

DIELECTRICI

Cuprins:

- 2.1. Dipolul electric
- 2.2. Constantă dielectrică, sarcini de polarizare și vectorul de polarizare electrică
- 2.3. Vectorul inducție electrică și tensorul permitivității electrice
- 2.4. Polarizabilitatea moleculară și relația Clausius Mossotti
- 2.5. Legile câmpului electric staționar în prezența dielectricilor și condițiile la limită

2.1. Dipolul electric

În capitolul anterior am studiat legile de bază ale câmpului electric staționar în vid. Vidul poate fi considerat ca un mediu dielectric, omogen și izotrop, având permitivitatea ϵ_0 . Putem spune că legile scrise pentru vid pot fi transformate ușor pentru un dielectric omogen și izotrop, cu permitivitatea ϵ , înlocuind ϵ_0 cu ϵ .

Însă, în dielectric apar și alte fenomene electrice determinate de răspunsul constituenților atomici sau moleculari la câmpul electric. Fiecare atom sau moleculă din dielectric se comportă ca un *dipol electric* din cauza forțelor electrice care acționează în sensuri contrare asupra sarcinilor de semn opus din atom sau moleculă. De exemplu, molecula de apă este un dipol permanent deoarece centrul sarcinii pozitive (H_2^+) este totdeauna separat de centrul sarcinii negative (O^-).

Prin dipol electric înțelegem un sistem format din două sarcini electrice egale și de semn contrar, situate una față de alta la o distanță mică în raport cu distanțele la care se consideră câmpul creat de dipol.

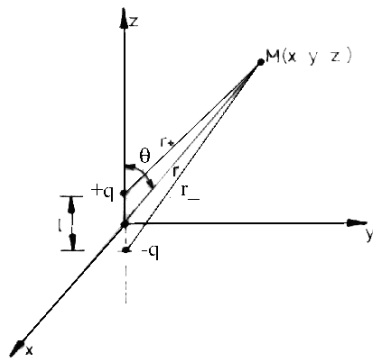


Figura 2.1: Dipolul electric

În figura 2.1 este prezentat un dipol cu sarcinile $+q$ și $-q$ situate la distanța l . Sistemul de axe $xOyz$ a fost ales astfel încât dipolul să aibă centrul în originea sa și direcția după axa Oz .

Ne propunem să calculăm intensitatea câmpului electric creat de acest dipol în punctul M de vector de poziție \vec{r} cu mărimea r mult mai mare decât lungimea l a dipolului. Adică avem:

$$r \gg l \quad (2.1)$$

Pentru a calcula intensitatea câmpului vom utiliza relația:

$$\vec{E} = -gradV \quad (2.2)$$

și vom calcula potențialul V în punctul M . Potențialul V este suma algebrică a potențialelor create de sarcinile $+q$ și $-q$ în punctul respectiv. Adică

$$V(r) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r_+} - \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r_-} \quad (2.3)$$

unde r_+ și r_- sunt distanțele de la sarcina $+q$ și respectiv $-q$ la punctul M . Relația (2.3) se mai scrie:

$$V(r) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{r_- - r_+}{r_+ r_-} \right). \quad (2.4)$$

Dacă notăm cu θ unghiul dintre vectorul \vec{r} și axa Oz și avem în vedere relația (2.1) putem scrie că:

$$r_- - r_+ = l \cos\theta \text{ și } r_+ r_- = r^2 \quad (2.5)$$

și ecuația (2.4) devine:

$$V(r) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{l \cos\theta}{r^2}. \quad (2.6)$$

Introducem noțiunea de *moment electric dipolar*, \vec{p} al dipolului prin: mărimea lui \vec{p} este egală cu produsul ql , direcția este direcția dipolului (în cazul nostru axa Oz) și sensul de la $-q$ la $+q$. Dacă relația (2.6) o înmulțim și împărțim cu r obținem la numărător expresia $qrl \cos\theta$ care reprezintă produsul scalar $\vec{p} \cdot \vec{r}$. Ecuația (2.6) se scrie:

$$V(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{p} \cdot \vec{r}}{r^3} \quad (2.7)$$

Am exprimat astfel potențialul în funcție de momentul electric dipolar \vec{p} , al dipolului și în funcție de poziția \vec{r} a punctului în care se află potențialul V . Dacă utilizăm în loc de \vec{r} coordonatele x, y, z ale lui M și avem în vedere că $r \cos\theta = z$ relația (2.7) se scrie:

$$V(x, y, z) = \frac{p}{4\pi\epsilon_0} \frac{z}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} \quad (2.8)$$

Folosind relația (2.2), relația (2.8) conduce la următoarele expresii pentru componentele intensității câmpului electric creat de dipol în punctul M :

$$\begin{aligned} E_x &= -\frac{\partial V}{\partial x} = -\frac{pz}{4\pi\epsilon_0} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} \right) = \frac{3pxz}{4\pi\epsilon_0 r^5} \\ E_y &= -\frac{\partial V}{\partial y} = \frac{3pyz}{4\pi\epsilon_0 r^5} \\ E_z &= -\frac{\partial V}{\partial z} = -\frac{p}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{z}{r^3} \right) = -\frac{p}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{r^3} - \frac{3z^2}{r^5} \right) = \frac{p}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{3\cos\theta - 1}{r^3} \right) \end{aligned} \quad (2.9)$$

Dacă știm componentele E_x, E_y și E_z vectorul \vec{E} are forma:

$$\vec{E} = E_x \vec{i} + E_y \vec{j} + E_z \vec{k} \quad (2.10)$$

Componentele E_x, E_y și E_z pot fi combinate pentru a obține componenta perpendiculară pe axa dipolului:

$$E_{\perp} = \sqrt{E_x^2 + E_y^2} = \frac{p}{4\pi\epsilon_0} \frac{3 \cos \theta \sin \theta}{r^3} \quad (2.11)$$

care o numim componentă transversală a câmpului iar componenta longitudinală este E_z . Din (2.11) observăm că dacă $\theta = 0$, $E_{\perp} = 0$, iar dacă $\theta = \frac{\pi}{2}$, $E_{\perp} = 0$ dar E_z își schimbă semnul în conformitate cu relația (2.9)

Până aici am calculat intensitatea câmpului electric creat de un dipol caracterizat de momentul electric dipolar \vec{p} . În continuare vrem să analizăm comportarea dipolului așezat într-un câmp exterior cu intensitatea \vec{E}_e . Mai exact, vrem să calculăm energia potențială a dipolului situat în acest câmp exterior.

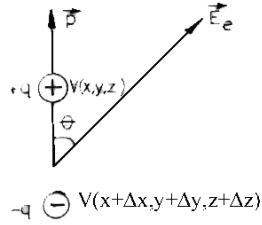


Figura 2.2: Dipolul electric într-un câmp exterior

În figura 2.2 s-a reprezentat dipolul într-un câmp exterior cu intensitatea \vec{E}_e , care face ca punctele $+q$ și $-q$ să capete potențialele $V(x, y, z)$ și respectiv $V(x + \Delta x, y + \Delta y, z + \Delta z)$, unde x, y, z sunt coordonatele primului punct și $x + \Delta x, y + \Delta y, z + \Delta z$ coordonatele celui alt punct. Câmpul exterior face un unghi θ cu direcția momentului electric dipolar \vec{p} . Din definiția potențialului rezultă că energia potențială a dipolului este:

$$U = [V(x + \Delta x, y + \Delta y, z + \Delta z) - V(x, y, z)]q \quad (2.12)$$

Dacă avem în vedere că dipolul este mic putem spune că $\Delta x, \Delta y$ și Δz sunt mici și utilizând teorema creșterilor finite avem:

$$V(x + \Delta x, y + \Delta y, z + \Delta z) - V(x, y, z) = \frac{\partial V}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial V}{\partial y} \Delta y + \frac{\partial V}{\partial z} \Delta z \quad (2.13)$$

Dar $E_{xe} = -\frac{\partial V}{\partial x}$, $E_{ye} = -\frac{\partial V}{\partial y}$, $E_{ze} = -\frac{\partial V}{\partial z}$ și $l = \Delta x \vec{i} + \Delta y \vec{j} + \Delta z \vec{k}$. Ecuțiile (2.12) și (2.13) duc la:

$$U = -(E_{xe} \Delta x + E_{ye} \Delta y + E_{ze} \Delta z)q = -\vec{E}_e \vec{l} \cdot q = -\vec{E}_e \vec{p} \quad (2.14)$$

Această relație arată că energia potențială, U a dipolului cu momentul dipolar \vec{p} , situat în câmpul exterior cu intensitatea \vec{E}_e este egală cu produsul scalar al acestor doi vectori, luat cu semnul minus.

Relația (2.14) mai poate fi scrisă și astfel:

$$U = -E_e \cdot p \cos \theta \quad (2.15)$$

Aceasta ne arată că la echilibru când U este minim $\cos\theta = 1$ și $\theta = 0$ dipolul este paralel cu câmpul. Dacă nu este paralel cu câmpul, asupra acestuia acționează un cuplu de forțe $+qE_x, -qE_{ex}$ care rotește dipolul către poziția de echilibru paralelă cu câmpul din locul unde se află dipolul. Acest rezultat va fi utilizat în paragraful următor pentru a explica comportarea unui dielectric într-un câmp exterior.

2.2. Constantă dielectrică, sarcini de polarizare și vectorul de polarizare electrică

Experimental se poate constata cum capacitatea unui condensator crește când între plăcile sale se așează un dielectric. Dacă spațiul dintre plăci este umplut complet cu un dielectric omogen și izotrop atunci capacitatea sa C față de cazul când între plăci ar fi vid este:

$$C = \epsilon_r C_0 \quad (2.16)$$

unde C_0 este capacitatea condensatorului vidat, iar ϵ_r este o constantă mai mare ca 1 și poartă numele de *constantă dielectrică a mediului dintre plăcile condensatorului*, sau *permitivitate relativă a mediului*. Constanta dielectrică a vidului este evident egală cu 1.

Să explicăm acest fapt experimental pe cazul unui condensator plan cu distanța dintre plăci d și cu aria fiecărei plăci A (vezi figura 2.3). Condensatorul este încărcat astfel încât pe fiecare placă se găsește câte o sarcină cu densitatea superficială σ_l (indicele l arată că pe placa conductoare sarcina este liberă să se miște). Capacitatea acestui condensator vidat este

$$C_0 = \frac{\epsilon_0 A}{d} \quad (2.17)$$

În plus, tensiunea U dintre plăcile condensatorului este legată de sarcina totală de pe o placă, Q , prin relația

$$Q = C_0 U \quad (2.18)$$

Dacă se așează dielectricul între plăci, pentru aceeași sarcină Q pe plăci, avem

$$Q = C U' \quad (2.19)$$

Cum $C > C_0$ din (2.18) și (2.19) rezultă $U' < U$. Dar

$$U = \int_0^d \vec{E} \cdot d\vec{s} = E \cdot d \quad (2.20)$$

astfel că putem spune că în interiorul condensatorului E a scăzut odată cu creșterea lui C , cu toate că sarcinile pe plăci rămân neschimbate. Cu alte cuvinte, intensitatea

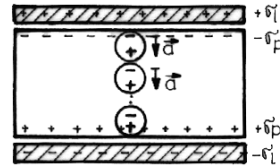


Figura 2.3: Condensator plan umplut cu un dielectric

câmpului electric dintre plăci în absența dielectricului, E_0 , este mai mare ca intensitatea câmpului în prezența dielectricului, E . Adică

$$E_0 > E \quad (2.21)$$

Acest rezultat se poate explica dacă admitem că se induce o sarcină pozitivă pe o față a dielectricului și una negativă pe cealaltă (vezi figura 2.3). Să notăm, cu $+\sigma_p$ și $-\sigma_p$ densitățile de sarcină superficială care apar pe cele două fețe ale dielectricului. Se observă că $+\sigma_p$ apare pe fața vecină plăcii încărcată cu $-\sigma_l$ iar $-\sigma_p$ apare pe fața vecină cu placa $+\sigma_l$.

Care sunt mecanismele posibile prin care putem explica apariția acestor sarcini de polarizare? Sub acțiunea câmpului electric creat de sarcina de pe plăci fiecare atom sau moleculă care constituie dielectricul devine un dipol electric. În acest paragraf vom discuta numai de polarizarea dipolară a atomilor, urmând ca polarizarea moleculară și orientarea moleculelor polare să fie studiată în paragrafele următoare.

Să presupunem un atom care este format dintr-un nucleu pozitiv cu sarcina $+Ze$ și un nor electronic C în jurul său cu o distribuție de sarcină sferică cu centrul în nucleu (figura 2.4.a). În prezența câmpului \vec{E} acest atom se polarizează, în sensul că centrul norului electronic se deplasează la o distanță a față de centrul nucleului

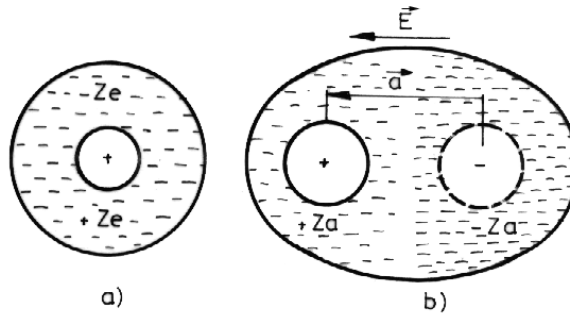


Figura 2.4: a) Atomul în absența unui câmp electric și b) în prezența câmpului electric \vec{E}

pozitiv (Figura 2.4.b). Privit de la distanță un astfel de atom este echivalent cu un dipol electric care are momentul electric dipolar

$$\vec{p} = q \cdot \vec{a} = z \cdot e \cdot \vec{a} \quad (2.22)$$

unde $q = Ze$ este sarcina pozitivă a dipolului atomic.

Distanța a este dependentă de câmpul \vec{E} care acționează asupra atomului și dacă E nu este prea mare putem presupune o relație de proporționalitate între vectorul \vec{E} și vectorul \vec{a} . Din (2.22) rezultă și relația de proporționalitate

$$\vec{E} \sim \vec{p} \quad (2.23)$$

Noi dorim să descriem comportarea dielectricului la scară microscopică; adică ne interesează câmpurile la scară microscopică care se obțin ca o mediere spațială și temporală a câmpurilor de la scară atomică. Adică dacă considerăm un

element de volum dV din dielectric (mic la scară microscopică dar mare la scară microscopică) în care avem un moment dipolar $d\vec{p}$ al tuturor atomilor din acest volum, putem să definim un vector

$$P = \frac{d\vec{p}}{dV} \quad (2.24)$$

care este numit *vectorul de polarizare electrică* a mediului în punctul unde se află elementul de volum dV . Acest vector mai poartă numele și de *densitate de moment dipolar*. Dacă mediul dielectric este omogen și izotrop atunci relația (2.24) conduce la

$$\vec{P} = n\vec{p} \quad (2.25)$$

unde n este numărul de dipoli din unitatea de volum și \vec{p} este momentul dipolar al fiecărui dipol.

Din ecuațiile (2.23) și (2.25) putem scrie

$$\vec{P} = \chi_e \varepsilon_0 \vec{E} \quad (2.26)$$

unde χ_e (se pronunță hi) este o constantă de proporționalitate care se numește *susceptibilitate electrică a mediului dielectric*.

Existența unui moment dipolar pe unitatea de volum conduce la existența unei densități de sarcină volumică numai dacă \vec{P} este neuniform; adică este mai mare într-un punct și mai mic în altul. În cazul condensatorului plan unde \vec{E} este constant rezultă și un \vec{P} constant, sau uniform. În acest caz rezultă numai o densitate superficială de sarcină de polarizare (vezi figura 2.3). Sarcinile din interiorul dielectricului, datorate polarizării uniforme, se compensează reciproc. La o suprafață a dielectricului s-au deplasat electronii spre exterior cu o distanță a , iar la cealaltă suprafață, ei s-au mișcat spre interior lăsând efectiv o sarcină pozitivă în exterior la o distanță a (figura 2.3). Dacă A este aria plăcii și a suprafeței dielectricului, numărul de electroni care apar la suprafața dielectricului este $n \cdot A \cdot a$ unde n este numărul de atomi (dipoli) din unitatea de volum, iar sarcina totală pe suprafață este

$$Q_p = n \cdot A \cdot a \cdot q \quad (2.27)$$

unde q este sarcina unui dipol. Deci, densitatea de sarcină superficială de polarizare, indusă pe suprafața dielectricului este

$$\sigma_p = \frac{Q_p}{A} = \frac{n \cdot A \cdot a \cdot q}{A} = n \cdot a \cdot q = np \quad (2.28)$$

unde p este dat de relația (2.22). Dacă comparăm ecuația (2.25) cu ecuația (2.28) obținem

$$|\vec{P}| = \sigma_p \quad (2.29)$$

Menționăm că dacă dielectricul nu este polarizat uniform atunci în volumul său avem o densitate de sarcină de polarizare ρ_p care se leagă de vectorul \vec{P} prin relația generală

$$\rho_p = -\text{div}\vec{P} \quad (2.30)$$

Nu vom demonstra aici egalitatea (2.30), dar ea este ușor de înțeles dacă ne gândim la forma locală a legii lui Gauss și la egalitatea (2.26).

Plăcile condensatorului au o sarcină superficială cu densitatea σ_l . Aceasta este sarcina cu care încercăm condensatorul. Deci, densitatea de sarcină în prezența dielectricului este $\sigma_l - \sigma_p$. În conformitate cu legea lui Gauss rezultă că intensitatea câmpului din interiorul dielectricului este

$$E = \frac{\sigma_l - \sigma_p}{\epsilon_0} \text{ sau } E = \frac{\sigma_l}{\epsilon_0} - \frac{\sigma_p}{\epsilon_0} = E_0 - \frac{\sigma_p}{\epsilon_0} \quad (2.31)$$

unde E_0 este câmpul când între plăci este vid. (Se observă că $E < E_0$). Din ecuațiile (2.29) și (2.31) obținem

$$E = \frac{\sigma_l - |\vec{P}|}{\epsilon_0} \quad (2.32)$$

Dacă în (2.32) utilizăm ecuația (2.26) și regrupăm termenii obținem

$$E = \frac{\sigma_l}{\epsilon_0} \frac{1}{1 + \chi_e} \text{ sau } E = E_0 \frac{1}{1 + \chi_e} \quad (2.33)$$

Aceasta ne arată că intensitatea câmpului s-a micșorat cu un factor $\frac{1}{(1 + \chi_e)}$ în prezența dielectricului.

Constanta dielectricului, ϵ_r , este legată de susceptibilitatea electrică χ_e a mediului prin relația

$$\epsilon_r = 1 + \chi_e \quad (2.34)$$

care rezultă ușor din ecuațiile de mai sus.

În concluzie, putem spune că o măsură microscopică a polarizării unui dielectric situat într-un câmp electric este constanta dielectrică ϵ_r , sau susceptibilitatea electrică χ_e .

2.3. Vectorul inducție electrică și tensorul permitivității electrice

Să considerăm din nou situația prezentată în paragraful anterior și să preluăm ecuația (2.32) scrisă sub forma

$$\sigma_l = \epsilon_0 E + P \quad (2.35)$$

Această egalitate ne arată că membrul stâng nu depinde de mediul dielectric, σ_l fiind sarcina liberă de pe plăci. În membrul drept atât E cât și P depind de mediu, dar suma $\epsilon_0 E + P$ nu depinde de mediu deoarece este egală cu membrul stâng independent de mediu. Această constatare ne sugerează că putem să definim un vector prin relația

$$\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P} \quad (2.36)$$

Acest vector definit prin (2.36) poartă numele de *inducția câmpului electric*. Acesta este o mărime care caracterizează câmpul electric în orice mediu deoarece mărimea sa este σ_l care nu depinde de mediul în care se află câmpul. Spre deosebire de vectorul \vec{E} care caracterizează câmpul depinzând de mediu, vectorul \vec{D} caracterizează câmpul indiferent de mediu. Această proprietate ne spune că atunci când caracterizăm un mediu situat într-un câmp trebuie să avem în vedere vectorul \vec{E} (sau \vec{P}) în timp ce atunci când vrem să caracterizăm câmpul într-un mediu oarecare trebuie să utilizăm vectorul \vec{D} .

Dacă în ecuația de definiție (2.36) avem în vedere dependența liniară (2.26) dintre \vec{P} și \vec{E} rezultă:

$$\vec{D} = (\epsilon_0 + \epsilon_0 \chi_e) \vec{E} \quad (2.37)$$

În conformitate cu ecuația (2.34) ecuația (2.37) se mai scrie:

$$\vec{D} = \epsilon_0 \epsilon_r \vec{E} \quad (2.37')$$

Dacă definim permitivitatea absolută a mediului prin relația:

$$\epsilon = \epsilon_0 \epsilon_r \quad (2.38)$$

atunci din (2.37) obținem:

$$\vec{D} = \epsilon \vec{E} \quad (2.39)$$

Această proporționalitate dintre \vec{E} și \vec{D} este valabilă numai pentru *dielectrici izotropi și omogeni* în care ϵ este constantă, cu aceeași valoare indiferent de poziția sau direcția lui \vec{E} .

Dacă dielectricul este neomogen relația (2.39) se poate scrie:

$$D = \epsilon_{(x,y,z)} \vec{E} \quad (2.40)$$

adică ϵ este funcție de poziția (x, y, z) în care se scrie relația (2.40)

Dacă dielectricul este anizotrop atunci relația (2.39) se scrie pe scurt astfel:

$$\vec{D} = \bar{\epsilon} \vec{E} \quad (2.41)$$

în care $\bar{\epsilon}$ înseamnă că permitivitatea mediului depinde de direcția lui \vec{E} . Răspunsul mediului la câmp este diferit dacă câmpul are direcții diferite. Adică vectorul \vec{P} nu are aceeași direcție cu E și suma din ecuația (2.36) face ca \vec{D} să aibă altă direcție față de \vec{E} într-un astfel de mediu anizotrop. Ecuația (2.41) se poate scrie și sub formă scalară:

$$\begin{aligned} D_x &= \epsilon_{xx} E_x + \epsilon_{xy} E_y + \epsilon_{xz} E_z \\ D_y &= \epsilon_{yx} E_x + \epsilon_{yy} E_y + \epsilon_{yz} E_z \\ D_z &= \epsilon_{zx} E_x + \epsilon_{zy} E_y + \epsilon_{zz} E_z \end{aligned} \quad (2.42)$$

unde constantele $\epsilon_{xx}, \dots, \epsilon_{zz}$ fac legătura între componentele vectorului \vec{D} și cele ale vectorului \vec{E} . Ecuațiile (2.42) mai pot fi scrise și sub formă matricială.

$$\begin{pmatrix} D_x \\ D_y \\ D_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \epsilon_{xx} & | & \epsilon_{xz} \\ \hline & & \\ \epsilon_{zx} & | & \epsilon_{zz} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \end{pmatrix} \quad (2.43)$$

unde matricea unicolană din partea stângă se obține din matricea unicolană din partea dreaptă prin multiplicare cu matricea:

$$\underline{\underline{\varepsilon}} = \begin{pmatrix} \varepsilon_{xx} & \varepsilon_{xy} \\ \varepsilon_{yx} & \varepsilon_{yy} \\ \varepsilon_{zx} & \varepsilon_{zy} \end{pmatrix} \quad (2.44)$$

Dacă matricele unicolană au ca elemente componente vectorilor \vec{D} și respectiv \vec{E} , această matrice care are 9 componente definește o mărime tensorială pe care o numim *tensorul permitivității electrice* și o notăm $\underline{\underline{\varepsilon}}$. Acest tensor, utilizat și în

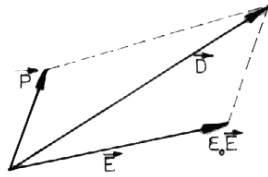


Figura 2.5: Direcția vectorilor \vec{E} , \vec{P} și \vec{D} într-un dielectric anizotrop

ecuația (2.41), face legătura între cei doi vectori într-un mediu anizotrop și ne arată că într-un astfel de mediu \vec{D} nu are aceeași direcție cu \vec{E} . De exemplu, într-un cristal de gheață, unde moleculele de apă sunt dipoli permanenți, direcția lui \vec{D} este în general diferită de cea a lui \vec{E} din cauză că dipolii moleculari de apă nu se orientează în acest cristal după direcția lui \vec{E} . Adică \vec{P} are altă direcție față de \vec{E} și suma $\varepsilon_0 \vec{E} + \vec{P} = \vec{D}$ va avea de asemenea o direcție diferită de \vec{E} și de \vec{P} (vezi figura 2.5).

Dacă revenim la matricea (2.44) a elementelor tensorului permitivității electrice trebuie să menționăm că această matrice poate fi diagonalizată în toate cazurile concrete; adică poate fi scrisă sub forma:

$$\underline{\underline{\varepsilon}} = \begin{pmatrix} \varepsilon_1 & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_2 & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_3 \end{pmatrix} \quad (2.45)$$

Elementele diagonale $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ și ε_3 sunt trei constante care caracterizează dielectricul respectiv. După valorile pe care le au aceste constante distingem trei categorii de dielectrice:

I. dielectrice cu $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \varepsilon_3 \equiv \varepsilon$ care sunt *dielectrice izotropi* caracterizați de o singură permitivitate (sau constantă dielectrică) De exemplu, un cristal cubic de NaCl.

II. dielectrice cu $\varepsilon_1 \neq \varepsilon_2 = \varepsilon_3$ sunt *dielectrice anizotropi uniaxiali* și au două constante dielectrice. De exemplu calcitul CaCO_3 .

III. *dielectrice anizotropi biaxiali* cu $\varepsilon_1 \neq \varepsilon_2 \neq \varepsilon_3$ care au trei constante dielectrice. De exemplu mica.

În concluzie trebuie să remarcăm că un dielectric oarecare răspunde la un câmp exterior în funcție de simetria sa care determină proprietatea de anizotropie. În general substanțele solide sunt anizotrope din punct de vedere electric.

2.4. Polarizabilitatea moleculară și relația Clausius Mossotti

Vom prezenta mai întâi calculul câmpului electric care acționează asupra unei molecule dintr-un dielectric.

Acest câmp este cunoscut sub denumirea de *câmp intern* (sau local) și are mărimea:

$$E_i = E + \frac{P}{3\epsilon_0} \quad (2.46)$$

Pentru demonstrația acestei relații vezi aplicația din anexa I. Vom observa că intensitatea câmpului care acționează asupra unei molecule dintr-un dielectric este mai mare decât intensitatea câmpului mediu, E , din dielectric, cu cantitatea $\frac{P}{3\epsilon_0}$, unde P este mărimea vectorului de polarizare electrică. Sub acțiunea acestui câmp molecula capătă un moment electric dipolar \vec{p}' în direcția câmpului, cu o mărime proporțională cu intensitatea acestui câmp. Deci, într-o primă aproximație putem scrie că

$$\vec{p}' = \alpha \epsilon_0 E_i \quad (2.47)$$

în care constanta moleculară α este cunoscută sub numele de *polarizabilitate moleculară*.

Însă, din cauză că moleculele nu sunt, în general, simetrice, se induce un moment dipolar \vec{p}' care nu este în direcția câmpului care acționează asupra sa. De exemplu, molecula de CO_2 , care este o moleculă liniară, sub acțiunea unui câmp electric paralel cu axa moleculei capătă un moment dipolar diferit în mărime față de cel indus de câmpul electric cu aceeași intensitate însă cu direcția perpendiculară pe axa moleculei. Adică molecula de CO_2 are două valori diferite ale polarizabilității α ; una $\alpha_{||}$ pentru direcția axei moleculei și alta α_{\perp} pentru direcția perpendiculară.

În general, dacă intensitatea câmpului electric \vec{E}_i are o direcție oarecare față de axa moleculei, putem să descompunem pe \vec{E}_i în componentele $\vec{E}_{i||}$ și $\vec{E}_{i\perp}$; prima fiind paralelă cu axa moleculei, iar cea de a doua perpendiculară pe axa ei. $\vec{E}_{i||}$ induce un moment dipolar în lungul axei de mărime (vezi figura 2.6)

$$p'_{||} = \epsilon_0 \alpha_{||} \cdot E_{i||} = \epsilon_0 \alpha_{||} \cos \theta \quad (2.48)$$

și $\vec{E}_{i\perp}$ induce un moment dipolar perpendicular pe axă de mărime

$$p'_{\perp} = \epsilon_0 \alpha_{\perp} \cdot E_{i\perp} = \epsilon_0 \alpha_{\perp} \sin \theta \quad (2.49)$$

Dacă compunem $\vec{p}'_{||}$ cu \vec{p}'_{\perp} obținem momentul dipolar \vec{p}' cu direcția

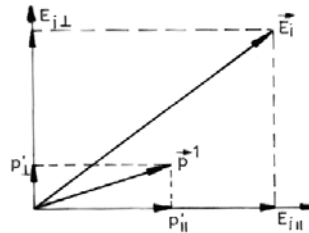


Figura 2.6: Momentul \vec{p}' indus moleculei de câmp intern \vec{E}_i

diferită de cea a lui \vec{E}_i (vezi figura 2.6). Numai dacă $\alpha_{\parallel} = \alpha_{\perp}$, \vec{p}' are direcția lui \vec{E}_i .

Acest exemplu ne convinge că *polarizabilitatea unei molecule nu este un scalar, ci mai degrabă o mărime tensorială ca și tensorul permitivității electrice*. Componentele tensorului polarizabilitate electrică a unei molecule exprimă o dependență liniară între componentele p'_x, p'_y, p'_z ale vectorului \vec{p}' și componentele

E_{xi}, E_{yi} și E_{zi} ale vectorului \vec{E}_i ; adică

$$\begin{aligned} p'_x &= \varepsilon_0 (\alpha_{xx} E_{xi} + \alpha_{xy} E_{yi} + \alpha_{xz} E_{zi}) \\ p'_y &= \varepsilon_0 (\alpha_{yx} E_{xi} + \alpha_{yy} E_{yi} + \alpha_{yz} E_{zi}) \\ p'_z &= \varepsilon_0 (\alpha_{zx} E_{xi} + \alpha_{zy} E_{yi} + \alpha_{zz} E_{zi}) \end{aligned} \quad (2.50)$$

Cei nouă coeficienți α_{ij} din (2.50) formează componentele tensorului polarizabilității electrice ale moleculei considerate. De exemplu, în cazul moleculei de CO_2 avem $\alpha_{xx} = \alpha_{zz} = \alpha_{\perp}$; $\alpha_{yy} = \alpha_{\parallel}$ și ceilalți coeficienți sunt zero. Se consideră că axa Oy este paralelă cu axa moleculei de CO_2 .

Dacă ne întoarcem la cazul particular exprimat de ecuația (2.47) putem scrie vectorul de polarizare al dielectricului sub forma

$$P = np' = n\alpha\varepsilon_0 E_i \quad (2.51)$$

unde n este numărul de molecule din unitatea de volum al dielectricului omogen și izotrop.

Dacă în ecuația (2.51) introducem ecuația (2.46) obținem:

$$P = \varepsilon_0 n \alpha \left(E + \frac{P}{3\varepsilon_0} \right) \quad (2.52)$$

Pe de altă parte am arătat că

$$\varepsilon_0 E + P = \varepsilon_0 \varepsilon_r E \quad (2.53)$$

(vezi relații (2.36) și (2.37')). Eliminăm pe P din ecuația (2.52) și (2.53) și obținem

$$\begin{aligned} \varepsilon_0 \varepsilon_r E - \varepsilon_0 E &= \varepsilon_0 n \alpha \left(E + \frac{\varepsilon_0 \varepsilon_r E - \varepsilon_0 E}{3\varepsilon_0} \right) \text{ sau} \\ \frac{n\alpha}{3} &= \frac{\varepsilon_r - 1}{\varepsilon_r + 2} \end{aligned} \quad (2.54)$$

Această ecuație este cunoscută sub numele de relația Clausius-Mosotti și ea ne arată că putem determina polarizabilitatea, α , a unei molecule dintr-un dielectric cu densitatea n cunoscută dacă măsurăm constanta dielectrică ε_r .

Momentul electric dipolar \vec{p}' al unei molecule se compune din două părți:

- 1) un moment electric permanent; \vec{p}_p , și
- 2) un moment indus de câmp \vec{p}_i .

Deci, momentul total al moleculei în direcția câmpului \vec{E}_i este:

$$p' = p_p \cos \theta + p_i \quad (2.55)$$

unde θ este unghiul dintre vectorii \vec{p}_p și \vec{E}_i .

În dielectric, în absența câmpului electric, dipolii permanenți sunt orientați în direcții arbitrare și vectorul de polarizare al unității de volum este nul. Dacă însă se aplică câmpul \vec{E}_i fiecare moleculă capătă o polarizabilitate permanentă

$$\alpha_p = \frac{P_p^2}{3kT\epsilon_0} \quad (2.56)$$

și una indusă α_i . Deci polarizabilitatea totală are expresia

$$\alpha = \alpha_i + \frac{P_p^2}{3kT\epsilon_0} \quad (2.57)$$

Nu vom demonstra aici relația (2.56) dar menționăm că ea se deduce prin raționamente statistice, în care orientarea dipolilor permanenți este invers proporțională cu energia termică kT (k Constanta Boltzmann și T temperatura absolută a dielectricului).

Introducem ecuația (2.57) în (2.54) și obținem o altă formă a relației Clausius-Mosotti

$$\frac{\epsilon_r - 1}{\epsilon_r + 2} = \frac{n}{3} \left(\alpha_i + \frac{P_p^2}{3\epsilon_0 kT} \right) \quad (2.58)$$

Dacă notez:

$$y = \frac{\epsilon_r - 1}{\epsilon_r + 2}, \quad x = \frac{1}{T}, \quad m = \frac{nP_p^2}{9\epsilon_0^2 k} \text{ și } b = \frac{n\alpha_i}{3}. \quad (2.59)$$

ecuația (2.58) este ecuația unei drepte

$$y = mx + b \quad (2.60)$$

În figura 2.7 se prezintă această dreaptă pentru două gaze moleculare diferite. Se observă că dreapta trasată pentru gazul CCl_4 are panta zero ($m = 0$) deci această moleculă nu are moment dipolar permanent. În caz contrar y ar depinde de temperatură. De aici putem trage concluzia că cei patru atomi de Cl din molecula de CCl_4 sunt simetric plasați unul cu altul și are atomul de carbon în centru. Pentru molecula CH_3Cl rezultă din figura 2.7 că ea posedă un moment dipolar permanent care poate fi calculat din panta dreptei trasate experimental și din relațiile (2.59).

În raționamentele de mai sus am presupus polarizabilitatea moleculară sub formă scalară și nu

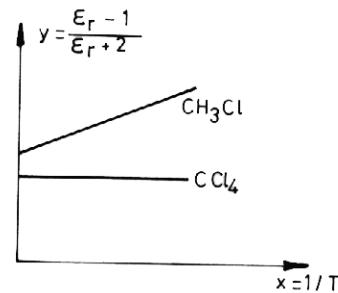


Figura 5.7: Dependența de $\frac{1}{T}$ a raportului

$$\frac{\epsilon_r - 1}{\epsilon_r + 2} \text{ pentru două gaze diferite}$$

tensorială. Această presupunere duce la rezultate concordante cu datele experimentale numai în cazul cristalelor cubice, gazelor și soluțiilor slabe, dar nu se aplică la alte solide și la lichidele polare. În dielectricii solizi poate să existe o polarizare permanentă care persistă chiar în absența câmpului electric. Un exemplu ni-l oferă categoria de dielectrici cunoscuți sub denumirea de *electreți*. Un electret este format dintr-o substanță solidă (de exemplu ceară de albine) care așezată într-un câmp electric capătă o polarizare electrică permanentă care rămâne și atunci când câmpul este înlăturat.

Din punct de vedere al polarizării electrice menționăm trei categorii de substanțe care au multe aplicații practice: 1) feroelectrice, 2) piezoelectrice și 3) piroelectrice

2.5. Legile câmpului electric staționar în prezența dielectricilor și condițiile la limită

Dacă ne limităm la cazul dielectricilor omogeni și izotropi atunci pentru dielectric avem $\vec{D} = \varepsilon \vec{E}$ în loc de $\vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E}$ pentru vid. Legea lui Gauss locală devine:

$$\operatorname{div} \vec{D} = \rho \quad (2.61)$$

în loc de $\operatorname{div} \vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$ pentru vid, deoarece înlocuind $\vec{D} = \varepsilon \vec{E}$ în ecuația (2.61)

obținem $\operatorname{div} \vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon}$ pentru dielectricul cu permitivitatea ε în loc de dielectricul vid cu permitivitatea ε_0 . Forma globală a legii lui Gauss în dielectrici este:

$$\oiint_S \vec{D} d\vec{A} = Q_{\text{int}} \quad (2.62)$$

în loc de $\oiint_S \vec{E} d\vec{A} = \frac{Q_{\text{int}}}{\varepsilon_0}$ pentru vid.

Cea de a doua lege a câmpului electric staționar își păstrează aceeași formă și în dielectric ca și pentru vid. Adică, forma sa locală este

$$\operatorname{rot} \vec{E} = 0 \quad (2.63)$$

iar forma globală este

$$\oint_C \vec{E} d\vec{s} = 0 \quad (2.64)$$

În sfârșit, densitatea de energie a câmpului electric în dielectric este

$$u = \frac{\vec{D} \vec{E}}{2} \quad (2.65)$$

în loc de $\frac{\varepsilon_0 \vec{E} \vec{E}}{2}$ în vid.

Din legile de mai sus trebuie să tragem concluzia că într-un dielectric câmpul electric este caracterizat de cei doi vectori \vec{D} și \vec{E} în loc de un singur vector, \vec{E} , pentru vid. După cum am văzut și în paragrafele anterioare cei doi vectori \vec{D} și \vec{E} au caracteristici diferite în dielectrice.

Să considerăm suprafața de separare AB a două medii dielectrice izotrope care au permitivitățile ϵ_1 și respectiv ϵ_2 (figura 2.8).

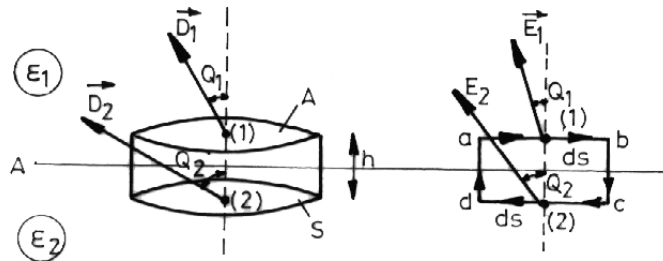


Figura 2.8: Direcțiile vectorilor \vec{D} și \vec{E} în cele două medii separate prin suprafața plană AB

Să aplicăm relația (2.62) pentru o suprafață S închisă de formă cilindrică așezată pe suprafața de separare, ca în figura 2.8. \vec{D}_1 este inducția în punctul (1) din mediul dielectric superior iar \vec{D}_2 este inducția electrică în punctul (2) din mediul dielectric inferior. Punctele (1) și (2) sunt foarte aproape de suprafața AB și înălțimea h a suprafeței cilindrice este foarte mică, însă destul de mare ca S să conțină în ea porțiunea de arie A din suprafața AB. Cum în interiorul acestei suprafețe închise nu avem sarcină electrică, ecuația (2.62) se scrie

$$\oiint_S \vec{E} d\vec{A} = 0 \quad (2.66)$$

Descompunem această integrală în integrala pe suprafața laterală S_l și pe baze și avem

$$\oiint_S \vec{D} d\vec{A} = \iint_{S_l} \vec{D} d\vec{A} + \iint_{\text{Baza}} \vec{D} d\vec{A} = 0 \quad (2.67)$$

Dar la limită suprafața laterală devine neglijabilă și deci și integrala pe ea este neglijabilă. Deci

$$\iint_{\text{Baza}} \vec{D} d\vec{A} = 0 \text{ sau } \iint_{\text{Baza inferioara}} D_2 dA_2 \cos(180 - \theta_2) + \iint_{\text{Baza superioara}} D_1 dA_1 \cos \theta_1 = 0 \quad (2.68)$$

Dacă bazele sunt mici atomi, vectorii D_1 și D_2 pot fi considerați constanți ca mărime și direcție și din ecuația (2.68) rezultă:

$$D_1 \cos \theta_1 = D_2 \cos \theta_2 \quad (2.69)$$

sau $D_{n_1} = D_{n_2}$ unde prin D_{n_1} și D_{n_2} am înțeles componentele normale ale lui \vec{D} în mediul 1 și respectiv 2. Am ajuns la concluzia că la *suprafața de separare a două medii dielectrice se conservă componenta normală a vectorului inducție electrică*.

Dacă suprafața de separare este încărcată cu sarcina de densitate σ atunci:

$$D_{n_1} - D_{n_2} = \sigma \quad (2.70)$$

Aceasta se deduce prin raționamentul de mai sus având în vedere că de data aceasta $Q_{\text{int}} = \sigma \cdot A$.

Să aplicăm acum relația (2.64) pentru conturul C, dreptunghiular abcd din figura 2.8. Evident:

$$\oint_{abcd} \vec{E} d\vec{s} = \int_{ab} \vec{E} d\vec{s} + \int_{bc} \vec{E} d\vec{s} + \int_{cd} \vec{E} d\vec{s} + \int_{da} \vec{E} d\vec{s} = 0 \quad (2.71)$$

Dacă înălțimea dreptunghiului este mică integralele pe ‘bc’ și ‘da’ pot fi neglijate iar integralele pe ‘ab’ și ‘cd’ conduc la:

$$\int_{ab} E_1 ds_1 \cos(90 + \theta_1) + \int_{cd} E_2 ds_2 \cos(90 - \theta_2) \quad (2.72)$$

Considerând \vec{E}_1 și \vec{E}_2 vectori constanți pe laturile ‘ab’ și ‘cd’ care pot fi alese oricât de mici, din ecuația (2.72) rezultă:

$$E_1 \sin \theta_1 = E_2 \sin \theta_2 \quad (2.73)$$

sau

$$E_{t_1} = E_{t_2} \quad (2.74)$$

unde prin E_{t_1} și E_{t_2} înțelegem componentele tangențiale ale câmpului electric în cele două medii. Deci *la suprafața de separare a două medii dielectrice se conservă componenta tangențială a intensității câmpului electric*. Din relațiile (2.69) și (2.73) și din egalitățile $D_i = \varepsilon_i E_i$ prin împărțire obținem:

$$\frac{\text{tg}\theta_1}{\text{tg}\theta_2} = \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2} \quad (2.75)$$

Această relație arată cum se schimbă direcția liniilor de câmp la suprafața de separare a două medii. De exemplu se poate deduce că liniile de câmp se depărtează de normală când trec din aer într-un dielectric solid ($\varepsilon_1 < \varepsilon_2$). Adică ele au o comportare inversă deci razele de lumină la trecerea prin această suprafață.

ANEXA I:

Între plăcile unui condensator plan, încărcate cu o densitate de sarcină σ_l se află un mediu dielectric, omogen și izotrop. În interiorul acestui mediu executăm o mică cavitate de formă sferică. În centrul O al acestei cavități sferice se așează o moleculă. Să se afle care este intensitatea câmpului electric care acționează asupra acestei molecule din partea sarcinilor de polarizare de pe suprafața cavității sferice, dacă se cunoaște densitatea sarcinii de polarizare σ_p de pe suprafețele dielectricului.

Rezolvare:

Dacă presupunem că dielectricul capătă o polarizare omogenă în întreg volumul său, sarcinile de polarizare din interior se compensează reciproc. Eliminarea sferei dielectrice cu centrul în O lasă necompensată o sarcină de pe suprafața sferei. Cu alte cuvinte, pe suprafața sa apare o densitate superficială de sarcină σ_s (figura 2.9). În conformitate cu relația (2.29), σ_s este o componentă normală la S a vectorului de polarizare; adică

$$\sigma_s = P \cos \theta \quad (1)$$

unde θ se vede pe figura 2.9, în raport cu volumul dielectricului. Cum \vec{P} are direcția câmpului \vec{E}_l creat de sarcinile σ_l în punctele (1), (2) și (3) sfera va avea sarcini diferite. Cu alte cuvinte, densitatea superficială a sarcinii de pe sferă este dată de relația (1) care arată că în punctul (1)

$\theta = 0$ și $\sigma_s = P$ iar în punctul (2) $\theta = \frac{\pi}{2}$ și

$\sigma_s = 0$. Sarcina electrică de pe un element

de suprafață dA din suprafața sferei este

$$dQ = \sigma_s dA = P \cos \theta dA \quad (2)$$

Dacă dA este destul de mic, dQ poate fi considerată ca o sarcină punctiformă, în poziția lui dA , care formează în O un câmp electric cu intensitatea:

$$dE = \frac{dQ}{4\pi\epsilon_0 r^2} \quad (3)$$

unde r este raza sferei și orientarea sa este radială. $d\vec{E}$ poate fi descompus în componentele dE_{\parallel} și dE_{\perp} (vezi figura 2.9).

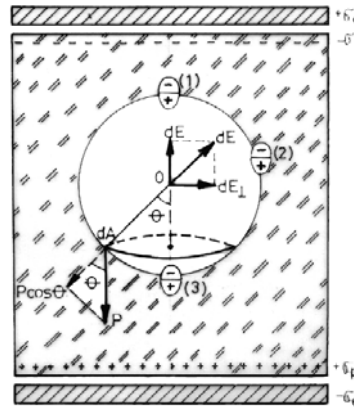


Figura 2.9: Câmpul care acționează asupra unei molecule din cavitatea sferică cu dielectric

Deoarece elementul dA are totdeauna un alt element dA simetric pe sferă în raport cu direcția lui E_1 componentele dE_{\perp} se anulează reciproc. Prin urmare, intensitatea câmpului electric, $dE(\theta)$, creat în O de fâșia sferică hașurată, $dA(\theta)$ la poziția θ are direcția paralelă cu \vec{E}_1 și mărimea:

$$dE(\theta) = dE \cos \theta \cdot dA(\theta) \quad (4)$$

Dar aria $dA(\theta)$ a fâșiei sferice este

$$dA(\theta) = 2\pi(r \sin \theta)rdA \quad (5)$$

și ecuația (4) devine

$$dE(\theta) = dE \cos \theta 2\pi r^2 \sin \theta d\theta \quad (6)$$

Pe baza relațiilor (1) și (3) ecuația (6) capătă forma:

$$dE(\theta) = \frac{P \cos^2 \theta 2\pi r^2 \sin \theta d\theta}{4\pi \epsilon_0 r^2} \quad (7)$$

Prin integrarea ecuației (7) în raport cu θ de la 0 la π obținem câmpul total creat de sarcina suprafeței sferice în O

$$E = \int_0^{\pi} dE(\theta) = \int_0^{\pi} \frac{P \cos^2 \theta 2\pi r^2 \sin \theta d\theta}{4\pi r^2} = \frac{P}{2\epsilon_0} \int_0^{\pi} \cos^2 \theta \sin \theta d\theta = \frac{P}{3\epsilon_0} \quad (8)$$

Dar $P = \sigma_p$ și în final obținem răspunsul

$$E = \frac{\sigma_p}{3\epsilon_0}$$