


# TEOREME CAUCHY



În 1810 , Cauchy merge la Cherbourg pentru a lucra la fortificațiile pentru invazia lui Napoleon în Anglia. În această perioadă produce câteva rezultate, inclusiv soluția unei probleme puse lui de Joseph-Louis Lagrange care stabilește o relație între numărul de muchii, numărul de vârfuri și numărul de fețe ale unui poliedru convex, precum și soluția problemei lui Fermat privind numărul poliedrelor regulate.

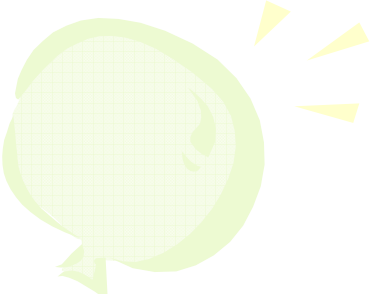
Cauchy revine la Paris în 1813 și Lagrange și Laplace îl determină să se dedice întru-totul matematicii. În anul următor Cauchy publică memoriul asupra integralelor definite care devine bazele teoriei funcțiilor complexe.



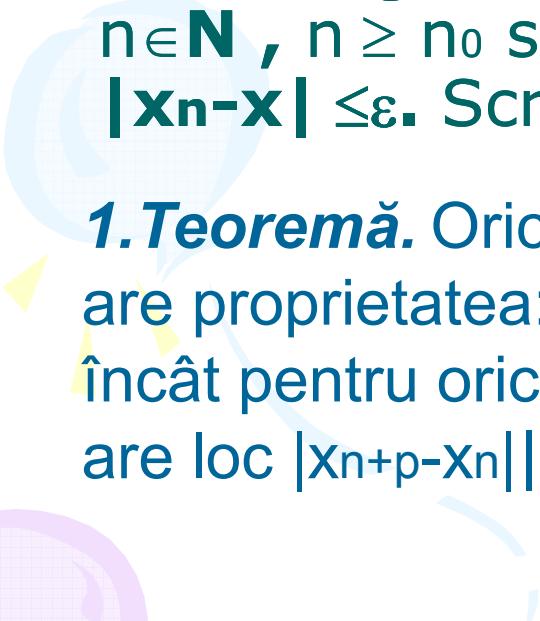
Lucrările lui Cauchy(începând cu 1814)conținând o suită de teoreme fundamentale ale teoriei funcțiilor analitice sunt bazate pe aceeași definiție,dar acesta introduce sensul nud actual al convergenței seriilor și semnificația geometrică a variabilei complexe..Cauchy este cel care,pe pentru prima oară,introduce integrala curbilinie în raport cu o variabilă complexă pe care el o reduce la integrala uzuală în raport cu o variabilă reală separând părțile reală și imaginară.Pe de altă parte,Cauchy descoperă relația între analiticitatea unei funcții și derivabilitatea în raport cu variabila complexă,numind monogeneitate această ultimă proprietate.Analiza punctelor singulare ale unei funcții univoce cu ajutorul seriei introduse de el și numită serie Laurent (1843) a fost realizată simultan de matematicianul rus Sokhotski și matematicianul italian Casorati(1868)și,ceva mai târziu, de Weierstrass(1876).

Lucrările lui Cauchy în domeniul analizei au dat o întru totul nouă direcție teoriei ecuațiilor diferențiale ordinare, mutând accentul de la investigații tehnice de soluționare pe problemele generale calitative de existență unicitate a soluțiilor. Cauchy însuși deduce soluțiile printr-un proces de trecere limită. Teoria funcțiilor analitice, dezvoltată de Cauchy, a condus la crearea teoriei ecuațiilor diferențiale în domeniul complex și, la rândul ei, studiul funcțiilor cu mai multe variabile complexe.

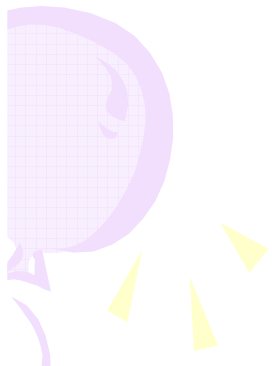
În aplicațiile ecuațiilor cu derivate parțiale, Cauchy schimbă interesul de determinare a soluției generale a ecuației către construcția unei soluții care satisfac unele condiții prestabilite.



**Definiție** .Șirul de numere raționale  $(x_n)_{n \in \mathbf{N}}$  este convergent la,  $x \in \mathbf{Q}$  (dacă și numai dacă) pentru orice  $\varepsilon \in \mathbf{Q}, \varepsilon > 0$  există  $n_0 \in \mathbf{N}$  astfel ca pentru orice  $n \in \mathbf{N}, n \geq n_0$  să aibe loc  $\lim_{n \rightarrow \infty} |x_n - x| \leq \varepsilon$ . Scriem atunci  $\lim x_n = x$ .



**1. Teoremă.** Orice șir  $(x_n)_n$  din  $\mathbf{Q}$  convergent la un,  $x \in \mathbf{Q}$  are proprietatea: pentru orice  $\varepsilon \in \mathbf{Q}, \varepsilon > 0$  există  $n_0 \in \mathbf{N}$  astfel încât pentru orice  $n \in \mathbf{N}, n > n_0$  și  $p \in \mathbf{N}$  are loc  $|x_{n+p} - x_n| \leq \varepsilon$  (proprietatea lui Cauchy).



**Demonstrație .** Fie  $\varepsilon \in \mathbf{Q}$ ,  $\varepsilon > 0$  există  $n \in \mathbf{N}$  astfel încât pentru  $n > n_0$ ,  $n$  natural să aibe loc  $|x_n - x| \leq \varepsilon/2$ . Atunci, dacă  $n \in \mathbf{N}$ ,  $n \geq n_0$   $p \in \mathbf{N}$  are loc

$$|x_{n+p} - x_n| \leq |x_{n+p} - x| + |x - x_n| \leq \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon$$

**2.Definiție.** Un șir  $(x)$  de numere raționale se numește șir Cauchy dacă posedă proprietatea lui Cauchy.

Orice șir de numere raționale convergent la un număr rațional este șir Cauchy (are proprietatea lui Cauchy).

Este de subliniat că această afirmație are reciprocă falsă. Atenție, în **Q**!

**3. Definiție.** O submulțime  $A$  a lui  $\mathbf{R}$  se numește mărginită dacă există  $\mu \in \mathbf{R}$  astfel încât pentru orice  $a \in A$  are loc  $|a| \leq \mu$ . Un șir de numere reale  $(x_n)_n$  este mărginit dacă mulțimea  $\{x_n \mid n \in \mathbf{N}\}$  este mărginită.

**4. Lemă.** Orice șir Cauchy de numere reale este mărginit.

**Demonstrație.** Fie  $(x_n)_n$  un șir Cauchy de numere reale. Luând  $\varepsilon = 1$  în definiția șirului Cauchy, deducem existența lui  $n_1$  astfel încât

$$|x_m - x_n| \leq 1 \text{ pentru } m, n \in \mathbf{N}, m \geq n_1, n \geq n_1.$$

În particular avem  $|x_n - x_{n_1}| \leq 1$  pentru orice  $n \in \mathbf{N}, n \geq n_1$ .

În consecință

$$|x_n| \leq 1 + |x_{n_1}| \text{ pentru orice } n \in \mathbf{N}, n \geq n_1.$$

Dacă punem  $\mu = \max\{1 + |x_{n_1}|, |x_1|, \dots, |x_{n_1-1}|\}$ , obținem  $|x_n| \leq \mu$  pentru orice  $n \in \mathbf{N}$ , deci șirul este mărginit.



**5. Teoremă.** Orice șir Cauchy de numere reale este convergent la un număr real.

Acesta este un rezultat fundamental, privit în sine, dar mai ales prin implicații-le sale directe și, cu deosebire, prin aceea că oferă o "tehnicitate" ce poate fi adaptată în situații de o complexitate specială, cum va fi reliefat pe parcursul întregii lucrări.

Incepem această justificare prin consacrarea unei metode eficiente de probare a convergenței unui șir de numere reale, subliniind, mai încolo, ineficacitatea ei în raport cu tehnica oferită de teorema 5.



**6. Teoremă.** Orice șir monoton și mărginit de numere reale este convergent.

**Demonstrație.** Fie  $(x_n)_n, x \in \mathbf{R}$  un șir crescător și mărginit : există  $M \in \mathbf{R}$  astfel ca

$$x_0 \leq x_1 \leq \dots \leq x_n \leq x_{n+1} \leq \dots \leq M.$$

Mulțimea  $\{x_n \mid n \in \mathbf{N}\}$  este mărginită; deci, conform axiomei marginii superioare, ea are o margine superioară, notată  $x$ . Avem  $x_n \leq x$  pentru orice  $n \in \mathbf{N}$

și pentru orice  $\varepsilon > 0$  există  $n_\varepsilon \in \mathbf{N}$  astfel că  $n \in \mathbf{N}$ ,  
 $n \geq n_\varepsilon \Rightarrow x - \varepsilon/2 \leq x$ .

Rezultă că pentru  $n \geq n_\varepsilon$  și  $p \in \mathbf{N}$  are loc

$$0 \leq x_{n+p} - x_n \leq |x - x_{n+p}| + |x - x_n| \leq \varepsilon.$$

ceea ce arată că șirul este șir Cauchy. Prin urmare este convergent, conform teoremei 5. Din raționament rezultă că  
 $\lim x_n = x$ .

Teorema 6 are o aplicabilitate destul de largă în aplicarea teoremei, de regulă, metoda inducției matematice își dovedește eficiența.



## Bibliografie:

- 1) Ion Colojoară, Analiză matematică, E.D.P., București, 1984
- 2) Jean Dieudonne, Les fondements d'analyse, Hermann Paris, 1971
- 3) Jean Dieudonne, Calcul infinitesimal, Dunod Paris, 1982
- 4) Miron Nicolescu, Analiză matematică, Vol I, II, III, Editura Tehnică, București, 1957-1960
- 5) Simion Stoilow, Teoria funcțiilor de variabilă complexă, Vol I, Editura Academiei, 1954