsilon$, $x \neq x_0$. Atunci

$$|f(x) - f(y)| \leq |f(x) - f(x_0)| + |f(x_0) - f(y)| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

pentru orice $x, y \in D$, $x, y \neq x_0$, astfel ca $|x - x_0| < \delta_\varepsilon$, $|y - x_0| < \delta_\varepsilon$.

„$\Leftarrow$" Fie un şir $(a_n)_{n \geq 0}$, $a_n \in D$, $a_n \neq x_0$ pentru $n \geq 0$ cu proprietatea că $\lim\limits_{n \to \infty} a_n = x_0$. Fie $\varepsilon > 0$ arbitrar. Există atunci $\delta_\varepsilon > 0$ astfel ca $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$ pentru orice $x, y \in D$, $x, y \neq x_0$, astfel ca $|x - x_0| < \delta_\varepsilon$, $|y - x_0| < \delta_\varepsilon$. Cum $\lim\limits_{n \to \infty} a_n = x_0$, există un rang $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ astfel că $|a_n - x_0| < \delta_\varepsilon$ pentru orice $n \geq n_\varepsilon$. Atunci $|f(a_n) - f(a_m)| < \varepsilon$ pentru orice $m, n \geq n_\varepsilon$, deci şirul $(f(a_n))_{n \geq 0}$ este şir Cauchy. Fiind şir Cauchy, $(f(a_n))_{n \geq 0}$ este convergent; fie $l \in \mathbb{R}$ limita sa.

Demonstrăm acum că limita l nu depinde de şirul $(a_n)_{n\geq 0}$ ales. În acest sens, fie un alt şir $(b_n)_{n\geq 0}$, $b_n \in D$, $b_n \neq x_0$ pentru $n \geq 0$, cu proprietatea că $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = x_0$. Atunci, ca mai sus, $(f(b_n))_{n\geq 0}$ este convergent; fie $l_1 \in \mathbb{R}$ limita sa. Construim cu ajutorul şirurilor $(a_n)_{n\geq 0}$ şi $(b_n)_{n\geq 0}$ şirul $(c_n)_{n\geq 0}$, obţinut prin intercalare,

$$c_0 = a_0,\ c_1 = b_0,\ c_2 = a_1,\ c_3 = b_1,\ \ldots,\ c_{2n} = a_n,\ c_{2n+1} = b_n,\ \ldots.$$

Ca mai sus, se obţine că $(f(c_n))_{n\geq 0}$ este convergent, iar cum subşirurile sale $(f(c_{2n}))_{n\geq 0} = (f(a_n))_{n\geq 0}$, $(f(c_{2n+1}))_{n\geq 0} = (f(b_n))_{n\geq 0}$ sunt convergente, cu limitele l, respectiv l_1, urmează că $l = l_1$, iar limita l nu depinde de şirul $(a_n)_{n\geq 0}$ ales. Conform criteriului de caracterizare cu şiruri, urmează atunci că $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = l$. ■

5.1.5 Proprietăţi ale funcţiilor cu limită

În situaţia în care o funcţie are limită finită într-un punct x_0, valorile sale $f(x)$ sunt apropiate de valoarea (finită) a limitei pentru valori x ale argumentului suficient de apropiate de x_0, neputând deveni arbitrar de mari, respectiv arbitrar de mici, pentru aceste valori ale argumentului. Acest lucru este exprimat în următoarea teoremă.

Mărginirea funcţiilor cu limită

Teorema 5.10. *Fie $f : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ şi $x_0 \in D'$ astfel încât f are limită finită în x_0. Atunci există o vecinătate a lui x_0 pe care f este mărginită.*

Demonstraţie. Fie $V = (l-1, l+1)$ o vecinătate a lui l. Conform definiţiei limitei, există o vecinătate $U \in \mathcal{V}(x_0)$ astfel ca $f(x) \in V$ pentru orice $x \in U \cap D$, $x \neq x_0$. Atunci $|f(x)| < |l| + 1$ pentru orice $x \in U \cap D$, $x \neq x_0$, deci f este mărginită pe U. ■

Trecerea la limită în inegalităţi

Teorema ce urmează, numită şi *teorema de trecere la limită în inegalităţi* exprimă faptul că inegalităţile (nestricte) dintre două funcţii se păstrează prin trecere la limită.

Teorema 5.11. *Fie două funcţii $f, g : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ şi $x_0 \in D'$ cu proprietăţile*

1. *Există o vecinătate* $V \in \mathcal{V}(x_0)$ *astfel ca* $f(x) \leq g(x)$ *pentru* $x \in V \cap D$, $x \neq x_0$.

2. $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = l_1 \in \overline{\mathbb{R}}$, $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = l_2 \in \overline{\mathbb{R}}$.

Atunci $l_1 \leq l_2$.

Demonstraţie. Presupunem prin reducere la absurd că $l_1 > l_2$. Conform proprietăţii de separaţie Hausdorff, l_1 şi l_2 pot fi separate prin vecinătăţi, adică există $V_{l_1} \in \mathcal{V}(l_1)$ şi $V_{l_2} \in \mathcal{V}(l_2)$ astfel ca $V_{l_1} \cap V_{l_2} = \emptyset$ (şi deci $z_1 > z_2$ pentru orice $z_1 \in V_{l_1}$ şi $z_2 \in V_{l_2}$).

Conform definiţiei limitei, există două vecinătăţi U_1, $U_2 \in \mathcal{V}(x_0)$ astfel ca $f(x) \in V_{l_1}$ pentru $x \in U_1 \cap D$, $x \neq x_0$ şi $g(x) \in V_{l_2}$ pentru $x \in U_2 \cap D$, $x \neq x_0$, ambele relaţii fiind satisfăcute pentru $x \in U \cap D$, $x \neq x_0$, unde $U = U_1 \cap U_2 \in \mathcal{V}(x_0)$. Rezultă de aici că $f(x) > g(x)$ pentru orice $x \in U \cap D$. Cum $U, V \in \mathcal{V}(x_0)$, urmează că $f(x) > g(x)$ pentru orice $x \in U \cap V \cap D$, contradicţie. ■

Inegalităţile nestricte dintre termenii a două funcţii nu se păstrează neapărat prin trecere la limită. Aceasta se poate observa considerând funcţiile $f : (0, \infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{x}$ şi $g : (0, \infty) \to \mathbb{R}$, $g(x) = \frac{2}{x}$ pentru care $f(x) < g(x)$ pentru orice $x > 0$, dar $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = \lim\limits_{x \to \infty} g(x) = 0$, inegalitatea strictă dintre valorile lui f şi g transformându-se în egalitate.

Teorema cleştelui

Teorema de mai jos, numită şi *teorema cleştelui* (pentru funcţii), ne permite să calculăm limita într-un punct a unei funcţii care, pe o vecinătate a acelui punct, poate fi încadrată între alte două funcţii având aceeaşi limită.

Teorema 5.12. *Fie trei funcţii* $a, f, b : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *şi* $x_0 \in D'$ *cu proprietăţile*

1. *Există o vecinătate* $V \in \mathcal{V}(x_0)$ *astfel ca*

$$a(x) \leq f(x) \leq b(x) \quad \textit{pentru } x \in V \cap D, x \neq x_0.$$

2. $\lim\limits_{x \to x_0} a(x) = \lim\limits_{x \to x_0} b(x) = l \in \overline{\mathbb{R}}$.

Atunci există $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$, *iar* $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = l$.

Demonstraţie. Dacă $l = +\infty$, atunci $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = +\infty$, folosind faptul că $a(x) \leq f(x)$ pentru orice $x \in V \cap D$, $x \neq x_0$, $\lim\limits_{x\to x_0} a(x) = +\infty$ şi Teorema 5.8. În situaţia în care $l = -\infty$ se raţionează analog.

Fie acum $l \in \mathbb{R}$. Există atunci două vecinătăţi $U_1, U_2 \in \mathcal{V}(x_0)$ astfel ca $|a(x) - l| < \varepsilon$ pentru orice $x \in U_1 \cap D$, $x \neq x_0$, respectiv $|b(x) - l| < \varepsilon$ pentru orice $x \in U_2 \cap D$, $x \neq x_0$. Urmează atunci că

$$-\varepsilon < a(x) - l \leq f(x) - l \leq b(x) - l < \varepsilon \quad \text{pentru } x \in U_1 \cap U_2 \cap V \cap D,$$

de unde $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = l$. ■

Limita funcţiei compuse

Următoarea teoremă de calcul a *limitei funcţiei compuse* stă la baza calculului limitelor cu ajutorul schimbărilor de variabilă.

Teorema 5.13. *Fie $u : D \subset \mathbb{R} \to E$, $f : E \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ şi $x_0 \in D'$ astfel încât $\lim\limits_{x\to x_0} u(x) = u_0$ şi $u(x) \neq u_0$ pentru $x \in V \cap D$, $x \neq x_0$, unde $V \in \mathcal{V}(x_0)$ este o vecinătate a lui x_0, iar $\lim\limits_{y\to u_0} f(y) = l$. Atunci funcţia compusă $f \circ u : D \to \mathbb{R}$ are limită în x_0, iar*

$$\lim_{x\to x_0} (f(u(x)) = \lim_{y\to u_0} f(y) = l.$$

Demonstraţie. Fie $(a_n)_{n\geq 0}$ un şir astfel ca $a_n \in D$, $a_n \neq x_0$ pentru orice $n \geq 0$, iar $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = x_0$. Deoarece $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = x_0$, există un rang $n_V \in \mathbb{N}$ astfel ca $x_n \in V$ pentru orice $n \geq n_V$ şi atunci $u(a_n) \neq u_0$ pentru orice $n \geq n_V$. Cum $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = x_0$, iar $\lim\limits_{x\to x_0} u(x) = u_0$, urmează că $\lim\limits_{n\to\infty} u(a_n) = u_0$, şi atunci $\lim\limits_{n\to\infty} (f \circ u)(a_n) = \lim\limits_{n\to\infty} f(u(a_n)) = l$, deoarece $\lim\limits_{y\to u_0} f(y) = l$. Urmează atunci că $\lim\limits_{x\to x_0} (f \circ u)(x) = l$. ■

Corolar 5.13.1. *Dacă $u : D \subset \mathbb{R} \to E$, $f : E \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ şi $x_0 \in D'$ astfel încât $\lim\limits_{x\to x_0} u(x) = u_0$, iar $\lim\limits_{y\to u_0} f(y) = f(u_0)$, atunci*

$$\lim_{x\to x_0} (f(u(x)) = f(\lim_{x\to x_0} u(x)).$$

Corolar 5.13.2. *Dacă $u : D \subset \mathbb{R} \to E$, $f : E \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ şi $x_0 \in D'$ astfel încât $\lim\limits_{x\to x_0} u(x) = u(x_0)$, iar $\lim\limits_{y\to u_0} f(y) = f(u_0)$ şi $\lim\limits_{x\to x_0} u(x) = u_0$, atunci*

$$\lim_{x\to x_0} (f(u(x)) = f(u(x_0)).$$

Limitele funcţiilor monotone

Pentru cazul şirurilor, s-a demonstrat că orice şir monoton are limită, finită sau nu. Acest lucru va rămâne adevărat şi în cazul funcţiilor monotone, cu precizarea că de această dată este asigurată doar existenţa limitelor laterale. În acest sens, teorema următoare precizează faptul că funcţiile monotone au limite laterale în orice punct de acumulare al domeniului lor de definiţie.

Teorema 5.14. *Fie $f : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, f monotonă, şi $x_0 \in D'$. Atunci există limitele laterale $l_s = \lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ x < x_0}} f(x)$ şi $l_d = \lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ x > x_0}} f(x)$, finite sau nu.*

Demonstraţie. Pentru fixarea ideilor, să presupunem că f este crescătoare, în cazul în care f este descrescătoare raţionându-se analog.

Demonstrăm mai întâi că dacă $(a_n)_{n \geq 0}$ este un şir monoton crescător astfel ca $a_n \in D$, $a_n \neq x_0$ pentru orice $n \geq 0$, iar $\lim\limits_{n \to \infty} a_n = x_0$, atunci $(f(a_n))_{n \geq 0}$ are limită, independentă de alegerea şirului $(a_n)_{n \geq 0}$ cu aceste proprietăţi. În acest sens, să observăm mai întâi că, deoarece f este crescătoare iar $(a_n)_{n \geq 0}$ este monoton crescător, şirul $(f(a_n))_{n \geq 0}$ este de asemenea monoton crescător, deci are o limită l, finită sau nu. Fie acum $(b_n)_{n \geq 0}$ un alt şir monoton crescător astfel ca $b_n \in D$, $b_n \neq x_0$ pentru orice $n \geq 0$, iar $\lim\limits_{n \to \infty} b_n = x_0$. Se observă în mod analog că şirul $(f(b_n))_{n \geq 0}$ este monoton crescător, deci are o limită l_1, finită sau nu.

Fie acum şirul intercalat $(c_k)_{k \geq 0}$ definit prin $c_0 = a_0$, $c_{2k+1} = b_n$, unde n este primul indice pentru care $b_n > c_{2k}$, $c_{2k+2} = a_n$, unde n este primul indice pentru care $a_n > c_{2k+1}$. Datorită modului de construcţie, $(c_k)_{k \geq 0}$ este monoton crescător cu limita x_0, deci $(f(c_k))_{k \geq 0}$ este de asemenea monoton crescător, cu limita l_2. Cum $(f(c_{2k}))_{k \geq 0}$ şi $(f(c_{2k+1}))_{k \geq 0}$ sunt subşiruri ale şirurilor $(f(a_n))_{n \geq 0}$ şi respectiv $(f(b_n))_{n \geq 0}$, ele au limitele l, respectiv l_1, iar deoarece $(f(c_k))_{k \geq 0}$ are limita l_2, urmează că $l = l_1 = l_2$, deci limita şirului $(f(a_n))_{n \geq 0}$ nu depinde de alegerea şirului $(a_n)_{n \geq 0}$ cu proprietăţile cerute.

Fie acum $(y_n)_{n \geq 0}$ un şir oarecare, nu neapărat monoton, astfel ca $y_n \in D$, $y_n < x_0$ pentru orice $n \geq 0$, iar $\lim\limits_{n \to \infty} y_n = x_0$. Fie deasemenea şirurile $(u_n)_{n \geq 0}$ şi $(v_n)_{n \geq 0}$ definite prin

$$u_n = \inf\{y_n, y_{n+1}, \ldots\}; \quad v_n = \max\{y_0, y_1, \ldots, y_n\}.$$

Se observă atunci că $u_n \leq y_n \leq v_n$ pentru $n \geq 0$, iar şirurile $(u_n)_{n \geq 0}$ şi $(v_n)_{n \geq 0}$ sunt monoton crescătoare, cu limita x_0. Atunci şirurile $(f(u_n))_{n \geq 0}$ şi $(f(v_n))_{n \geq 0}$

sunt deasemenea monoton crescătoare, cu limita l, iar cum

$$f(u_n) \leq f(y_n) \leq f(v_n) \quad \text{pentru } n \geq 0,$$

urmează conform criteriului cleştelui pentru şiruri că $(f(y_n))_{n\geq 0}$ are deasemenea limita l.

Din cele de mai sus, urmează că exista limita la stânga $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ x<x_0}} f(x)$, finită sau infinită, existenţa limitei la dreapta $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ x>x_0}} f(x)$ obţinându-se analog. ■

Cum limita intr-un punct a unei funcţii este influenţată doar de valorile funcţiei pentru argumente dintr-o vecinătate a acelui punct, se poate observa că în teorema de mai sus este de fapt suficient ca funcţia să fie monotonă doar pe o vecinătate a acelui punct.

Produsul dintre o funcţie cu limita 0 şi o funcţie mărginită

Teorema 5.15. *Fie $f, g : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ şi $x_0 \in D'$. Dacă f este mărginită pe o vecinătate $V \in \mathcal{V}(x_0)$, iar $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = 0$, atunci $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)g(x) = 0$.*

Demonstraţie. Deoarece f este mărginită pe V, există $M \in \mathbb{R}$ astfel ca $|f(x)| \leq M$ pentru $x \in V \cap D$. Fie $(a_n)_{n\geq 0}$ un şir astfel ca $a_n \in D$, $a_n \neq x_0$ pentru orice $n \geq 0$, iar $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = x_0$. Cum $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = x_0$, urmează că există un rang $n_V \in \mathbb{N}$ astfel ca $a_n \in V$ pentru orice $n \geq n_V$, deci $|f(a_n)| \leq M$ pentru orice $n \geq n_V$. Atunci $|f(a_n)g(a_n)| = |f(a_n)||g(a_n)| \leq M|g(a_n)$, pentru orice $n \geq n_V$, deci

$$-M|g(a_n)| \leq f(a_n)g(a_n) \leq M|g(a_n)| \quad \text{pentru orice } n \geq n_V.$$

Cum $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = 0$, urmează că $\lim\limits_{n\to\infty} g(a_n) = 0$, şi atunci $\lim\limits_{n\to\infty} |g(a_n)| = 0$ de unde, conform criteriului cleştelui, $\lim\limits_{n\to\infty} f(a_n)g(a_n) = 0$. Cum $(a_n)_{n\geq 0}$ era arbitrar, urmează că $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)g(x) = 0$. ■

În teorema de mai sus, trebuie remarcat faptul că nu este necesar ca f să aibă limită în x_0.

Exerciţiu

Determinaţi $\lim\limits_{x\to 0} \left(x \sin^2 \frac{1}{x}\right)$.

Soluţie

Deoarece $f : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sin^2 \frac{1}{x}$, este mărginită pe o vecinătate a lui $x_0 = 0$ (de fapt, f este mărginită pe întreg domeniul de definiţie, deoarece $|f(x)| \leq 1$ pentru orice $x \in \mathbb{R}^*$), iar $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g(x) = x$ are limita 0 în $x_0 = 0$, urmează că $\lim\limits_{x \to 0} \left(x \sin^2 \frac{1}{x} \right) = 0$, conform celor de mai sus. ■

5.2 Proprietăţi de calcul ale limitelor de funcţii

5.2.1 Operaţii cu limite de funcţii

Cu ajutorul teoremei de caracterizare cu şiruri a limitelor de funcţii, se pot deduce următoarele proprietăţi ale operaţiilor cu limite de funcţii cu ajutorul proprietăţilor corespunzătoare ale operaţiilor cu limite de şiruri.

Teorema 5.16. *Fie $f, g : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ şi $x_0 \in D'$ astfel încât există $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = l_1$ şi $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = l_2$.*

1. *Dacă suma $l_1 + l_2$ a limitelor are sens, atunci funcţia sumă $f + g$ are limită în x_0 şi*
$$\lim_{x \to x_0} (f(x) + g(x)) = \big(\lim_{x \to x_0} f(x)\big) + \big(\lim_{x \to x_0} g(x)\big)$$
(caz exceptat: una dintre limitele l_1, l_2 este $+\infty$ iar cealaltă $-\infty$).

2. *Dacă produsul $l_1 l_2$ al limitelor are sens, atunci funcţia produs fg are limită în x_0 şi*
$$\lim_{x \to x_0} (f(x)g(x)) = \big(\lim_{x \to x_0} f(x)\big) \cdot \big(\lim_{x \to x_0} g(x)\big)$$
(caz exceptat: una dintre limitele l_1, l_2 este 0 iar cealaltă este $+\infty$ sau $-\infty$).

3. *αf are limită în x_0 pentru orice $\alpha \in \mathbb{R}$, iar*
$$\lim_{x \to x_0} (\alpha f(x)) = \alpha\big(\lim_{x \to x_0} f(x)\big), \text{ pentru } \alpha \neq 0,$$
iar $\lim\limits_{x \to x_0} (\alpha f(x)) = 0$, pentru $\alpha = 0$.

4. *Dacă raportul* $\frac{l_1}{l_2}$ *al limitelor are sens, iar* $\frac{f}{g}$ *este bine definită pe o vecinătate a lui* x_0*, atunci* $\frac{f}{g}$ *are limită în* x_0 *şi*
$$\lim_{x\to x_0}\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)=\frac{\left(\lim\limits_{x\to x_0}f(x)\right)}{\left(\lim\limits_{x\to x_0}g(x)\right)}$$
(cazuri exceptate: l_2 *este* 0*, sau ambele limite* l_1*,* l_2 *sunt infinite).*

5. *Dacă* ${l_1}^{l_2}$ *are sens, iar* f^g *este bine definită pe o vecinătate a lui* x_0 *atunci* f^g *are limită în* x_0 *şi*
$$\lim_{x\to x_0}(f(x)^{g(x)})=\left(\lim_{x\to x_0}f(x)\right)^{\left(\lim\limits_{x\to x_0}g(x)\right)}$$
(cazuri exceptate: $(l_1,l_2)=(0,0)$*,* $(l_1,l_2)=(+\infty,0)$*,* $(l_1,l_2)=(1,+\infty)$*).*

Pentru studiul limitei raportului a două funcţii, se poate observa că are loc si următorul rezultat care completează (parţial) teorema de mai sus pentru cazul în care $l_2=0$.

Teorema 5.17. *Fie* $f,g:D\subset\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ *şi* $x_0\in D'$ *astfel încât există* $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=l_1\neq 0$ *şi* $\lim\limits_{x\to x_0}g(x)=0$.

1. *Dacă* $\frac{f}{g}$ *este bine definită pe o vecinătate* $V\in\mathcal{V}(x_0)$*, iar* $g(x)>0$ *pentru orice* $x\in V\cap D$*,* $x\neq x_0$*, atunci* $\frac{f}{g}$ *are limită în* x_0 *şi*
$$\lim_{x\to x_0}\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)=+\infty\cdot\operatorname{sgn}(l_1)$$

2. *Dacă* $\frac{f}{g}$ *este bine definită pe o vecinătate* $V\in\mathcal{V}(x_0)$*, iar* $g(x)<0$ *pentru orice* $x\in V\cap D$*,* $x\neq x_0$*, atunci* $\frac{f}{g}$ *are limită în* x_0 *şi*
$$\lim_{x\to x_0}\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)=-\infty\cdot\operatorname{sgn}(l_1)$$

Cazurile exceptate din teoremele de mai sus, numite, pe scurt, şi *cazuri de nedeterminare*, pot fi exprimate pe scurt sub forma $\boldsymbol{\infty}-\boldsymbol{\infty}$ (pentru sumă), $\mathbf{0}\cdot\boldsymbol{\infty}$ (pentru produs), $\frac{\pm\boldsymbol{\infty}}{\pm\boldsymbol{\infty}}$, $\frac{\mathbf{0}}{\mathbf{0}}$ (pentru raport), $\mathbf{0}^{\mathbf{0}}$, $\boldsymbol{\infty}^{\mathbf{0}}$, $\mathbf{1}^{\boldsymbol{\infty}}$ (pentru exponenţiere).

Se poate de asemenea demonstra prin inducţie matematică faptul că proprietăţile 1 şi 3 din Teorema 5.16 rămân valabile şi pentru mai mult de două funcţii. În speţă, are loc următorul rezultat.

Teorema 5.18. *Fie $f_1, f_2, \dots, f_n : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ şi $x_0 \in D'$ astfel încât există $\lim\limits_{x\to x_0} f_1(x) = l_1$, $\lim\limits_{x\to x_0} f_2(x) = l_2, \dots, \lim\limits_{x\to x_0} f_n(x) = l_n$.*

1. *Dacă suma $l_1 + l_2 + \dots + l_n$ a limitelor are sens, atunci funcţia sumă $f_1 + f_2 + \dots + f_n$ are limită în x_0 şi*

$$\lim_{x\to x_0} (f_1(x) + f_2(x) + \dots + f_n(x)) = \lim_{x\to x_0} f_1(x) + \lim_{x\to x_0} f_2(x) + \dots + \lim_{x\to x_0} f_n(x).$$

2. *Dacă produsul $l_1 l_2 \dots l_n$ al limitelor are sens, atunci funcţia produs $f_1 f_2 \dots f_n$ are limită în x_0 şi*

$$\lim_{x\to x_0} (f_1(x) f_2(x) \dots f_n(x)) = \big(\lim_{x\to x_0} f_1(x)\big) \cdot \big(\lim_{x\to x_0} f_2(x)\big) \cdot \dots \cdot \big(\lim_{x\to x_0} f_n(x)\big).$$

În particular,

$$\lim_{x\to x_0} (f_1(x)^n) = \big(\lim_{x\to x_0} f_1(x)\big)^n.$$

5.2.2 Limitele funcţiilor elementare

Limitele funcţiilor polinomiale

Fie P o funcţie polinomială de grad $k \geq 1$,

$$P : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, P(x) = a_k x^k + a_{k-1} x^{k-1} + \dots + a_1 x + a_0, \quad a_k \neq 0.$$

Pentru calculul limitei $\lim\limits_{x\to x_0} P(x)$, $x_0 \in \mathbb{R}$, se observă că, pentru orice $l \in \mathbb{N}$,

$$\lim_{x\to x_0} \left(a_l x^l\right) = a_l \big(\lim_{x\to x_0} x^l\big) = a_l \big(\lim_{x\to x_0} x\big)^l = a_l x_0^l.$$

Se obţine că

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to x_0} P(x) &= \lim_{x\to x_0} \left(a_k x^k + a_{k-1} x^{k-1} + \dots + a_1 x + a_0\right) \\
&= \lim_{x\to x_0} \left(a_k x^k\right) + \lim_{x\to x_0} \left(a_{k-1} x^{k-1}\right) + \dots + \lim_{x\to x_0} \left(a_1 x\right) + a_0 \\
&= a_k {x_0}^k + a_{k-1} {x_0}^{k-1} + \dots + a_1 x_0 + a_0 \\
&= P(x_0).
\end{aligned}$$

De aici, *valoarea limitei funcţiei polinomiale într-un punct $x_0 \in \mathbb{R}$ se obţine calculând valoarea funcţiei polinomiale în acel punct.*

Exemple 1. $\lim\limits_{x\to 2}(3x^2+4x+5) = 3\cdot 2^2 + 4\cdot 2 + 5 = 25.$

2. $\lim\limits_{x\to 1}(4x^3-2x^2+6) = 4\cdot 1^3 - 2\cdot 1^2 + 6 = 8.$

La fel ca şi în cazul şirurilor, pentru calculul limitei $\lim\limits_{x\to\infty} P(x)$ se va scoate factor comun forţat x^k ($k=$ grad P). Se obţine că

$$\begin{aligned}\lim_{x\to\infty} P(x) &= \lim_{x\to\infty}\left(a_k x^k + a_{k-1}x^{k-1} + \ldots + a_1 x + a_0\right)\\ &= \lim_{x\to\infty} x^k\left(a_k + a_{k-1}\frac{1}{x} + \ldots + a_1\frac{1}{x^{k-1}} + a_0\frac{1}{x^k}\right)\\ &= \infty\cdot a_k = \begin{cases}+\infty, & \text{dacă } a_k > 0\\ -\infty, & \text{dacă } a_k < 0\end{cases}.\end{aligned}$$

Să observăm că limita termenului de grad maxim al lui P este de asemenea

$$\lim_{x\to\infty} a_k x^k = \infty\cdot a_k = \lim_{x\to\infty} P(x),$$

de unde se poate remarca faptul că *limita la $+\infty$ a lui $P(x)$ este egală cu limita termenului de grad maxim al lui P.*

Cu un raţionament similar, se poate obţine că

$$\lim_{x\to-\infty} P(x) = (-\infty)^k\cdot a_k$$

deci şi *limita la $-\infty$ a lui $P(x)$ este egală cu limita termenului de grad maxim al lui P.*

Exemple 1. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x^5+3x^2-2x+1\right) = (+\infty)^5 = +\infty.$

2. $\lim\limits_{x\to-\infty}(-2x^3+3x^2-\frac{1}{3}x+\sqrt{3}) = -2(-\infty)^3 = +\infty.$

Limitele funcţiilor raţionale

Fie P, Q două funcţii polinomiale de grad k, respectiv l, unde $k, l \geq 1$,

$$\begin{aligned}&P:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, P(x) = a_k x^k + a_{k-1}x^{k-1} + \ldots + a_1 x + a_0, \quad a_k \neq 0,\\ &Q:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, Q(x) = b_l x^l + b_{l-1}x^{l-1} + \ldots + b_1 x + b_0, \quad b_l \neq 0.\end{aligned}$$

Pentru calculul limitei $\lim\limits_{x\to x_0}\left(\dfrac{P(x)}{Q(x)}\right)$ într-un punct $x_0\in\mathbb{R}$ în care numitorul nu se anulează ($Q(x_0)\neq 0$), se observă că, datorită proprietăţilor operaţiilor cu limite de funcţii şi celor demonstrate mai sus privitoare la limita unui polinom într-un punct $x_0 \in \mathbb{R}$,

$$\lim_{x \to x_0} \left(\frac{P(x)}{Q(x)} \right) = \frac{\lim\limits_{x \to x_0} P(x)}{\lim\limits_{x \to x_0} Q(x)} = \frac{P(x_0)}{Q(x_0)}.$$

De aici, *valoarea limitei funcţiei raţionale într-un punct* $x_0 \in \mathbb{R}$ *în care nu se anulează numitorul se obţine calculând valoarea funcţiei polinomiale în acel punct*.

Dacă x_0 este rădăcină a lui Q ($Q(x_0) = 0$), atunci

$$\lim_{x \to x_0} \left(\frac{P(x)}{Q(x)} \right) = \lim_{x \to x_0} \frac{(x - x_0)^p P_1(x)}{(x - x_0)^q Q_1(x)},$$

unde p, q sunt ordinele de multiplicitate ale rădăcinii x_0 pentru funcţiile polinomiale P, respectiv Q, iar $P_1(x_0) \neq 0$, $Q_1(x_0) \neq 0$. Se obţine că

$$\lim_{x \to x_0} \left(\frac{P(x)}{Q(x)} \right) = \begin{cases} 0, & p > q \\ \frac{P_1(x_0)}{Q_1(x_0)}, & p = q \\ +\infty \cdot \frac{P_1(x_0)}{Q_1(x_0)}, & q > p, q - p \text{ par} \\ \text{nu există}, & q > p, q - p \text{ impar} \end{cases}.$$

Exemple 1.

$$\lim_{x \to 2} \frac{x^3 + 2x + 1}{2x^4 - 5x + 9} = \frac{2^3 + 2 \cdot 2 + 1}{2 \cdot 2^4 - 5 \cdot 2 + 9} = \frac{13}{31}.$$

2.

$$\lim_{x \to 1} \frac{x^3 - 5x^2 + 7x - 3}{x^3 - 3x + 2} = \lim_{x \to 1} \frac{(x-1)^2(x-3)}{(x-1)^2(x+2)} = \lim_{x \to 1} \frac{x-3}{x+2} = -\frac{2}{3}.$$

3.

$$\lim_{x \to 1} \frac{x^2 - 4x + 3}{x^3 - 3x + 2} = \lim_{x \to 1} \frac{(x-1)(x-3)}{(x-1)^2(x+2)} = \lim_{x \to 1} \frac{x-3}{(x-1)(x+2)}.$$

Atunci $\lim\limits_{x \to 1} \frac{x^2 - 4x + 3}{x^3 - 3x + 2}$ nu există, deoarece $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ x > 1}} \frac{x^2 - 4x + 3}{x^3 - 3x + 2} = \frac{-2}{(0+) \cdot 3} = -\infty$, iar $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ x < 1}} \frac{x^2 - 4x + 3}{x^3 - 3x + 2} = \frac{-2}{(0-) \cdot 3} = +\infty$.

Considerăm limita $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{P(x)}{Q(x)}\right)$. La fel ca şi în cazul şirurilor, pentru calculul acesteia se va scoate factor comun forţat x^k de la numărător ($k = \text{grad } P$), respectiv x^l de la numitor ($l = \text{grad } Q$). Se obţine că

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to\infty}\left(\frac{P(x)}{Q(x)}\right) &= \lim_{x\to\infty}\frac{a_k x^k + a_{k-1}x^{k-1} + \ldots + a_1 x + a_0}{b_l x^l + b_{l-1}x^{l-1} + \ldots + b_1 x + b_0} \\
&= \lim_{x\to\infty}\frac{x^k\left(a_k + a_{k-1}\frac{1}{x} + \ldots + a_1\frac{1}{x^{k-1}} + a_0\frac{1}{x^k}\right)}{x^l\left(b_l + b_{l-1}\frac{1}{x} + \ldots + b_1\frac{1}{x^{l-1}} + b_0\frac{1}{x^l}\right)} \\
&= \lim_{x\to\infty} x^{k-l}\frac{a_k}{b^l} = \begin{cases} 0, & \text{dacă } k < l \\ \frac{a_k}{b_l}, & \text{dacă } k = l \\ +\infty\frac{a_k}{b_l}, & \text{dacă } k > l \end{cases}.
\end{aligned}$$

Să observăm că limita raportului termenilor de grad maxim este de asemenea

$$\lim_{x\to\infty}\frac{a_k x^k}{b_l x^l} = \lim_{x\to\infty} x^{k-l}\frac{a_k}{b^l},$$

de unde se poate remarca faptul că *limita lui* $\frac{P(x)}{Q(x)}$ *este egală cu limita raportului termenilor de grad maxim ai lui* P *şi* Q, pentru $x \to +\infty$. Cu un raţionament similar, se poate obţine că acelaşi lucru se întâmplă şi pentru $x \to -\infty$.

Exemple 1.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{3x^2+4x+2}{2x^2-3x+1} = \lim_{x\to\infty}\frac{x^2(3+4\frac{1}{x}+2\frac{2}{x^2})}{x^2(2-3\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2})} = \frac{3}{2}.$$

2.

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{-2x^3+3x^2+x-1}{3x^2+4x+6} = \lim_{x\to-\infty}\frac{x^3(-2+3\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x^3})}{x^2(3+4\frac{1}{x}+6\frac{1}{x^2})} = (-\infty)\cdot\frac{-2}{3} = +\infty.$$

3.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{3x^2+4x-2}{4x^3+3x^2+2x+1} = \lim_{x\to\infty}\frac{x^2(3+4\frac{1}{x}-\frac{2}{x^2})}{x^3(4+3\frac{1}{x}+2\frac{1}{x}+\frac{1}{x^3})} = 0\cdot\frac{3}{4} = 0.$$

Limitele radicalilor

Se poate observa că, dacă $x_0 \in \mathbb{R}$ şi n este un număr natural impar, atunci

$$\lim_{x\to x_0}\sqrt[n]{x} = \lim_{x\to x_0}\left(x^{\frac{1}{n}}\right) = \left(\lim_{x\to x_0} x\right)^{\frac{1}{n}} = x_0^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{x_0},$$

iar, cu acelaşi raţionament,

$$\lim_{x\to\infty} \sqrt[n]{x} = +\infty, \quad \lim_{x\to-\infty} \sqrt[n]{x} = -\infty.$$

În mod similar, dacă $x_0 \geq 0$ şi n este un număr natural par, $n \geq 2$, atunci

$$\lim_{x\to x_0} \sqrt[n]{x} = \sqrt[n]{x_0}, \quad \lim_{x\to\infty} \sqrt[n]{x} = +\infty.$$

Exerciţiu

Determinaţi valoarea limitei

$$\lim_{x\to\infty} \left(\sqrt[3]{x^3 + x^2 + 1} - x \right).$$

Soluţie

Deoarece $\lim\limits_{x\to\infty} \left(x^3 + x^2 + 1 \right) = +\infty$, urmează, conform teoremei limitei funcţiei compuse şi celor de mai sus, că $\lim\limits_{x\to\infty} \sqrt[3]{x^3 + x^2 + 1} = +\infty$, ceea ce înseamnă că limita de mai sus prezintă o nedeterminare de forma $\boldsymbol{\infty} - \boldsymbol{\infty}$. Pentru înlăturarea acesteia se amplifică cu expresia conjugată celei din enunţ. Urmează că

$$\begin{aligned}
&\lim_{x\to\infty} \left(\sqrt[3]{x^3 + x^2 + 1} - x \right) \\
&= \lim_{x\to\infty} \frac{\left(\sqrt[3]{x^3 + x^2 + 1} - x \right)\left(\sqrt[3]{x^3 + x^2 + 1}^2 + \sqrt[3]{x^3 + x^2 + 1} \cdot x + x^2 \right)}{\sqrt[3]{x^3 + x^2 + 1}^2 + \sqrt[3]{x^3 + x^2 + 1} \cdot x + x^2} \\
&= \lim_{x\to\infty} \frac{x^3 + x^2 + 1 - x^3}{\sqrt[3]{x^3 + x^2 + 1}^2 + \sqrt[3]{x^3 + x^2 + 1} \cdot x + x^2} \\
&= \lim_{x\to\infty} \frac{x^2(1 + \frac{1}{x^2})}{x^2\left(\sqrt[3]{1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^3}}^2 + \sqrt[3]{1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^3}} + 1 \right)} \\
&= \lim_{x\to\infty} \frac{1 + \frac{1}{x^2}}{\sqrt[3]{1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^3}}^2 + \sqrt[3]{1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^3}} + 1} \\
&= \frac{1}{3}.
\end{aligned}$$

■

Limitele funcţiilor exponenţiale

Fie $a > 0$, $a \neq 1$, şi fie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = a^x$. Se poate observa că, dacă $x_0 \in \mathbb{R}$, atunci

$$\lim_{x\to x_0} a^x = \left(\lim_{x\to x_0} a \right)^{\lim\limits_{x\to x_0} x} = a^{x_0}.$$

Pentru $a > 1$, se observă că f este strict crescătoare, iar

$$a^x \geq a^{[x]} = (1 + (a-1))^{[x]} \geq 1 + (a-1)[x],$$

conform inegalităţii lui Bernoulli, de unde urmează conform criteriului majorării că $\lim\limits_{x\to\infty} a^x = +\infty$. De asemenea,

$$\lim_{x\to-\infty} a^x = \lim_{x\to-\infty} \frac{1}{a^{-x}} = \lim_{u\to\infty} \frac{1}{a^u} = \frac{1}{\infty} = 0,$$

cu notaţia $u = -x$, conform teoremei limitei funcţiei compuse.

Dacă $a \in (0,1)$, atunci f este strict descrescătoare, iar $a = \frac{1}{b}$, $b > 1$. Urmează că

$$\lim_{x\to\infty} a^x = \lim_{x\to\infty} \left(\frac{1}{b}\right)^x = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{b^x} = \frac{1}{\infty} = 0,$$

cu un raţionament asemănător obţinându-se că $\lim\limits_{x\to-\infty} a^x = +\infty$.

Adăugând şi cazul $a = 1$, în cazul în care f este identic egală cu 1, discuţia de mai sus se poate sistematiza sub următoarea formă

$$\lim_{x\to\infty} a^x = \begin{cases} \infty, & a > 1 \\ 1, & a = 1 \\ 0, & a \in (0,1) \end{cases}, \quad \lim_{x\to-\infty} a^x = \begin{cases} 0, & a > 1 \\ 1, & a = 1 \\ \infty, & a \in (0,1) \end{cases}.$$

Limitele funcţiilor logaritmice

Fie $a > 0$, $a \neq 1$, şi fie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \log_a x$. Mai întâi, se observă că f este strict crescătoare pentru $a > 1$, respectiv strict descrescătoare pentru $a \in (0,1)$.

Dacă $x_0 \in \mathbb{R}$, atunci, cum f este strict monotonă, ea are limite laterale în x_0. Mai mult, deoarece $a^{\log_a x} = x$ pentru orice $x \in \mathbb{R}$,

$$\lim_{x\to x_0} \left(a^{\log_a x}\right) = \lim_{x\to x_0} x = x_0.$$

Deoarece

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\x>x_0}} \left(a^{\log_a x}\right) = \Big(\lim_{\substack{x\to x_0\\x>x_0}} a\Big)^{\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\x>x_0}} \left(\log_a x\right)} = a^{\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\x>x_0}} \left(\log_a x\right)},$$

urmează că $a^{\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\x>x_0}} \left(\log_a x\right)} = x_0$, deci $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\x>x_0}} \left(\log_a x\right) = \log_a x_0$. În mod similar se demonstrează că $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\x<x_0}} \left(\log_a x\right) = \log_a x_0$, deci exită $\lim\limits_{x\to x_0} \left(\log_a x\right) = \log_a x_0$, deoarece limitele laterale sunt ambele egale cu această valoare.

Cu un raţionament analog celui realizat pentru $x_0 \in \mathbb{R}$, obţinem că

$$\lim_{x\to\infty} \log_a x = \begin{cases} \infty, & a > 1 \\ -\infty, & a \in (0,1) \end{cases}, \quad \lim_{\substack{x\to 0 \\ x>0}} \log_a x = \begin{cases} -\infty, & a > 1 \\ \infty, & a \in (0,1) \end{cases}.$$

Limitele unor funcţii trigonometrice

Mai întâi, reamintim inegalitatea

$$\sin x < x < \operatorname{tg} x, \quad \text{pentru } x \in (0, \frac{\pi}{2}).$$

Ţinând seama că $\sin(-x) = -\sin x$ şi $\operatorname{tg}(-x) = -\operatorname{tg} x$ pentru $x \in (0, \frac{\pi}{2})$, urmează că

$$|\sin x| \le |x| \le |\operatorname{tg} x|, \quad \text{pentru } x \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}).$$

De asemenea,

$$|\sin x| \le 1 < \frac{\pi}{2} \le |x|, \quad \text{pentru } x \in (-\infty, \frac{\pi}{2}] \cup [\frac{\pi}{2}, +\infty)$$

deci

$$|\sin x| \le |x|, \quad \text{pentru } x \in \mathbb{R}.$$

Funcţia sinus

Fie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sin x$ şi fie $x_0 \in \mathbb{R}$. Se observă că

$$|\sin x - \sin x_0| = 2|\sin \frac{x - x_0}{2}||\cos \frac{x + x_0}{2}| \le 2|\frac{x - x_0}{2}| = |x - x_0|,$$

de unde, conform criteriului majorării,

$$\lim_{x\to x_0} \sin x = \sin x_0 \quad \text{pentru } x_0 \in \mathbb{R}.$$

S-a observat deja că funcţia sinus nu are limită nici la $+\infty$ nici la $-\infty$. Într-adevăr, pentru şirul $(a_n)_{n\ge 0}$, $a_n = 2n\pi$, cu limita $+\infty$, şirul valorilor $(\sin(a_n))_{n\ge 0}$ are limita 0, fiind constant nul, în timp ce pentru şirul $(b_n)_{n\ge 0}$, $b_n = 2n\pi + \frac{\pi}{2}$, de asemenea cu limita $+\infty$, şirul valorilor $(\sin(b_n))_{n\ge 0}$ are limita 1, fiind constant egal cu 1, deci funcţia sinus nu are limită la $+\infty$, în mod analog demonstrându-se că funcţia sinus nu are limită nici la $-\infty$.

Funcţia cosinus

În mod similar celor de mai sus se demonstrează că

$$\lim_{x \to x_0} \cos x = \cos x_0, \quad \text{pentru } x_{\in}\mathbb{R},$$

în vreme ce nici funcţia cosinus nu are limită nici la $+\infty$ nici la $-\infty$.

Funcţia tangentă

Fie funcţia $f : \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + n\pi, n \in \mathbb{N} \right\} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \operatorname{tg} x$. Conform inegalităţilor

$$|\operatorname{tg} x - \operatorname{tg} x_0| \leq \left| \frac{\sin x}{\cos x} - \frac{\sin x_0}{\cos x_0} \right| = \left| \frac{\sin(x - x_0)}{\cos x \cos x_0} \right|,$$

valabile pentru $x, x_0 \in \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + n\pi, n \in \mathbb{N} \right\}$, urmează că

$$\lim_{x \to x_0} \operatorname{tg} x = \operatorname{tg} x_0, \quad \text{pentru } x_0 \in \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + n\pi, n \in \mathbb{N} \right\}.$$

De asemenea,

$$\lim_{\substack{x \to \frac{\pi}{2} + n\pi \\ x < \frac{\pi}{2} + n\pi}} \operatorname{tg} x = \lim_{\substack{u \to \frac{\pi}{2} \\ x < \frac{\pi}{2}}} \operatorname{tg}(u + n\pi) = \lim_{\substack{u \to \frac{\pi}{2} \\ x < \frac{\pi}{2}}} \operatorname{tg} u = +\infty$$

ţinând seama de teorema limitei funcţiei compuse şi de faptul că funcţia tangentă este periodică de perioadă π. În mod similar se demonstrează că

$$\lim_{\substack{x \to \frac{\pi}{2} + n\pi \\ x > \frac{\pi}{2} + n\pi}} \operatorname{tg} x = -\infty.$$

Se poate observa că funcţia tangentă nu are limită nici la $+\infty$ nici la $-\infty$. Într-adevăr, pentru şirul $(a_n)_{n \geq 0}$, $a_n = n\pi$, cu limita $+\infty$, şirul valorilor $(\operatorname{tg}(a_n))_{n \geq 0}$ are limita 0, fiind constant nul, în timp ce pentru şirul $(b_n)_{n \geq 0}$, $b_n = \frac{\pi}{4} + n\pi$, de asemenea cu limita $+\infty$, şirul valorilor $(\operatorname{tg}(b_n))_{n \geq 0}$ are limita 1, fiind constant egal cu 1, deci funcţia tangentă nu are limită la $+\infty$, în mod analog raţionându-se pentru $x \to -\infty$.

Funcţia cotangentă

Fie funcţia $f : \mathbb{R} \setminus \{n\pi, n \in \mathbb{N}\} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \operatorname{ctg} x$. Ca mai sus, se obţine că

$$\lim_{x \to x_0} \operatorname{ctg} x = \operatorname{ctg} x_0 \quad \text{pentru } x_0 \in \mathbb{R} \setminus \{n\pi, n \in \mathbb{N}\}.$$

De asemenea,

$$\lim_{\substack{x\to n\pi\\ x>n\pi}} \operatorname{ctg} x = \infty, \quad \lim_{\substack{x\to n\pi\\ x<n\pi}} \operatorname{ctg} x = -\infty.$$

Se poate observa că nici funcţia cotangentă nu are limita nici la $+\infty$ nici la $-\infty$.

Funcţia arcsinus

Fie funcţia $f : [-1,1] \to \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, $f(x) = \arcsin x$. Folosind un raţionament analog celui utilizat pentru a stabili limitele funcţiei logaritmice, se poate obţine că

$$\lim_{x\to x_0} \arcsin x = \arcsin x_0, \quad \text{pentru } x_0 \in [-1,1].$$

Funcţia arccosinus

Fie funcţia $f : [-1,1] \to [0,\pi]$, $f(x) = \arcsin x$. Ca mai sus, se poate obţine că

$$\lim_{x\to x_0} \arccos x = \arccos x_0, \quad \text{pentru } x_0 \in [-1,1].$$

Funcţia arctangentă

Fie funcţia $f : \mathbb{R} \to \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$, $f(x) = \operatorname{arctg} x$. Ca mai sus, se poate obţine că

$$\lim_{x\to x_0} \operatorname{arctg} x = \operatorname{arctg} x_0, \quad \text{pentru } x_0 \in \mathbb{R},$$

în vreme ce

$$\lim_{x\to\infty} \operatorname{arctg} x = \frac{\pi}{2}, \quad \lim_{x\to-\infty} \operatorname{arctg} x = -\frac{\pi}{2}.$$

Funcţia arccotangentă

Fie funcţia $f : \mathbb{R} \to (0,\pi)$, $f(x) = \operatorname{arcctg} x$. Ca mai sus, se poate obţine că

$$\lim_{x\to x_0} \operatorname{arcctg} x = \operatorname{arcctg} x_0 \quad \text{pentru } x \in \mathbb{R},$$

în vreme ce

$$\lim_{x\to\infty} \operatorname{arcctg} x = 0, \quad \lim_{x\to-\infty} \operatorname{arcctg} x = \pi.$$

5.2.3 Limite fundamentale

Au loc relaţiile:

1) $\lim\limits_{\mathbf{x}\to\mathbf{0}}\dfrac{\sin\mathbf{x}}{\mathbf{x}}=\mathbf{1}$, 2) $\lim\limits_{\mathbf{x}\to\mathbf{0}}\dfrac{\arcsin\mathbf{x}}{\mathbf{x}}=\mathbf{1}$,

3) $\lim\limits_{\mathbf{x}\to\mathbf{0}}\dfrac{\operatorname{tg}\mathbf{x}}{\mathbf{x}}=\mathbf{1}$, 4) $\lim\limits_{\mathbf{x}\to\mathbf{0}}\dfrac{\operatorname{arctg}\mathbf{x}}{\mathbf{x}}=\mathbf{1}$

5) $\lim\limits_{\mathbf{x}\to\mathbf{0}}(\mathbf{1}+\mathbf{x})^{\frac{1}{\mathbf{x}}}=\mathbf{e}$,

6) $\lim\limits_{\mathbf{y}\to\infty}(\mathbf{1}+\dfrac{\mathbf{1}}{\mathbf{y}})^{\mathbf{y}}=\mathbf{e}$, $\lim\limits_{\mathbf{y}\to-\infty}(\mathbf{1}+\dfrac{\mathbf{1}}{\mathbf{y}})^{\mathbf{y}}=\mathbf{e}$,

7) $\lim\limits_{\mathbf{x}\to\mathbf{0}}\dfrac{\log_{\mathbf{a}}(\mathbf{1}+\mathbf{x})}{\mathbf{x}}=\log_{\mathbf{a}}\mathbf{e}$, 8) $\lim\limits_{\mathbf{x}\to\mathbf{0}}\dfrac{\ln(\mathbf{1}+\mathbf{x})}{\mathbf{x}}=\mathbf{1}$,

9) $\lim\limits_{\mathbf{x}\to\mathbf{0}}\dfrac{\mathbf{a}^{\mathbf{x}}-\mathbf{1}}{\mathbf{x}}=\ln\mathbf{a}$, 10) $\lim\limits_{\mathbf{x}\to\mathbf{0}}\dfrac{\mathbf{e}^{\mathbf{x}}-\mathbf{1}}{\mathbf{x}}=\mathbf{1}$.

11) $\lim\limits_{\mathbf{x}\to\mathbf{0}}\dfrac{(\mathbf{1}+\mathbf{x})^{\mathbf{p}}-\mathbf{1}}{\mathbf{x}}=\mathbf{p},\mathbf{p}\in\mathbb{R}^*$.

$$\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{0}}\frac{\sin\mathbf{x}}{\mathbf{x}}=\mathbf{1}$$

Deoarece $\sin x<x<\operatorname{tg}x$ pentru $x\in(0,\frac{\pi}{2})$, urmează că

$$\cos x<\frac{\sin x}{x}<1 \quad \text{pentru } x\in(0,\frac{\pi}{2}),$$

de unde, conform criteriului cleştelui, urmează că $\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}}\dfrac{\sin x}{x}=1$. Cu un raţionament asemănător, $\lim\limits_{\substack{x\to0\\x<0}}\dfrac{\sin x}{x}=1$, de unde $\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin x}{x}=1$, limitele laterale fiind ambele egale cu 1.

$$\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{0}}\frac{\arcsin\mathbf{x}}{\mathbf{x}}=\mathbf{1}$$

Cu schimbarea de variabilă $\arcsin x=u$, urmează că $x=\sin u$, iar $u\to0$ pentru $x\to0$. Conform teoremei limitei funcţiei compuse, urmează că

$$\lim_{x\to0}\frac{\arcsin x}{x}=\lim_{u\to0}\frac{u}{\sin u}=\lim_{u\to0}\frac{1}{\frac{\sin u}{u}}=\frac{1}{\lim\limits_{u\to0}\frac{\sin u}{u}}=1.$$

$$\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{0}}\frac{\operatorname{tg}\mathbf{x}}{\mathbf{x}}=\mathbf{1}$$

Deoarece $\sin x<x<\operatorname{tg}x$ pentru $x\in(0,\frac{\pi}{2})$, urmează că

$$1<\frac{\operatorname{tg}x}{x}<\frac{1}{\cos x} \quad \text{pentru } x\in(0,\frac{\pi}{2}),$$

de unde, conform criteriului cleştelui, urmează că $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \dfrac{\operatorname{tg} x}{x} = 1$. Cu un raţionament asemănător, $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x<0}} \dfrac{\operatorname{tg} x}{x} = 1$, de unde $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\operatorname{tg} x}{x} = 1$, limitele laterale fiind ambele egale cu 1.

$$\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{0}} \frac{\operatorname{arctg} \mathbf{x}}{\mathbf{x}} = \mathbf{1}$$

Cu schimbarea de variabilă $\operatorname{arctg} x = u$, urmează că $x = \operatorname{tg} u$, iar $u \to 0$ pentru $x \to 0$. Conform teoremei limitei funcţiei compuse, urmează că

$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{arctg} x}{x} = \lim_{u\to 0} \frac{u}{\operatorname{tg} u} = \lim_{u\to 0} \frac{1}{\frac{\operatorname{tg} u}{u}} = \frac{1}{\lim\limits_{u\to 0} \frac{\operatorname{tg} u}{u}} = 1.$$

$$\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{0}} (\mathbf{1} + \mathbf{x})^{\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{x}}} = e$$

A fost demonstrat în capitolul anterior că $\lim\limits_{n\to\infty} (1 + \frac{1}{n})^n = e$. Fie $x > 0$. Să notăm $n = \left[\frac{1}{x}\right]$. Cum $\left[\frac{1}{x}\right] \leq \frac{1}{x} < \left[\frac{1}{x}\right] + 1$, urmează că $n \leq \frac{1}{x} < n + 1$, deci $\frac{1}{n} \geq x > \frac{1}{n+1}$. În concluzie,

$$\left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^n \leq (1 + x)^{\frac{1}{x}} \leq \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1},$$

adică

$$\frac{\left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n+1}}{1 + \frac{1}{n+1}} \leq (1 + x)^{\frac{1}{x}} \leq \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \cdot \left(1 + \frac{1}{n}\right).$$

Cum $n \to \infty$ pentru $x \to 0$, $x > 0$, iar $\lim\limits_{n\to\infty} (1 + \frac{1}{n})^n = e$, urmează conform criteriului cleştelui că $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} (1 + x)^{\frac{1}{x}} = e$. În mod asemănător se demonstrează că $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x<0}} (1 + x)^{\frac{1}{x}} = e$, deci $\lim\limits_{x\to 0} (1 + x)^{\frac{1}{x}} = e$, ambele limite laterale fiind egale cu e.

$$\lim_{\mathbf{y}\to\infty} (\mathbf{1} + \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{y}})^{\mathbf{y}} = \mathbf{e}, \quad \lim_{\mathbf{y}\to-\infty} (\mathbf{1} + \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{y}})^{\mathbf{y}} = \mathbf{e}$$

Deoarece $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} (1 + x)^{\frac{1}{x}} = e$, cu notaţia $\frac{1}{x} = y$ urmează că $\lim\limits_{y\to\infty} (1 + \frac{1}{y})^y = e$. Deoarece şi $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x<0}} (1 + x)^{\frac{1}{x}} = e$, tot cu notaţia $\frac{1}{x} = y$, urmează că şi $\lim\limits_{y\to-\infty} (1 + \frac{1}{y})^y = e$.

$$\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{0}} \frac{\log_{\mathbf{a}}(\mathbf{1}+\mathbf{x})}{\mathbf{x}} = \log_{\mathbf{a}} \mathbf{e}.$$

Conform proprietăţilor operaţiilor cu limite de funcţii, urmează că

$$\lim_{x\to 0} \frac{\log_a(1+x)}{x} = \lim_{x\to 0} \left(\log_a (1+x)^{\frac{1}{x}}\right) = \log_a \left(\lim_{x\to 0} \left((1+x)^{\frac{1}{x}}\right)\right) = \log_a e.$$

$$\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{0}} \frac{\ln(\mathbf{1}+\mathbf{x})}{\mathbf{x}} = \mathbf{1}$$

Punând $a = e$ în formula de mai sus, obţinem că $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(1+x)}{x} = \log_e e = 1.$

$$\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{0}} \frac{\mathbf{a}^{\mathbf{x}}-\mathbf{1}}{\mathbf{x}} = \ln \mathbf{a}$$

Cu schimbarea de variabilă $a^x - 1 = u$, urmează că $x = \log_a(1+u)$, iar $u \to 0$ pentru $x \to 0$. Conform teoremei limitei funcţiei compuse, urmează că

$$\lim_{x\to 0} \frac{a^x-1}{x} = \lim_{u\to 0} \frac{u}{\log_a(1+u)} = \frac{1}{\lim\limits_{u\to 0} \frac{\log_a(1+u)}{u}} = \frac{1}{\log_a e} = \log_e a = \ln a$$

$$\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{0}} \frac{\mathbf{e}^{\mathbf{x}}-\mathbf{1}}{\mathbf{x}} = \mathbf{1}$$

Punând $a = e$ în formula de mai sus, obţinem că $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^x-1}{x} = \ln e = 1.$

$$\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{0}} \frac{(\mathbf{1}+\mathbf{x})^{\mathbf{p}}-\mathbf{1}}{\mathbf{x}} = \mathbf{p}$$

Cu schimbarea de variabilă $x = e^u - 1$, urmează că $u = \ln(1+x)$, iar $u \to 0$ pentru $x \to 0$. Conform teoremei limitei funcţiei compuse, urmează că

$$\lim_{x\to 0} \frac{(1+x)^p-1}{x} = \lim_{u\to 0} \frac{(e^u)^p-1}{e^u-1} = \lim_{u\to 0} \frac{\frac{e^{pu}-1}{u}}{\frac{e^u-1}{u}} = \frac{\lim\limits_{u\to 0} \frac{e^{pu}-1}{pu} \cdot p}{\lim\limits_{u\to 0} \frac{e^u-1}{u}} = \frac{\ln e \cdot p}{\ln e} = p.$$

Compararea creşterii funcţiilor $\ln x$, x^p ($p > 0$) şi e^x

În cele ce urmează vom studia diferenţele între vitezele de creştere spre $+\infty$ ale funcţiei exponenţiale, funcţiei putere şi funcţiei logaritmice, observând că funcţia exponenţială are cea mai mare viteză de creştere spre $+\infty$, urmată de funcţia putere şi funcţia logaritmică.

Vom demonstra mai întâi că $\lim_{x\to\infty} \frac{\ln x}{x^p} = 0$. În acest sens, s-a demonstrat deja că $\lim_{n\to\infty} \frac{\ln n}{n^p} = 0$ pentru orice $p > 0$. Notând $[x] = n$, observăm că $n \leq x < n+1$ şi atunci

$$\frac{\ln n}{(n+1)^p} < \frac{\ln x}{x^p} < \frac{\ln(n+1)}{n^p},$$

adică

$$\frac{\ln n}{n^p}\left(\frac{n}{n+1}\right)^p < \frac{\ln x}{x^p} < \frac{\ln(n+1)}{(n+1)^p}\left(\frac{n+1}{n}\right)^p,$$

de unde, ţinând seama de cele de mai sus, $\lim_{x\to\infty} \frac{\ln x}{x^p} = 0$.

Arătăm acum că $\lim_{x\to\infty} \frac{x^p}{e^x} = 0$. Cu schimbarea de variabilă $x = \ln u$, urmează că $u = e^x$ şi $u \to \infty$ pentru $x \to \infty$. Ţinând seama de teorema funcţiei compuse, se obţine că

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^p}{e^x} = \lim_{u\to\infty} \frac{(\ln u)^p}{u} = \lim_{u\to\infty} \left(\frac{\ln u}{u^{\frac{1}{p}}}\right)^p = \left(\lim_{u\to\infty} \frac{\ln u}{u^{\frac{1}{p}}}\right)^p = 0^p = 0.$$

Pentru o altă demonstraţie a acestor relaţii, să arătăm mai întâi că

$$\ln x < x < e^x, \quad \text{pentru } x > 0,$$

inegalitate care prezintă un interes de sine stătător.

În acest sens, să observăm că

$$e^x \geq e^{[x]} = (1 + (e-1))^{[x]} \geq 1 + (e-1)[x],$$

conform inegalităţii lui Bernoulli. În plus,

$$1 + (e-1)[x] > \{x\} + [x] = x,$$

de unde $e^x > x$, pentru orice $x > 0$. Prin logaritmarea acestei inegalităţi, se obţine că $x > \ln x$, pentru orice $x > 0$, de unde concluzia.

De aici, $\ln \sqrt{x} < \sqrt{x}$, pentru orice $x > 0$, iar cum $\ln \sqrt{x} = \ln x^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}\ln x$, urmează că $\frac{\frac{1}{2}\ln x}{\sqrt{x}} < 1$, deci $\frac{\ln x}{x} < \frac{2}{\sqrt{x}}$, pentru $x > 0$. Atunci

$$0 < \frac{\ln x}{x} < \frac{2}{\sqrt{x}}, \quad \text{pentru } x > 1,$$

de unde urmează conform criteriului cleştelui că $\lim_{x\to\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$. Arătăm acum că $\lim_{x\to\infty} \frac{\ln x}{x^p} = 0$, pentru $p > 0$. Într-adevăr, cu schimbarea de variabilă $u = x^p$

şi ţinând seama că $u \to \infty$ când $x \to \infty$, obţinem cu ajutorul teoremei limitei funcţiei compuse că

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\ln x}{x^p} = \lim_{u\to\infty} \frac{\ln\left(u^{\frac{1}{p}}\right)}{u} = \lim_{u\to\infty} \frac{\frac{1}{p}\ln u}{u} = \frac{1}{p}\lim_{u\to\infty} \frac{\ln u}{u} = 0.$$

Faptul că $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{x^p}{e^x} = 0$ se obţine ca mai sus.

În fine, să precizăm câteva consideraţii asupra tratării cazurilor de nedeterminare. Cazurile $\frac{\mathbf{0}}{\mathbf{0}}$, $\frac{\pm\boldsymbol{\infty}}{\pm\boldsymbol{\infty}}$ se tratează cu ajutorul limitelor fundamentale menţionate mai sus, pentru cazul de nedeterminare $\frac{\pm\boldsymbol{\infty}}{\pm\boldsymbol{\infty}}$ putându-se da şi factor comun forţat. Cazul $\mathbf{0}\cdot\boldsymbol{\infty}$ se tratează transformând produsul în raport cu ajutorul formulei $fg = \frac{f}{\frac{1}{g}}$. Cazul $\boldsymbol{\infty} - \boldsymbol{\infty}$ se tratează prin reducere la o nedeterminare de tip $\mathbf{0}\cdot\boldsymbol{\infty}$ dând factor comun forţat, sau, în unele situaţii în care apar radicali, prin amplificare cu expresii conjugate. Cazurile $\mathbf{0}^{\mathbf{0}}$, $\boldsymbol{\infty}^{\mathbf{0}}$, $\mathbf{1}^{\boldsymbol{\infty}}$ se tratează prin reducerea nedeterminării la una de tip produs, cu ajutorul formulei $f^g = e^{g\ln f}$, pentru cazul de nedeterminare $\mathbf{1}^{\boldsymbol{\infty}}$ putându-se utiliza şi limita $\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}} = e$, numită în continuare şi *limita standard ce defineşte numărul e*.

Exemple 1. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(1+\sin x)}{\sin 4x}$

Fiind vorba despre cazul de nedeterminare $\frac{\mathbf{0}}{\mathbf{0}}$, vom folosi limite fundamentale. Urmează că

$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+\sin x)}{\sin 4x} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{\ln(1+\sin x)}{\sin x}\cdot \sin x}{\sin 4x} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{\ln(1+\sin x)}{\sin x}\cdot\frac{\sin x}{x}\cdot x}{\frac{\sin 4x}{4x}\cdot 4x}$$
$$= \frac{1}{4}\lim_{x\to 0} \frac{\frac{\ln(1+\sin x)}{\sin x}\cdot\frac{\sin x}{x}}{\frac{\sin 4x}{4x}} = \frac{1}{4}.$$

2. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{1+3x}-1}{\sqrt[3]{1+2x}-1}$

Fiind vorba despre cazul de nedeterminare $\frac{\mathbf{0}}{\mathbf{0}}$, vom folosi limite fundamentale. Urmează că

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+3x}-1}{\sqrt[3]{1+2x}-1} = \lim_{x\to 0} \frac{(1+3x)^{\frac{1}{2}}-1}{(1+2x)^{\frac{1}{3}}-1} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{(1+3x)^{\frac{1}{2}}-1}{3x}\cdot 3x}{\frac{(1+2x)^{\frac{1}{3}}-1}{2x}\cdot 2x}$$

$$= \frac{3}{2} \cdot \frac{\lim\limits_{x\to 0} \frac{(1+3x)^{\frac{1}{2}}-1}{3x}}{\lim\limits_{x\to 0} \frac{(1+2x)^{\frac{1}{3}}-1}{2x}} = \frac{3}{2} \cdot \frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{3}} = \frac{9}{4}.$$

3. $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} x \ln x$

   Fiind vorba despre cazul de nedeterminare $\mathbf{0} \cdot \boldsymbol{\infty}$, vom transforma mai întâi nedeterminarea într-una de tip raport. Observăm că

   $$\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} x \ln x = \lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \frac{\ln x}{\frac{1}{x}}.$$

   Cu notaţia $u = \frac{1}{x}$, ţinând seama că $u \to \infty$ pentru $x \to 0$, $x > 0$, se obţine că

   $$\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \frac{\ln x}{\frac{1}{x}} = \lim_{u\to\infty} \frac{\ln \frac{1}{u}}{u} = \lim_{u\to\infty} \frac{-\ln u}{u} = 0,$$

   de unde limita căutată este 0.

4. $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} x^x$

   Fiind vorba despre cazul de nedeterminare $\mathbf{0}^{\mathbf{0}}$, transformăm mai întâi nedeterminarea într-una de tip produs. Atunci

   $$x^x = e^{\ln x^x} = e^{x \ln x},$$

   de unde

   $$\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} x^x = \lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} e^{x \ln x} = e^{\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} x \ln x} = e^0 = 1,$$

   conform exemplului precedent.

5. $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\cos \frac{1}{n} + \sin^2 \frac{2}{n}\right)^n$

   Vom determina valoarea limitei $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\cos \frac{1}{x} + \sin^2 \frac{2}{x}\right)^x$, valoarea limitei din enunţ obţinându-se ca un caz particular. Fiind vorba despre cazul de nedeterminare $\mathbf{1}^{\boldsymbol{\infty}}$, se va folosi limita standard ce defineşte numărul e. Au loc egalităţile

$$\begin{aligned}
&\lim_{x\to\infty}\left(\cos\frac{1}{x}+\sin^2\frac{2}{x}\right)^x\\
&=\lim_{x\to\infty}\left[\left(1+\cos\frac{1}{x}+\sin^2\frac{2}{x}-1\right)^{\frac{1}{\cos\frac{1}{x}+\sin^2\frac{2}{x}-1}}\right]^{x\left(\cos\frac{1}{x}+\sin^2\frac{2}{x}-1\right)}\\
&=\lim_{x\to\infty}\left[\left(1+\cos\frac{1}{x}+\sin^2\frac{2}{x}-1\right)^{\frac{1}{\cos\frac{1}{x}+\sin^2\frac{2}{x}-1}}\right]^{\lim\limits_{x\to\infty}x\left(\cos\frac{1}{x}+\sin^2\frac{2}{x}-1\right)}\\
&=e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\cos\frac{1}{x}+\sin^2\frac{2}{x}-1}{\frac{1}{x}}}.
\end{aligned}$$

Cu notaţia $u=\frac{1}{x}$, ţinând seama că $u\to 0$ când $x\to\infty$, urmează că

$$\begin{aligned}
e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\cos\frac{1}{x}+\sin^2\frac{2}{x}-1}{\frac{1}{x}}}&=e^{\lim\limits_{u\to 0}\frac{\cos u+\sin^2 2u-1}{u}}=e^{\lim\limits_{u\to 0}\frac{-2\sin^2\frac{u}{2}+\sin^2 2u}{u}}=e^{\lim\limits_{u\to 0}\frac{-2\sin^2\frac{u}{2}}{u}+\lim\limits_{u\to 0}\frac{\sin^2 2u}{u}}\\
&=e^{\lim\limits_{u\to 0}\frac{-2\sin^2\frac{u}{2}}{u}+\lim\limits_{u\to 0}\frac{\sin^2 2u}{u}}=e^{\lim\limits_{u\to 0}\frac{-2\sin^2\frac{u}{2}}{\left(\frac{u}{2}\right)^2}\cdot\frac{\left(\frac{u}{2}\right)^2}{u}+\lim\limits_{u\to 0}\frac{\sin^2 2u}{(2u)^2}\cdot\frac{(2u)^2}{u}}\\
&=e^{\lim\limits_{u\to 0}-\left(\frac{\sin\frac{u}{2}}{\frac{u}{2}}\right)^2\cdot\frac{u}{2}+\lim\limits_{u\to 0}\left(\frac{\sin 2u}{2u}\right)^2\cdot 4u}\\
&=e^{-\lim\limits_{u\to 0}\left(\frac{\sin\frac{u}{2}}{\frac{u}{2}}\right)^2\cdot\lim\limits_{u\to 0}\frac{u}{2}+\lim\limits_{u\to 0}\left(\frac{\sin 2u}{2u}\right)^2\cdot\lim\limits_{u\to 0}4u}=e^0=1.
\end{aligned}$$

Atunci

$$\lim_{x\to\infty}\left(\cos\frac{1}{x}+\sin^2\frac{2}{x}\right)^x=1,$$

de unde limita din enunţ este 1.

6. $\lim\limits_{x\to 1}\frac{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}-2}{x-1}$

O limită calculată pentru x tinzând la un număr nenul poate transformată într-o limită în care variabila tinde la zero alegând ca nouă variabilă diferenţa dintre x şi acel număr. Cu notaţia $u=x-1$, ţinând seama că $u\to 0$ când

$x \to 1$, urmează că

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}-2}{x-1} &= \lim_{u\to 0}\frac{\sqrt{1+u}+\sqrt[3]{1+u}-2}{u}\\ &= \lim_{u\to 0}\frac{(1+u)^{\frac{1}{2}}-1}{u}+\lim_{u\to 0}\frac{(1+u)^{\frac{1}{3}}-1}{u}\\ &= \frac{1}{2}+\frac{1}{3}=\frac{5}{6}.\end{aligned}$$

Aplicaţii

5.1. *Determinaţi valorile următoarelor limite*

1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2^{\sin x}-1}{x}$; *2)* $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(2^x-1)(3^x-1)}{x^2}$; *3)* $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(2^x-1)^3}{x^3}$; *4)* $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-x^2+x-1}{x}$;
5) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x+\sin 2x+\ldots+\sin nx}{\operatorname{tg} x+\operatorname{tg} 2x+\ldots+\operatorname{tg} nx}$; *6)* $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+\operatorname{arctg} x)}{\operatorname{tg}(\arcsin x)}$; *7)* $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln\left[(1+3x)^2\right]}{x}$;
8) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1-x^2)}{x\arcsin x}$; *9)* $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3^x-2^x}{4x}$; *10)* $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2^x+5^x-2}{3^x+4^x-2}$; *11)* $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{3x}-e^{2x}}{\sin 3x-\sin 2x}$;
12) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{x^2}-\cos x-\sin x}{x^2}$; *13)* $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+2x}-\sqrt[3]{1+3x}}{4x}$; *14)* $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\operatorname{tg}(\frac{\pi}{4}+x)}{x}$;
15) $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x>1}}\dfrac{\sin(2\arccos x)}{\sqrt{1-x^2}}$; *16)* $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1+mx)^n-(1+nx)^m}{x^2}$, $m,n\in\mathbb{N}$, $m,n\geq 2$;
17) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(a+x)^x-1}{x}$; *18)* $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg} x-\sin x}{x^3}$; *19)* $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg}(\operatorname{tg} x)-\sin(\sin x)}{\operatorname{tg} x-\sin x}$.

5.2. *Fie* $p,q>0$. *Determinaţi valorile următoarelor limite*

1) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{p-2^x}{q-3^x}$; *2)* $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\ln(1+e^{px})}{\ln(1+e^{qx})}$; *3)* $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\ln(x^p+e^x)}{\ln(x^q+e^x)}$; *4)* $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x+p\operatorname{arctg} x}{x+q\operatorname{arcctg} x}$;
5) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}}\dfrac{\ln\sin px}{\ln\sin qx}$.

5.3. *Determinaţi valorile următoarelor limite*

1) $\lim\limits_{x\to 0}(1+2\operatorname{tg}^2 x)^{\frac{4}{\sin^2 x}}$; *2)* $\lim\limits_{x\to 0}(1+\ln(1+x)+\ln(1+2x)+\ldots+\ln(1+nx))^{\frac{1}{x}}$;
3) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{a^x+b^x}{2}\right)^{\frac{1}{x}}$, $a,b>0$; *4)* $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{a^{\arcsin x}+b^{\operatorname{arctg} x}}{2}\right)^{\frac{1}{x}}$, $a,b>0$; *5)* $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{\sqrt{x+1}}{\sqrt{x}}\right)^x$;
6) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{\dfrac{x+\sqrt{x}}{x-\sqrt{x}}}\right)^x$; *7)* $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{\ln(x+1)}{\ln x}\right)^x$; *8)* $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\cos x}{\cos nx}\right)^{\frac{1}{x^2}}$; *9)* $\lim\limits_{x\to a}\left(\dfrac{\sin x}{\sin a}\right)^{\frac{1}{x}}$,
$a\in\mathbb{R}\setminus\{k\pi; k\in\mathbb{Z}\}$.

5.4. *Determinaţi valorile următoarelor limite*

1) $\lim\limits_{\substack{x\to 2\\ x>2}}\left(\dfrac{x}{2}\right)^{\frac{1}{x-2}}$; 2) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}(\sin x)^{\frac{1}{2x-\pi}}$; 3) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^n-1-n(x-1)}{(x-1)^2}$; 4) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\dfrac{3^{\operatorname{tg} x}-3}{x-\frac{\pi}{4}}$;

5) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{\sqrt[3]{x+24}-3}{x-3}$; 6) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt[3]{x+7}-2}{\sqrt[3]{x}-1}$; 7) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt[p]{x}-1}{\sqrt[q]{x}-1}$, $p,q\in\mathbb{N}^*$, $p,q\geq 2$;

8) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\dfrac{\sin^n x-\cos^n x}{\sin(x-\frac{\pi}{4})}$; 9) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x+x^2+\ldots+x^n-n}{x-1}$;

10) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}+\ldots+\sqrt[n]{x}-(n-1)}{x-1}$.

5.5. *Determinaţi valorile următoarelor limite*

1) $\lim\limits_{x\to\infty}x\sin\dfrac{1}{x}$; 2) $\lim\limits_{\substack{x\to 2\\ x>2}}(x-2)e^{\frac{1}{x-2}}$; 3) $\lim\limits_{x\to\infty}x\left[\ln(x+2)-\ln x\right]$; 4) $\lim\limits_{x\to\infty}x^2\left(e^{\frac{1}{x}}-e^{\frac{1}{x+1}}\right)$;

5) $\lim\limits_{x\to\infty}x\left(\dfrac{\pi}{4}-\operatorname{arctg}(x+1)\right)$; 6) $\lim\limits_{x\to\infty}x\left(\operatorname{arctg}\dfrac{x}{x+2}-\operatorname{arctg}\dfrac{x-1}{x+1}\right)$.

5.6. *Determinaţi valorile următoarelor limite*

1) $\lim\limits_{x\to\infty}x^{\sin\frac{1}{x}}$; 2) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{x^2}\right)^{\sin x}$; 3) $\lim\limits_{x\to\infty}(\ln x)^{\frac{1}{x}}$; 4) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}}(-\ln x)^{2x}$;

5) $\lim\limits_{x\to\infty}(x+e^x)^{\frac{1}{x}}$.

5.7. *Determinaţi valorile următoarelor limite*

1) $\lim\limits_{x\to\infty}(x-\ln x)$; 2) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}}(\dfrac{1}{x^2}+\ln x)$; 3) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\ln(e^x+e^{-x})-x\right)$;

4) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(x-\sqrt[n]{(x+1)(x+2)\ldots(x+n)}\right)$, $n\in\mathbb{N}^*$; 5) $\lim\limits_{\substack{x\to\frac{\pi}{2}\\ x<\frac{\pi}{2}}}(\operatorname{tg} x-\operatorname{tg} 3x)$.

5.8. *Determinaţi valorile următoarelor limite*

1) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}}(\sin x)^{\operatorname{tg} x}$; 2) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}}(\operatorname{arctg} x)^{\arcsin x}$; 3) $\lim\limits_{x\to 0}(\operatorname{arctg}|x|)^{|\operatorname{arctg} x|}$;

4) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}}(\sin x+x\cos x)^x$; 5) $\lim\limits_{x\to\infty}\left[\sin\left(\dfrac{\ln x}{x}\right)\right]^{\frac{\ln x}{x}}$.

5.9. *Fie* $P(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\ldots+a_1x+a_0$, $a_0,a_1,\ldots,a_n\in\mathbb{R}$, $a_n\neq 0$. *Arătaţi că* $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{P(x)}{e^x}=0$, $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\ln x}{P(x)}=0$.

5.10. *Fie* $a>0$. *Demonstraţi că*

$$1)\ \lim_{x\to a}\frac{x^x-a^a}{x-a}=a^a(1+\ln a);\quad 2)\ \lim_{x\to a}\frac{x\ln a-a\ln x}{x-a}=\ln a-1.$$

5.11. *Fie* $p \in (0,1)$. *Determinaţi* $a \in \mathbb{R}$ *astfel ca* $\lim\limits_{x\to\infty}((x+1)^p - x^p + a) = p$.

5.12. *Fie funcţia* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} x^2 - x, & x \in \mathbb{Q} \\ 0, & x \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q} \end{cases}$. *Determinaţi punctele* $x_0 \in \mathbb{R}$ *pentru care* f *are limită în* x_0.

5.13.

1. *Demonstraţi că* $\sin(\arccos u) = \sqrt{1-u^2}$ *pentru* $u \in [-1,1]$.
2. *Fie* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} \frac{\arccos\frac{2x}{1+x^2}}{x-1}, & x \neq 1 \\ 1, & x = 1 \end{cases}$. *Demonstraţi că* f *nu are limită în* $x = 1$.

5.14. *Fie* $L_n = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{1-\cos x\cos 2x\ldots\cos nx}{x^2}$, $n \in \mathbb{N}$.

1. *Determinaţi* L_0, L_1.
2. *Demonstraţi că* $L_{n+1} = L_n + \frac{(n+1)^2}{2}$ *pentru* $n \in \mathbb{N}$.
3. *Demonstraţi că* $L_n = \frac{n(n+1)(2n+1)}{12}$ *pentru* $n \in \mathbb{N}$.

5.15. *Fie* $L_n = \lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\sqrt{\ln(e+x)\ln(e+2x)\ldots\ln(e+nx)}}{x}$, $n \in \mathbb{N}^*$.

1. *Determinaţi* L_1.
2. *Demonstraţi că* $L_{n+1} = L_n - \frac{n+1}{e}$ *pentru* $n \in \mathbb{N}$.
3. *Demonstraţi că* $L_n = -\frac{n(n+1)}{2}$ *pentru* $n \in \mathbb{N}$.

5.16. *Fie* $L_n = \lim\limits_{x\to 0}\frac{(1-\sin x)(1-\sin^2 x)\ldots(1-\sin^n x)}{\cos^{2n} x}$, $n \in \mathbb{N}^*$.

1. *Determinaţi* L_1.
2. *Demonstraţi că* $L_{n+1} = \frac{n+1}{2}L_n$ *pentru* $n \in \mathbb{N}$.
3. *Demonstraţi că* $L_n = \frac{n!}{2^n}$ *pentru* $n \in \mathbb{N}$.

5.17. *Determinaţi valoarea limitei* $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{ax^2+2x+1} - \sqrt{x^2+2}\right)$ *în funcţie de valorile parametrului real* a, $a > 0$.

5.18. *Determinaţi valorile parametrilor reali a, b astfel încât*

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2+x+1}{x+1}-ax-b\right)=1.$$

5.19. *Determinaţi valorile parametrilor reali a, b astfel încât*

$$\lim_{x\to 0}\frac{\cos x-ax-b}{x^2}\in\mathbb{R}.$$

5.20. *Determinaţi valorile parametrilor reali a, b, $a>0$, astfel încât*

$$\lim_{x\to 0}(a\cos x+b\sin x)^{\frac{1}{x}}=e.$$

5.21. *Fie $f, g : (0,\infty)\to(0,\infty)$ astfel ca $f(x)>\frac{1}{x^2+x}>g(x)$ pentru $x>0$. Demonstraţi că $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x)=+\infty$, iar $\lim\limits_{x\to\infty} g(x)=0$.*

5.22. *Fie $a, b\in\mathbb{R}$.*

1. *Arătaţi că există $\delta_1>0$ astfel ca $a\sin x+\cos(bx)>0$ pentru $x\in(-\delta_1,\delta_1)$.*
2. *Arătaţi că există $\delta_2>0$ astfel ca $e^{ax}-bx>0$ pentru $x\in(\delta_2,+\infty)$.*
3. *Arătaţi că există $\delta_3>0$ astfel ca $\dfrac{1}{2}<\dfrac{\sin x}{x}<\dfrac{3}{2}$ pentru $x\in(-\delta_3,\delta_3)$.*

5.23. *Demonstraţi că*
1) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{[x]}{x}=1$; *2)* $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} x\left[\dfrac{1}{x}\right]=1$; *3)* $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} x\left(\left[\dfrac{1}{x}\right]+\left[\dfrac{2}{x}\right]+\ldots+\left[\dfrac{n}{x}\right]\right)=1$.

5.24. *Demonstraţi că*
1) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x+1}{x^2-1}\cos x=0$; *2)* $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^3}{x^2+1}\cos\dfrac{1}{x}=0$; *3)* $\lim\limits_{x\to\infty}\sin x\sin\dfrac{1}{x}=0$.

5.25. *Fie $f:\mathbb{R}^*\to(0,\infty)$ astfel ca $\lim\limits_{x\to 0}\left(f(x)+\dfrac{1}{f(x)}\right)=2$. Arătaţi că $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=1$.*

5.26. *Demonstraţi că $\lim\limits_{x\to\infty} x^{\frac{1}{x}}=1$. Cu ajutorul acestei limite, justificaţi că $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=1$.*

5.27. *Calculaţi următoarele limite de şiruri*
1) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^2+1}{n}\ln\left(1+\frac{n}{n^2+2}\right)$; *2)* $\lim\limits_{n\to\infty} n\left(e^{\sin\frac{1}{n}}-\cos\frac{1}{n}\right)$; *3)* $\lim\limits_{n\to\infty} n\left(e^{\frac{n+1}{n}}-e\right)$.

Index

Bibliografie

[1] S. Caraman, *Lecture notes on mathematical analysis*, Editura Societăţii Academice ,,Matei-Teiu Botez", Iaşi, 2008.

[2] I. Crăciun, *Calcul diferenţial*, Editura Lumina, Bucureşti, 1997.

[3] M. Mureşan, *A concrete approach to classical analysis*, Springer Verlag, New York, 2009.

[4] A. Precupanu, *Bazele analizei matematice*, Editura Polirom, Iaşi, 1998.

[5] G. Procopiuc, *Matematică*, Editura Universităţii Tehnice ,,Gh. Asachi", Iaşi, 1999.

[6] M. Roşculeţ, *Analiză matematică*, Editura didactică şi Pedagogică, Bucureşti, 1984.

[7] G. Sireţchi, *Calcul diferenţial şi integral, vol. I-II*, Editura Ştiinţifică şi Enciclopedică, Bucureşti, 1985.