Scoala:Liceul Pedagogic Clasa a XI-a / 4 h sãptãmânal
Disciplina:Matematicã

Prof. Petre Monica

Proiectul unitãții de învãțare:Determinanți

Numãr ore alocate:7

Competente generale avute în vedere:
C1.Folosirea corectã a terminologiei specifice matematicii în contexte diferite de aplicare
C2.Utilizarea corectã a algoritmilor matematici în rezolvarea de probleme cu diferite grade de dificultate
C3.Exprimarea si redactarea corectã si coerentã în limbaj formal sau în limbaj cotidian, a rezolvãrii sau a strategiilor de rezolvare a unei probleme
Competentele specifice vizate:
1.Cunoaşterea unor elemente de istorie a matematicii referitoare la apariția determinanților.
2.Calcularea determinantilor de ordin 2.
3. Calcularea determinanților de ordin 3 folosind regula lui Sarrus şi regula triunghiului.
4. Calculul determinanților cu ajutorul proprietăților.
5.calculul determinanților de ordin n.
6.Aplicații ale determinanților în geometrie.

Începuturile matricelor şi determinanților se întâlnesc în secolul 2 î.e.n. deşi urmele se pot vedea încă din secolul 4 i.e.n..Cu toate acestea ei nu au existat până spre sfârşitul secolului 17 când ideea reapare şi se dezvoltă..

Nu surprinde pe nimeni că începuturile matricelor şi determinanților apar datorită studiului sistemelor de ecuații liniare.Babilonienii au studiat probleme care anticipează sistemele de ecuații liniare şi câteva dintre acestea sunt păstrate până azi pe tăblițe de lut.De exemplu o plăcuță datând din anul 300 i.e.n. conține următoarea problemă:

" Două terenuri care au împreună 1800 yard^2 sunt cultivate cu grâu.De pe primul teren s-au recoltat 2/3 dintr-un buşel (aproximativ 36 l) pe yard^2 în timp ce de pe al doilea teren se recoltează ½ buşel pe yard^2 . Dacă producția totală e de 1100 buşeli, care este mărimea fiecărui teren?"

Şi în manuscrise chinezeşti cuprinse între 200-100 i.e.n.s-au găsit informații despre matrice.Primul exemplu în acest sens este documentul "9 Capitole din Arta Matematicii" scris în timpul dinastiei Han.Problema descoperită în acest document este la fel structurată ca şi în exemplul babilonian:

"Avem 3 tipuri de cereale, dintre care o grămadă din primul tip de cereale, două din al doilea şi una din al treilea tip şi cântăresc împreună 39 măsuri.Două grămezi din primul tip, trei din al doilea şi o grămadă din al treilea au împreună 34 măsuri.Una din primul tip, două din al doilea şi trei din al treilea fac 26 măsuri.Câte măsuri din fiecare tip de cereale conține fiecare grămadă?"

În continuare autorul a făcut ceva cu adevărat remarcabil.El a aranjat coeficienții sistemului de 3 ecuații liniare cu trei necunoscute într-un tablou:

1	2	3
2	3	2
3	1	1
26	34	39

Ceea ce este remarcabil este că autorul, cu 200 ani i.e.n. instruia cititorul că poate înmulți coloana din mijloc cu 2 şi apoi o scădem pe cea din dreapta de câte ori este posibil, apoi înmulțim prima coloană cu 3 şi o scădem pe ultima de câte ori e posibil.Obținem astfel:

0	0	3
4	5	2
8	1	1
39	24	39.

Apoi prima coloană este înmulțită cu 5 şi a doua se scade din prima de câte ori e posibil, obținând astfel:

0	0	3
0	5	2
36	1	1
99	24	39.

Această metodă cunoscută acum ca metoda de eliminare a lui Gauss, nu devine foarte cunoscută până în secolul al XIX-lea.

Apoi în “Ars Magna” (1545) Cardan dă o regulă pentru rezolvarea unui sistem de două ecuații cu două necunoscute pe care el o numeşte “regula de modo”.Această regulă stă la baza regulii lui Cramer pentru rezolvarea unui sistem de 2 ecuații cu 2 necunoscute, ea nu a fost finalizată, nu s-a ajuns la definiția determinantului dar e un pas important pentru obținerea acestei definiții.

Multe rezultate standard de teoria elementară a matricelor au apărut cu mult înainte ca matricele să devină subiect de investigație.De exemplu, de Witt în “Elements of curves” a publicat o parte a comentariilor din versiunea latină a geometriei lui Descartes (apărută în 1660) care arată cum printr-o transformare a axelor putem reduce ecuația unei conice date la forma ei canonică.Aceste raționamente făcute de Witt sunt echivalente de fapt cu reducerea unei matrice simetrice la forma diagonală, dar de Witt nu a gândit niciodată în aceşti termeni.

Ideea de determinant a apărut în Japonia şi Europa cam în acelaşi timp.Seki (matematician japonez care a trait intre 1642-1708) a fost totuşi cel care a publicat mai întâi în 1683 “Metode de rezolvare a problemelor disimulate” care conțin metode matriceale scrise în tabele în acelaşi mod ca şi metodele chinezeşti descrise mai înainte.Fără a avea un cuvânt care să corespundă “determinantului”, Seki a introdus determinanții şi a dat metode generale pentru calcularea lor bazate pe exemple.Seki a fost pregătit să găsească determinanți de ordin 2,3,4,5 şi i-a aplicat în rezolvarea ecuațiilor dar nu a sistemelor de ecuații liniare.

În acelaşi an, 1683, au apărut determinanții şi în Europa şi tot atunci Leibniz (matematician german care a trait intre 1646-1716) îi scria lui L’Hopital că sistemul de ecuații

$$10+11x+12y=0$$
$$20+21x+22y=0$$
$$30+31x+32y=0$$

are soluție pentru că $10 \cdot 21 \cdot 32+11 \cdot 22 \cdot 30+20 \cdot 31 \cdot 12=10 \cdot 22 \cdot 31+11 \cdot 20 \cdot 32+12 \cdot 21 \cdot 30$ care este condiția ca matricea coeficienților să aibă determinantul 0.

De notat este faptul că Leibniz nu a folosit coeficienți numerici dar a folosit două caractere,adică indici dubli pentru marcarea coeficienților, unul care să indice cărei ecuații îi aparține necunoscuta., deci 21 indică ceea ce noi spunem azi $a_{21.}$Leibniz era convins că o bună notație era cheia progresului deci el a experimentat diverse notații pentru coeficienții sistemului.

Manuscrisele sale nepublicate conțin mai mult de 50 metode diferite de scriere a coeficienților sistemului cu care el a lucrat pe o perioadă de 50 ani începând cu anul 1678.

Doar două publicații (1700 sau 1710) conțin rezultate în legătură cu coeficienții unui sistem şi el utilizează acelaşi notații care au fost menționate în scrisoarea către L'Hopital.Leibniz a folosit cuvântul rezultantă pentru anumite sume combinatoriale de termeni ai unui determinant.El a demonstrat rezultate diverse, incluzând ceea ce este în esență regula lui Cramer.El a ştiut că un determinant poate fi dezvoltat după orice coloană, ceea ce azi se cheamă dezvoltarea lui Laplace.

Pe lângă studierea coeficienților sistemelor de ecuații care l-au condus la determinanți, Leibniz a studiat coeficienții sistemelor de ecuații de gradul al II-lea (sau forme pătratice) care îl conduc natural la teoria matricelor.

În 1730 Maclaurin a scris un tratat de algebră care n-a fost publicat decât în 1748, la doi ani după moartea sa.El conține primele rezultate publicate despre determinanții proveniți din regula lui Cramer pentru sisteme de 2 ecuații cu 2 necunoscute , 3 ecuații cu 3 necunoscute şi a indicat cum putem lucra pentru sisteme de 4 ecuații cu 4 necunoscute.

Cramer a indicat metoda generală pentru sistemele de n ecuații cu n necunoscute în articolul "Introducere în analiza curbelor algebrice".El şi-a pus problema găsirii ecuației unei curbe plane care trece printr-un număr dat de puncte.Regula apare în Appendix-ul acestui articol dar nu e dovedit acest lucru.Tot Gabriel Cramer a formulat în 1750 regula de rezolvare a sistemului linear

$$a_1x+b_1y+c_1z=l_1$$
$$a_2x+b_2y+c_2z=l_2$$
$$a_2x+b_2y+c_2z=l_3$$

ca un cât de determinanți

$$x=\frac{D_x}{D}, y=\frac{D_y}{D}, z=\frac{D_z}{D}$$

D fiind determinantul coeficienților sistemului, D_x determinantul obținut din D, înlocuind coloana coeficienților lui x prin temenii liberi.Tot Cramer a observat că un determinant este o funcție lineară omogenă de elementele fiecărei linii şi a fiecărei coloane.

Apoi lucrările despre determinanți au început să apară regulat.În 1764 Bezout a mai dat metode de calcul ale determinanților asemănătoare cu ale lui

Vandermonde în 1771. În 1772 Theophile Vandermonde a introdus determinantul care-i poartă numele.

$$V=\begin{vmatrix}1 & 1 & 1\\ a & b & c\\ a^2 & b^2 & c^2\end{vmatrix}=(a-b)(b-c)(c-a).$$

În 1772 Laplace (matematician francez care a trait intre 1749-1827) a pretins că metodele prezentate de Cramer şi Bezout (matematician francez care a trait intre 1730-1783) nu sunt practice şi într-un referat unde el a studiat teoria peturbărilor planetare a folosit determinanții.În acest referat el a introdus şi ecuația seculară

$$\begin{vmatrix}a_{11}-s & a_{12} & ... & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22}-s & ... & a_{2n}\\ . & . & ... & .\\ a_{n1} & a_{n2} & ... & a_{nn}-s\end{vmatrix}=0$$

despre care a arătat că are toate rădăcinile reale.

Destul de surprinzător este faptul că Laplace a folosit cuvântul “rezultant” pentru ceea ce noi numim azi determinant.El a introdus noțiunea de determinant de ordin general şi a observat că dacă schimbăm două linii între ele , determinantul îşi schimbă semnul şi ca o consecință, un determinant a arătat că dacă un determinant are două linii identice, atunci el este nul.

El a enunțat următoarea teoremă:Un determinant de ordinul n este egal cu suma celor C_m^n produse pe care le obținem înmulțind minorii de ordin m extraşi dintr-o matrice arbitrară formată cu m linii ale determinantului prin complementele lor algebrice respective.

Lagrange (matematician francez care a trait intre 1736-1813), într-un articol din 1773 a studiat complet determinanții de ordinul al treilea şi identități cu aceştia. Acest articol de mecanică conține pentru prima dată interpretarea volumului ca determinant.Lagrange a arătat că tetraedrul care are vârfurile în O(0,0,0), M(x,y,z), M’(x’,y’,z’), M”(x”,y”,z”) are volumul

$$\frac{1}{6}\left[z(x'y''-y'x'')+z'(yx''-xy'')+z''(xy'-yx')\right].$$

Tot el a introdus noțiunea de determinant reciproc al unui determinant de ordinul al treilea, format înlocuind fiecare element prin complementul său şi a arătat că un determinant reciproc este pătratul determinantului dat.

Leonhard Euler a studiat, începând din 1771, determinanții ortogonali, în legătură cu problema deplasărilor.Numim determinant ortogonal, un determinant

$$\begin{vmatrix}a_1 & b_1 & c_1\\ a_2 & b_2 & c_2\\ a_3 & b_3 & c_3\end{vmatrix}$$

pentru care avem următoarele relații pătrate între elemente:

$$a_1^2+b_1^2+c_1^2=a_2^2+b_2^2+c_2^2=a_3^2+b_3^2+c_3^2=1,$$

$$a_1a_2+b_1b_2+c_1c_2=a_1a_3+b_1b_3+c_1c_3=a_2a_3+b_2b_3+c_2c_3=0.$$

Analog definim determinantul ortogonal de orice ordin.Euler a demonstrate pentru n=3, că orice element al unui determinant ortogonal este egal cu complementarul său, iar Joseph Lagrange a arătat că determinantul ortogonal are valoarea ± 1.

Din problemele legate de teoria generală a conicelor şi a cuadricelor, a fost inițiată în secolul al 18-lea şi teoria formelor pătratice.Joseph Lagrange a introdus, în 1773, forma binară

$$f(x,y)=a_{11}x^2+2a_{12}xy+a_{22}y^2$$

şi forma ternară

$$f(x,y,z)=a_{11}x^2+2a_{12}xy+a_{22}y^2+2a_{13}xz+2a_{23}yz+a_{33}z^2.$$

El a arătat, pentru n=2, că dacă efectuăm o transformare liniară

$$x=\alpha_{11}x'+\alpha_{12}y', y=\alpha_{21}x'+\alpha_{22}y'$$

atunci pentru noua formă

$$f'(x',y')=a'_{11}x^2+2a'_{12}x'y'+a'_{22}y'^2$$

avem relația dintre discriminanții formelor şi ai transformării

$$\begin{vmatrix} a'_{11} & a'_{12} \\ a'_{12} & a'_{22} \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \end{vmatrix}^2\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix}.$$

Euler a observat că un determinant de ordinul 3 conține numai trei parametri independenți, iar unul de ordinul 4 conține 6 parametri şi a exprimat sub forma rațională celelalte elemente în funcție de aceşti parametri, în cazurile n=3,4 menționate.Anume Euler a dat regula următoare.Considerăm un determinant nenul B=$|b_{ij}|$ de ordin n, ale cărui elemente ale cărui elemente de pe diagonala principală au valoarea 1, iar celelalte sunt strâmb simetrice ($b_{ij}+b_{ji}=0,\ b_{ii}=1$).Dacă B_{ij} este complementul algebric al lui b_{ij} punem

$$a_{ii}=\frac{2B_{ii-1}}{B},\ a_{ij}=\frac{2B_{ij}}{B}\ i\neq j;$$

atunci determinantul $|a_{ij}|$ este ortogonal.

Termenul “determinant” a fost introdus pentru prima oară în “Discuții aritmetice” de Gauss (matematician german care a trait intre 1777-1855) în timp ce se studiau formele pătratice.Totuşi acest concept nu este acelaşi cu determinantul pe care îl ştim noi astăzi.În aceeaşi lucrare Gauss a aranjat coeficienții formelor pătratice într-un sistem de axe rectangulare.El a descris înmulțirea matricelor şi a descris şi construcția inversei unei matrice.

Metoda eliminării a lui Gauss (a cărei idee a apărut prima oară în textul “9 Capitole din Arta Matematicii” scris în anul 200 î.e.n.,dar despre care Gauss Gauss nu ştia nimic), a fost utilizată de Gauss în lucrarea sa care studia orbitele asteroidului Pallas.Utilizând observațiile asupra asteroidului Pallas făcute între 1803 şi 1809, Gauss a obținut un sistem de 6 ecuații liniare cu 6 necunoscute.Gauss a dat sistematic metode pentru rezolvarea acestor ecuații care precizează eliminarea Gaussiană a coeficienților matricelor.

În 1812 Cauchy (matematician francez care a trait intre 1789-1875) a utilizat determinanții în sensul modern.La el găsim primele însemnări mai complete despre determinanți.El condamna rezultatele anterioare şi a obținut noi rezultate despre minori.

BIBLIOGRAFIE:

1)Mihăileanu,N.,Istoria Matematicii.Secolul al 18-lea.Prima jumătate a secolului al 19-lea.Dezvoltarea ulterioară a matematicii.vol.2,Editura Ştiințifică şi Enciclopedică,Bucureşti, 1981

2)Internet.