# 2. ELEMENTE DE MECANICĂ NEWTONIANĂ

Mecanica newtoniană studiază mişcarea corpurilor macroscopice ce se deplasează cu viteze mici în comparaţie cu viteza luminii, cauzele acestei mişcări precum şi interactiunile dintre corpuri.

## *2.1. Cinematică*

### 2.1.1. Definiţii. Mărimi fundamentale

Cinematica, ca parte a mecanicii, studiază mişcarea corpurilor fără a lua în consideraţie cauzele care o determină. Ea ne arată cum se mişcă efectiv corpurile, furnizându-ne legile de mişcare.

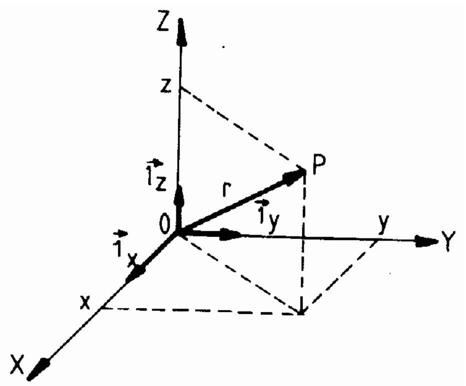


Fig. 2.1

Studiul mişcarii unui corp presupune observarea unui obiect definit suficient de clar pentru a fi transsubiectiv, astfel încât toţi subiecţii să se poată referi în acelaşi mod la acesta. Pe de altă parte este necesar să se reducă, pe cât posibil, gradul de complexitate al obiectului de interes. Reducerea maximă a gradului de complexitate al unui obiect implică reducerea tuturor aspectelor acestuia până la simpla lui prezenţă în spaţiu, făcându-se abstractie inclusiv de extinderea spaţială, respectiv de forma obiectului. Definim astfel **punctul material** ca prezenţă a corpului într-un punct geometric. În momentul în care facem acest lucru avem nevoie de un suport matematic care este **spaţiul euclidian tridimensional**. În acest spaţiu identificăm corpul material cu punctul geometric, $P$, respectiv cu **vectorul de poziţie** $\vec{r}$ al acestuia, adică cu ansamblul celor trei proiecții ale lui $\vec{r}$ pe axele unui sistem de referință cartezian, pe care îl vom numi sistemul laboratorului (Fig. 2.1).

Avem nevoie de o mărime fundamentală, **lungimea**, pentru a fi capabili să discutăm configurația unui sistem, respectiv să precizăm pozițiile relative ale obiectelor, adică ale punctelor materiale.

Construcția cinematicii necesită însă introducerea unei a doua mărimi fundamentale, **timpul**. Devine astfel posibil studiul mişcării corpului, vectorul de poziție $\vec{r}$ devenind o funcție vectorială de timp, $\vec{r}(t)$, descrisă de ansamblul celor trei funcții scalare $x(t), y(t)$ şi $z(t)$.

Din acest moment studiul cinematic al mişcarii corpului se reduce la studiul matematic al funcției vectoriale $\vec{r} = \vec{r}(t)$.

### 2.1.2. Vectorul viteză

Datorită mişcării, corpul, considerat punct material, ocupă diferite poziții în spațiu. Curba care conține totalitatea pozițiilor succesive ocupate de un corp aflat în mişcare se numeşte **traiectorie**.

Fie $\Gamma$ traiectoria punctului material, $M_1$ şi $M_2$ două poziții ale acestuia la momentele $t_1$ şi $t_2$, definite de vectorii de poziție $\vec{r}(t_1)$ şi $\vec{r}(t_2)$ şi originea sistemului de referință O (Fig. 2.2).

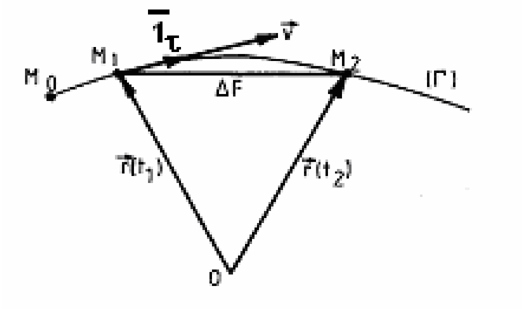


Fig. 2.2

Definim **viteza instantanee** $\vec{v}$, într-un punct oarecare al traiectoriei, ca limita spre care tinde raportul dintre $\vec{r}(t_2) - \vec{r}(t_1)$ şi $t_2 - t_1$ atunci când $t_2 \to t_1$, respectiv:

$$\vec{v} = \lim_{t_2 \to t_1} \frac{\vec{r}(t_2) - \vec{r}(t_1)}{t_2 - t_1}. \tag{2.1}$$

Cum în sistemul de referință al laboratorului vectorul de poziție al punctului material:

$$\vec{r} = x\vec{1}_x + y\vec{1}_y + z\vec{1}_z, \tag{2.2}$$

este o funcție variabilă în timp:

$$\vec{r}(t) = x(t)\vec{1}_x + y(t)\vec{1}_y + z(t)\vec{1}_z, \tag{2.3}$$

viteza $\vec{v}$ va fi dată de:

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{dx}{dt}\vec{1}_x + \frac{dy}{dt}\vec{1}_y + \frac{dz}{dt}\vec{1}_z, \tag{2.4}$$

sau, utilizând o notație frecvent folosită $\frac{df}{dt} = \dot{f}$, aceasta se mai scrie:

$$\vec{v} = \dot{\vec{r}}(t) = \dot{x}(t)\vec{1}_x + \dot{y}(t)\vec{1}_y + \dot{z}(t)\vec{1}_z. \tag{2.5}$$

În ultimele două relații se evidențiază componentele vitezei față de referențialul cartezian, respectiv:

$$v_x = \frac{dx}{dt} = \dot{x}, v_y = \frac{dy}{dt} = \dot{y}, v_z = \frac{dz}{dt} = \dot{z}. \tag{2.6}$$

Mişcarea punctului material poate fi descrisă şi cu ajutorul coordonatei $s$ care ne dă poziția corpului pe traiectoria $\Gamma$ ca lungimea măsurată față de o origine arbitrară $O'$ situată pe traiectoria $\Gamma$.

Coordonata $s$ este o funcție scalară de timp, $s = s(t)$, derivata sa este tot un scalar şi reprezintă mărimea vitezei pe traiectorie, adică:

$$v = \frac{ds}{dt}. \tag{2.7}$$

Dacă notăm cu $\vec{1}_\tau$ versorul tangentei la traiectorie (Fig. 2.2), atunci:

$$\frac{d\vec{r}}{ds} = \vec{1}_\tau. \tag{2.8}$$

astfel că viteza $\vec{v}$ se scrie:

$$\vec{v} = \frac{ds}{dt}\vec{1}_\tau . \tag{2.9}$$

Din ultima relație rezultă că vectorul viteză, definit în fiecare punct al traiectoriei şi la orice moment de timp, este tangent la traiectoria punctului material, sensul fiind dat de sensul mişcării.

### 2.1.3. Vectorul accelerație

Vectorul **accelerație** la un moment de timp $t$ este vectorul $\vec{a}$ definit ca derivata vectorului viteză în raport cu timpul la momentul considerat:

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} . \tag{2.10}$$

Componentele accelerației se obțin imediat:

$$\begin{aligned} a_x &= \frac{dv_x}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2} = \ddot{x} \\ a_y &= \frac{dv_y}{dt} = \frac{d^2y}{dt^2} = \ddot{y} \\ a_z &= \frac{dv_z}{dt} = \frac{d^2z}{dt^2} = \ddot{z} \end{aligned} \tag{2.11}$$

Astfel vectorul accelerație se scrie:

$$\vec{a} = a_x\vec{1}_x + a_y\vec{1}_y + a_z\vec{1}_z = \ddot{x}\vec{1}_x + \ddot{y}\vec{1}_y + \ddot{z}\vec{1}_z . \tag{2.12}$$

În afară de sistemul de referință al laboratorului, pentru precizarea poziției unui punct material se defineşte şi un sistem de referință propriu cu originea în punctul material şi axele date de versorii $\vec{1}_\tau$ şi $\vec{1}_n$, unde $\vec{1}_n$ este versorul normal la traiectoria $\Gamma$ (Fig. 2.3) şi orientat spre interiorul acesteia. Trebuie subliniat faptul că $\vec{1}_\tau$ şi $\vec{1}_n$ sunt funcții de timp.

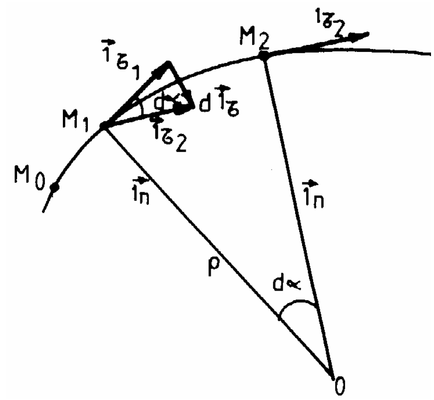


Fig. 2.3

Astfel, pornind de la relația (2.9), pe care o derivăm în raport cu timpul, expresia accelerației se scrie:

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d^2 s}{dt^2}\vec{1}_\tau + \frac{ds}{dt}\frac{d\vec{1}_\tau}{dt} = \frac{d^2 s}{dt^2}\vec{1}_\tau + \frac{ds}{dt}\frac{\left|d\vec{1}_\tau\right|}{dt}\vec{1}_n \qquad (2.13)$$

unde conform Fig. 2.3 s-a operat substituția $d\vec{1}_\tau = \left|d\vec{1}_\tau\right| \cdot \vec{1}_n$.

Din Fig. 2.3, la limita $t_2 \to t_1$, avem:

$$d\alpha = \left|d\vec{1}_\tau\right| \qquad \text{şi} \qquad ds = \rho d\alpha, \qquad (2.14)$$

unde $\rho$ este raza de curbură a traiectoriei în punctul considerat.

Introducând (2.13) în (2.12) şi ținând seama de (2.7), avem:

$$\vec{a} = \frac{d^2 s}{dt^2}\vec{1}_\tau + \frac{v^2}{\rho}\vec{1}_n. \qquad (2.15)$$

Relația (2.14) reprezintă descompunerea accelerației după cele două direcții de interes: tangenta la curbă şi normala la aceasta.

Componenta după direcția tangentei, numită **accelerație tangențială**, are mărimea $a_\tau = \frac{d^2 s}{dt^2}$ şi sensul mişcării atunci când viteza creşte şi invers mişcării atunci când viteza scade.

Componenta după direcţia normalei, numită **acceleraţie normală**, are modulul $a_n = \frac{v^2}{\rho}$ şi este totdeauna normală pe viteză, fiind orientată înspre concavitatea curbei (Fig. 2.4).

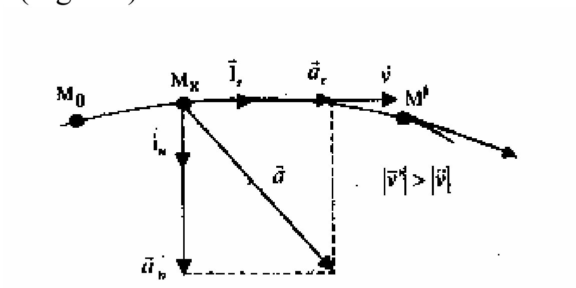

Fig. 2.4

### 2.1.4. Mişcarea rectilinie

**Mişcarea rectilinie** este mişcarea a cărei traiectorie este o dreaptă. Dacă, de exemplu, traiectoria este paralelă cu axa $Ox$, parcursul $s$ pe traiectorie este chiar coordonata $x$, iar mărimea vitezei şi mărimea acceleraţiei sunt:

$$v = \frac{dx}{dt}, \quad a = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2}, \tag{2.16}$$

Dacă mărimea vitezei este constantă, mişcarea este **uniformă**. Evident, pentru acest caz acceleraţia este nulă. Mişcarea cu acceleraţie constantă se numeşte **mişcare uniform variată**:

$$\vec{a} = \text{const.}$$

Legile acestei mişcări rezultă în urma integrării ecuaţiilor (2.15):

$$\begin{aligned} v &= v_0 + at \\ x &= x_0 + v_0 t + \frac{at^2}{2} \end{aligned} \tag{2.17}$$

unde constantele de integrare $v_0$ şi $x_0$, pe care le vom numi **condiţii iniţiale ale mişcării**, reprezintă poziţia şi viteza corpului la momentul, $t = 0$.

Dacă punctul material se deplasează pe o direcție oarecare, atunci ecuațiile (2.17) devin:

$$\vec{v} = \vec{v}_0 + \vec{a}t$$
$$\vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{v}_0 t + \frac{\vec{a}t^2}{2}. \tag{2.17'}$$

Cunoaşterea legilor de mişcare şi a condițiilor inițiale permite determinarea poziției şi vitezei corpului deci a stării acestuia, la orice moment ulterior de timp.

### 2.1.5. Mişcarea circulară

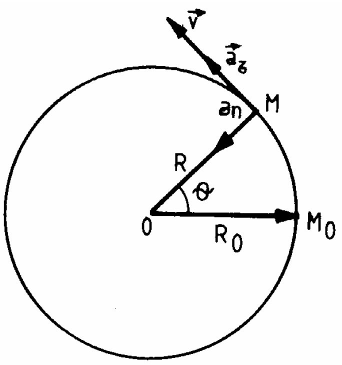


Fig. 2.5

Să considerăm un punct material $M$ aflat în mişcare pe o traiectorie circulară de rază $R$ (Fig. 2.5). În orice moment, poziția punctului material pe traiectorie este determinată de unghiul $\theta$ pe care raza vectoare $\vec{R}$, $\vec{R} = \overline{OM}$, îl face cu raza de referință $\overrightarrow{OM_0}$. Cum arcul $s$ este egal cu $R\theta$, conform relației (2.8) viteza $v$ pe traiectorie va fi:

$$v = \frac{ds}{dt} = R\frac{d\theta}{dt} = R\omega, \tag{2.18}$$

unde $\omega = \frac{d\theta}{dt}$ este **viteza unghiulară**.

Pe toată durata mişcarii, accelerația normală va fi orientată spre centru, iar marimea ei în modul este dată de

$$a_n = \frac{v^2}{R} = R\omega^2. \tag{2.19}$$

Accelerația tangențială este:

$$a_\tau = \frac{d^2s}{dt^2} = R\frac{d\omega}{dt} = R\varepsilon \tag{2.20}$$

unde $\varepsilon = \frac{d\omega}{dt}$ reprezintă **accelerația unghiulară**.

Dacă viteza unghiulară este constantă, $\omega = \text{const.}$, mişcarea se numeşte **circular uniformă**. În acest caz accelerația tangențială este nulă.

Vectorul viteză unghiulară $\vec{\omega}$ are ca suport axa de rotaţie perpendiculară în O pe planul figurii, iar sensul este cel care rezultă din relaţia:

$$\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{R}. \tag{2.21}$$

## *2.2. Principiile mecanicii newtoniene*

Cinematica răspunde la întrebarea: "Cum se mişcă corpurile?" neluând în discuţie nici un moment cauzele mişcării. În momentul în care se pune întrebarea: "De ce se mişcă un corp într-un anumit fel?", se trece la dinamică. Întrebându-ne despre cauze, răspunsul ne va conduce imediat la interacţii drept cauze ale modificării stării de mişcare a corpului, respectiv la forţe.

Analiza experimentelor acumulate în timp privind mişcarea corpurilor şi influenţa interacţiunii dintre corpuri asupra mişcării i-au permis lui Isaac Newton să construiască o teorie fizică unitară asupra tuturor fenomenelor care apar în interacţiunile mecanice dintre corpurile macroscopice precum şi asupra mişcării acestora. Astfel, s-a născut mecanica clasică sau **mecanica newtoniană**.

Înainte de a enunţa principiile care stau la baza mecanicii newtoniene trebuie să amintim că aceasta este construită pe ideea de **spaţiu absolut** şi **timp universal**, independent de spaţiu. Un **sistem de referinţă absolut** poate să fie aproximat printr-un sistem de referinţă având originea în centrul de greutate al sistemului solar şi axele orientate spre trei stele fixe.

Aşa cum am mai discutat, mecanica newtoniană explică corect numai mişcarea corpurilor macroscopice având viteze mici în comparaţie cu viteza luminii. Extinderea legilor mecanicii la viteze mari devine posibilă o dată cu apariţia teoriei relativităţii a lui Einstein. Pe de altă parte studiul mişcării la nivelul atomic şi subatomic (al microparticulelor) constituie obiectul mecanicii cuantice, elaborată în prima jumătate a secolului XX. Teoria relativităţii şi mai ales mecanica cuantică au adus după ele o dezvoltare explozivă a întregii fizicii, urmată de rezultate tehnologice remarcabile.

### 2.2.1. Principiul inerţiei

Enunţul primului principiu, cunoscut ca **principiul inerţiei**, în formularea lui Newton, cu referire la spaţiul absolut este: "*Orice corp îşi păstrează la infinit starea lui de repaus sau de mişcare rectilinie şi uniformă, dacă nu este constrâns să-şi modifice această stare de mişcare prin intervenţia vreunei forţe imprimate*".

Proprietatea intrinsecă a corpului, considerat punct material, de a-şi păstra starea de mişcare rectilinie şi uniformă, respectiv de a se împotrivi modificării acesteia, se numeşte **inerţie**. Experienţa ne arată că inerţia diferă de la un corp la altul aceasta fiind o caracteristică proprie fiecărui corp. Apare astfel necesitatea introducerii unei a treia mărimi fundamentale în mecanică, ca măsură a inerției, şi anume **masa inerțială**, $m$.

Principiul inerției permite să se introducă **sistemul de referință inerțial**, ca fiind sistemul de referință în care este respectat principiul inerției. Toate sistemele de referință inerțiale sunt echivalente între ele şi se deplasează unele față de altele cu viteze constante.

### 2.2.2. Principiul fundamental

Newton introduce în enunțul principiului inerției forța imprimată drept cauză a modificării stării de mişcare. El defineşte **forța** prin propoziția următoare: “*Forța imprimată este acțiunea exercitată asupra unui corp, pentru a-i schimba starea de repaus sau de mişcare rectilinie şi uniformă*”. Cum acțiunea exercitată asupra unui corp nu poate fi făcută decât de un alt corp, rezultă că forța este o mărime care descrie fizic **interacțiunea** dintre corpuri.

Între **forța** $\vec{F}$, definită ca **mărimea fizică ce descrie interacțiunile dintre corpuri**, **masa** $m$, ca **proprietate a corpului de a se împotrivi modificării starii de mişcare** şi accelerația $\vec{a}$, ca mărime cinematică, există relația:

$$\vec{F} = m\vec{a}. \tag{2.22}$$

Această ecuație, cunoscută ca **principiul fundamental al mecanicii** este **ecuația fundamentală a dinamicii**.

Deoarece în mecanica newtoniană masa $m$ nu depinde de viteză, fiind constantă în timp, dependența accelerației $\vec{a}$ de viteza $\vec{v}$ este dată de relația (2.11), ecuația fundamentală a dinamicii se poate scrie şi sub forma:

$$\vec{F} = \frac{d}{dt}(m\vec{v}) = \frac{d\vec{p}}{dt}, \tag{2.23}$$

unde prin:

$$\vec{p} = m\vec{v} \tag{2.24}$$

se defineşte **impulsul corpului**. Dacă relația (2.22) exprimă proporționalitatea forței cu accelerația, relația (2.23) ne arată că derivata impulsului în raport cu timpul este egală cu rezultanta forțelor exterioare care acționează asupra corpului.

Aceste afirmații reprezintă enunțuri alternative ale principiului fundamental al dinamicii.

### 2.2.3. Principiul acțiunii și reacțiunii

În formularea lui Newton, **principiul actiunii și reacțiunii** are următorul enunț: "*acțiunile reciproce a două corpuri sunt întotdeauna egale și dirijate în sensuri contrare*". Dacă notăm cu $\vec{F}_{12}$ forța cu care corpul $1$, aflat în interacțiune cu corpul $2$, acționează asupra acestuia și cu $\vec{F}_{21}$ forța cu care corpul $2$ reacționează, acționând asupra corpului $1$ (Fig. 2.6), conform enunțului, avem:

$$\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21}. \tag{2.25}$$

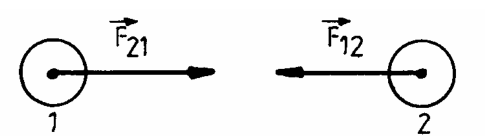


Fig. 2.6

### 2.2.4. Principiul suprapunerii

Conform **principiului suprapunerii**, dacă asupra unui corp de masă $m$ acționează simultan forțele $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3, ..., \vec{F}_n$ acțiunea lor este aceeași cu acțiunea rezultantei $\vec{F}$, calculată ca suma vectorială a acestora:

$$\vec{F} = \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i . \tag{2.26}$$

În baza acestui principiu rezultă ca fiecare forță $\vec{F}_i$ acționează independent, prezența celorlalte forțe neperturbând efectul acțiunii ei. Deci, fiecare forță $\vec{F}_i$ va produce o accelerație $\vec{a}_i$, $\vec{F}_i = m\vec{a}_i$, astfel că sumând avem:

$$\vec{F} = \sum \vec{F}_i = m \sum \vec{a}_i = m\vec{a}.$$

unde $\vec{a}$ este accelerația produsă de forța rezultantă $\vec{F}$.

### 2.2.5. Principiul relativității galileene

Să considerăm două sisteme de referință inerțiale (Fig. 2.7), aşa cum au fost definite în baza principiului inerției. Sistemul $S'$ se deplasează cu viteză constantă $\vec{u}$ față de sistemul $S$. La momentul inițial $t_0 = 0$ vectorul $\vec{R}_0$ determină poziția originii $O'$ a sistemului $S'$ față de sistemul $S$. Un punct material de masă $m$ aflat în mişcare este identificat la un moment dat față de sistemul de referință $S'$ prin vectorul de poziție $\vec{r}'(t')$, iar față de sistemul $S$ prin vectorul de poziție $\vec{r}(t)$ (Fig. 2.7).

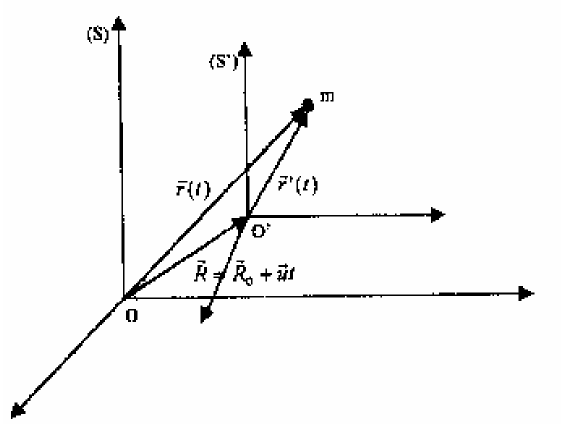


Fig. 2.7

Legătura dintre coordonatele punctului material în sistemul $S'$ şi coordonatele sale în sistemul $S$ se exprimă prin relațiile:

$$\begin{aligned} t' &= t \\ \vec{r}' &= \vec{r} - \vec{R}. \end{aligned} \tag{2.27}$$

Prima relație este scrisă presupunându-se că timpul are un caracter absolut, fiind independent de spațiu şi de sistemul de referință, iar a doua rezultă din figura 2.7.

Aceste relații sunt echivalente cu următoarele patru relații scalare:

$$\begin{aligned} x' &= x - u_x t - x_0 \\ y' &= y - u_y t - y_0 \\ z' &= z - u_z t - z_0 \\ t' &= t \end{aligned} \tag{2.28}$$

unde $u_x, u_y, u_z$ sunt componentele vitezei $\vec{u}$ în sistemul $S$.

Relațiile (2.27), sau forma echivalentă (2.28), constituie **grupul de transformări Galilei**.

Acesta are proprietatea remarcabilă de a lăsa invariantă legea fundamentală a dinamicii. Într-adevăr, dacă derivăm de două ori relația (2.27), deoarece $\ddot{\vec{R}} = 0$, obținem $\vec{a}' = \vec{a}$ și deoarece interacția dintre corpuri este independentă de sistemul de referință arbitrar ales la care raportăm mişcarea acestora: $\vec{F}'(x', y', z', t) = \vec{F}(x, y, z, t)$, rezultă că legea fundamentală a dinamicii nu se schimbă la trecerea dintr-un referențial inerțial la altul. Acest rezultat este cunoscut drept **principiul relativității galileene**, sau principiul relativității mecanice. Afirmația făcută anterior, că toate sistemele inerțiale sunt echivalente între ele devine o formulare a principiului relativității mecanice.

### 2.2.6. Mişcarea punctului material într-un sistem de referință neinerțial

Legea fundamentală a mecanicii, sub forma $\vec{F} = m\vec{a}$, descrie mişcarea punctului material față de un sistem de referință inerțial.

Conform definiției date, forța $\vec{F}$, descrie interacția dintre două corpuri. În afară de aceasta se mai defineşte şi o **pseudoforță** numită **forță de inerție**, notată tot cu simbolul $\vec{F}$ şi având aceeaşi dimensiune.

Să considerăm un referențial inerțial $S$, considerat fix şi un referențial neinerțial $S'$ având o mişcare accelerată față de $S$ (Fig. 2.8).

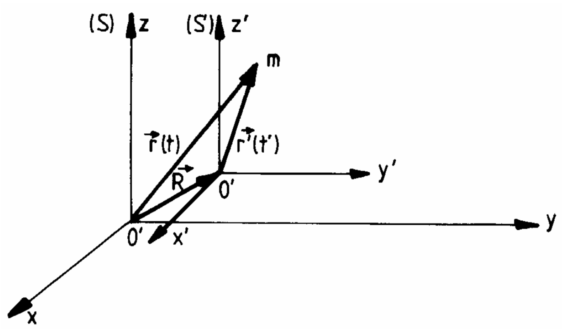


Fig. 2.8

Poziția unui punct material de masă $m$ față de sistemul neinerțial $S'$ este dată de vectorul de poziție:

$$\vec{r}' = x'\vec{1}'_x + y'\vec{1}'_y + z'\vec{1}'_z. \tag{2.29}$$

Dacă $\vec{r}$ este vectorul de poziție al punctului material față de sistemul inerțial $S$, iar $\vec{R}$ este vectorul de poziție al originii $O'$ a sistemului $S'$ față de originea $O$ a sistemului $S$, atunci:

$$\vec{r} = \vec{r}' + \vec{R}. \tag{2.30}$$

Să considerăm, pentru început, că mişcarea sistemului neinerțial $S'$ este o mişcare de translație. Viteza punctului material față de sistemul $S$ este:

$$\vec{v} = \dot{\vec{r}} = \dot{\vec{r}}' + \dot{\vec{R}}, \tag{2.31}$$

sau $\vec{v} = \vec{v}' + \vec{V}$, unde:

$$\vec{v}' = \dot{x}'\vec{1}_x' + \dot{y}'\vec{1}_y' + \dot{z}'\vec{1}_z' \tag{2.32}$$

este viteza punctului material față de $S'$, iar $\vec{V} = \dot{\vec{R}}$, este viteza originii $O'$ a sistemului $S'$ față de originea $O$ a sistemului $S$.

Accelerația punctului material față de sistemul $S$ se obține derivând viteza $\vec{v}$ în raport cu timpul

$$\vec{a} = \dot{\vec{v}} = \ddot{\vec{r}}' + \ddot{\vec{R}} \tag{2.33}$$

sau $\vec{a} = \vec{a}' + \vec{A}$, unde $\vec{a}'$ este accelerația punctului material față de sistemul $S'$, iar $\vec{A} = \dot{\vec{V}} = \ddot{\vec{R}}$ este accelerația sistemului de referință neinerțial $S'$ față de sistemul $S$.

Influența mişcării de translație a sistemului neinerțial $S'$ având accelerația $\vec{A}$ față de sistemul inerțial $S$ asupra punctului material de masă $m$ rezultă clar dacă considerăm suma forțelor de interacție ce se exercită asupra sa egală cu zero, adică $\vec{F} = 0$. În acest caz $\vec{F} = m\vec{a} = 0$ implică $\vec{a} = 0$, iar din relația (2.33) rezultă că:

$$\vec{a}' = -\vec{A}. \tag{2.34}$$

Corpul, considerat punct material, va avea față de sistemul $S'$ o accelerație $\vec{a}' = -\vec{A}$ datorată exclusiv mişcării neinerțiale a acestuia (Fig. 2.9).

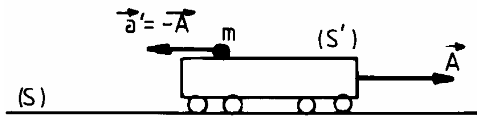


Fig. 2.9

Forța de interacție, caracterizând exclusiv interacția corpurilor, este independentă de sistemul de referință, fiind astfel zero şi în sistemul $S'$. Pentru a putea aplica legea fundamentală a dinamicii şi în sistemele neinerțiale, se consideră o pseudoforță numită forță de inerție dată, prin definiție, de produsul dintre masa corpului şi accelerația sistemului neinerțial cu semn schimbat:

$$\vec{F}_i = -m\vec{A}\,. \tag{2.38}$$

Astfel, adunând la forțele de interacțiune şi pseudoforța $\vec{F}_i$ putem aplica principiul al doilea al dinamicii şi în cazul sistemelor neinerțiale.

Ca o aplicație, vom considera, în continuare, un sistem de referință neinerțial $S'$ aflat în raport cu sistemul inerțial $S$ într-o mişcare de rotație caracterizată de vectorul viteză unghiulară $\vec{\omega} = \text{ct.}$ (Fig. 2.10).

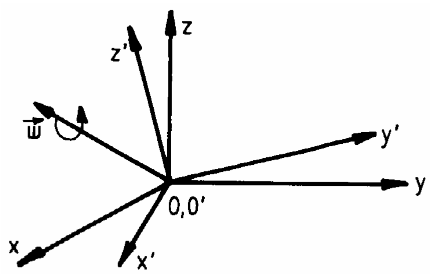


Fig. 2.10

Deoarece $S$ şi $S'$ au originea comună, vectorii $\vec{r}$ şi $\vec{r}'$ sunt identici, adică stau în relația $\vec{r} = \vec{r}'$:

$$x\vec{1}_x + y\vec{1}_y + z\vec{1}_z = x'\vec{1}_x' + y'\vec{1}_y' + z'\vec{1}_z'\,. \tag{2.36}$$

În acest caz viteza $\vec{v}$ a punctului material față de sistemul $S$ va fi:

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d\vec{r}'}{dt}\,.$$

La calculul derivatei $\dot{\vec{r}}'$ folosind ecuația (2.39) trebuie să avem în vedere că şi versorii axelor sistemului $S'$ sunt variabili în timp, deci:

$$\dot{\vec{r}}' = \dot{x}'\vec{1}_x' + \dot{y}'\vec{1}_y' + \dot{z}'\vec{1}_z' + x'\dot{\vec{1}}_x' + y'\dot{\vec{1}}_y' + z'\dot{\vec{1}}_z' . \tag{2.37}$$

Conform relației (2.32), primii trei termeni din membrul drept al ecuației (2.37) reprezintă viteza $\vec{v}'$ a punctului material față de sistemul mobil $S'$:

$$\vec{v}' = \dot{x}'\vec{1}_x' + \dot{y}'\vec{1}_y' + \dot{z}'\vec{1}_z' . \tag{2.38}$$

Acum, ținând cont de relația (2.21), putem scrie:

$$\dot{\vec{1}}_x' = \vec{\omega} \times \vec{1}_x', \quad \dot{\vec{1}}_y' = \vec{\omega} \times \vec{1}_y' \text{ şi } \dot{\vec{1}}_z' = \vec{\omega} \times \vec{1}_z' \tag{2.39}$$

astfel că, ultimii trei termeni din (2.37) devin:

$$x'\left(\vec{\omega} \times \vec{1}_x'\right) + y'\left(\omega \times \vec{1}_y'\right) + z'\left(\vec{\omega} \times \vec{1}_z'\right) = \vec{\omega} \times \vec{r}' . \tag{2.40}$$

Introducând notația:

$$\vec{u} = \vec{\omega} \times \vec{r}'$$

viteza corpului față de sistemul $S$, va fi:

$$\vec{v} = \vec{v}' + \vec{\omega} \times \vec{r}' = \vec{v}' + \vec{u} . \tag{2.41}$$

Dacă, simultan cu mişcarea de rotație este prezentă şi o mişcare de translație a sistemului $S'$ față de $S$, atunci viteza corpului față de sistemul fix $S$ va fi:

$$\vec{v} = \vec{v}_0 + \vec{v}' + \vec{u} . \tag{2.42}$$

Se obişnuieşte ca viteza $\vec{v}$ să se numească **viteză absolută**, viteza $\vec{v}'$ **viteză relativă** fiind notată cu $\vec{v}_r$, iar suma $\vec{v}_0 + \left(\vec{\omega} \times \vec{r}'\right)$, numită **viteză de transport** este notată cu $\vec{v}_t$, astfel încât:

$$\vec{v} = \vec{v}_r + \vec{v}_t . \tag{2.43}$$

Accelerația absolută a mişcării se obține derivând în raport cu timpul viteza absolută dată de relația (2.42), adică:

$$\vec{a} = \dot{\vec{v}}_0 + \dot{\vec{v}}' + \dot{\vec{u}}. \tag{2.44}$$

Calculăm pentru început derivata în raport cu timpul a vitezei relative $\vec{v}'$ (2.38):

$$\dot{\vec{v}}' = \ddot{x}'\vec{1}_x' + \ddot{y}'\vec{1}_y' + \ddot{z}'\vec{1}_z' + \dot{x}'\dot{\vec{1}}_x' + \dot{y}'\dot{\vec{1}}_y' + \dot{z}'\dot{\vec{1}}_z'. \tag{2.45}$$

Primii trei termeni reprezintă derivata a doua a vectorului $\vec{r}'$ față de sistemul $S'$, adică accelerația $\vec{a}'$:

$$\ddot{\vec{r}}' = \vec{a}' = \ddot{x}'\vec{1}_x' + \ddot{y}'\vec{1}_y' + \ddot{z}'\vec{1}_z'. \tag{2.46}$$

Dacă se au în vedere relațiile (2.39), atunci se poate scrie:

$$\begin{aligned}
\dot{x}'\dot{\vec{1}}_x' &= \dot{x}'\left(\vec{\omega} \times \vec{1}_x'\right) = \vec{\omega} \times v_x' \vec{1}_x' \\
\dot{y}'\dot{\vec{1}}_y' &= \dot{y}'\left(\vec{\omega} \times \vec{1}_y'\right) = \vec{\omega} \times v_y' \vec{1}_y' \\
\dot{z}'\dot{\vec{1}}_z' &= \dot{z}'\left(\vec{\omega} \times \vec{1}_z'\right) = \vec{\omega} \times v_z' \vec{1}_z'
\end{aligned}$$

astfel încât ultimii trei termeni ai relației (2.45) reprezintă produsul vectorial $\omega \times \vec{v}'$. În final obținem:

$$\dot{\vec{v}} = \vec{a}' + \vec{\omega} \times \vec{v}'. \tag{2.47}$$

Ultimul termen din membrul drept al ecuației (2.44), $\dot{\vec{u}}$, se obține derivând în raport cu timpul membrul stâng al ecuației (2.40), care reprezintă o formă anterioară a lui $\vec{u}$:

$$\begin{aligned}
\dot{\vec{u}} = \frac{d}{dt}\left[x'\left(\vec{\omega} \times \vec{1}_x'\right) + y'\left(\omega \times \vec{1}_y'\right) + z'\left(\vec{\omega} \times \vec{1}_z'\right)\right] = \dot{x}'\left(\vec{\omega} \times \vec{1}_x'\right) + \dot{y}'\left(\omega \times \vec{1}_y'\right) + \dot{z}'\left(\vec{\omega} \times \vec{1}_z'\right) + \\
+ x'\left(\vec{\omega} \times \dot{\vec{1}}_x'\right) + y'\left(\omega \times \dot{\vec{1}}_y'\right) + z'\left(\vec{\omega} \times \dot{\vec{1}}_z'\right) + \dot{\vec{\omega}} \times \vec{r}'.
\end{aligned}$$

Folosind acest rezultat şi ținând cont de relațiile (2.39), avem:

$$\begin{aligned}\dot{\vec{u}} &= \vec{\omega}\times\vec{v}' + x'\left(\vec{\omega}\times\vec{\omega}\times\vec{1}'_x\right) + y'\left(\vec{\omega}\times\vec{\omega}\times\vec{1}'_y\right) + \\ &+ z'\left(\vec{\omega}\times\vec{\omega}\times\vec{1}'_z\right) + \dot{\vec{\omega}}\times\vec{r}' = \vec{\omega}\times\vec{v}' + \left(\vec{\omega}\times\vec{\omega}\times\vec{r}'\right) + \dot{\vec{\omega}}\times\vec{r}'.\end{aligned} \tag{2.48}$$

Astfel, accelerația absolută $\vec{a}$, dată de relația (2.44), în care se înlocuiesc $\dot{\vec{v}}'$ şi $\dot{\vec{u}}$ cu expresiile lor date de (2.50) şi respectiv (2.51), devine:

$$\vec{a} = \vec{a}_0 + \vec{a}' + \left(\vec{\omega}\times\vec{\omega}\times\vec{r}'\right) + 2\vec{\omega}\times\vec{v}' + \dot{\vec{\omega}}\times\vec{r}'. \tag{2.49}$$

Dacă vectorul viteză unghiulară $\vec{\omega}$ nu variază în timp, atunci din relația (2.49) dispare termenul $\dot{\vec{\omega}}\times\vec{r}'$, astfel încât accelerația absolută va fi:

$$\vec{a} = \vec{a}_0 + \vec{a}' + \left(\vec{\omega}\times\vec{\omega}\times\vec{r}'\right) + 2\vec{\omega}\times\vec{v}'. \tag{2.50}$$

Semnificația termenilor care apar în expresia lui $\vec{a}$ este următoarea: $\vec{a}_0$ este accelerația originii sistemului mobil, $\vec{a}'$ reprezintă accelerația relativă a punctului material față de sistemul mobil, iar $\vec{\omega}\times\vec{\omega}\times\vec{r}'$ este **accelerația centripetă** $\vec{a}_c$, care dacă se dezvoltă dublul produs vectorial, devine:

$$\vec{a}_c = -\omega^2\vec{\rho}, \tag{2.51}$$

unde $\vec{\rho}$ este vectorul rază de rotație (Fig. 2.11).

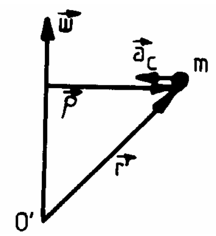

Fig. 2.11

Termenul $\dot{\vec{\omega}}\times\vec{r}'$ este o **accelerație tangențială** unde $\dot{\vec{\omega}}$ reprezintă **accelerația unghiulară**, iar termenul $2\vec{\omega}\times\vec{v}' = \vec{a}_{C0}$ reprezintă **accelerația Coriollis**, care este tot timpul perpendiculară pe axa de rotație şi pe viteza relativă $\vec{v}'$.

Suma $\vec{a}_0 + \dot{\vec{\omega}}\times\vec{r}' + \left(\vec{\omega}\times\vec{\omega}\times\vec{r}'\right) = \vec{a}_t$ se numeşte **accelerație de transport**. Observăm că aceasta este o accelerație la care se reduce accelerația absolută în lipsa accelerației relative.

În baza relației (2.35), forța de inerție actionând asupra punctului material în sistemul $S'$ este prin definiție:

$$\vec{F}_i = -m\vec{a}_{S'} \tag{2.52}$$

unde

$$\vec{a}_{S'} = \vec{a}_0 + \dot{\vec{\omega}} \times \vec{r}' + (\vec{\omega} \times \vec{\omega} \times \vec{r}') + 2\vec{\omega} \times \vec{v}'. \tag{2.53}$$

Atunci, forța totală, ca sumă dintre forța de interacțiune şi pseudoforța, $\vec{F}_i$, va fi:

$$\vec{F}' = \vec{F} + \vec{F}_i = \vec{F} - m\vec{a}_{S'}. \tag{2.54}$$

Cum $\vec{F} = m\vec{a}, \vec{F}_i = -m\vec{a}_{S'}$ şi $\vec{a}' = \vec{a} - \vec{a}_{S'}$, avem:

$$\vec{F}' = m\vec{a}'. \tag{2.55}$$

## *2.3. Teoreme de conservare*

### 2.3.1. Conservarea impulsului

Am definit vectorul impuls ca produsul dintre masa corpului şi vectorul viteză: $\vec{p} = m\vec{v}$. Legea fundamentală a mecanicii, scrisă cu ajutorul impulsului $\vec{p}$, este:

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt}.$$

Dacă suma forțelor care acționează asupra punctului material de impuls $\vec{p}$ este zero, $\vec{F} = 0$, atunci:

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = 0 \tag{2.56}$$

de unde rezultă:

$$\vec{p}(t) = \vec{p}(t_0) = \text{const.} \tag{2.57}$$

Ultimele două relații, echivalente, exprimă conser-varea impulsului mecanic, respectiv: impulsul unui punct material izolat de exterior $(\vec{F} = 0)$ se păstrează constant în timp în raport cu un sistem de referință inerțial.

### 2.3.2. Conservarea momentului cinetic

Prin definiție, **momentul unei forțe** $\vec{F}$ în raport cu un punct $O$ este produsul vectorial:

$$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}, \tag{2.58}$$

unde $\vec{r}$ este vectorul de poziție al unui punct arbitrar al suportului forței față de punctul $O$.

**Momentul cinetic al unui corp**, considerat punct material, este momentul impulsului acestuia:

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}. \tag{2.59}$$

Derivând ultima relație în raport cu timpul şi observând că $\dot{\vec{r}} \times m\dot{\vec{r}} = 0$ obținem:

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{r} \times \dot{\vec{p}} + \dot{\vec{r}} \times \vec{p} = \vec{r} \times \vec{F} = \vec{M}. \tag{2.60}$$

Deci, viteza de variație a momentului cinetic al unui corp este dată de momentul forței care acționează asupra sa. Acest rezultat este cunoscut ca **teorema de variație a momentului cinetic**.

În cazul în care $\vec{F} = 0$ atunci $\vec{M} = 0$, şi avem:

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = 0 \text{ sau } \vec{L}(t) = \vec{L}(t_0) = \text{const.} \tag{2.61}$$

Relația (2.61) exprimă **legea conservării momentului cinetic** care ne arată că vectorul moment cinetic al unui corp izolat se păstrează constant în timp.

### 2.3.3. Conservarea energiei mecanice

Să considerăm un punct material aflat în mişcare sub acțiunea unei forțe $\vec{F}$. Fie $d\vec{r}$ o deplasare elementară a punctului material. Prin definiție:

$$\overline{dL} = \vec{F} d\vec{r} \tag{2.62}$$

este **lucrul mecanic elementar** al forței $\vec{F}$ corespunzător deplasării $d\vec{r}$ a corpului. Forța $\vec{F}$ poate să depindă explicit de $\vec{r}, \vec{v}$ şi $t$, forma diferențială $\vec{F}d\vec{r}$ ne fiind, în general, o diferențială totală exactă:

$$\overline{dL} \neq d\Phi$$

şi de aceea lucrul mecanic elementar se scrie, în general, cu o bară deasupra simbolului $dL$, adică $\overline{dL}$.

Sunt cazuri în care forma diferențială $\vec{F}d\vec{r}$ se poate scrie ca o diferențială totală exactă:

$$dL = \vec{F}d\vec{r} = -dU. \tag{2.63}$$

unde mărimea $U$ este o funcție scalară numită **energie potențială**.

În acest caz, se spune că forța $\vec{F}$ derivă dintr-un potențial şi pentru a vedea ce înseamnă aceasta să scriem diferențiala funcției $U$:

$$dU = \frac{\partial U}{\partial x}dx + \frac{\partial U}{\partial y}dy + \frac{\partial U}{\partial z}dz.$$

Folosind operatorul gradient:

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x}\vec{1}_x + \frac{\partial}{\partial y}\vec{1}_y + \frac{\partial}{\partial z}\vec{1}_z. \tag{2.64}$$

$dU$ poate fi, conform celor discutate în capitolul 1, scris sub forma:

$$dU = \nabla U \cdot d\vec{r}. \tag{2.65}$$

Comparând cele două expresii ale lui $dU$ (2.63) şi (2.65), rezultă că:

$$\vec{F} = -\nabla U. \tag{2.66}$$

Astfel, forțele care satisfac relația (2.66), sunt forțe ce derivă dintr-un potențial. După cum vom vedea ele se mai numesc şi **forțe conservative**.

Să considerăm o astfel de forță şi ținând cont că $\vec{F} = m\frac{d\vec{v}}{dt}$ şi $d\vec{r} = \vec{v}dt$, lucrul mecanic elementar se scrie:

$$dL = \vec{F}d\vec{r} = m \cdot \vec{v}d\vec{v}. \tag{2.67}$$

Deoarece lucrul mecanic nu depinde de drum integrarea ultimei relații între două momente de timp $t_1$ şi $t_2$, conduce la:

$$L_{12} = \int_{t_1}^{t_2} \vec{F} d\vec{r} = \left. \frac{mv^2}{2} \right|_{t_1}^{t_2} . \tag{2.68}$$

Astfel, lucrul mecanic al forței $\vec{F}$ este egal cu variația mărimii $\frac{mv^2}{2}$, mărime care este o caracteristică a corpului şi pe care o vom numi **energie cinetică**, $E_c$:

$$E_c = \frac{mv^2}{2} . \tag{2.69}$$

Pe de altă parte, ținând cont că forța $\vec{F}$ derivă dintr-un potențial obținem:

$$-\int_{t_1}^{t_2} dU = \left. \frac{mv^2}{2} \right|_{t_1}^{t_2}$$

sau

$$-(U_2 - U_1) = E_{c1} - E_{c2} .$$

Astfel:

$$U_1 + E_{c1} = U_2 + E_{c2} = \text{const.} \tag{2.70}$$

Relația (2.70) exprimă **teorema de conservare a energiei mecanice** a unui corp. Conform acesteia, energia mecanică a unui corp care se mişcă într-un câmp de forțe care derivă dintr-un potențial se păstrează constantă în timp dacă corpul nu este supus şi altor interacții. În consecință, forțele care derivă dintr-un potențial sunt numite **forțe conservative**.

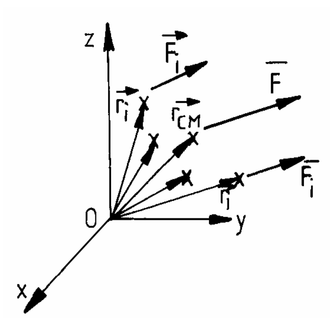

Fig. 2.12

## *2.4. Sisteme de puncte materiale*

### 2.4.1. Centrul de masă

Să considerăm un sistem de puncte materiale, de mase $m_i$ şi vectori de poziție $\vec{r}_i$, cu $i = 1,2,\ldots,n$ (Fig. 2.12).

Dacă sistemul este plasat într-un câmp de forțe de accelerație constantă $\vec{a}$, atunci asupra fiecărui punct material actionează o forță $\vec{F}_i = m_i\vec{a}$, iar momentul forței fată de origine este:

$$\vec{M}_i = \vec{r}_i \times \vec{F}_i = \vec{r}_i \times m_i\vec{a}. \tag{2.71}$$

Momentul total al forțelor care actionează asupra sistemului de puncte materiale este:

$$\vec{M} = \sum \vec{M}_i = \sum \vec{r}_i \times m_i\vec{a}. \tag{2.72}$$

Momentul total poate fi scris şi ca momentul forței rezultante care acționează asupra sistemului aplicată într-un punct, numit **centru de masă**, de vector de poziție $\vec{r}_{CM}$ a cărei expresie poate fi obținută astfel:

$$\vec{F} = \sum \vec{F}_i = \sum m_i\vec{a}$$

şi

$$\vec{M} = \sum \vec{r}_i \times m_i\vec{a} = \sum \left(\vec{r}_i \cdot m_i\right) \times \vec{a} = \left(\vec{r}_{CM} \sum m_i\right) \times \vec{a} = \vec{r}_{CM} \times \vec{F}$$

unde s-a notat:

$$\vec{r}_{CM} = \frac{\sum \vec{r}_i m_i}{\sum m_i}. \tag{2.73}$$

Atunci, **impulsul sistemului de puncte materiale** $\vec{p}$ va fi:

$$\vec{P} = \sum \vec{p}_i = \sum m_i \frac{d\vec{r}_i}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\sum m_i\vec{r}_i\right) = \sum m_i \frac{d\left(\dfrac{\sum m_i\vec{r}_i}{\sum m_i}\right)}{dt} = m\frac{d\vec{r}_{CM}}{dt} = m\vec{v}_{CM}. \tag{2.74}$$

Observăm că sistemul de puncte materiale se comportă ca şi cum întreaga masă a sistemului $m = \sum m_i$, este concentrată în centrul de masă.

### 2.4.2. Mişcarea centrului de masă

Considerând forțele interne $\vec{F}_{ij} = -\vec{F}_{ji}$ ce acționează între particulele $i$ şi $j$ se observă că rezultanta acestora este întotdeauna zero, $\vec{F}_{int} = \sum_{i,j\neq 0} \vec{F}_{ij} = 0$. Forța internă ce acționează asupra punctului material $i$ este:

$$\vec{F}_{int,i} = \sum_{j \neq i} \vec{F}_{ji} = \frac{d\vec{P}_i}{dt}.$$

Variația impulsului total al sistemului produsă de forțele interne va fi deci întotdeauna nulă:

$$\frac{d\vec{P}}{dt} = \sum_i \frac{d\vec{P}_i}{dt} = \sum_i \sum_{j \neq i} \vec{F}_{ji} = 0. \tag{2.75}$$

Astfel, impulsul total, adică impulsul centrului de masă se conservă atâta timp cât nu sunt prezente decât forțele interne. Viteza centrului de masă $\vec{v}_{CM}$ este constantă în acest caz.

Să considerăm în continuare sistemul de puncte materiale plasat într-un câmp extern de forțe. Asupra fiecărui punct material actionează $\vec{F}_{ext,i}$ care conform legii a doua a dinamicii, va determina variația impulsului acestuia:

$$\vec{F}_{ext,i} = \frac{d\vec{p}_i}{dt}.$$

Atunci, pentru întregul sistem de puncte materiale forța rezultantă $\vec{F}_{ext}$ este:

$$\vec{F}_{ext} = \sum \vec{F}_{ext,i} = \sum \frac{d\vec{p}_i}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\sum \vec{p}_i\right) = \frac{d\vec{P}}{dt} = \frac{d}{dt}\left(m\vec{v}_{CM}\right), \tag{2.76}$$

Se observă că acțiunea unui câmp de forțe extern de accelerație constantă asupra unui sistem de puncte materiale se traduce prin acțiunea rezultantei forțelor externe asupra întregii mase a sistemului plasată în centrul de masă. Dacă $\vec{F}_{ext} = 0$, atunci $\vec{P} = \text{const.}$

### 2.4.3. Momentul cinetic al unui sistem de puncte materiale

Momentul cinetic al unui punct material având impulsul $\vec{p}$ este, după cum știm, dat de:

$$\vec{\ell} = \vec{r} \times \vec{p}.$$

De asemenea, se știe că sub acțiunea unei forțe, variația momentului cinetic $\vec{\ell}$ este dată de momentul forței:

$$\frac{d\vec{\ell}}{dt} = \vec{r} \times \vec{F} = \vec{M}.$$

Pentru a putea vedea cum variază în timp momentul cinetic al sistemului de puncte materiale să observăm mai întâi că pentru fiecare pereche de particule $i$ şi $j$, forțele de interacție interne sunt egale şi de sens contrar:

$$\vec{F}_{ij} = -\vec{F}_{ji}. \tag{2.77}$$

Aceasta face ca momentul forțelor să se anuleaze pentru fiecare pereche de 2 particule (Fig. 2.13):

$$\vec{M}_{int\,i,j} = \vec{M}_{int\,i} + \vec{M}_{int\,j} = \vec{r}_i \times \vec{F}_{ji} + \vec{r}_j \times \vec{F}_{ij} = \left(\vec{r}_i - \vec{r}_j\right) \times \vec{F}_{ij} = 0. \tag{2.78}$$

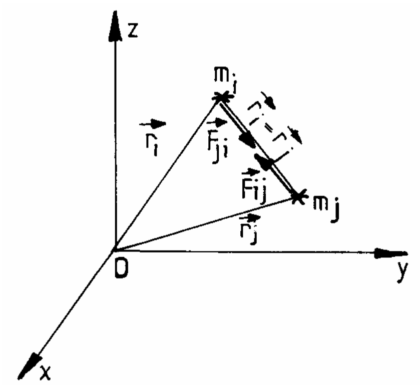


Fig. 2.13

Astfel, în absența forțelor externe, momentul cinetic total al unui sistem de puncte materiale, dat de:

$$\vec{L} = \sum \vec{\ell}_i$$

se conservă:

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = 0 \Rightarrow \vec{L} = \text{const.} \tag{2.79}$$

Dacă însă sistemul de puncte materiale se află sub actiunea unui câmp extern de forțe, atunci momentul forței $\vec{F}_{ext,i}$ va fi:

$$\vec{M}_{ext,i} = \vec{r}_i \times \vec{F}_{ext,i} \tag{2.80}$$

iar momentul total al forțelor externe este dat de:

$$\vec{M}_{ext} = \sum \vec{M}_{ext,i}\,. \tag{2.81}$$

Atunci, derivata totală în raport cu timpul a momentului cinetic al sistemului de puncte materiale plasat în câmpul extern de forțe va fi:

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\sum \vec{\ell}_i\right) = \sum \frac{d\vec{\ell}_i}{dt} = \sum \vec{M}_{ext,i} = \vec{M}_{ext}\,. \tag{2.82}$$

În acest caz, dacă $\vec{M}_{ext} = 0$, momentul cinetic total al sistemului de puncte materiale se conservă.

### 2.4.4. Energia unui sistem de puncte materiale. Conservarea energiei

Energia mecanică a unui sistem de puncte materiale se compune din energia cinetică şi energia potențială a tuturor punctelor materiale care alcătuiesc sistemul.

Pentru a vedea care este energia cinetică a sistemului, să observăm că viteza fiecărui punct material față de un sistem de referință oarecare se poate scrie ca suma dintre $\vec{v}_{CM}$ şi viteza punctului material în sistemul centrului de masă, notată cu $\vec{v}_{int,i}$:

$$\vec{v}_i = \vec{v}_{CM} + \vec{v}_{int,i}\,. \tag{2.83}$$

Atunci, energia cinetică a sistemului de puncte materiale este:

$$\begin{aligned} E_c &= \sum \frac{1}{2} m_i \vec{v}_i^{\,2} = \\ &= \sum \frac{1}{2} m_i \left(\vec{v}_{CM}^{\,2} + \vec{v}_{int,i}^{\,2} + 2\vec{v}_{CM}\cdot\vec{v}_{int,i}\right) = \\ &= \frac{1}{2} m\vec{v}_{CM}^{\,2} + \sum \frac{1}{2} m_i \vec{v}_{int,i}^{\,2} + \vec{v}_{CM}\sum m_i \vec{v}_{int,i} = \\ &= \frac{1}{2} m\vec{v}_{CM}^{\,2} + E_{c,int} + \vec{v}_{CM}\sum \vec{p}_{int,i}\,. \end{aligned} \tag{2.84}$$

Cum ultimul termen din (2.84) este nul $\left(\sum \vec{p}_{int,i} = 0\right)$, energia cinetică a sistemului de puncte materiale are în final, expresia:

$$E_c = \frac{1}{2} m\vec{v}_{CM}^{\,2} + E_{c,int}\,. \tag{2.85}$$

Energia potențială a sistemului de puncte materiale se compune din doi termeni, unul dat de energia potențială datorată forțelor interne conservative iar celălalt câmpului de forțe externe conservative în care este plasat sistemul.

Astfel, primul termen de energie potențială $E_{p,int}$ este suma energiilor potențiale datorate interacțiilor dintre perechile de puncte materiale $(i,j)$:

$$E_{p,int} = \sum_{i,j\neq i} E_{p,ij} \,. \tag{2.86}$$

Atunci când asupra sistemului nu acționează nici un fel de forțe externe (nu se efectuează lucru mecanic extern), energia proprie a sistemului de particule $E$, dată de suma:

$$E = \frac{1}{2} m\vec{v}_{CM}^{\,2} + E_{c,int} + E_{p,int}, \tag{2.87}$$

se conservă:

$$E = \text{const.} \tag{2.88}$$

În sistemul centrului de masă, energia sistemului de puncte materiale este chiar **energia internă** a acestuia, $E_{int}$:

$$E_{c,int} + E_{p,int} = E_{int} \,. \tag{2.89}$$

Dacă sistemul de puncte materiale este sub acțiunea unui câmp extern de forțe conservative, atunci sistemul are şi o **energie potențială externă** $E_{p,ext}$ pe care i-o conferă câmpul extern astfel că energia totală a sistemului de puncte materiale este dată de:

$$E_{tot} = \frac{1}{2} m\vec{v}_{CM}^{\,2} + E_{c,int} + E_{p,int} + E_{p,ext} = E + E_{p,ext} \,. \tag{2.90}$$

Între două momente de timp $t_1$ şi $t_2$ ale mişcării sistemului, lucrul mecanic al forțelor conservative externe determină variația energiei cinetice a sistemului precum şi variația, cu semn schimbat, a energiei potențiale externe a acestuia:

$$E_{c2} - E_{c1} = E_{p,ext1} - E_{p,ext2} \Rightarrow E_{c2} + E_{p,ext2} = E_{c1} + E_{p,ext1} \tag{2.91}$$

Ținând cont că în cazul sistemului de puncte materiale energia potențială internă $E_{p,int}$ nu este modificată sub acțiunea forțelor conservative externe, se poate scrie că:

$$E_{tot} = E_c + E_{p,ext} + E_{p,int} = \text{const.} \quad (2.92)$$

Astfel, sub acțiunea forțelor conservative energia totală a sistemului de puncte materiale se conservă.

## *2.5. Dinamica solidului rigid*

Un solid rigid este caracterizat de faptul că distanțele dintre punctele sale materiale, sau dintre elementele sale de masă infinitezimale $dm$ nu se modifică în timp. Forțele externe care actionează asupra unui solid rigid determină mişcări de translație sau de rotație ale acestuia fără să se înregistreze deplasări relative ale elementelor corpului. Un solid rigid este deci un corp nedeformabil care se comportă ca un tot pe parcursul mişcării. Numărul maxim al gradelor de libertate de mişcare pentru un solid rigid este 6, adică 3 grade de libertate de translație şi 3 grade de libertate de rotație.

La o mişcare de translație, toate punctele materiale ale unui rigid au, la un acelaşi moment de timp, aceeaşi viteză $\vec{v}$ şi aceeaşi accelerație $\vec{a}$ astfel că traiectoriile urmate sunt paralele (Fig. 2.14).

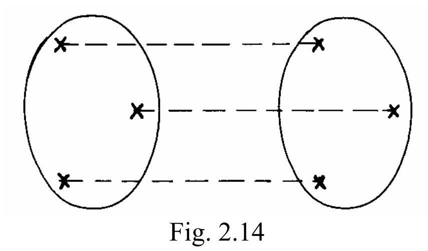

Fig. 2.14

Aceasta face ca, în cazul translațiilor, mişcarea unui solid rigid să se reducă la mişcarea centrului de masă.

Dat fiind că un corp solid are o structură materială continuă, vectorul de poziție al centrului de masă $\vec{r}_{CM}$ se obține, pornind de la relația (2.73) care reprezintă expresia $\vec{r}_{CM}$ pentru un sistem de puncte materiale, la limita $m_i \to 0$, ceea ce face ca sumele să treacă în integrale, rezultând:

$$\vec{r}_{CM} = \frac{\int \vec{r}dm}{\int dm}. \qquad (2.93)$$

Dacă se foloseşte densitatea masică $\rho(\vec{r})$, dată de $\rho(\vec{r}) = \frac{dm}{dV}$, relaţia se mai scrie:

$$\vec{r}_{CM} = \frac{1}{m}\int \vec{r}\rho(\vec{r})dV. \qquad (2.94)$$

Înainte de a obţine expresiile mărimilor dinamice caracteristice unui solid rigid, trebuie remarcat că în ceea ce priveşte mişcarea de rotaţie, datorită masei distribuite a corpului, unele caracteristici cinematice şi dinamice ale mişcării ţin exclusiv de natura rotatorie a mişcării.

Astfel, considerând un solid rigid care se roteşte cu viteza $\vec{\omega}$ în jurul unei axe fixe (Fig. 2.15), observăm că punctele acestuia descriu traiectorii circulare cu viteze $\vec{v}(\vec{r})$ diferite, după cum cercul descris este de rază $\vec{r}$ mai mică sau mai mare:

$$\vec{v}(\vec{r}) = \vec{\omega} \times \vec{r}. \qquad (2.95)$$

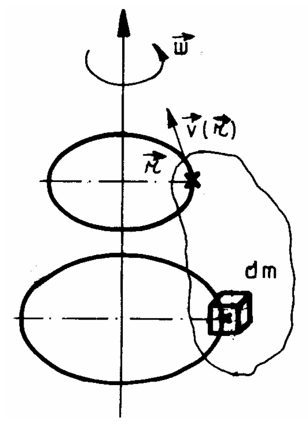

Fig. 2.15

Ca şi în cazul mişcării de translaţie, corpul manifestă o inerţie faţă de mişcarea de rotaţie care este măsurată de **momentul de inerţie J** al corpului. Pentru a vedea care este expresia acestuia, să scriem mai întâi energia cinetică de rotaţie a unui element de masă dm al unui corp solid care se roteşte cu viteza unghiulară $\vec{\omega}$ în jurul unei axe fixe (Fig. 2.15):

$$dE_{c,rot} = \frac{1}{2}\vec{v}^2(\vec{r})dm = \frac{1}{2}\omega^2 r^2 dm. \qquad (2.96)$$

Energia cinetică de rotaţie a întregului corp va fi deci:

$$E_{c,rot} = \frac{1}{2}\omega^2 \int r^2 dm. \qquad (2.97)$$

Prin definiţie, **momentul de inerţie J** al unui corp solid este dat de:

$$J = \int r^2 dm. \qquad (2.98)$$

Se observă că J este independent de viteza unghiulară $\vec{\omega}$, depinzând doar de distribuţia masei corpului faţă de axa de rotaţie.

Dacă rotația are loc în jurul axei $Oz$, care trece prin centrul de masă al corpului, atunci momentul de inerție $J$ este dat de:

$$J_{CM} = \int r^2 dm = \int \left(x^2 + y^2\right) dm \tag{2.99}$$

unde coordonatele $x$ şi $y$ fiind măsurate în sistemul centrului de masă, $J$ este indexat cu inițialele $CM$.

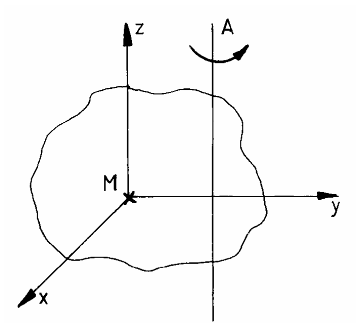


Fig. 2.16

Dacă axa de rotație, notată cu $A$, nu trece prin centrul de masă ci se află la o distanță $a$ față de centrul de masă, fiind paralelă la $Oz$ (Fig. 2.16), momentul de inerție față de axa de rotație $A$ se calculează astfel:

$$\begin{aligned} J_A &= \int \left[x^2 + (y+a)^2\right] dm = \int \left(x^2 + y^2\right) dm + a^2 \int dm + 2a \int y dm = \\ &= J_{CM} + a^2 m \end{aligned} \tag{2.100}$$

unde s-a ținut cont că deoarece $y_{CM} = 0$, $\int y dm = m y_{CM} = 0$. Acest rezultat constituie **teorema lui Steiner**.

Pornind de la definiția (2.98), pentru energia cinetică de rotației a unui corp de moment de inerție $J$:

$$E_{c,rot} = \frac{1}{2} J \omega^2. \tag{2.101}$$

şi ținând cont de cele discutate la un sistem de puncte materiale, energia cinetică a unui corp solid rigid față de un sistem de referință oarecare se compune din energia cinetică de translație a centrului de masă şi energia cinetică de rotație:

$$E_c = \frac{1}{2} m v_{CM}^2 + \frac{1}{2} J_{CM} \omega^2. \tag{2.102}$$

Dacă solidul rigid se mişcă într-un câmp extern de forțe conservative, atunci energia sa totală $E = E_c + E_p$, se conservă:

$$E = \frac{1}{2}mv_{CM}^2 + \frac{1}{2}J_{CM}\omega^2 + E_p = \text{const.} \tag{2.103}$$

O altă mărime dinamică importantă este **momentul cinetic** $\vec{L}$. Pornind de la definiția momentului cinetic al unui punct material de impuls $\vec{p} = m\vec{v}$, să scriem mai întâi momentul cinetic al unei mase elementare $dm$:

$$d\vec{L} = (\vec{r} \times \vec{v})dm\,. \tag{2.104}$$

Dacă $\vec{r}$ este distanța elementului de masă $dm$ până la axa de rotație $(\vec{r} \perp \vec{\omega})$ şi se ține cont că $\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}$, atunci momentul cinetic al elementelui de masă $dm$ pe direcția lui $\vec{\omega}$ este:

$$d\vec{L}_\omega = \vec{\omega} r^2 dm\,, \tag{2.105}$$

Pentru o mişcare de rotație a corpului caracterizată de $\vec{\omega} = \text{const.}$, prin integrare a expresiei (2.105), momentul cinetic al întregului corp pe direcția lui $\vec{\omega}$, $\vec{L}_\omega$ va fi:

$$\vec{L}_\omega = \vec{\omega}\int r^2 dm = J \cdot \vec{\omega}. \tag{2.106}$$

Trebuie menționat că legea de variație a momentului cinetic

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M}_{ext} \tag{2.107}$$

este valabilă şi în cazul mişcării de rotație.

Dacă $\vec{M}_{ext} = 0$, atunci

$$\vec{L} = J \cdot \vec{\omega} = \text{const.} \tag{2.108}$$

Dacă $\vec{M}_{ext} \neq 0$, atunci pentru $J = \text{const.}$ şi axa de rotație fixă, obținem:

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = J \cdot \frac{d\vec{\omega}}{dt} = J\vec{\varepsilon} \tag{2.109}$$

unde $\vec{\varepsilon}$ este accelerația unghiulară a corpului.

În final, prezentăm alaturat, mărimile şi legile care descriu mişcarea de translație şi mişcarea de rotație pentru a putea observa corespondența dintre acestea.

| Translație | Rotație | Legea de legătură |
|---|---|---|
| spațiul $\vec{s}$ | unghiul $\vec{\varphi}$ | $\vec{s} = \vec{\varphi} \times \vec{r}$ |
| viteza $\vec{v}$ | viteza unghiulară $\vec{\omega}$ | $\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}$ |
| accelerația $\vec{a}$ | accelerația unghiulară $\vec{\varepsilon}$ | $\vec{a} = \vec{\varepsilon} \times \vec{r} + \vec{\omega} \times \vec{v}$ |
| masa $m$ | momentul de inerție $J$ | $J = \int r^2 dm$ |
| impulsul $\vec{p}$ | momentul cinetic $\vec{L}$ | $\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$ |
| forța $\vec{F}$<br>$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt}$<br>$m = ct. \Rightarrow \frac{d\vec{p}}{dt} = m\vec{a}$<br>$E_{c,tr} = \frac{mv^2}{2}$ | momentul forței $\vec{M}$<br>$\vec{M} = \frac{d\vec{L}}{dt}$<br>$J = ct. \Rightarrow \frac{d\vec{L}}{dt} = J \cdot \vec{\varepsilon}$<br>$E_{c,rot} = \frac{J\omega^2}{2}$ | $\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}$ |

## *2.6. Echilibrul corpurilor*

Un corp, considerat punct material, se găseşte în echilibru dacă suma forțelor exterioare care se exercită asupra lui este nulă:

$$\vec{F} = 0. \tag{2.110}$$

Să admitem că forța $\vec{F}$ este conservativă şi că energia potențială $U$ nu depinde decât de $x$, $U = U(x)$. Astfel, pentru cazul unidimensional, la echilibru avem:

$$F = -\frac{dU}{dx} = 0. \tag{2.111}$$

Deci, echilibrul se va stabili în punctele $x_0$ în care derivata funcției $U(x)$ se anulează:

$$\left.\frac{dU}{dx}\right|_{x_0} = 0. \tag{2.112}$$

Rezultă, astfel, că punctul material va fi în echilibru atât în stările în care energia potențială este maximă cât şi minimă, dar trebuie să distingem între maximele şi minimele energiei potențiale în funcție de semnul derivatei a doua. Fie $k$ valoarea acesteia în $x_0$: