TEOREME CAUCHY

În 1810 , Cauchy merge la Cherbourg pentru a lucra la fortificaţiile pentru invazia lui Napoleon în Anglia. In această perioadă produce câteva rezultate, inclsiv soluția unei probleme puse lui de Joseph-Louis Lagrange care stabileşte o relație între numărul de muchii,nurnârul de vârfuri şi numărul de fețe ale unui poliedru convex, precum şi soluția problemei lui Fermat privind numărul poliedrelor regulate.

Cauchy revine la Paris în 1813 şi Lagrange şi Laplace îl determină să se dedice întru-totul matematicii.In anul următor Cauchy publică memoriul asupra integralelor definite care devine bazele teoriei funcțiilor complexe.

Lucrările lui Cauchy(începând cu 1814)conținând o suită de teoreme fundamentale ale teoriei funcțiilor analitice sunt bazate pe aceeaşi definiție,dar acesta introduce sensul nud actual al convergenței seriilor şi semnificația geometrică a variabilei complexe..Cauchy este cel care,pentru prima oară,introduce integrala curbilinie în raport cu o variabilă complexă pe care el o reduce la integrala uzuală în raport cu o variabilă reală separând părțile reală şi imaginară.Pe de altă parte,Cauchy descoperă relația între analiticitatea unei funcții şi derivabilitatea în raport cu variabila complexă,numind monogeneitate această ultimă proprietate.Analiza punctelor singulare ale unei funcții univoce cu ajutorul seriei introduse de el şi numită serie Laurent (1843) a fost realizată simultan de matematicianul rus Sokhotski şi matematicianul italian Casorati(1868)şi,ceva mai târziu, de Weierstrass(1876).

Lucrările lui Cauchy în domeniul analizei au dat o întru totul nouă direcție teoriei ecuațiilor diferențiale ordinare,mutând accentul de la investigări tehnicilor de soluționare pe problemele generale calitative de existență unicitate a soluțiilor.Cauchy însuşi deduce soluțiile printr-un proces de trecere limită.Teoria funcțiilor analitice, dezvoltată de Cauchy ,a condus la crearea teoriei ecuațiilor diferențiale în domeniul complex şi, la rându-i,ta studiul funcțiilor cu mai multe variabile complexe.

În aplicațiile ecuațiilor cu derivate parțiale,Cauchy schimbă interesul de determinarea soluției generale a ecuației către construcția unei soluții care satisfacă unele condiții prestabilite.

Definiţie . Şirul de numere raţionale $(x_n)_{n\in N}$ este convergent la, $x\in Q$ (dacă şi numai dacă) pentru orice $\varepsilon\in Q, \varepsilon>0$ există $n_0\in N$ astfel ca pentru orice $n\in N$, $n \geq n_0$ să aibe loc $|x_n-x| \leq\varepsilon$. Scriem atunci $\lim_{n\to\infty} x_n=x$.

1.Teoremă. Orice şir $(x_n)_n$ din Q convergent la un, $x \in Q$ are proprietatea:pentru orice $\varepsilon\in Q$, $\varepsilon>0$ există $n_0\in N$ astfel încât pentru orice $n\in N$, $n > n_0$ şi $p \in N$ are loc $|x_{n+p}-x_n||\leq\varepsilon$ (propritatea lui Cauchy).

Demonstrație . Fie $\varepsilon \in \mathbf{Q}$, $\varepsilon > 0$ există $n \in \mathbf{N}$ astfel încât pentru $n > n_0$,n natural să aibe loc $|x_n - x| \leq \varepsilon/2$. Atunci, dacă $n \in \mathbf{N}$, $n \geq n_0$ $p \in \mathbf{N}$ are loc

$|x_{n+p} - x_n| \leq |x_{n+p} - x| + |x - x_n| \leq \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon$

2.Definiție. Un şir **(x)** de numere raționale se numeşte şir Cauchy dacă posedă proprietatea lui Cauchy.

Orice şir de numere raționale convergent la un număr rațional este şir Cauchy (are proprietatea lui Cauchy).

Este de subliniat că această afirmație are reciprocă falsă. Atenție, în **Q**!

3.Definiție. O submulțime **A** a lui **R** se numeşte mărginită dacă există $\mu \in$ **R** astfel încât pentru orice a $\in$ **A** are loc $|a| \leq \mu$. Un şir de numere reale $(x_n)_n$ este mărginit dacă mulțimea $\{x_n | n \in$ **N**$\}$ este mărginită.

4.Lemă. Orice şir Cauchy de numere reale este mărginit.

Demonstrație. Fie $(x_n)_n$ un şir Cauchy de numere reale. Luând $\varepsilon=1$ în definiția şirului Cauchy, deducem existența lui n_1 astfel încât

$$|x_m - y_n| \leq 1 \text{ pentru } m,n \in \mathbf{N},\ m \geq n_1,\ n \geq n_1.$$

În particular avem $|x_n - x_{n_1}| \leq 1$ pentru orice $n \in$ **N**, $n \geq n_1$.

În consecință

$$|x_n| \leq 1 + |x_{n_1}| \text{ pentru orice } n \in \mathbf{N},\ n \geq n.$$

Dacă punem $=\max\{1+|x_{n_1}|, |x_1|, \ldots, |x_{n_1-1}|\}$, obținem $|x_n| \leq \mu$ pentru orice $n \in$ **N**, deci şirul este mărginit.

5.Teoremă. Orice şir Cauchy de numere reale este convergent la un număr real.

Acesta este un rezultat fundamental,privit în sine,dar mai ales prin implicații-le sale directe şi, cu deosebire, prin aceea că oferă o "tehnicitate" ce poate fi adaptată în situații de o complexitate specială,cum va fi reliefat pe parcursul întregii lucrări.

Incepem această justificare prin consacrarea unei metode eficiente de probare a convergenței unui şir de numere reale,subliniind, mai încolo,ineficacitatea ei în raport cu tehnica oferită de teorema 5.

6.Teoremă.Orice şir monoton şi mărginit de numere reale este convergent.

Demonstrație. Fie $(x_n)_n$, $x \in \mathbf{R}$ un şir crescător şi mărginit : există $M \in \mathbf{R}$ astfel ca

$$x_0 \le x_1 \le \ldots \le x_n \le x_{n+1} \le \ldots \le M.$$

Mulțimea $\{ x_n | n \in \mathbf{N}\}$ este marginită;deci,conform axiomei marginii superioare,ea are o margine superioară, notată x. Avem $x_n \le x$ pentru orice $n \in \mathbf{N}$

şi pentru orice $\varepsilon>0$ există $n_\varepsilon \in \mathbf{N}$ astfel că $n\in\mathbf{N}$,
$n \geq n_\varepsilon \Rightarrow x-\varepsilon/2 \leq x$.
Rezultă că pentru $n \geq n_\varepsilon$ şi $p\in\mathbf{N}$ are loc

$$0\leq x_{n+p} - x_n \leq |x-x_{n+p}|+|x-x_n|\leq \varepsilon.$$

ceea ce arată că şirul este şir Cauchy.Prin urmare este convergent,conform teoremei 5. Din raționament rezultă că

$$\lim x_n=x.$$

Teorema 6 are o aplicabilitate destul de largă în aplicarea teoremei,de regulă, metoda inducției matematice îşi dovedeşte eficiența.

Bibliografie:

1)Ion Colojoară, Analiză matematică, E.D.P., Bucureşti, 1984

2)Jean Dieudonne, Les fondaments d'analyse, Hermann Paris, 1971

3)Jean Dieudonne, Calcul infinitesimal, Dunod Paris, 1982

4)Miron Nicolescu, Analiză matematică, Vol I, II, III, Editura Tehnică, Bucureşti, 1957-1960

5) Simion Stoilow, Teoria funcțiilor de variabilă complexă, Vol I, Editura Academiei, 1954